8. Diferentsiaalvõrranditega seotud põhimõisted

Diferentsiaalvõrrand on võrrand, mis sisaldab tuletisi või diferentsiaale otsitavatest funktsioonidest. Näiteks

$$x - u''' + u' + u^2 = 0 \tag{8.1}$$

või

$$x^2 du = (u - x)dx, \tag{8.2}$$

kus $u(x)$ on otsitav funktsioon või

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v + \frac{\partial}{\partial y}v = v, \tag{8.3}$$

kus $v(x, y)$ on otsitav funktsioon.

Diferentsiaalvõrrandi *järguks* nim selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Näiteks võrrand (8.1) on 3. järku, võrrand (8.2) 1. järku ja võrrand (8.3) 2. järku.

Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit *harilikuks diferentsiaalvõrrandiks* (HDV). Näiteks (8.1) ja (8.2) on HDV-d. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, millest tulenevalt esinevad võrrandis osatuletised, siis nim seda võrrandit *osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks* (ODV). Näiteks (8.3) on ODV.

8.1. HDV üld- ja normaalkuju

1. järku HDV *üldkuju* on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0\,,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon. Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu ilmutatud, siis öeldakse, et see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV *normaalkuju* järgmine:

$$u' = f(x, u)\,,$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

n. järku HDV *üldkuju* ja *normaalkuju* on vastavalt

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$$

ja

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \,, \tag{8.4}$$

kus F ja f on vastavalt $n+2$ ja $n+1$ – muutuja funktsioonid.

8.2. HDV lahendid

Diferentsiaalvõrrandi *lahend* on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Märgime, et diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv. See tähendab, et lahendeid on palju. Näiteks 1. järku HDV

$$u' = \cos x$$

lahenditeks on kõik funktsioonid kujul $u = \sin x + C$, kus C on suvaline konstant. Seevastu 2. järku võrrandit

$$u'' = \cos x$$

tuleb kaks korda integreerida, seega sõltub selle lahend kahest konstandist. Tõepoolest, esmakordsel integreerimisel saame $u' = \sin x + C_1$ ja teistkordsel integreerimisel avaldame lahendi $u = -\cos x + C_1 x + C_2$, kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Üldiselt n. järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.

n. järku HDV *üldlahendiks* nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. *Erilahendiks* nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendi graafikut nim selle võrrandi *integraalkõveraks*. Seega võib n. järku HDV üldlahendit geomeetriliselt tõlgendada kui n parameetrist sõltuvat integraalkõverate parve.

8.3. Cauchy ülesanne

Vaatleme normaalkujulist n. järku HDV-d (8.4). Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \dots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks peame järelikult lisama sellele võrrandile n lisatingimust. Selleks on mitmeid võimalusi. Vaatleme lähemalt ühte võimalust.

Olgu fikseeritud konkreetne x väärtus $x = x_0$. Valime n arvu

$$u_0^i, i = 0, \dots, n-1$$

ja anname punktis x_0 ette järgmised tingimused:

$$u^{(i)}(x_0) = u_0^i \,, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

kus $u^{(0)}(x) = u(x)$. Koos võrrandiga (8.4) saame järgmise ülesande:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \,, \quad u^{(i)}(x_0) = u_0^i, \, i = 0, \dots, n-1 \,. \tag{8.5}$$

Seda ülesannet nimetatakse *Cauchy* e *algtingimustega ülesandeks* n. järku HDV-le. On teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on Cauchy ülesandel (8.5) parajasti üks lahend.

Näiteks 1. järku normaalkujulise HDV Cauchy ülesanne on järgmine:

$$u' = f(x, u)\,, \quad u(x_0) = u_0\,,$$

kus u_0 on etteantud arv. Kui f ja tema osatuletised on pidevad, siis on sellel ülesandel parajasti üks lahend. Geomeetriliselt tähendab see seda, et suvalist punkti $P(x_0, u_0)$ läbib parajasti üks integraalkõver. Teiste sõnadega: integraalkõverate parv koosneb joontest, mis ei lõiku omavahel.

