

3. Võrrandisüsteemide lahendamine

Käesolevas peatüki esimeses pooles vaatleme lineaarsete võrrandisüsteemide

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= y_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= y_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

lahendamist. Süsteemi (3.1) saab üles kirjutada ka maatrikskujul $Ax = y$, kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

3.1. Crameri valemid

Teatavasti avaldub süsteemi $Ax = y$ lahend Crameri valemite

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \dots, m$$

kaudu, kus D on maatriksi A determinant ja D_i on sellise maatriksi determinant, kus i -s veerg on asendatud y -ga. Nimelt

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,i-1} & y_m & a_{m,i+1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Siiski ei kasutata Crameri valemid suurte süsteemide lahendamisel, kuna nad on liiga tömahukad. On võimalik konstrueerida efektiivsemaid meetodeid.

3.2. Gaussi elimineerimismeetod

Elimineerimismeetodis teisendatakse süsteemi võrrandeid nende omavahelise liitmise ja skalaaridega korrutamise abil nii, et peadiagonaalil oleks kordajateks ühed ja peadiagonaali all oleks nullid (s.o viiakse süsteem kolmnurksele kujule). Seejärel lahendatakse saadud kolmnurkne süsteem, alustades viimasest võrrandist ja liikudes järjest ettepoole.

Elimineerimismeetodit on mugav kasutada nii, et kui süsteemi võrrandid on kirjutatud välja laiendatud maatriksina, mille viimane veerg koosneb vabaliikmetest y_i :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & y_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & y_m \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Meetodi esimeses etapis saadakse ridade omavahelise liitmise ja skalaaridega korrutamise abil laiendatud maatriksile järgmine kolmnurkne kuju:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1m} & \theta_1 \\ 0 & 1 & \beta_{23} & \dots & \beta_{2m} & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \beta_{3m} & \theta_3 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \theta_m \end{pmatrix}.$$

Saadud maatriksi võib uuesti süsteemi kujul välja kirjutada:

$$\begin{aligned} x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \dots + \beta_{1m}x_m &= \theta_1 \\ x_2 + \beta_{23}x_3 + \dots + \beta_{2m}x_m &= \theta_2 \\ &\dots \\ x_{m-1} + \beta_{m-1,m}x_m &= \theta_{m-1} \\ x_m &= \theta_m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Kolmnurkse süsteemi (3.3) lahendamine on juba lihtne. Nimelt saame viimasest võrrandist x_m . Asendades selle eelviimasesse võrrandisse, saame x_{m-1} jne, kuni lõpuks esimesest võrrandist arvutame x_1 .

Gaussi elimineerimismeetod on oluliselt efektiivsem kui Crameri valemid. Nimelt on elimineerimismeetodid sooritav tehete arv samas suurusjärgus Crameri valemis esineva ühe determinandi arvutamiseks vajalike tehete arvuga. Kuid Crameri valemites tuleb ju arvutada kokku $m + 1$ determinanti. Seega tuleb Crameri valemites sooritada $m + 1$ korda rohkem tehteid kui elimineerimismeetodis.

Toome siinkohal ühe näite elimineerimismeetodi illustreerimiseks. Olgu vaja lahendada süsteem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Moodustame vastava laiendatud maatriksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teisendame 1. veerus peadiagonaali all olevad elemendid nulliks. Selleks korrutame esimest võrrandit 3-ga ja lahutame teisest võrrandist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ning korrutame esimest võrrandit 2-ga ja lahutame kolmandast võrrandist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Järgmiseks teisendame teise veeru peadiagonaali elemendi 1-ks korrutades teist rida -1-ga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Teisendame teise rea peadiagonaali all oleva elemendi nulliks. Selleks korrutame teist rida 3-ga ja liidame kolmandale reale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Lõpuks jagame kolmanda rea 5-ga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laiendatud maatriks on teisendatud kolmnurksele kujule. Vastav võrrandisüsteem on järgmine:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Viimane võrrand annab otseselt x_3 . Asendades x_3 väärtuse eelviimasesse võrrandisse arvutame x_2 . Saame $x_2 + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$. Lõpuks asendades x_2 ja x_3 esimesse võrrandisse arvutame x_1 . Saame $x_1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$.

