

Matemaatiline analüüs II

Jaan Janno

Sisukord

6	Mitmemuutuja funktsioon, selle piirväärtus ja pidevus	1
6.1	Mitmemõõtmelise ruumi mõiste. Punktid ja nende koordinaadid	1
6.2	Jooned ja vektorid mitmemõõtmelises ruumis	4
6.3	Hulgad mitmemõõtmelises ruumis	7
6.4	Mitmemõõtmelised muutuvad suurused ja mitmemuutuja funktsioonid	10
6.5	Parameetrilised pinnad ja kahemuutuja funktsioonid	13
6.6	Nivoo pinnad ja nivoojooned	15
6.7	Mitmemuutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	17
6.8	Kinnises tõkestatud piirkonnas pidevate funktsioonide omadusi .	20
7	Osatuletised ja nende rakendused	23
7.1	Mitmemuutuja funktsiooni osatuletised	23
7.2	Liitfunktsiooni osatuletised. Täistuletis	25
7.3	Ilmutamata ja parameetrilise funktsiooni tuletised	27
7.4	Tuletis etteantud suunas	30
7.5	Diferentseeruv mitmemuutuja funktsioon ja täisdiferentsiaal . . .	33
7.6	Täisdiferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes ja veahinangutes	38
7.7	Pinna puutujatasand, normaalvektor ja normaalsirge	41
7.8	Kõrgemat järku osatuletised. Segatuletiste võrdsus	44
7.9	Väljateooria mõisteid	46
7.10	Kahemuutuja funktsiooni Taylori polünoom	52
7.11	Mitmemuutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	56
7.12	Kahemuutuja funktsiooni tinglike ja absoluutsete ekstreemumite leidmine	59
8	Kahekordne integraal	65
8.1	Kahekordse integraali mõiste ja geomeetriline sisu	65
8.2	Kahekordse integraali omadusi	68
8.3	Kahekordse integraali teisendamine kaksikintegraaliks	69
8.4	Ruumala arvutamine kahekordse integraali abil	76
8.5	Muutujate vahetus kahekordse integraali all. Integreerimine polaarkoordinaatides	78

8.6	Tasandilise kujundi mass ja masskese	81
9	Kolmekordne integraal	85
9.1	Kolmekordse integraali mõiste. Ruumilise keha massi arvutamine	85
9.2	Kolmekordse integraali omadusi	87
9.3	Kolmekordse integraali esitamine kolmikintegraalina	88
9.4	Muutujate vahetus kolmekordse integraali all	91
9.5	Silinderkoordinaadid. Integreerimine silinderkoordinaatides . . .	93
9.6	Sfäärkoordinaadid. Integreerimine sfäärkoordinaatides	95
10	Joonintegraalid ja pindintegraal	99
10.1	Esimest liiki joonintegraali mõiste	99
10.2	Esimest liiki joonintegraali omadusi	102
10.3	Esimest liiki joonintegraali arvutamine parameetrilise joone korral	103
10.4	Teist liiki joonintegraali mõiste	105
10.5	Töö arvutamine teist liiki joonintegraali abil	108
10.6	Teist liiki joonintegraali omadusi	110
10.7	Teist liiki joonintegraali arvutamine parameetrilise joone korral .	111
10.8	Greeni valem	114
10.9	Teist liiki joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimus .	117
10.10	Esimest liiki pindintegraal ja selle rakendused	120
11	Read	123
11.1	Arvrea mõiste. Arvrea koonduvus. Koonduvuse tarvilik tingimus.	123
11.2	Arvridade koonduvustunnused.	127
11.3	Funktsionaalrida ja selle koonduvuspiirkond.	130
11.4	Astmerida. Tayloriga ja McLaurini read.	131
11.5	Trigonomeetriline rida. Fourier rida.	133

Peatükk 6

Mitmemuutuja funktsioon, selle piirväärtus ja pidevus

6.1 Mitmemõõtmelise ruumi mõiste. Punktid ja nende koordinaadid

Ruumi mõõtme võib määratleda kui maksimaalse omavahel ristuvate koordinaattelgede arvu selles ruumis. Näiteks sirgele võib paigutada ainult ühe koordinaattelje. Seega on sirge ühemõõtmeline ruum. Tasandile saab paigutada maksimaalselt kaks ristuvat koordinaattelge. Järelikult on tasand kahemõõtmeline ruum. Lisaks sirgele ja tasandile on visuaalselt kujutletav ka meid ümbritsev kolmemõõtmeline ruum kuhu teatavasti saab paigutada maksimaalselt kolm omavahel ristuvat koordinaattelge.

Maksimaalne omavahel ristuvate koordinaattelgede arv on ruumi mõõtme geomeetiline määratlus. Matemaatilises analüüsis defineeritakse mitmemõõtmeline ruum pisut teistsugusel, abstraktsemal viisil. Selle definitsiooni juurde jõudmiseks vaatleme kõigepealt ühe-, kahe- ja kolmemõõtmeliste ruumide olulisi omadusi.

Alustame ühemõõtmelise ruumi käsitlemisega. Geomeetriliselt on ühemõõtmeline ruum sirge. Valime etteantud sirgel s nullpunkti, pikkusühiku ja positiivse suuna. Sellega muudame sirge s arvteljeks. Igale sirge punktile A vastab parajasti üks reaalarv a ja vastupidi: igale reaalarvule a vastab parajasti üks sirge punkt A . Öeldu põhjal võib sirge ehk ühemõõtmelise ruumi samastada reaalarvude hulgaga $\mathbb{R}$.

Vaatleme järgnevalt kahemõõtmelist ruumi ehk tasandit T . Joonestame sellele kaks nullpunktis ristuvat arvtelge ehk koordinaattelge. Olgu A suvaline punkt tasandil. Punkti A (rist)koordinaatideks nimetatakse selle punkti ristprojektsioone koordinaattelgedele. Punkt A on üheselt määratud oma koordinaatidega a ja b . Seega vastab igale tasandi punktile A parajasti üks järjestatud reaalarvude ehk koordinaatide paar (a, b) ja vastupidi: igale järjestatud reaalar-

arvude (koordinaatide) paarile (a, b) vastab parajasti üks tasandi punkt A . Tähistame kõigi järjestatud reaalarvude paaride hulga sümboliga $\mathbb{R}^2$, st

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Õeldu põhjal võib tasandi ehk kahemõõtmelise ruumi samastada järjestatud reaalarvude paaride hulgaga $\mathbb{R}^2$.

Analoogiliselt käsitleme kolmemõõtmelist ruumi R . Fikseerime ruumis R kolm nullpunktis ristuvat koordinaattelge. Ruumis R asuv punkt A on üheselt määratud kolme reaalarvulise (rist)koordinaadiga a , b ja c (punkti projektioonid koordinaattelgedele). Seega vastab igale ruumi punktile A parajasti üks järjestatud reaalarvude ehk koordinaatide kolmik (a, b, c) ja vastupidi: igale järjestatud reaalarvude (koordinaatide) kolmikule (a, b, c) vastab parajasti üks ruumi punkt A . Tähistame kõigi järjestatud reaalarvude kolmikute hulga sümboliga $\mathbb{R}^3$, st

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Õeldu põhjal võib kolmemõõtmelise ruumi samastada järjestatud reaalarvude kolmikute hulgaga $\mathbb{R}^3$. Taolist loogikat jätkates defineerime neljamõõtmelise ruumi kui järjestatud reaalarvude nelikute, viiemõõtmelise ruumi kui järjestatud reaalarvude viisikute hulga jne.

Mitmemõõtmelise ruumi definitsioon. Hulka, mille elementideks on kõik m reaalarvust koosnevad järjestatud süsteemid $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, nimetatakse *m-mõõtmeliseks ruumiks*, süsteemi $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ selle ruumi *punktiks* ja arve $a_1, a_2, \dots, a_m$ punkti A *koordinaatideks*.

m -mõõtmelist ruumi tähistame sümboliga $\mathbb{R}^m$.

Ruumi $\mathbb{R}^m$ punkte $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ nimetatakse *võrdseteks* ja kirjutatakse

$$A = B,$$

kui nende punktide koordinaadid on võrdsed, st

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_m.$$

Nullpunktiks ehk *koordinaatide alguspunktiks* ruumis $\mathbb{R}^m$ nimetatakse punkti $O = (0, 0, \dots, 0)$.

