5. Interpoleerimine

Teooria osas nägime, et interpolatsiooni korral on täidetud tingimused $\Phi(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, kus x_i on sõlmed, $f(x_i)$ on tabeliga antud funktsiooni väärtused ja $\Phi(x)$ on interpolant, so interpoleeriv funktsioon. Geomeetriliselt tähendavad interpolatsioonitingimused seda, et Φ graafik jookseb punktidest $P(x_i, f(x_i))$ läbi. Peale selle polünoomiga interpoleerimisel on interpolandi aste sõlmede arvust ühe võrra väiksem, st $n+1$ sõlmele vastava interpolatsioonipolünoomi aste on ülimalt n. Tõepoolest: nagu nägime, kehtib teoreem, mis väidab, et leidub parajasti üks ülimalt n-astme polünoom, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Viimaseid on $n+1$ tükki.

Polünoomiga interpoleerimiseks on Matlab-Octaves käsk polyfit, mille kuju on järgmine:

```
polyfit(x,y,n)
```

kus x on sõlmede vektor, y on vastavate funktsiooni väärtuste vektor ja n on polünoomi aste. Käsk annab tulemuseks interpolatsioonipolünoomi kordajate vektori.

Näiteülesanne 14. Antud on järgmine funktsiooni $y = f(x)$ väärtuste tabel:

x	-1	0	1	1.5	2	2.5
y	16	3	2	8	9	6

Interpoleerida seda funktsiooni polünoomiga.

Lahendus. Kuna antud on 6 sõlme, siis vastava interpolatsioonipolünoomi aste on 5. Kirjutame skripti järgmised read:

```
x=[1-,0,1,1.5,2,2.5];
y=[16,3,2,8,9,6];
c=polyfit(x,y,5)
```

ja käivitame skripti. Antakse vastus

```
c =
    2.2095   -11.2   10.6857   17.2  -19.8952   3.0
```

Seega avaldub otsitav polünoom kujul

$$\Phi_5(x) = 2.2095x^5 - 11.2x^4 + 10.6857x^3 + 17.2x^2 - 19.8952x + 3.$$

Ettantud kordajatega polünoomi väärtuste arvutamiseks sobib kõige paremini käsk polyval , mille kuju on järgmine:

```
polyval(c,xi)
```

kus c on polünoomi kordajate vektor ja xi on argumendi väärtuste vektor. Käsk annab xi -le vastava polünoomi väärtuste vektori.

Näiteks leiame Näiteülesandes 14 saadud polünoomi $\Phi_5(x)$ väärtused punktides $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2.2$ ja $x_3 = -2$. Seejuures eeldame, et Matlab-Octavest ei ole peale selle näiteülesande lahendamist väljutud, seega on vektor c veel mälus olemas. Sisestame skriptist või käsurealt järgmised käsud:

```
xi=[0.5,2.2,-2];
polyval(c,xi)
```

Antakse vastus:

```
ans =
    -1.9429   7.764   -223.8
```

See tähendab, et $\Phi_5(x_1) = -1.9429$, $\Phi_5(x_2) = 7.764$ ja $\Phi_5(x_3) = -223.8$.

Enne järgmiste ülesannete juurde minekut vaatleme ühte käsu plot lisavõimalust. Tuletame meelde, et käsk plot(x,y) joonestab tasandile koordinaatidega x ja y antud punktid ja ühendab need järjekorras sirglõikudega. Kui me ei soovi sirglõikude joonestamist punktide vahele, siis võib seda käsku kasutada järgmisel kujul:

plot(x,y,'*sümbol*')

kus *sümbol* on punktide tähis (see võib olla ∗, o, x või ^). Nii nagu ikka, saab ühe käsuga joonestada korraga mitu graafikut.

Näiteks käsk

plot(t,u,'∗',z,v)

joonestab tasandile:
1) punktid koordinaatidega t ja u ning tähistab need sümboliga ∗;
2) punktid koordinaatidega z ja v ning ühendab need sirglõikudega.

Näiteülesanne 15. Antud on järgmine funktsiooni $z = f(x)$ väärtuste tabel:

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
z	-4	-3.6	-1	2.9	8.6	10.7	14

Interpoleerida seda funktsiooni polünoomiga. Joonestada interpolatsioonipunktid ja polünoom samas teljestikus lõigul $[2, 2.6]$.

Lahendus. Kuna ülesandes on 7 sõlme, siis interpolatsioonipolünoomi aste on 6. Kirjutame skripti järgmised read:

```
x=[2,2.1,2.2,2.3,2.4,2.5,2.6];
z=[-4,-3.6,-1,2.9,8.6,10.7,14];
c=polyfit(x,z,6)
xvec=2:1e-4:2.6;
zvec=polyval(c,xvec);
plot(x,z,'∗',xvec,zvec)
xlabel('x')
ylabel('z')
```

ja kävitame skripti. Antakse vastus

```
c =
3.2500e+004 -4.4483e+005 2.5326e+006 -7.6776e+006 1.3071e+007 -1.1849e+007 4.4687e+006
```

Joonis

Harjutusülesanne 21. Leida järgmise tabeliga antud funktsiooni interpolatsioonipolünoom:

t	1	1.5	2	3
x	4	3	2	5

Joonestada interpolatsioonipunktid ja polünoom samas teljestikus. Arvutada polünoomi väärtus kohal $t = 2.1$. Skript salvestada nime s41.m all.

