2. Võrrandite lahendamine

Käesolevas peatükis vaatleme võrrandite

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

ligikaudset lahendamist, kus $f(x)$ on ühe muutuja funktsioon.

Ilmselt õnnestub teatud erijuhtudel taolist võrrandit täpselt lahendada. Näiteks ruutfunktsiooni $f(x)$ korral on võrrandi (2.1) lahendusvalemid üldtuntud. Teada on ka kuup- ja neljanda astme võrrandite lahendusvalemid. Viienda või kõrgema astme võrrandi lahendamise valemid aga puuduvad. Veelgi enam: on tõestatud, et nende võrrandite täpseid lahendeid ei saa üldjuhul kätte lõpliku arvu liitmiste, lahutamiste, korrutamiste, jagamiste ja juurimistega. Lõpliku arvu tehetega ei õnnestu täpselt lahendada ka enamikku trigonomeetrilisi funktsioone sisaldavaid võrrandeid, nt $x - \cos x = 0$ jne. Seega on neil juhtudel vajalikud ligikaudsed meetodid.

Enamik võrrandi (2.1) ligikaudsetest lahendusmeetoditest on nn *iteratsioonimeetodid*. Iteratsioonimeetodi käivitamiseks on kõigepealt vaja leida alglähend x_0, milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit). Meetodis arvutatakse alglähendist lähtudes järk-järgult täpsemaid lähendeid x_n. Kui lähendi x_n arvutamisel kasutatakse ainult eelmist lähendit x_{n-1}, siis on tegemist nn *ühesammulise* meetodiga. Kui aga x_n arvutamiseks kasutatakse mitut eelnevat lähendit $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$, kus $k > 1$, siis on tegemist *mitmesammulise* meetodiga. Iteratsiooniprotsessi võib peatada, kui kaks järjestikust lahendit ühtivad etteantud täpsuse piirides.

Alglähendi leidmiseks puuduvad kindlad eeskirjad. Näiteks saab alglähendi leida funktsiooni graafikult, võttes selleks ligikaudselt punkti, kus graafik läbib x-telge. Kui $f(x)$ on pidev, siis saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit. Nimelt matemaatilise analüüsi kursusest teame, et kui funktsioon on pidev ja saavutab punktides a ja b erimärgilisi väärtusi, siis leidub a ja b vahel selle funktiooni nullkoht. Seega, kui tabelis kõrvuti paiknevate teineteisele lähedaste argumendi väärtuste korral on $f(x)$ märk erinev, siis võib ühe neist kahest argumendist võtta alglähendiks. Alglähendi saab leida ka selliselt, et asendame võrrandi $f(x) = 0$ temale lähedase võrrandiga $\tilde{f}(x) = 0$, mis on lihtsalt lahenduv (nt ruutvõrrand). Kui nende kahe võrrandi lahendid paiknevad lähestikku, siis võib $\tilde{f}(x) = 0$ lahendi võtta $f(x) = 0$ alglähendiks.

Järgnevalt vaatleme lähemalt mõningaid iteratsioonimeetodeid.

2.1. Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks peab võrrand (2.1) olema järgmisel kujul:

$$x = g(x)\,, \tag{2.2}$$

kus $g(x)$ on mingi funktsioon. Lähendid arvutatakse järgmise eeskirja alusel:

$$x_n = g(x_{n-1})\,, \tag{2.3}$$

st $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$ jne. Tegemist on ühesammulise meetodiga.

Meid huvitab, milline on vaadeldava meetodi viga. Olgu $x^\dagger$ võrrandi (2.2) täpne lahend, st $x^\dagger = g(x^\dagger)$. Lähendi x_n viga avaldub vahena $x_n - x^\dagger$. Vea käitumise analüüsimiseks tuleb hinnata suurust $|x_n - x^\dagger|$. Kui

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^\dagger| = 0,$$

siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks $x^\dagger$, st $x_n \to x^\dagger$.

Eeldame, et kehtib järgmine võrratus:

$$|g'(x)| \;\le\; q \;<\; 1\,, \tag{2.4}$$

kus q on mingi konstant. Siis on võimalik tõestada, et peab paika järgmine seos:

$$|x_n - x^\dagger| \;\le\; q\,|x_{n-1} - x^\dagger|\,. \tag{2.5}$$

Analüüsime natuke seda seost. Vasakul pool seisab n-nda lähendi viga ja paremal pool $n-1$-se lähendi viga. Seega annab seos (2.5) n-nda lähendi vea hinnangu $n-1$-se lähendi vea kaudu. Kuna $q < 1$, siis $|x_n - x^\dagger|$ on väiksem kui $|x_{n-1} - x^\dagger|$. Seega viga väheneb iteratsiooni käigus. Mida väiksem on q, seda kiiremini viga väheneb.