Kaugus ruumis $\mathbb{R}^m$. Olgu ruumis $\mathbb{R}^m$ antud kaks punkti $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Punktide A ja B vaheline *kaugus* on antud järgmise valemiga:

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_m - b_m)^2}. \quad (6.1)$$

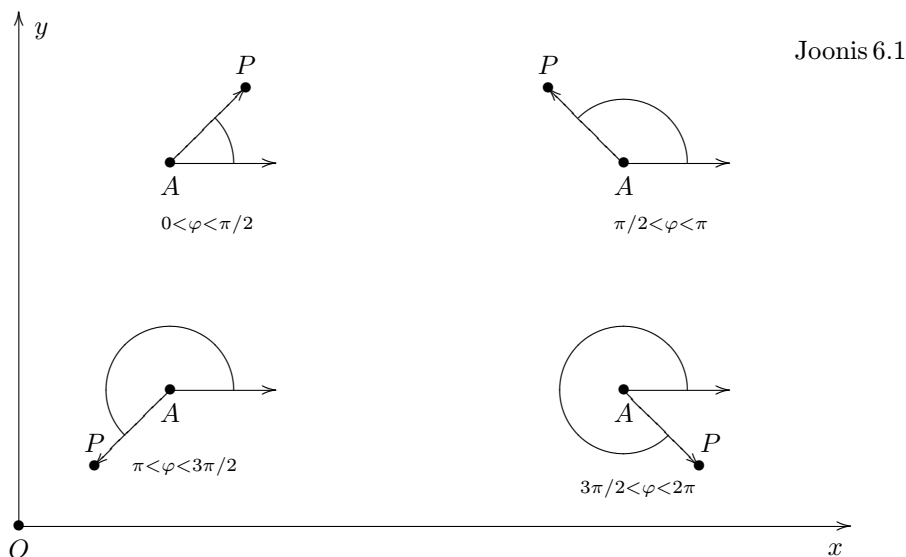
Ühe- kahe- ja kolmemõõtmelisel juhul võrdub punktide A ja B vaheline kaugus nende punktide vahele tõmmatud sirglõigu pikkusega.

Kauguse omadused.

1. $A = B$ siis ja ainult siis, kui $|AB| = 0$.
2. $|AB| = |BA|$.
3. $|AB| \leq |AC| + |CB|$.

Polaarkoordinaadid. Kahe- ja kolmemõõtmelistes ruumides on mõnikord otsustavalt kasulikum asemel kasutada polaar-, silinder- või sfäärkoordinaate (nt kui uuritav punktidehulk on mingi osa ringist, silindrist või sfäärist), Sfäär- ja silinderkoordinaatidega teeme tutvust edaspidi, kolmekordsete integraalide juures. Siinkohal vaatleme lähemalt polaarkoordinaate.

Joonestame tasandil kaks ristuvat koordinaattelge (x - ja y -teljed) ja fikseerime mingi punkti $A = (a, b)$. Punkti $P = (x, y)$ *polaarkoordinaatideks* punkti A suhtes nimetatakse arvupaari ϱ ja φ , kus ϱ on P ja A vaheline kaugus ja φ on nurk, mis tekib liikumisel x -telje suunaliselt vektorilt vektorile $\overrightarrow{AP}$ vastupäeva. Sealjuures nimetatakse arvu ϱ *polaarkauguseks* ja arvu φ *polaarnurgaks*. Polaarnurga muutumiskiirkond on poollõik $[0, 2\pi)$. Erinevad P ja A suhtelised asendid ning neile vastavad polaarnurkade vahemikud on toodud järgneval joonisel.



Märgime, et mõnikord defineeritakse φ negatiivse nurgana, kui P paikneb A -st allpool. Sellisel juhul jääks φ vasakul alumisel joonisel vahemikku $(-\pi, -\pi/2)$ ja paremal alumisel joonisel vahemikku $(-\pi/2, 0)$ ning polaarnurga kogu muutumiskiirkond oleks poollõik $(-\pi, \pi]$.

Punkti P polaar- ja polaarnurga tangens avalduvad selle punkti ristkoordinaatide x ja y kaudu järgmiselt:

$$\varrho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y-b}{x-a}.$$

Nurga φ valem on

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y-b}{x-a} & \text{kui } x-a > 0, y-b > 0 \\ \arctan \frac{y-b}{x-a} + \pi & \text{kui } x-a < 0 \\ \arctan \frac{y-b}{x-a} + 2\pi & \text{kui } x-a > 0, y-b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{kui } x-a = 0, y-b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{kui } x-a = 0, y-b < 0. \end{cases}$$

Olgu märgitud, et juhul, kui $x-a = y-b = 0$, ei ole polaarnurk φ määratud, sest P langeb kokku punktiga A .

Ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiste seostega:

$$x = a + \varrho \cos \varphi, \quad y = b + \varrho \sin \varphi. \quad (6.2)$$

Kõige enam kasutatakse polaarkoordinaate juhul, kui A on koordinaatide alguspunkt $O = (0, 0)$. Siis $a = b = 0$ ja ülaltoodud seostest saame valemid

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi. \quad (6.3)$$

6.2 Jooned ja vektorid mitmemõõtmelises ruumis

Parameetrilised jooned ruumis $\mathbb{R}^m$. Olgu lõigul $[T_1, T_2]$ antud m funktsiooni $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t)$. Vaatleme nendest funktsioonidest moodustatud süsteemi

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \dots \\ x_m = \varphi_m(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \end{cases} \quad (6.4)$$

Süsteem (6.4) määrab iga $t \in [T_1, T_2]$ korral ühe punkti $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Üldiselt vastavad muutuja t erinevatele väärtustele erinevad ruumi punktid. Kui muutuja t jookseb läbi kogu lõigu $[T_1, T_2]$, siis t -le vastav punkt kujundab ruumis $\mathbb{R}^m$ punktihulga, mida nimetatakse *jooneks*. Võrrandeid (6.4) nimetatakse selle joone *parameetrilisteks võrranditeks* ja muutujat t selle joone *parameetriks*.

Parameetri t suurenemisel liigub punkt $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ joonel (6.4) teatud kindlas suunas. Seda suunda loetakse parameetrilise joone (6.4) positiivseks suunaks. Kui funktsioonid $\varphi_i(t)$ on lineaarsed, on tegemist suunatud sirglõiguga.

Olgu antud kaks punkti $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Vaatleme punktist A punkti B suunatud sirglõiku. On lihtne näha, et selle

sirglõigu parameetrilised võrrandid on järgmised:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ \dots \\ x_m = a_m + (b_m - a_m)t, \quad t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (6.5)$$

Tõepoolest: kuna süsteemis (6.5) esinevad funktsioonid on lineaarsed, on tegemist sirglõiguga. Peale selle, võrranditest (6.5) näeme vahetult, et see lõik algab parameetri väärtusele $t = 0$ vastavast punktist $A = (a_1, \dots, a_m)$ ja lõpeb parameetri väärtusele $t = 1$ vastavas punktis $B = (b_1, \dots, b_m)$. Seega määravadki võrrandid (6.5) suunatud sirglõigu AB ruumis $\mathbb{R}^m$.

Suunatud sirglõiku AB nimetatakse *vektori*ks ruumis $\mathbb{R}^m$ ja tähistakse $\overrightarrow{AB}$. Vektori $\overrightarrow{AB}$ *pikkust* tähistame sümboliga $|\overrightarrow{AB}|$. See defineeritakse kui punktide A ja B vaheline kaugus, st

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_m - b_m)^2}.$$

Kui võrrandites (6.5) esinev lõplik parameetri lõik $[0, 1]$ asendada kogu arvteljega $\mathbb{R}$, siis pikeneb suunatud sirglõik $\overrightarrow{AB}$ mõlemast otsast lõpmatuseni ja tulemusena tekib suunatud sirge ehk telg ruumis $\mathbb{R}^m$.

Võrranditest (6.5) saame erijuhuna nullpunktist $O = (0, \dots, 0)$ lähtuva ja punktis $U = (u_1, \dots, u_m)$ lõppeva vektori, so vektori $\overrightarrow{OU}$ parameetrilised võrrandid:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 t \\ x_2 = u_2 t \\ \dots \\ x_m = u_m t, \quad t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (6.6)$$

Vektorit $\overrightarrow{OU}$ nimetatakse punkti U kohavektoriks.