Elimineerimismeetodi peamiseks puuduseks on ümardamisvigade võimalik kuhjumine arvutuste käigus. Need võivad lõpptulemust oluliselt mõjutada. Lisaks on suure dimensiooni (suure m) korral ka tehete arv üsna suur ning

meetod ei ole enam efektiivne. Neist puudustest on vabad järgmistes alampeatükkides vaadeldavad iteratsioonimeetodid. Tõsi küll, iteratsioonimeetodite rakendamisel kaasneb meetodi viga, mida elimineerimismeetodis ei ole.

3.3. Mittelineaarsed süsteemid

Mittelineaarne võrrandisüsteem kõige üldisemal kujul on järgmine:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

kus f_1, \dots, f_m on mingid skalaarsed m muutuja funktsioonid.

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} \cos(x_1)x_2 + \sqrt{x_1} = x_2 \\ x_1^3 + \tan(x_2) = 4 \end{cases}$$

saab kirjutada kujul

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

kui defineerida järgmised kahe muutuja funktsioonid: $f_1(x_1, x_2) = \cos(x_1)x_2 + \sqrt{x_1} - x_2$ ja $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + \tan(x_2) - 4$.

3.4. Harilik ja Seideli iteratsioonimeetod

Hariliku ja Seideli iteratsioonimeetodi rakendamiseks peab süsteem (3.4) olema viidud järgmisele kujule:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_m), \end{cases} \quad (3.5)$$

kus g_1, \dots, g_m on mingid m muutuja funktsioonid. Võimalusi süsteemi (3.4) teisendamiseks kujule (3.5) on palju. Ühte üldist võimalust vaatleme käesoleva alampeatüki lõpus.

Näiteks üks võimalus eespooltoodud süsteemi

$$\begin{cases} \cos(x_1)x_2 + \sqrt{x_1} = x_2 \\ x_1^3 + \tan(x_2) = 4 \end{cases}$$

esitamiseks hariliku ja Seideli iteratsioonimeetodi rakendamiseks sobival kujul on järgmine:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{4 - \tan(x_2)} \\ x_2 = \cos(x_1)x_2 + \sqrt{x_1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Iteratsioonimeetodite puhul valitakse mingi alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$. Kasutades seda arvutatakse esimene lähend $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_m^1)$, viimase põhjal teine lähend $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)$ jne. Järjekorras n -s lähend on seega $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$. Ülaindeks tähistab siin lähendi järku ja alaindeks komponenti. Iteratsiooniprotsess peatatakse, kui kahe viimase lähendi vahe on piisavalt väike.

Iteratsioonimeetodi algoritm on defineeritud, kui on antud valemid, mille põhjal saab $n - 1$ -st lähendist arvutada n -nda lähendi.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral toimub n -nda lähendi arvutamine järgmistele valemitega:

$$\begin{aligned} x_1^n &= g_1(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}) \\ x_2^n &= g_2(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}) \\ &\dots \\ x_m^n &= g_m(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kui lähendi komponente arvutatakse sellises järjekorras, nagu on antud süsteemi (3.7) võrrandid, siis kõigepealt leitakse x_1^n . Järgmise komponendi x_2^n arvutamisel kasutatakse muuhulgas suurust x_1^{n-1} . Tekib loomulik küsimus: miks ei võiks x_2^n arvutamisel kasutada x_1^{n-1} asemel hoopis x_1^n , kuna viimane on juba teada ja x_1^n peaks ju otsitava lähendi esimest komponenti lähendama täpsemini kui x_1^{n-1} ? Kui me kasutame x_2^n arvutamisel x_1^{n-1} asemel suurust x_1^n , siis on vastav valem järgmine:

$$x_2^n = g_2(x_1^n, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1}).$$

Analoogiliselt võime x_3^n arvutamisel kasutada suuruste x_1^{n-1} ja x_2^{n-1} asemel suurusi x_1^n ja x_2^n , kuna viimased on kolmanda võrrandi juurde jõudes juba välja arvutatud jne. Kokkuvõttes on sellise meetodi arvutuseeskirjad järgmised:

$$\begin{aligned} x_1^n &= g_1(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, x_3^{n-1}, \dots, x_{m-1}^{n-1}, x_m^{n-1}) \\ x_2^n &= g_2(x_1^n, x_2^{n-1}, x_3^{n-1}, \dots, x_{m-1}^{n-1}, x_m^{n-1}) \\ x_3^n &= g_3(x_1^n, x_2^n, x_3^{n-1}, \dots, x_{m-1}^{n-1}, x_m^{n-1}) \\ &\dots \\ x_m^n &= g_m(x_1^n, x_2^n, \dots, x_{m-1}^n, x_m^{n-1}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

See on *Seideli iteratsioonimeetod* (kirjanduses võib kohata ka nimetust *Gauss-Seideli iteratsioonimeetod*).