Eeldusest (2.4) järeldub ka hariliku iteratsioonimeetodi koonduvus. Näitame seda. Selleks rakendame hinnangut (2.5) järjest:

$$|x_n - x^\dagger| \le q|x_{n-1} - x^\dagger| \le q^2|x_{n-2} - x^\dagger| \le \ldots \le q^n|x_0 - x^\dagger|.$$

Seega

$$|x_n - x^\dagger| \;\le\; q^n|x_0 - x^\dagger|\,. \tag{2.6}$$

Kuna $q < 1$, siis $q^n \to 0$, kui $n \to \infty$. Järelikult

$$|x_n - x^\dagger| \to 0\,, \quad \text{kui} \quad n \to \infty.$$

See tõestabki meetodi koonduvuse $x_n \to x^\dagger$.

Paneme tähele, et hinnangu (2.6) paremal poolel esineb nulliks koonduv geomeetriline jada a, aq, $aq^2, \ldots$, kus $a = |x_0 - x^\dagger|$. Seega koondub harilik iteratsioonimeetod *geomeetrilise jada kiirusega.* Koondumine on seda kiirem, mida väiksem (nullile lähedasem) on tegur q.

Tingimus (2.4) on oluline hariliku iteratsioonimeetodi koondumiseks. Saab tõestada, et kui kõikjal lahendit $x^\dagger$ sisaldavas vahemikus $|g'(x)| > 1$, siis meetod ei koondu.

Üks võimalus võrrandi (2.1) teisendamiseks kujule (2.2) on järgmine. Korrutame seda võrrandit mingi suvalise nullist erineva konstandiga C. Saame võrrandi $Cf(x) = 0$, mille mõlemale poole liidame x-i. Tulemusena tekib võrrand $x = x + Cf(x)$, mis on kujul (2.2), kusjuures funktsioon $g(x)$ avaldub järgmiselt: $g(x) = x + Cf(x)$. Teatud juhtudel on võimalik valida niisugune C, et $g(x)$ rahuldaks tingimust (2.4). Näiteks vaatleme juhtu, kui $f'(x)$ on mingis $x^\dagger$-i sisaldavas vahemikus kõikjal nullist erinev ja tõkestatud, st

$$0 < m \le |f'(x)| \le M \tag{2.7}$$

ja eeldame, et $m < M$. Valime järgmise konstandi:

$$C = \begin{cases} -\frac{1}{M} & \text{kui } f'(x) > 0 \\ \frac{1}{M} & \text{kui } f'(x) < 0. \end{cases}$$

Siis rahuldab funktsioon $g(x) = x + Cf(x)$ tingimust (2.4) mingi ühest väiksema konstandiga q.

Näitame seda. Vastavalt konstandi C definitsioonile kehtib

$$g'(x) = 1 + Cf'(x) = 1 - \frac{1}{M}|f'(x)|\,.$$

Seega võrratuste (2.7) tõttu paikneb $g'(x)$ arvude $1 - \frac{1}{M}M = 0$ ja $1 - \frac{m}{M} > 0$ vahel, st $g'(x) \in (0; 1 - \frac{m}{M})$. Järelikult $|g'(x)| \le 1 - \frac{m}{M} < 1$, st tingimus (2.4) on täidetud arvuga $q = 1 - \frac{m}{M}$.

Olgu märgitud, et võrrand (2.2) funktsiooniga $g(x) = x + Cf(x)$ ei ole ainuvõimalik võrrandi (2.1) esitus kujul (2.2). Esitusi kujul (2.2) erinevate g-dega on lõpmata palju. Seejuures on mitmete võrrandite jaoks võimalik leida selliseid teisendusi kujule (2.2), mille korral (2.2) esineva funktsiooni g tuletis on väiksem, kui eespool toodud g korral, ning millele rakendatud harilik iteratsioonimeetod koondub kiiremini. Kuid taolised võimalused sõltuvad juba konkreetsest ülesandest.