Vektori $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ *koordinaatideks* nimetatakse tema lõpp-punkti U koordinaate. Seega $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Koordinaate kasutades on mugav sooritada mitmesuguseid tehteid vektoritega. Näiteks liitmine ja skalaariga korrutamine on vektoritel $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ defineeritud järgmiselt:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_m + v_m) \quad \text{ja} \quad \lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_m),$$

kus $\lambda \in \mathbb{R}$. Need tehted rahuldavad vektorruumi aksioome (vt lineaaralgebra õpikut). Ruumi, mille punktidel defineeritud vektorite hulk moodustab vektorruumi, nim *afinseks* ruumiks. Seega on $\mathbb{R}^m$ *afinne ruum*.

Vektori $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ pikkus on tema lõpp-punkti kaugus koordinaatide alguspunktist ning on seega arvutatav valemiga

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2}.$$

Vektorit $\vec{u}$ nimetatakse *ühikvektoriks*, kui $|\vec{u}| = 1$.

Vektor $\vec{u}$ (mis on suunatud sirglõik) määrab piltlikult öeldes teatud "suuna" ruumis $\mathbb{R}^m$. Öeldakse, et vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on *samasuunalised*, kui leidub positiivne arv λ nii, et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, ja *vastassuunalised*, kui leidub negatiivne arv λ nii, et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Öeldakse, et vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on *samasihilised* ehk *paralleelsed*, kui nad on kas sama- või vastassuunalised. Samasihiliste vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ korral leidub $\lambda \neq 0$ nii, et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Punkti $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ läbivaks vektori $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ suunaliseks sirgeks loetakse sirget, mis saadakse vektoriga $\vec{u}$ samaväärse punktist A lähtuva vektori pikendamisel mõlemast otsast lõpmatuseni. Taolise sirge parameetriselised võrrandid on järgmised:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t \\ x_2 = a_2 + u_2 t \\ \dots \\ x_m = a_m + u_m t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Vektorite $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ skalaarkorrutiseks nimetatakse järgmist summat:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_m v_m. \quad (6.8)$$

Afinset ruumi, mille vektoritel on defineeritud skalaarkorrutis, nimetatakse *eukleidiliseks* ruumiks. Seega on $\mathbb{R}^m$ *eukleidiline ruum*.

Kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on samasihilised, st $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, siis saame skalaarkorrutise esitada ka järgmiselt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{u}) = u_1 \lambda u_1 + u_2 \lambda u_2 + \dots + u_m \lambda u_m = \lambda |\vec{u}|^2. \quad (6.9)$$

Valemist (6.9) nähtub, et samasuunaliste vektorite skalaarkorrutis on positiivne, st kui $\lambda > 0$, siis $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda |\vec{u}|^2 > 0$, ja vastassuunaliste vektorite skalaarkorrutis on negatiivne, st kui $\lambda < 0$, siis $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda |\vec{u}|^2 < 0$.

Vektorite skalaarkorrutis rahuldab järgmist seost, mida nimetatakse Cauchy-Schwartzi (ehk Cauchy-Bunjakovski) võrratuseks:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|. \quad (6.10)$$

Kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on samasihilised, muutub Cauchy-Schwartzi võrratus võrduseks

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|. \quad (6.11)$$

Tõestame (6.11). Valemit (6.9) ja absoluutväärtuse omadust 2 §1.1 kasutades arvutame:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\lambda| |\vec{u}|^2 = |\vec{u}| |\lambda| |\vec{u}| = |\vec{u}| |\lambda\vec{u}| = |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

Sellega ongi (6.11) tõestatud. Märkime, et erijuhul, kui vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on samasuunalised, siis nende skalaarkorrutis on positiivne. Sel juhul $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ning võrdus (6.11) saab kuju

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|. \quad (6.12)$$

Kui aga $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on vastassuunalised, siis nende skalaarkorrutis on negatiivne. Seega sel juhul $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = -\vec{u} \cdot \vec{v}$ ja kehtib järgmine võrdus:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| |\vec{v}|. \quad (6.13)$$

Vektori $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \times}, 1, 0, \dots, 0)$ suunalist nullpunkti läbivat sirget nimetatakse x_k - teljeks ruumis $\mathbb{R}^m$ ja vektorit e_k x_k - telje suunaliseks ühikvektoriks.

6.3 Hulgad mitmemõõtmelises ruumis

Mitmemõõtmelised kerad. Lahtiseks m -mõõtmeliseks keraks keskpunktiga $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ja raadiusega $r > 0$ nimetatakse hulka

$$U(A, r) = \{B \mid B \in \mathbb{R}^m, |BA| < r\}.$$

Kinniseks m -mõõtmeliseks keraks keskpunktiga $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ja raadiusega $r \geq 0$ nimetatakse hulka

$$\overline{U(A, r)} = \{B \mid B \in \mathbb{R}^m, |BA| \leq r\}.$$

Ühemõõtmeline lahtine kera keskpunktiga a ja raadiusega r on vahemik $(a - r, a + r)$. Vastav kinnine kera on lõik $[a - r, a + r]$. Kahemõõtmeline lahtine kera on ring ilma ringjooneta ja kinnine kera on ring koos ringjoonega. Kolmemõõtmeline lahtine kera on kera ilma sfääriga ja kinnine kera on kera koos sfääriga.

Punkti $A \in \mathbb{R}^m$ ümbruseks nimetatakse suvalist lahtist kera keskpunktiga A .

Hulga sise- ja rajapunktid. Olgu G ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulk. Punkti A nimetatakse hulga G sisepunktiks, kui leidub punkti A ümbrus, mille kõik punktid kuuluvad hulka G .

Teiste sõnadega: hulga sisepunktil leidub ümbrus, mis asub tervenisti selles hulgas.

Näide 1. Olgu $G = [a; b]$. Siis on kõik arvude a ja b vahel asuvad punktid hulga G sisepunktid. Tõepoolest: valides punkti c nii, et $a < c < b$, saame leida c ümbruse $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$, mis asub tervenisti lõigul $[a; b]$, st $(c - \varepsilon; c + \varepsilon) \subset [a; b]$. Joonisel 6.2 on taoline ümbrus piiratud ümarate sulgudega.

Joonis 6.2

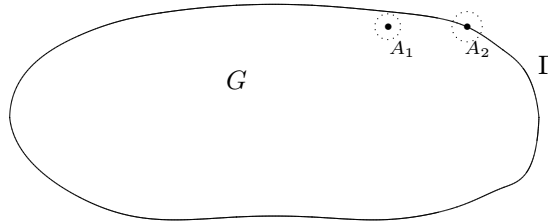


Seevastu lõigu $[a; b]$ otspunktid a ja b ei ole selle lõigu sisepunktid, sest neil ei leidu selliseid ümbrusi, mis asuksid tervenisti lõigul $[a; b]$. Suvalises otspunkti ümbruses leidub punkte, mis asuvad lõigu sees ja punkte, mis jäävad lõigust

välja. Näiteks punkti a ümbruse $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ parem pool, st vahemik $(a; a + \varepsilon)$ sisaldab lõigul $[a; b]$ asuvaid punkte, kuid ümbruse vasak pool, st vahemik $(a - \varepsilon; a)$ jääb aga tervikuna lõigult $[a; b]$ välja.

Näide 2. Olgu tasandil antud kinnine joon Γ . Vaatleme selle joonega piiratud hulka G (joonis 6.3).

Joonis 6.3



Valime hulgast G punkti A_1 nii, et ta ei asu joonel Γ . Siis on A_1 hulga G sisepunkt, sest me saame leida tema ümbruse $U(A_1, \varepsilon)$ nii, et see asub tervenisti hulgas G . Taoline ümbrus on joonisel piiratud punktiirjoonega. Kui aga valida punkt A_2 hulka G ümbritseval joonel Γ , siis see ei ole G sisepunkt, sest ei leidu taolist A_2 ümbrust, mis asuks tervenisti hulgas G . Suvaline A_2 ümbrus sisaldab teatud osa, mis asub hulgas G ja teatud osa, mis jääb hulgast G välja.

Punkti A nimetatakse hulga G *rajapunktiks*, kui tema suvalises ümbruses leidub punkte, mis kuuluvad hulka G ja punkte, mis ei kuulu hulka G .

