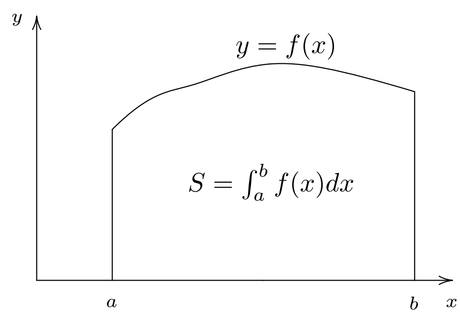
7. Integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme määratud integraali

$$\int_a^b f(x)dx\,. \tag{7.1}$$

Kui $f(x) \geq 0$, siis võrdub määratud integraal (7.1) lõigu $[a, b]$ kohal asuva funktsiooni graafiku ja x-telje vahelise nn kõvertrapetsi pindalaga (joonis 7.1).



Joonis 7.1 : Määratud integraal

Integraali (7.1) ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse *kvadratuurvalemiteks.*

7.1. Ristkülikvalemid

Teatavasti on määratud integraal integraalsumma piirväärtus, st võrdub ligikaudselt integraalsummaga. Seega võib integraali (7.1) arvutamise asendada integraalsumma arvutamisega.

Integraalsumma on defineeritud lõigu $[a, b]$ tükeldusel

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

järgmiselt:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i\,,$$

kus p_i on mingi punkt osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Kui tükeldus on ühtlane, st $\Delta x_i = h$ iga i korral, siis

$$S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,. \tag{7.2}$$

Lihtsamaid kvadratuurvalemeid saabki otseselt integraalsummast tuletada. Näiteks võttes valemis (7.2) $p_i = x_i$, saame nn *parempoolse ristkülikvalemi*

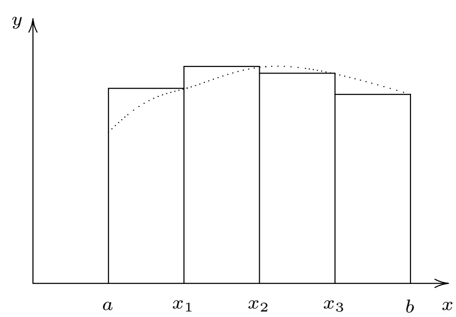
$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,. \tag{7.3}$$

Selles valemis kasutatakse funktsiooni väärtusi lõigu sisesõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$ ja lõigu parempoolses otspunktis $x_n = b$. Võttes aga valemis (7.2) $p_i = x_{i-1}$, saame nn *vasakpoolse ristkülikvalemi*

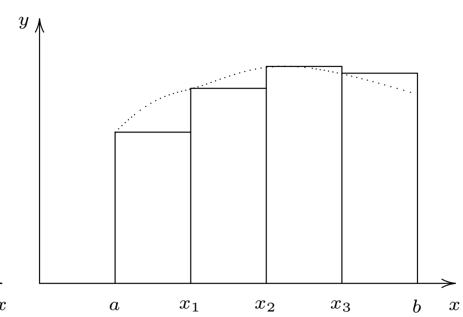
$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \;=\; h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,. \tag{7.4}$$

Siin kasutatakse funktsiooni väärtusi sisesõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$ ja lõigu vasakpoolses otspunktis $x_0 = a$.

Ristkülikvalemi nimetus tuleneb faktist, et summa S_n võrdub alust h ja kõrgusi $f(x_i)$ omavate ristkülikute ühendi pindalaga (joonistel 7.2 ja 7.3 pideva joonega piiratud alad).



Joonis 7.2 : Paremp. ristkülikvalem



Joonis 7.3 : Vasakp. ristkülikvalem

Ristkülikvalemid on esimest järku täpsusega, st

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| \le Ch\,,$$

kus C on konstant.

7.2. Newton-Cotesi kvadratuurvalem

Lähendame integreeritavat funktsiooni $f(x)$ tema polünomiaalse interpolandiga sõlmedes $x_0, x_1, \dots, x_n$ (vt ptk 4.1), st

$$f(x) \;\approx\; \Phi_n(x)\,.$$

Funktsiooni $f(x)$ integraali asemel arvutame interpolandi integraali, st

$$S_n = \int_a^b \Phi_n(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx.$$

On võimalik näidata, et viimane integraal avaldub järgmise summana

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\,, \tag{7.5}$$

kus A_i on teatavad reaalarvulised kordajad. Tegemist on *Newton-Cotesi kvadratuurvalemiga.*