2.2. Newtoni meetod

Olgu taas võrrand antud kujul (2.1). Newtoni meetod põhineb võrrandis esineva funktsiooni lineariseerimisel (so geomeetriliselt puutuja kasutamisel). Selgituseks vaatleme joonist 2.1. Oletame, et oleme iteratsiooniga jõudnud lähendini x_{n-1}. Lineariseerime funktsiooni $f(x)$ lähendi x_{n-1} ümbruses. Selleks asendame funktsiooni graafiku tema puutujaga punktis $B_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Puutuja võrrand on

$$y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

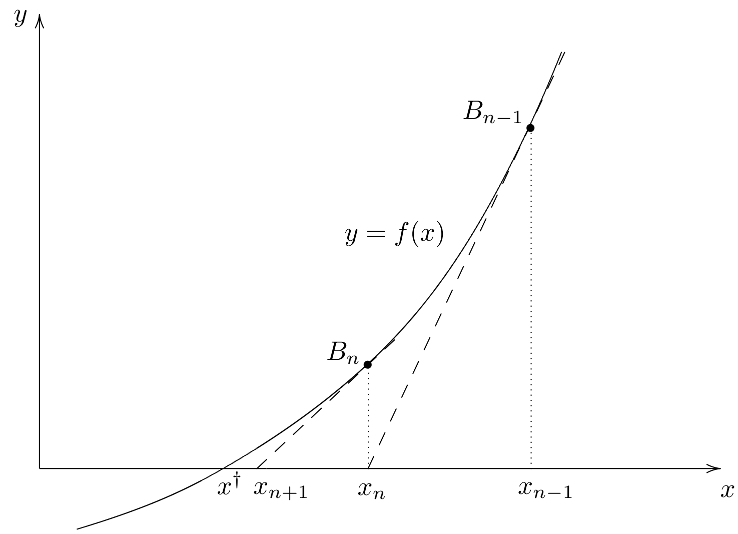
Teatavasti asub täpne lahend $x^\dagger$ graafiku lõikepunktis x-teljega. Leiame selle asemel puutuja lõikepunkti x-teljega:

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) = 0 \;\Rightarrow\; x \;=\; x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\,.$$

Saadud lõikepunkti võtamegi uueks lähendiks. Seega

$$x_n \;=\; x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\,. \tag{2.8}$$

Olemegi tuletanud *Newtoni meetodi* algoritmi. Tegemist on ühesammulise meetodiga.



Joonis 2.1 : Newtoni meetod

Järgnevalt vaatleme Newtoni meetodi koonduvust ja veahinnangut. Oluline tingimus Newtoni meetodi koondumiseks on see, et funktsiooni $f(x)$ tuletis oleks otsitava täpse lahendi lähedal nullist erinev, st

$$f'(x) \neq 0\,. \tag{2.9}$$

Lisaks on vaja valida alglähend otsitavale lahendile piisavalt lähedalt.

Newtoni meetodi puhul on n-nda lähendi viga hinnatav $n-1$-se lähendi vea kaudu järgmiselt:

$$|x_n - x^\dagger| \;\leq\; \gamma\, |x_{n-1} - x^\dagger|^2\,, \tag{2.10}$$

kus γ on mingi positiivne konstant. Tegemist on nn *ruutkoondumisega*. Viimane on oluliselt kiirem, kui geomeetrilise jada kiirusega koondumine, mis esines hariliku iteratsioonimeetodi korral. Selle mõistmiseks kirjutame hinnangu (2.10) üles järgmiselt:

$$|x_n - x^\dagger| \;\leq\; \underbrace{\gamma\, |x_{n-1} - x^\dagger|}_{q_n} \times |x_{n-1} - x^\dagger|\,. \tag{2.11}$$

Võrdluseks: eelmises alampeatükis vaadeldud hariliku iteratsioonimeetodi korral on vastav veahinnang $|x_n - x^\dagger| \;\leq\; q|x_{n-1} - x^\dagger|$, kus $q < 1$ on konstant. Oluline on kordaja q suurus. Mida väiksem on q, seda kiiremini viga väheneb ja seda kiiremini ka meetod koondub. Newtoni meetodi korral kordaja $q_n = \gamma|x_{n-1} - x^\dagger|$ väheneb ja läheneb nullile (see on tingitud asjaolust, et koondumise korral $|x_{n-1} - x^\dagger| \to 0$). Seega võib öelda, et Newtoni meetodi korral toimub kiirenev koondumine.