Näiteks lõigu $[a; b]$ otspunktid a ja b on selle lõigu rajapunktid. Joonisel 6.3 toodud hulga G rajapunktid on kõik need punktid, mis asuvad joonel Γ , sh punkt A_2 .

Kõik hulga G sisepunktid sisalduvad hulgas G . Hulga G rajapunktide seas võib olla selliseid punkte, mis paiknevad hulgas G ja ka selliseid punkte, mis ei paikne hulgas G .

Lahtised ja kinnised hulgad. Kui hulk koosneb ainult sisepunktidest, siis nimetatakse seda hulka *lahtiseks*. Kui hulk sisaldab kõiki oma rajapunkte, siis nimetatakse seda hulka *kinniseks*.

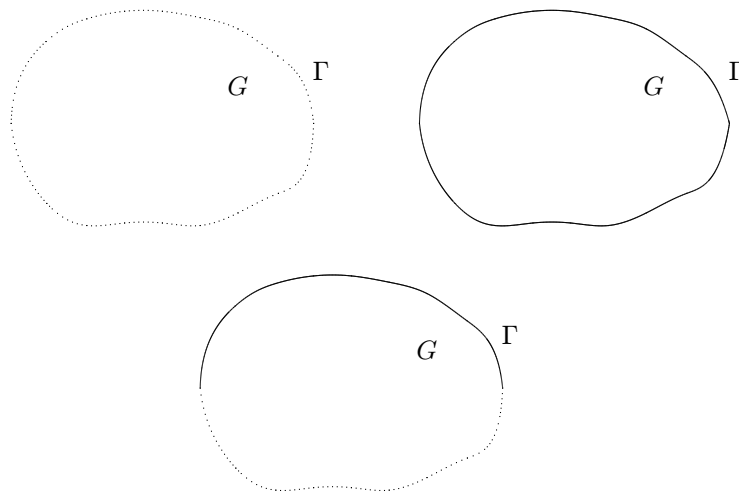
Näited 1. Vahemik $(a; b)$ on lahtine hulk, kuna ta koosneb ainult sisepunktidest. Lahtised on ka kõikvõimalikud vahemike ühendid, näiteks $(a_1; b_1) \cup (a_2; b_2)$. Lõik $[a; b]$ on aga kinnine hulk, sest ta sisaldab mõlemat oma rajapunkti a ja b . Kinnised on ka lõikude ühendid, nt $[a_1; b_1] \cup [a_2; b_2]$. Seevastu poollõigud $[a; b)$ ja $(a; b]$ ei ole ei kinnised ega lahtised. Nad sisaldavad lisaks sisepunktidele ka rajapunkte, kuid mitte kõiki rajapunkte. Lõpmatu vahemik $(a; \infty)$ on lahtine hulk, sest ta koosneb ainult sisepunktidest. Lõpmatu poollõik $[a; \infty)$ on

aga kinnine hulk, sest ta sisaldab oma ainsat rajapunkti a .

Näited 2. Vaatleme joonisel 6.4 kujutatud kolme erinevat hulka G . Eeldame, et pideva joonega tõmmatud osa rajast Γ kuulub hulka G ja katkendliku joonega tõmmatud osa rajast Γ ei kuulu hulka G . Joonisel vasakul üleval kujutatud hulk on lahtine ja paremal üleval kujutatud hulk on kinnine. Kuid allpool kujutatud hulk ei ole ei kinnine ega lahtine.

Lahine kera on lahtine hulk ja kinnine kera on kinnine hulk.

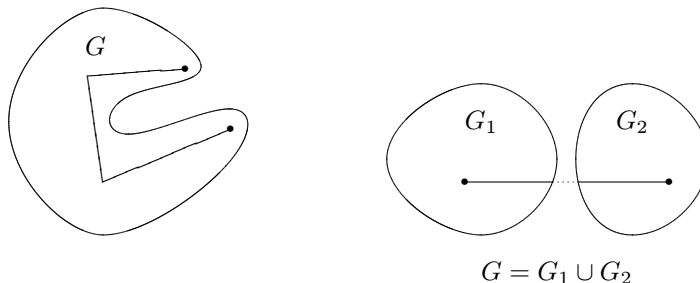
Joonis 6.4



Sidusa hulga mõiste. Hulka G nimetatakse *sidusaks*, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada pideva joonega, mille kõik punktid kuuluvad hulka G .

Näiteks joonisel 6.5 toodud vasakpoolne hulk G on sidus. Valides kaks suvalist punkti sellest hulgast, saame me neid punkte ühendada pideva joonega nii, et see joon jääb tervenisti hulka G . Seevastu parempoolne, kahest eraldiseisvast osast G_1 ja G_2 koosnev hulk ei ole sidus. Valides ühe punkti alamhulgast G_1 ja teise punkti alamhulgast G_2 , ei saa me neid ühendada pideva joonega, mis asuks tervenisti hulgas G .

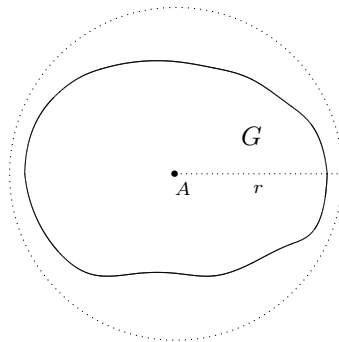
Joonis 6.5



Tõkestatud hulga mõiste. Hulka G nimetatakse *tõkestatuks*, kui leidub (kinnine või lahtine) kera, mille alamhulgaks on hulk G .

Teiste sõnadega: tõkestatud hulk "mahub" mingisse kerasse.

Näiteks lõigud, lõplikud vahemikud, poollõigud ja nende lõplikud ühendid on tõkestatud. Lõikude ühend $[1; 2] \cup [3; 5]$ "mahub" ühemõõtmelisse kinnisesse kerasse keskpunktiga 3 ja raadiusega 2, st hulka $[1; 5]$. Joonisel 6.6 on kujutatud kahemõõtmeline tõkestatud hulk G . See "mahub" kerasse keskpunktiga A ja raadiusega r .



Joonis 6.6

Hulk ei ole tõkestatud, kui temas leidub punkte, mille kaugus koordinaatide alguspunktist võib olla kuitahes suur. Näiteks pooltasand $\{P = (x, y) \mid y \geq 0\}$ ei ole tõkestatud.

Ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulki nimetame edaspidi ka *piirkondadeks*.

6.4 Mitmemõõtmelised muutuvad suurused ja mitmemuutuja funktsioonid

Mitmemõõtmelised muutuvad suurused. Olgu $x_1, x_2, \dots, x_m$ reaalarvulised muutuvad suurused. Suurustest $x_1, x_2, \dots, x_m$ moodustatud järjestatud süsteemi $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ nimetatakse *m-mõõtmeliseks muutuvaks suuruseks* ehk *m-mõõtmeliseks muutujaks*.

m -mõõtmelise muutuva suuruse $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ reaalarvulisi komponente $x_1, x_2, \dots, x_m$ nimetatakse suuruse P koordinaatideks.

Kuna muutujate $x_1, x_2, \dots, x_m$ võimalikeks väärtusteks on reaalarvud, siis m -mõõtmelise muutuva suuruse $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ võimalikeks väärtusteks on ruumi $\mathbb{R}^m$ punktid.

Muutuva suuruse $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ kõigist võimalikest väärtustest moodustatud ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulka nimetatakse selle suuruse muutumispiirkonnaks.

Mitmemuutuja funktsiooni mõiste. Olgu antud m -mõõtmeline muutuv suurus $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ muutumispiirkonnaga D ja reaalarvuline muutuv suurus z .

m -muutuja funktsiooniks nimetatakse kujutist, mis seab suuruse P igale väärtusele tema muutumispiirkonnast D vastavusse suuruse z ühe kindla väärtuse.

Muutujat P nimetatakse seejuures sõltumatuks muutujaks ehk argumentiks, muutujat z sõltuvaks muutujaks ja hulka D määramispiirkonnaks.

Märkus: Sõna "argument" kasutame edaspidi ka mitmemõõtmelise muutuja P koordinaatide $x_1, x_2, \dots, x_m$ jaoks. Näiteks x_1 on funktsiooni esimene argument, x_2 teine argument jne.

Mitmemuutuja funktsioonide tähistamiseks kasutatakse üldiselt samu tähti kui ühe muutuja funktsioonide tähistamiseks, näiteks $f, g, u, v, \varphi, \psi$ jne. Sageli kasutatakse ka suuri tähti F, G, Φ, Ψ jne.