Newton-Cotesi kvadratuurvalemi kordajate A_i arvulisi väärtusi võib leida arvutusmeetodite käsiraamatutest. Ühtlase võrgu korral, st kui $x_i - x_{i-1} = h$, avaldub A_i valemiga

$$A_i = (b-a)B_i\,, \tag{7.6}$$

kus B_i väärtused on $n = 1, 2, 3, 4$ korral toodud järgmises tabelis:

n	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Näiteks $n = 1$ korral

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]\,, \tag{7.7}$$

$n = 2$ korral

$$S_2 = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(x_1) + f(b)] \quad \left(x_1 = \frac{a+b}{2}\right) \tag{7.8}$$

ja $n = 3$ korral

$$S_3 = \frac{b-a}{8}[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)] \tag{7.9}$$
$$\left(x_1 = \frac{a+b}{3},\, x_2 = \frac{2(a+b)}{3}\right).$$

Newton-Cotesi kvadratuurvalemil on samasugused puudused nagu polünomiaalsel interpolandil. Kuna suure n korral võib Φ_n tugevasti ostsilleerida, ei anna valem enam soovitud täpsust.

Probleemi üks võimalik lahendus on selline, et kvadratuurvalemis kasutame polünomiaalse interpolandi asemel tükiti polünomiaalset interpolanti nii, nagu me tegime ptk 4. Siis on lähend igal osalõigul madala astme polünoom ja ostsillatsiooni ei teki.

7.3. Trapetsvalem

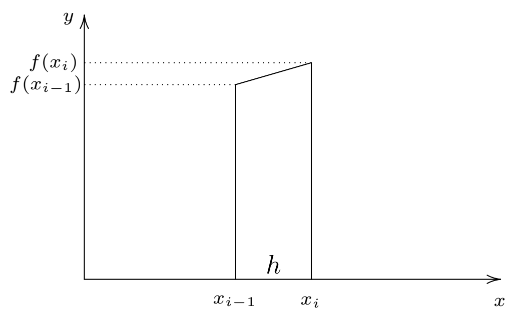
Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (vt ptk 4.2, 1. erijuht). Asendame integreeritava funktsiooni tema interpolandiga ja integreerime:

$$S_n = \int_a^b \Phi(x)dx\,.$$

Kuna lõik $[a, b]$ on osalõikude $[x_{i-1}, x_i]$ ühend, siis võib selle integraali avaldada selliselt, et arvutame ta igal osalõigul eraldi ning summeerime saadud tulemused:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx\,.$$

Osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ on $\Phi(x)$ esimese astme interpolatsioonipolünoom so lineaarne funktsioon. Seega on tema integraal antud osalõigul võrdne trapetsiga, mida piiravad vasakult ja paremalt sirged $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, alt x-telg ning ülevalt sirge, mis läbib punkte $P(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ja $P(x_i, f(x_i))$ (joonis 7.4).



Joonis 7.4 : Osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ kohal paiknev trapets

Vastavalt trapetsi pindala valemile (aluste poolsumma korrutatud kõrgusega) saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h.$$

Kasutades seda seost, arvutame

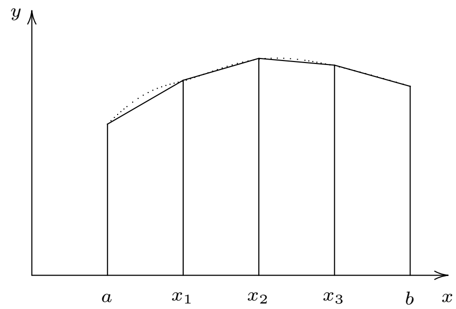
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] +$$

$$+\frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Avades sulud ja koondades liikmed, saame

$$S_n = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \qquad (7.10)$$

See on *trapetsvalem.* Arv S_n on võrdne tükiti lineaarse interpolandi graafiku ja x-telje vahelise trapetsite ühendi pindalaga (joonisel 7.5 pideva joonega piiratud alad).



Joonis 7.5 : Trapetsite ühend trapetsvalemis

Trapetsvalem on teist järku täpsusega. Absoluutse vea hinnang on järgmine:

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq Ch^2 . \tag{7.11}$$

7.4. Simpsoni valem

Olgu n paarisarv ja $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ ruutinterpolant (vt ptk 4.2, 2. erijuht). See tähendab, et $\Phi(x_j) = f(x_j)$ iga $j = 0, 1, \ldots, n$ korral ja $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon osalõikudel $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$. Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga $\Phi(x)$ ja integreerime viimast:

$$S_n = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

On võimalik näidata, et S_n avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} S_n = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \\ + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned} \tag{7.12}$$

See on *Simpsoni valem.*

Simpsoni valem on neljandat järku täpsusega. Absoluutse vea hinnang on järgmine:

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq Ch^4 . \tag{7.13}$$

Neljandat järku täpsus esineb siiski vaid juhul, kui integreeritav funktsioon $f(x)$ on piisavalt sile (st piisavalt kõrget järku tuletised on pidevad). Kui funktsioon ei ole piisavalt sile (nt omab katkevuspunkte), siis ei anna Simpsoni valem head tulemust. Viimasel juhul võib isegi trapetsvalem täpsem olla.