6. Tuletiste ligikaudne arvutamine

Ligikaudseid valemeid tuletiste arvutamiseks nimetatakse *diferentsvalemiteks.* Diferentsvalemeid saab tuletada mitut moodi. Üks lihtsamaid võimalusi on kasutada selleks Taylori polünoomi. Käesolevas peatükis vaatlemegi seda võimalust.

Tuletame meelde, et funktsiooni $f(x)$ k-järku Taylori polünoom punktis a avaldub järgmisel kujul:

$$f(x) \approx P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

6.1. Diferentsvalemid esimest järku tuletise jaoks

Olgu antud funktsiooni $f(x)$ väärtused punktides a ja $a+h$, kus $h > 0$. Eesmärgiks on arvutada funktsiooni $f(x)$ tuletis punktis a, s.o $f'(a)$. Paneme kirja Taylori polünoomi $k = 1$ korral punktis a, kui $x = a+h$. Siis selles valemis $x - a = h$. Saame

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Avaldame sellest võrdusest $f'(a)$. Selleks viime kõik liikmed, välja arvatud $f'(a)h$, võrduse vasakule poole ja jagame h-ga. Saame

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,. \tag{6.1}$$

Valemi (6.1) viga on suurusjärku h. Absoluutse vea hinnang on järgmine:

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq Ch\,,$$

kus C on mingi positiivne konstant. Valemit (6.1) nimetatakse *diferentsvalemiks sammuga ette.* Mida väiksem on sammu pikkus h, seda täpsem on antud diferentsvalem.

Öeldakse, et diferentsvalem on *k-järku täpsusega*, kui selle valemi absoluutne viga on hinnatav suurusega Ch^k, kus C on mingi h-st sõltumatu positiivne konstant. Seega on diferentsvalem sammuga ette esimest järku täpsusega.

Mida kõrgemat järku on täpsus, seda väiksem on meetodi viga eeldusel, et $h \approx 0$. Näiteks, kui $C = 1$ ja $h = 0.01$, siis esimest järku täpsuse korral on viga 0.01, teist järku täpsuse korral 0.0001, kolmandat järku täpsuse korral 10^{-6} jne.

Täpsuse järgu mõistet kasutame ka järgmises ptk-s kvadratuurvalemite juures.

Järgmiseks vaatleme juhtu, kui $f(x)$ väärtused on antud punktides a ja $a-h$, kus $h > 0$, ja vaja on arvutada $f'(a)$. Tegutseme ülaltooduga analoogiliselt. Paneme kirja Taylori polünoomi $k = 1$ korral punktis a, kui $x = a - h$. Siis selles valemis $x - a = -h$. Saame

$$f(a-h) \approx f(a) - f'(a)h.$$

Avaldame sellest võrdusest $f'(a)$. Saame

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}. \tag{6.2}$$

Valem (6.2) on samuti esimest järku täpsusega. Valemit (6.2) nimetatakse *diferentsvalemiks sammuga taha.*

Kõrgemat järku täpsusega diferentsvalemite tuletamiseks peame me kasutama Taylori polünoomi suurema k korral. Vaatleme juhtu, kui $f(x)$ on teada punktides $a - h$ ja $a + h$, kus $h > 0$, ja vaja on arvutada $f'(a)$. Paneme kirja Taylori polñoomi $k = 2$ korral punktis a, kui $x = a + h$:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2. \tag{6.3}$$

Peale selle paneme kirja Taylori polünoomi $k = 2$ korral punktis a, kui $x = a-h$:

$$f(a-h) \approx f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2. \tag{6.4}$$

Neis kahes valemis esinevad etteantud suurused $f(a+h)$, $f(a-h)$, otsitav suurus $f'(a)$ ning lisaks veel $f(a)$ ja $f''(a)$. Viimased kaks on ülearused. Suuruste $f(a)$ ja $f''(a)$ elimineerimiseks lahutame valemist (6.3) valemi (6.4):

$$f(a+h) - f(a-h) \approx 2f'(a)h.$$

Avaldame siit $f'(a)$. Saame

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}. \tag{6.5}$$

Valem (6.5) on teist järku täpsusega:

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f''(a) \right| \leq Ch^2. \tag{6.6}$$

Valemit (6.5) nimetatakse *sümmeetriliseks diferentsvalemiks.*

6.2. Diferentsvalem teist järku tuletise jaoks

Teist järku tuletise ligikaudseks arvutamiseks peab funktsioon $f(x)$ olema teada vähemalt kolmes punktis. Olgu $f(x)$ teada järgmises kolmes punktis: $a - h$, a

ja $a+h$, kus $h > 0$. Olgu vaja arvutada $f''(a)$. Paneme kirja Taylori polünoomi $k = 2$ korral punktis a, kui $x = a + h$:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2\,, \tag{6.7}$$

ja kui $x = a - h$:

$$f(a-h) \approx f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2\,. \tag{6.8}$$

Valemites (6.7) ja (6.8) esinevad etteantud suurused $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a-h)$, otsitav suurus $f''(a)$ ja lisaks veel $f'(a)$. Viimase elimineerimiseks liidame (6.7) ja (6.8). Saame

$$f(a+h) + f(a-h) \;\approx\; 2f(a) + f''(a)h^2\,.$$

Avaldame siit $f''(a)$:

$$f''(a) \;\approx\; \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}\,. \tag{6.9}$$

Diferentsvalem (6.9) on teist järku täpsusega:

$$\left|\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - f''(a)\right| \;\le\; Ch^2\,. \tag{6.10}$$