Olgu antud funktsioon f , mille argumentiks on $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja sõltuvaks muutujaks z . Funktsiooni f väärtuseks kohal P nimetatakse muutuja z seda väärtust, milleks funktsioon f kujutab argumenti P ja tähistatakse sümboliga $f(P)$ või $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Seega kehtib seos

$$z = f(P) \quad \text{või} \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (6.14)$$

mis väljendab muutuja z "seotust" argumentiga P funktsiooni f kaudu.

Vaatleme näiteks maa raskusväljas asetsevat keha. Kehale mõjuvat raskusjõudu tähistame sümboliga F , massi sümboliga m ja keha kaugust maapinnast sümboliga r . Raskusjõud F sõltub massist m ja kaugusest r . Seega esineb antud füüsikalises mudelis kahemuutuja funktsioon, mille argumentideks on m ja r (ehk kahemõõtmeline muutuv suurus (m, r)) ning sõltuvaks muutujaks on F . Füüsikas kasutatakse sageli sõltuva muutuja ja funktsiooni jaoks samu tähiseid. Seega võib antud näites esinevat sümbolit F kasutada nii raskusjõu tähisena kui ka selle funktsiooni tähisena, mis seab massile ja kaugusele vastavusse raskusjõu väärtuse. Funktsiooni F väärtus kohal (m, r) kirjutatakse kujul $F(m, r)$. Seega kehtib seos $F = F(m, r)$. Viimase seose vasakul poolel esineb F raskusjõu tähises ja paremal poolel funktsiooni tähises.

Matemaatikas kasutatakse kahemuutuja funktsiooni argumentide tähistamiseks sümbolite x_1 ja x_2 asemel enamasti tähti x ja y . Sellisel juhul on kahemuutuja funktsiooni võrrand järgmine: $z = f(x, y)$. Kolmemuutuja funktsiooni argumentide jaoks kasutame tähti x, y, z ja sõltuva muutuja jaoks tähte u . Sellisel juhul kirjutame $u = f(x, y, z)$.

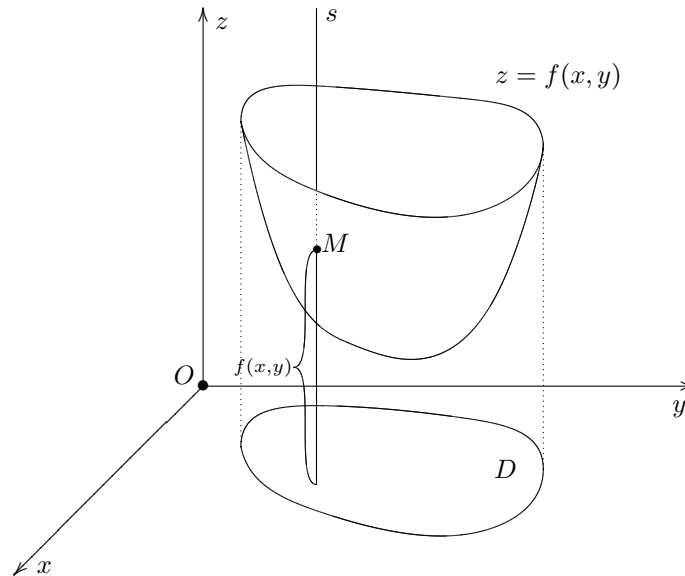
Mitmemuutuja funktsiooni graafik. Olgu antud m -muutuja funktsioon $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ määramispiirkonnaga D . Selle funktsiooniga on seotud $m + 1$ muutujat, mis moodustavad $m + 1$ -mõõtmelise suuruse $M = (x_1, x_2, \dots, x_m, z)$. Kuna f seob viimast muutujat z muutujatega $x_1, \dots, x_m$, on antud suuruse valem järgmine: $M = (x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m))$. Võtame kokku kõik taolised punktid M . Saame järgmise ruumi $\mathbb{R}^{m+1}$ alamhulga:

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m)) \mid P = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D\}.$$

See hulk ongi funktsiooni f graafik.

Teiste sõnadega: graafik koosneb kõigist sellistest ruumi $\mathbb{R}^{m+1}$ punktidest, mille m esimest koordinaati on $x_1, x_2, \dots, x_m$ ja viimane, $m+1$ -ne koordinaat on $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, kusjuures m esimese koordinaadiga määratud punkt $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ jookseb läbi funktsiooni f määramispiirkonna D .

Ühemuutuja funktsiooni graafikut käsitlesime §1.2. Vaatleme siinkohal kahe-
muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafiku omadusi. Tegemist on teatud pinnaga kolmemõõtmelises ruumis (joonis 6.7). See pind koosneb parajasti sellistest punktidest $M = (x, y, z)$, mille koordinaadid x, y ja z rahuldavad võrrandit $z = f(x, y)$. Pinna $z = f(x, y)$ projektsioon xy -tasandile langeb kokku funktsiooni f määramispiirkonnaga D . Suvaline z -teljega paralleelne sirge saab pinda $z = f(x, y)$ lõigata maksimaalselt ühes punktis (vt sirge s ja punkt M joonisel 6.7). Funktsiooni väärtust $f(x, y)$ võib tõlgendada graafiku punkti kõrgusena xy -tasandi suhtes.



Joonis 6.7

Algebralised tehted mitmemuutuja funktsioonidega. Olgu antud kaks m -muutuja funktsiooni $z = f(P)$ ja $z = g(P)$ ühise määramispiirkonnaga D . Funktsioonide f ja g summa on defineeritud kui kujutis, mis seab igale $P \in D$ vastavusse muutuja z väärtuse valemiga $z = f(P) + g(P)$. Funktsioonide f ja g summa loomulik tähis on $f + g$. Seega kehtib f ja g summa puhul seos $z = (f+g)(P) = f(P) + g(P)$. Analoogiliselt defineeritakse ka funktsioonide f ja g vahe $z = (f-g)(P) = f(P) - g(P)$, korrutis $z = (fg)(P) = f(P)g(P)$ ja jagatis $z = (f/g)(P) = f(P)/g(P)$. Summa, vahe ja korrutise määramispiirkonnaks on D . Jagatise määramispiirkond koosneb kõigist sellistest $P \in D$, mille korral $g(P) \neq 0$.

Mitmemuutuja liitfunktsiooni mõiste. Olgu antud n -muutuja funktsioon

$$z = F(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Oletame et funktsiooni F argumentid $u_1, u_2, \dots, u_n$ sõltuvad mingist m -mõõtmelisest muutujast $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. See tähendab, et

$$u_1 = \varphi_1(P), u_2 = \varphi_2(P), \dots, u_n = \varphi_n(P),$$

kus $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ on m -muutuja funktsioonid. Sellisel juhul määravad funktsioonid F ja $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ liitfunktsiooni $z = f(P)$ valemiga

$$f(P) = F(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)).$$

6.5 Parameetrilised pinnad ja kahemuutuja funktsioonid

Parameetrilised pinnad. Olgu kahemõõtmelises piirkonnas G antud kolm funktsiooni $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ ja $z = \chi(u, v)$. Kirjutame need funktsioonid üles süsteemina

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G. \quad (6.15)$$

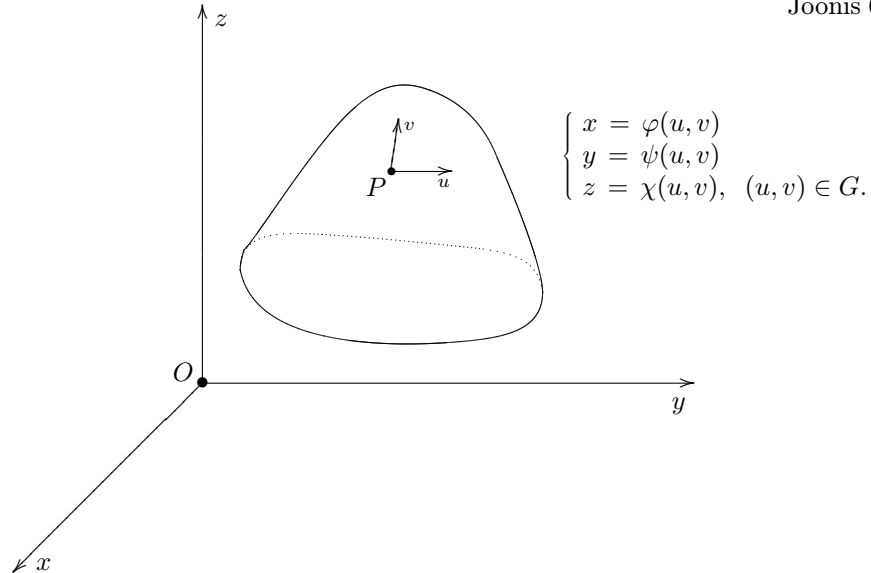
Süsteem (6.15) määrab iga $(u, v) \in G$ korral ühe kindla arvukolmiku ehk kolmemõõtmelise ruumi punkti

$$P = (x, y, z) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Üldiselt vastavad muutujate u ja v erinevatele väärtustele ka erinevad ruumi punktid. Kui arvupaar (u, v) jookseb läbi kogu piirkonna G , siis kujundab punkt P ruumis teatud pinna. Võrrandeid (6.15) nimetatakse selle pinna *parameetrilisteks võrranditeks* ja muutujaid u ja v selle pinna *parameetriteks*.