Lahendus

Pika tabeli korral ei anna polünomiaalne interpoleerimine üldjuhul häid tulemusi. Nimelt kipub kõrge astme interpolatsioonipolünoom tugevasti võnkuma. Näiteks olgu antud tabel

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5

Sellele tabelile vastab 14-nda astme interpolatsioonipolünoom. Joonestame tema graafiku koos interpolatsioonipunktidega. Sisestame skripti järgmised read:

```
x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15];
y=[5,1,5,1,5,1,5,1,5,1,5,1,5,1,5];
```

```
c=polyfit(x,y,14);
xvec=1:1e-3:15;
yvec=polyval(c,xvec);
plot(x,y,'*',xvec,yvec)
xlabel('x')
ylabel('y')
```

ja käivitame skripti. Jooniselt näeme interpolatsioonipolünoomi $\Phi_{14}(x)$ graafikut. Lõigu otspunktide lähedal on täheldatav polünoomi tugev võnkumine (kuni ca -550).

Pika tabeli korral kasutatakse enam interpoleerimist tükiti polünomiaalsete funktsioonidega, sh splainidega. Splainiga interpoleerimiseks võib Matlab-Octaves kasutada käsku interp1, mille kuju on järgmine:

interp1(x,y,xi,'*meetod*')

kus x on sõlmede vektor, y on vastavate funktsiooni väärtuste vektor, xi on argumendi väärtuste vektor, mille korral soovitakse splaini välja arvutada ning *meetod* on splaini tüübi nimetus. Näiteks kui soovitakse lineaarsplaini klassist $S^{1,0}(x)$, siis tuleb *meetod*-i kohale kirjutada linear, kui aga soovitakse kuupsplaini klassist $S^{3,2}(x)$, siis tuleb *meetod*-i kohale kirjutada spline . Käsk interp1 annab tulemuseks argumendi väärtuste vektorile xi vastava splaini väärtuste vektori.

NÄITEÜLESANNE 16. Antud on järgmine funktsiooni $y = f(x)$ väärtuste tabel:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	7	1	3	2	4	1

Interpoleerida seda funktsiooni kuupsplainiga $S^{3,2}(x)$. Joonestada interpolatsioonipunktid ja splain samas teljestikus lõigul $[1, 7]$.

Lahendus. Kirjutame skripti järgmised read:

```
x=[1,2,3,4,5,6,7];
y=[0,7,1,3,2,4,1];
xvec=1:1e-3:7;
yvec=interp1(x,y,xvec,'spline');
plot(x,y,'*',xvec,yvec)
xlabel('x')
ylabel('y')
```

ja käivitame skripti. Tulemuseks saame järgmise joonise.

NÄITEÜLESANNE 17. Antud on järgmine funktsiooni $v = f(u)$ väärtuste tabel:

u	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
v	0	0.6	2.1	3.1	2.5	2	2.6

Interpoleerida seda funktsiooni lineaarsplainiga $S^{1,0}(u)$ ja kuupsplainiga $S^{3,2}(u)$. Joonestada interpolatsioonipunktid ja splainid samas teljestikus lõigul $[0, 0.6]$. Arvutada $v_0 = S^{1,0}(0.35)$ ja $v_1 = S^{3,2}(0.35)$.

Lahendus. Kirjutame skripti järgmised read:

```
u=[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6];
v=[0,0.6,2.1,3.1,2.5,2,2.6];
uvec=0:1e-4:0.6;
vvec1=interp1(u,v,uvec,'linear');
vvec2=interp1(u,v,uvec,'spline');
plot(u,v,'*',uvec,vvec1,uvec,vvec2)
xlabel('u')
ylabel('v')
v0=interp1(u,v,0.35,'linear')
v1=interp1(u,v,0.35,'spline')
```

ja käivitame skripti. Tulemuseks saame järgmise joonise. Arvulised vastused on $v_0 = 2.8$ ja $v_1 = 2.9217$.

HARJUTUSÜLESANNE 22. Töötava mootori mähise temperatuuri on mõõdetud 10-minutilise intervalliga ajalõigul 0 kuni 60min. Tulemused on toodud järgmises tabelis:

t(min)	0	10	20	30	40	50	60
T(°C)	30	51	68	79	85.5	89	90

Interpoleerida temperatuurifunktsiooni splainiga $S^{3,2}(t)$. Joonestada interpolatsioonipunktid ja splain samas teljestikus lõigul $[0, 60]$. Arvutada temperatuuri ligikaudne väärtus ajahetkel 54min splaini kasutades. Skript salvestada nime s42.m all.

Lahendus.