Näiteks süsteemi (3.6) korral on hariliku ja Seideli iteratsioonimeetodi algoritmid vastavalt järgmised:

$$\begin{aligned} x_1^n &= \sqrt[3]{4 - \tan(x_2^{n-1})} \\ x_2^n &= \cos(x_1^{n-1})x_2^{n-1} + \sqrt{x_1^{n-1}} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}x_1^n &= \sqrt[3]{4 - \tan(x_2^{n-1})} \\x_2^n &= \cos(x_1^n)x_2^{n-1} + \sqrt{x_1^n}.\end{aligned}$$

Vaatleme üht üldist võimalust süsteemi (3.4) teisendamiseks kujule (3.5). Valime mingid nullist erinevad konstandid C_1, \dots, C_m ja korrutame nendega süsteemi (3.4) võrrandeid:

$$\begin{aligned}C_1 f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0 \\C_2 f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0 \\&\dots \\C_m f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0.\end{aligned}$$

Seejärel liidame i -nda võrrandi vasakule ja paremale poolele muutuja x_i :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1 + C_1 f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\x_2 &= x_2 + C_2 f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\&\dots \\x_m &= x_m + C_m f_m(x_1, x_2, \dots, x_m).\end{aligned}$$

Saadud süsteem ongi kujul (3.5), kusjuures

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_i + C_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

3.5. Iteratsioonimeetodid lineaarsete süsteemide jaoks

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi

$$\left\{ \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= y_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= y_2 \\&\dots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= y_m.\end{aligned} \right. \quad (3.9)$$

Tegemist on erijuhuga süsteemist (3.4), kui funktsioonid f_i on lineaarsed, st

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m - y_i.$$

Paneme süsteemi (3.9) jaoks kirja hariliku ja Seideli iteratsioonimeetodi algoritmid. Alustada tuleb süsteemi viimisest kujule (3.5). Selleks võib toimida järgnevalt. Järjestame võrrandid nii, et peadiagonaali elemendid erineksid nullist, st $a_{ii} \neq 0$ ja jagame i -nda võrrandi a_{ii} -ga:

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1,m-1}}{a_{11}}x_{m-1} + \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m &= \frac{y_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 + \dots + \frac{a_{2,m-1}}{a_{22}}x_{m-1} + \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m &= \frac{y_2}{a_{22}} \\ &\dots \\ \frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 + \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2 + \frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3 + \dots + \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1} + x_m &= \frac{y_m}{a_{mm}}.\end{aligned}$$

Seejärel viime kõik väljaspool peadiagonaali asuvad liikmed paremale poole:

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1,m-1}}{a_{11}}x_{m-1} - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2,m-1}}{a_{22}}x_{m-1} - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m + \frac{y_2}{a_{22}} \\ & \dots \\ x_m = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2 - \frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3 - \dots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1} & + \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

Saadud süsteem on kujul (3.5), kusjuures

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \dots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \dots - \frac{a_{im}}{a_{ii}}x_m + \frac{y_i}{a_{ii}}.$$

Seega on hariliku iteratsioonimeetodi algoritm järgmine:

$$\begin{cases} x_1^n = & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{n-1} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{n-1} - \dots & -\frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{n-1} + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2^n = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{n-1} & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{n-1} - \dots & -\frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{n-1} + \frac{y_2}{a_{22}} \\ & \dots & \\ x_m^n = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{n-1} - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2^{n-1} - \frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3^{n-1} - \dots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{n-1} & + \frac{y_m}{a_{mm}} \end{cases}$$

ja Seideli meetodi algoritm järgmine:

$$\begin{cases} x_1^n = & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{n-1} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{n-1} - \dots & -\frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{n-1} + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2^n = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^n & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{n-1} - \dots & -\frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{n-1} + \frac{y_2}{a_{22}} \\ & \dots & \\ x_m^n = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^n - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2^n & -\frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3^n - \dots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^n & + \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

Harilikku iteratsioonimeetodit lineaarsete süsteemide korral nimetatakse ka *Jacobi iteratsioonimeetodiks*.