Pind on kahemõõtmeline objekt kolmemõõtmelises ruumis. Parameetrid u ja v ongi seotud pinna kahe mõõtmega. Suurendades parameetrit u liigub punkt P pinnal ühes suunas ja suurendades parameetrit v liigub punkt P pinnal teises suunas (vt joonis 6.8).

Joonis 6.8



Näide. Olgu antud järgmine parameetriline pind:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \alpha \\ y = r \sin \varphi \sin \alpha \\ z = r \cos \alpha, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \alpha \in [0, \pi], \quad (6.16)$$

kus $r > 0$ on konstant. Antud juhul on pinna parameetriteks φ ja α . Arvutame:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = \\ &= r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = \\ &= r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = r^2. \end{aligned}$$

Näeme, et pinna punktid rahuldavad võrrandit $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Tegemist on sfääriga, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunkt $O = (0, 0, 0)$ ja raadius on r . Seega on (6.16) sfääri parameetrilised võrrandid.

Edaspidi, kolmekordse integraali käsitlemise juures, näeme, et φ on punkti $P = (x, y, z)$ projektsiooni polaarnurk xy -tasandil ja α on vektori $\overrightarrow{OP}$ ja z -telje vaheline nurk.

Parameetriline kahemuutuja funktsioon. Vaatleme kahemuutuja funktsiooni $z = f(x, y)$. Toome lisaks muutujatele x ja y sisse kaks uut muutujat u ja v (nn parameetrid). Olgu x ja y parameetrite u ja v funktsioonid, st

$$x = \varphi(u, v) \quad \text{ja} \quad y = \psi(u, v).$$

Siis saab ka muutuja z avaldada parameetrite u ja v kaudu. Tõepoolest: kasutades muutujate x ja y valemeid arvutame:

$$z = f(x, y) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Tähistame $\chi(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Saame võrrandi

$$z = \chi(u, v).$$

Võtame x , y ja z võrrandid kokku ühte süsteemi. Kui (u, v) muutumispiirkond on hulk G , näeb see süsteem välja järgmine:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in G. \end{cases} \quad (6.17)$$

Võrrandeid (6.17) nimetatakse funktsiooni $z = f(x, y)$ *parameetrilisteks võrranditeks*. Võrranditega (6.17) antud pind on ühtlasi funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks.

Näide. Leiame funktsioonile $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ parameetrilise kuju. Teeme seda nii, et esitame x ja y polaarkoordinaatide kaudu koordinaatide alguspunkti suhtes, st $x = \varrho \cos \varphi$ ja $y = \varrho \sin \varphi$, kus $\varrho \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Arvutame: $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \varrho$. Antud funktsiooni parameetiline kuju on järgmine:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = \varrho, \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

6.6 Nivoo-pinnad ja nivoojooned

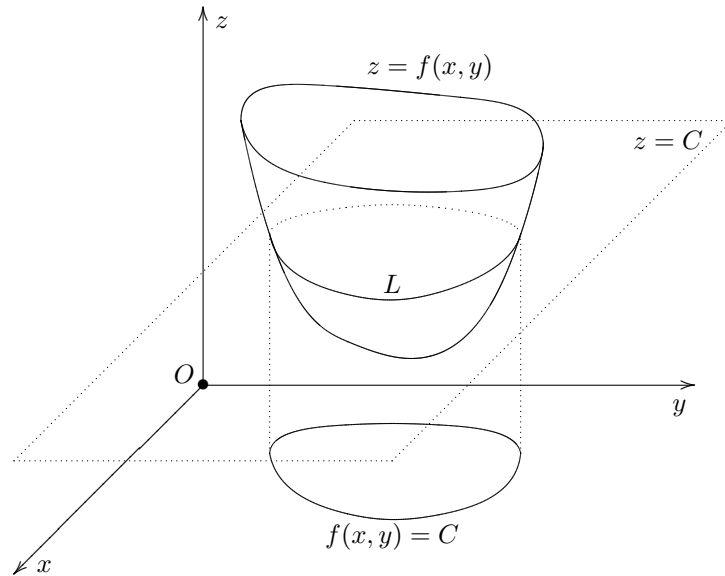
Olgu $u = f(x, y, z)$ kolmemuutuja funktsioon ja C etteantud konstant. Vaatleme f määramispiirkonnas D selliseid punkte (x, y, z) , mille korral $f(x, y, z) = C$. Need punktid moodustavad teatud pinna piirkonnas D . Taolist pinda nimetatakse funktsiooni f *nivoo-pinnaks*. Nivoo-pind sõltub etteantud konstandist C . See tähendab et konstandi C muutmisega muutub ka nivoo-pind.

Näide 1. Paiknegu kolmemõõtmelises ruumis koordinaatide alguspunkti isoleeritud elektrilaeng. Tähistame selle laengu poolt tekitatud elektrivälja potentsiaali $U(x, y, z)$ - ga. Kui laeng paikneb homogeenes (so ühetaolises) keskkonnas, siis sõltub potentsiaal punkti $P = (x, y, z)$ kaugusest koordinaatide alguspunktist, kuid ei sõltu vektori $\vec{OP}$ suunast. Seega on funktsiooni U nivoo-pinnad kontsentrilised sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguspunkti. Iga taolise sfääri peal on potentsiaalil konstantne väärtus. Mida suurem on sfääri raadius, seda väiksem on potentsiaal sellel sfääril.

Näide 2. Analooilise näite saab tuua ka gravitatsioonivälja kohta. Paiknegu kolmemõõtmelises ruumis koordinaatide alguspunkti isoleeritud keha. Olgu selle keha poolt tekitatud gravitatsioonivälja potentsiaal $U(x, y, z)$. Tegemist on

jällegi suurusega, mis ei sõltu suunast, vaid punkti $P = (x, y, z)$ kaugusest koordinaatide alguspunktist. Seega on funktsiooni U nivooinnad kontsentrilised sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguspunktis.

Joonis 6.9



Olgu $z = f(x, y)$ kahemuutuja funktsioon piirkonnas D ja C etteantud konstant. Vaatleme piirkonnas D punkte (x, y) , mille korral $f(x, y) = C$. Need punktid moodustavad joone piirkonnas D . Seda joont nimetatakse funktsiooni f nivoojooneks. Nivoojoon sõltub konstandist C .

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojoon $f(x, y) = C$ on kujutatud joonisel 6.9. See langeb kokku pinna $z = f(x, y)$ ja tasandi $z = C$ lõikejoone L projektsiooniga xy -tasandile. Joonestades erinevatele C väärtustele vastavad nivoojooned xy -tasandile, saame nivoojoonte parve. Erinevad jooned selles parves vastavad pinna $z = f(x, y)$ erinevatele kõrgustasemetele.

Kahemuutuja funktsiooni esitamist nivoojoonte abil kasutatakse praktikas üsna palju. Kõige tuntum näide on vast maastiku reljeefi kujutamine kaardil. Looduses ühel ja samal kõrgusel asuvad punktid on kaardil ühendatud nivoojoonega (nt kõrgusele 50m vastab üks nivoojoon, kõrgusele 100m teine nivoojoon jne).