8.4. Näiteid HDV kohta

1. *Newtoni jahtumisseadus.* Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T. Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_e. Aega tähistame nagu ikka t-ga. Kui $T < T_e$, siis hakkab keha jahtuma, st temperatuur T kahaneb ajas. Seega on funktsiooni $T(t)$ tuletis negatiivne: $T'(t) < 0$. Mida suurem on sise ja välistemperatuuri vahe, seda kiiremimini keha jahtub ehk seda väiksem on T tuletis. Viimase tähelepaneku saab matemaatiliselt kirja panna selliselt, et $-T'$ on võrdeline sise- ja välistemperatuuride vahega:

$$-T' = \kappa(T - T_e), \tag{8.6}$$

kus κ on positiivne konstant (soojusvahetustegur). Võrrandi (8.8) näol on tegemist HDV-ga. Sel võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Tõepoolest: keha temperatuur mingil ajahetkel $t > 0$ sõltub lisaks välistemperatuurile T_e ka temperatuurist alghetkel $t = 0$. Mida suurem on temperatuur alghetkel, seda suurem on T väärtus ka edaspidi. Lisame võrrandile (8.8) ka algtingimuse:

$$-T' = \kappa(T - T_e)\,, \quad T(0) = T_0. \tag{8.7}$$

Tulemusena saame Cauchy ülesande, millel on ainult üks lahend.

Olgu veel märgitud, et kui vaadeldavas kehas toimub mingi soojusttootev (nt elektriline) protsess, siis on HDV järgmine:

$$-T' = \kappa(T - T_e) + q, \tag{8.8}$$

kus q on soojusallikate tihedus.

2. *Siirdeprotsessid elektriahelates.* Alalis- ja vahelduvvooluahelate arvutamiseks on olemas algebralised meetodid, mis on suhteliselt lihtsad ja ei vaja diferentsiaalvõrrandite lahendamist. Olukord muutub, kui ahel lülitatakse ühelt reziimilt teisele. Näiteks vahelduvvooluahela sisse- ja väljalülitamisel toimub üleminek 0-vooluga alalisvoolurezhiimilt vahelduvvoolurezhiimile ja vastupidi. Taoliste siirde(ehk ülemineku)protsessides muutub vool teatud aja jooksul keerukama seaduspärasuse järgi. Voolufunktsiooni saab kätte lahendades sobiva HDV.

Vaatleme Skeemil 4 toodud ahelas toimuvat lülitusprotsessi. Pinge takisti klemmidel on $U_R = Ri$. Pinge induktiivelemendi klemmidel on $U_L = Li'$.

Vastavalt Kirchoffi teisele seadusele kehtib võrdus $U_L + U_R = e$. Seega saame järgmise HDV:

$$Li' + Ri = e. \tag{8.9}$$

Lahendi üheseks määramiseks peame teadma ka voolu väärtust alghetkel (so lülitushetkel). Ilmselt on vaadeldavas protsessis algvool nulliga. Kokkuvõttes tekib järgmine Cauchy ülesanne:

$$Li' + Ri = e\,, \quad i(0) = 0.$$

Kui lisaks takistile ja induktiivelemendile on ahelasse järjestikku ühendatud ka kondensaator, siis tuleb summarses pinges arvesse võtta ka kondensaatori pinget $U_C = \frac{q}{C}$, kus q on kondensaatori laeng. Seega Kirchoffi teise seaduse põhjal kehtib võrdus $U_L + U_R + U_C = e$, millest saame järgmise seose:

$$Li' + Ri + \frac{q}{C} = e. \tag{8.10}$$

Kuna $q' = i$, siis võrduse (8.10) diferentseerimisel tekib 2. järku HDV:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = e'. \tag{8.11}$$

Selle lahendamiseks on vaja juba 2 lisatingimust, sest 2. järku HDV üldlahend sõltub kahest konstandist. Näiteks teades lisaks voolu väärtusele ka tema tuletise väärtust alghetkel, saame formuleerida järgmise Cauchy ülesande:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = e'\,, \quad i(0) = i_0\,,\; i'(0) = i_1.$$