Üsna levinud on selline lähenemine, kus võrrandi lahendamist alustatakse harilikust iteratsioonimeetodist, ja kui lähendiga on jõutud täpsele lahendile küllalt lähedale, siis minnakse üle Newtoni meetodile.

2.3. Newtoni meetodi modifikatsioonid. Lõikajate meetod

Newtoni meetodi algoritm (2.8) sisaldab funktsiooni $f(x)$ tuletise väärtuse arvutamist igal iteratsioonisammul. See võib mõnikord olla üsna töömahukas protseduur (nt kui tuletise avaldis on suur ja keerukas). Kui igal sammul on vaja teha rohkelt arvutustööd, nullib see ruutkoonduvusest saadava kiirusefekti. Peale selle ei ole tuletise arvutamine igakord võimalik (nt kui funktsioon on antud tabelina). Selliste juhtude jaoks on välja töötatud mitmeid Newtoni meetodite modifikatsioone.

Üks võimalus on arvutada funktsiooni tuletis ainult esimesel iteratsioonisammul ja kasutada sedasama väärtust kõigis järgnevates sammudes. Taolise meetodi algoritm on seega järgmine:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}\,. \tag{2.12}$$

Meetod (2.12) koondub geomeetrilise jada kiirusega.

Teine võimalus on lähendada funktsiooni tuletist funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhtega. Teatavasti on tuletis defineeritud piirväärtusega

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Seega väikese Δx korral kehtib $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Punktis $x = x_{n-1}$ võetud argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$. Seega

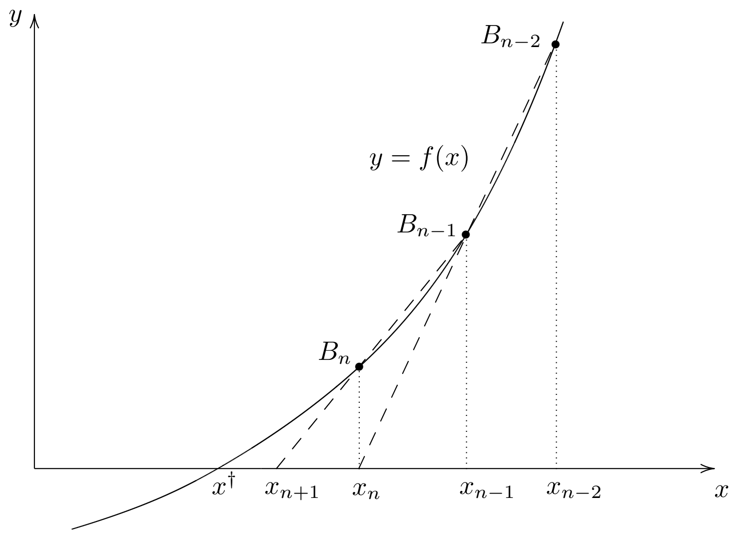
$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}\,.$$

Asendame suuruse $f'(x_{n-1})$ selle valemi põhjal Newtoni meetodi algoritmi (2.8). Saame järgmise meetodi:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1})\,. \tag{2.13}$$

Tegemist on nn *lõikajate e kõõlude meetodiga*. Meetod (2.13) on kahesammuline, sest lähendi x_n arvutamisel kasutatakse kahte eelnevat lähendit x_{n-1} ja x_{n-2}. Seega on algoritmi käivitamiseks vaja lisaks alglähendile x_0 fikseerida ka x_1.

Lõikajate meetodi nimetus tuleneb selle geomeetrilisest sisust. Vaatame joonist 2.2.



Joonis 2.2 : Lõikajate meetod

Olgu leitud lähendid x_{n-1} ja x_{n-2}. Tõmbame punktidest $B_{n-2}(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ ja $B_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ läbi lõikaja. Lõikaja läbib x-telge punktis x_n. See ongi järgmine lähend.

Teatud eeldustel funktsiooni $f(x)$ kohta kehtib lõikajate meetodi korral järgmine hinnang:

$$|x_n - x^\dagger| \le \beta |x_{n-1} - x^\dagger|^{1.618}, \tag{2.14}$$

kus $\beta > 0$ on mingi n-st sõltumatu konstant. Seega on meetodi koonduvuskiirus järku 1.618. See on midagi ruutkoonduvuse ja geomeetrilise jada kiirusega koonduvuse vahepealset.