6.7 Mitmemuutuva funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Mitmemõõtmelise muutuva suuruse piirväärtus.

m -mõõtmelise muutuva suuruse $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ kohta öeldakse, et ta on *järjestatud*, kui tema väärtustest on moodustatud järjestatud hulk, st hulk, mille iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda kumb neist on eelnev ja kumb järgnev.

Olgu P järjestatud muutuv suurus. Punkti A nimetatakse muutuva suuruse P *piirväärtuseks*, kui iga etteantud kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist suuruse P väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad punkti A ümbrusesse $U(A, \varepsilon)$.

Kui punkt A on suuruse P piirväärtus, siis öeldakse, et suurus P läheneb punktile A ehk koondub punktiks A ja kirjutatakse

$$P \rightarrow A \quad \text{või} \quad \lim P = A.$$

Kehtivad järgmised väited.

1. Suurus P läheneb punktile A siis ja ainult siis, kui suuruse P ja punkti A vaheline kaugus läheneb nullile, st

$$P \rightarrow A \quad \Leftrightarrow \quad |PA| \rightarrow 0.$$

2. Suurus $P = (x_1, \dots, x_m)$ läheneb punktile $A = (a_1, \dots, a_m)$ siis ja ainult siis, kui suuruse P kõik koordinaadid lähenevad punkti A koordinaatidele, st

$$P \rightarrow A \quad \Leftrightarrow \quad x_i \rightarrow a_i \quad \text{iga } i = 1, 2, \dots, m \text{ korral.}$$

Mitmemuutuva funktsiooni piirväärtus.

Olgu antud m -muutuva funktsioon f argumentiga P . Kui muutuv suurus P on järjestatud, siis saame me järjestada ka funktsiooni väärtused $f(P)$ lugedes funktsiooni kahest väärtusest järgnevaks selle, mis vastab argumenti P järgnevale väärtusele.

m -muutuva funktsioonil f on *piirväärtus* b punktis A , kui suvalises piirprotsessis $P \rightarrow A$, mis rahuldab tingimust $P \neq A$, funktsiooni väärtus $f(P)$ läheneb ühele ja samale arvule b .

Sellisel juhul kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow A} f(x) = b$$

või

$$f(P) \rightarrow b \quad \text{kui} \quad P \rightarrow A.$$

Näide 1. Arvutame piirväärtuse

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 2y^2 + 3x}{x - x^2 - y^2}.$$

Kasutame selleks polaarkoordinaate. Punkti $P = (x, y)$ polaarkoordinaadid nullpunkti $O = (0, 0)$ suhtes on ϱ ja φ , kus ϱ on P ja O vaheline kaugus, st $\varrho = |PO|$ ja φ on nurk, mis tekib liikumisel x -telje suunaliselt vektorilt vektorile $\overrightarrow{OP}$ vastupäeva. Kehtivad järgmised valemid:

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

Nagu eespool mainitud, piirprotsess $P \rightarrow O$ on samaväärne piirprotsessiga $\varrho = |PO| \rightarrow 0$. Seega asendame piirprotsessi $P \rightarrow O$ piirprotsessiga $\varrho \rightarrow 0$ ja läheme piirväärtuse all olevas funktsioonis üle polaarkoordinaatidele. Saame

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow O} \frac{2x^2 + 2y^2 + 3x}{x - x^2 - y^2} &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2\varrho^2 \cos^2 \varphi + 2\varrho^2 \sin^2 \varphi + 3\varrho \cos \varphi}{\varrho \cos \varphi - \varrho^2 \cos^2 \varphi - \varrho^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2\varrho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 3\varrho \cos \varphi}{\varrho \cos \varphi - \varrho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2\varrho^2 + 3\varrho \cos \varphi}{\varrho \cos \varphi - \varrho^2} = \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2\varrho + 3 \cos \varphi}{\cos \varphi - \varrho} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cos \varphi}{\cos \varphi - 0} = 3. \end{aligned}$$

Suvalises piirprotsessis $P \rightarrow O$, kus $P \neq O$, läheneb funktsiooni $\frac{2x^2 + 2y^2 + 3x}{x - x^2 - y^2}$ väärtus ühele ja samale arvule 3. Seega on ülendes antud piirväärtus võrdne kolmega.

Näide 2. Arvutame

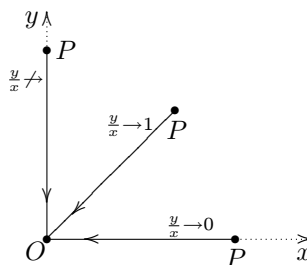
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x}.$$

Kasutame jällegi polaarkoordinaate:

$$\lim_{P \rightarrow O} \frac{y}{x} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho \sin \varphi}{\varrho \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi.$$

Funktsioonil $\frac{y}{x}$ puudub piirväärtus punktis O , sest suurus $\frac{y}{x}$ ei lähene suvalises piirprotsessis $P \rightarrow O$, kus $P \neq O$, ühele ja samale arvule. Erinevates piirprotsessides $P \rightarrow O$ läheneb $\frac{y}{x}$ erinevatele arvudele. Näiteks kui P läheneb O -le polaarnurga $\varphi = 0$ all, siis läheneb $\frac{y}{x}$ arvule $\tan 0 = 0$, kui P läheneb O -le polaarnurga $\varphi = \frac{\pi}{4}$ all, siis läheneb $\frac{y}{x}$ arvule $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, kui P läheneb O -le polaarnurga $\varphi = \frac{\pi}{2}$ all, siis ei lähene $\frac{y}{x}$ ühelegi lõplikule arvule, sest $\tan \frac{\pi}{2}$ ei ole määratud (vt joonist).

Joonis 6.10



Mitmemuutuja funktsiooni pidevus.

Olgu antud mitmemuutuja funktsioon $z = f(P)$ määramispiirkonnaga D . Funktsiooni f nimetatakse *pidevaks* punktis A , kui

1. f on määratud punktis A , st $A \in D$,
2. eksisteerib piirväärtus $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$,
3. $\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A)$.

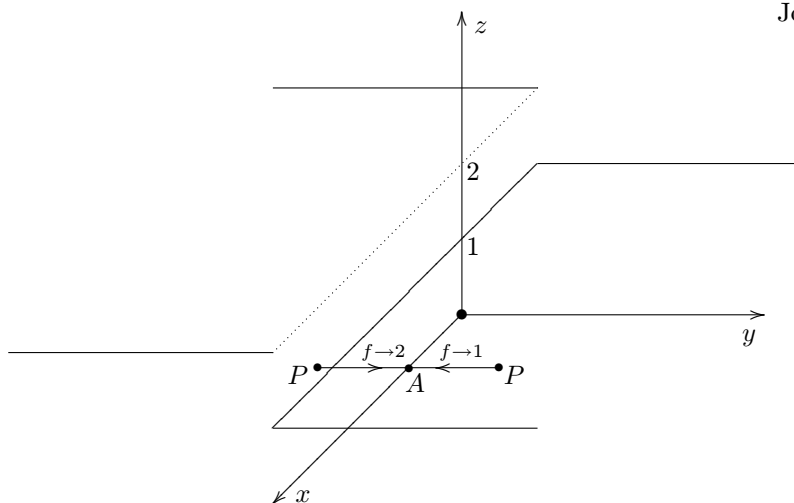
Funktsiooni f nimetatakse pidevaks piirkonnas G , kui ta on pidev selle piirkonna kõigis punktides.

Matemaatiline analüüs I kursuses §2.9 nägime, et pideva ühemuutuja funktsiooni graafik on pidev joon (st joon mis ei oma katkevuspunkte). See omadus on laiendatav pideva mitmemuutuja funktsiooni graafikule. Näiteks pideva kahemuutuja funktsiooni graafik on pidev pind (st pind mis ei oma katkevuspunkte ega katkevusjooni).

Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{kui } y < 0 \\ 1 & \text{kui } y \geq 0. \end{cases}$$

Joonisel 6.11 kujutatud graafikult on näha, et antud funktsioon on pidev kõikjal välja arvatud joon $y = 0$. Selle joone kohal graafik katkeb. Joonel $y = 0$ asuvates punktides on rikutud pidevuse definitsiooni tingimus 2, st funktsioonil puudub piirväärtus $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$. Kui A asub joonel $y = 0$, siis lähenedes punktiga P punktile A pooltasandilt $y > 0$, läheneb funktsiooni väärtus arvule 1. Kui aga läheneda punktiga P punktile A pooltasandilt $y < 0$, läheneb funktsiooni väärtus arvule 2. Ei ole olemas sellist arvu, millele funktsioon läheneks kõigis piirprotsessides $P \rightarrow A$, kus $P \neq A$.



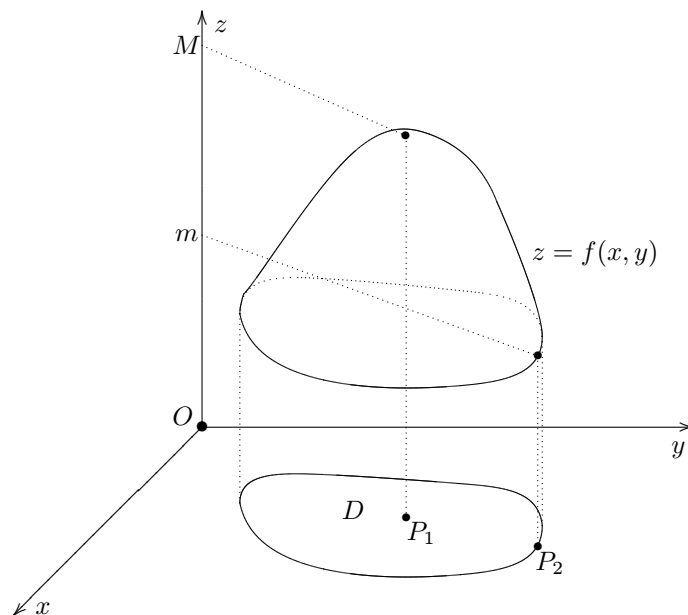
Joonis 6.11

Summa, vahe, korrutise ja jagatise pidevus. Kui mitmemuutuja funktsioonid f ja g on pidevad punktis A , siis on selles punktis pidevad ka summa $f + g$, vahe $f - g$, korrutis fg ning eeldusel $g(A) \neq 0$ ka jagatis $\frac{f}{g}$.

Liitfunktsiooni pidevus. Olgu $u_1 = \varphi_1(P)$, $u_2 = \varphi_2(P)$, $\dots$, $u_n = \varphi_n(P)$ argumentid $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ sõltuvad m -muutuja funktsioonid. Peale selle olgu $z = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ argumentid $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sõltuv n -muutuja funktsioon. Vaatleme liitfunktsiooni

$$z = f(P) = F(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)).$$

Kehtib järgmine väide. Kui funktsioonid $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ on pidevad punktis A ja funktsioon F on pidev punktis $B = (\varphi_1(A), \varphi_2(A), \dots, \varphi_n(A))$, siis on liitfunktsioon f pidev punktis A .



Joonis 6.12

6.8 Kinnises tõkestatud piirkonnas pidevate funktsioonide omadusi

Olgu antud m -muutuja funktsioon f , mis on määratud piirkonnas D .

Funktsiooni absoluutsed ekstreemumid piirkonnas D .

Kui leidub punkt P_1 piirkonnas D nii, et iga teise punkti P korral sellest piirkonnast kehtib võrratus $f(P_1) \geq f(P)$, siis nimetatakse arvu $f(P_1)$ funktsiooni f suurimaks väärtuseks ehk absoluutseks maksimumiks piirkonnas D .

Kui leidub punkt P_2 piirkonnas D nii, et iga teise punkti P korral sellest piirkonnast kehtib võrratus $f(P_2) \leq f(P)$, siis nimetatakse arvu $f(P_2)$ funktsiooni f vähimaks väärtuseks ehk absoluutseks miinimumiks piirkonnas D .

Funktsiooni absoluutseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni absoluutseteks ekstreemumiteks.

Kahemuutuja funktsiooni graafikul on absoluutse maksimumi korral kõrgeim punkt ja absoluutse miinimumi korral madalaim punkt (vt joonis 6.12, seal on suurim väärtus tähistatud M -ga ja vähim väärtus m -ga).

Toome välja kolm olulist kinnises tõkestatud piirkonnas pidevate funktsioonide omadust. Tegemist on §2.11 esitatud lõigul pidevate funktsioonide omaduste üldistustega.

Omadus 1. Kinnises tõkestatud piirkonnas pidev funktsioon saavutab oma suurima ja vähima väärtuse selles piirkonnas.

Ühe- ja kahemuutuja funktsioonide korral saab selles omaduses veenduda funktsioonide graafikuid kasutades. Kinnises tõkestatud piirkonnas pideva ühe- ja kahemuutuja funktsiooni graafik on selle piirkonna kohal pidev joon. Taolisel joonel on olemas nii kõrgeim kui ka madalaim punkt (nagu näiteks joonisel 2.13). Seega on funktsioonil olemas absoluutsed ekstreemumid vaadeldavas piirkonnas. Kui kahemuutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev kinnises tõkestatud piirkonnas, siis on selle funktsiooni graafik antud piirkonna kohal pidev pind. Taolisel pideval pinnal on samuti olemas nii kõrgeim kui ka madalaim punkt (nagu näiteks joonisel 6.12), millest tuleneb, et funktsioonil on olemas absoluutsed ekstreemumid selles piirkonnas.

Kui mõni omaduse 1 eeldustest ei ole täidetud, siis ei tarvitse funktsioon saavutada oma absoluutseid ekstreemume. Näiteks lõigul $[0; 2]$ (mis on kinnine ja tõkestatud hulk) defineeritud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{kui } x \in [0; 2) \\ 1 & \text{kui } x = 2 \end{cases}$$

ei ole pidev punktis $x = 2$ ja §2.11 me nägime, et see funktsioon ei saavuta oma suurimat väärtust lõigul $[0; 2]$. Kui me jätame selle funktsiooni määramispiirkonnast välja katkevuspunkti $x = 2$, siis saame funktsiooni

$$f(x) = x, \quad x \in [0; 2),$$

mis on küll pidev kõikjal oma määramispiirkonnas $[0; 2)$, kuid määramispiirkond ei ole enam kinnine hulk. Taolisel funktsioonil puudub samuti suurim väärtus. Põhjus on selles, et funktsiooni väärtuste hulk $Y = [0; 2)$ ei sisalda suurimat arvu. Ükskõik millise funktsiooni väärtuse me ka ei valiks, alati saame me leida sellest veel suurema funktsiooni väärtuse. Valides näiteks funktsiooni väärtuse $y = 1.9$ saame me leida sellest veel suurema, nt $y = 1.99$, viimasest omakorda veel suurema, nt $y = 1.999$ jne.

Lihtne on tuua näiteid ka funktsioonidest, mis on pidevad kinnisel ja tõkestamata hulgal ning ei saavuta seal vähemalt ühte oma absoluutsetest ekstreemumitest. Näiteks funktsioon

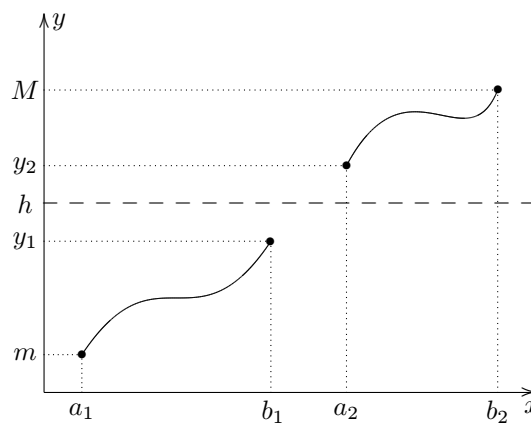
$$f(x) = x, \quad x \in [0; \infty)$$

on pidev kõikjal oma määramispiirkonnas $[0; \infty)$, mis on kinnine ja tõkestamata. Funktsiooni väärtuste hulk on samuti $Y = [0, \infty)$. Funktsioon võib saavutada ükskõik kui suuri väärtusi, seega suurim väärtus puudub.

Omadus 2. Kinnises tõkestatud sidusas piirkonnas pidev funktsioon saavutab selles piirkonnas iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel.

Ühe- ja kahemuutuja funktsioonide korral saab selle omaduse õigsuses veenduda jällegi graafikuid kasutades. Kui me tõmbame pideva joone (pideva pinna) kõrgeima ja madalaima punkti vahele horisontaalsirge (horisontaaltasandi), siis see sirge (tasand) peab antud joont (pinda) kuskil lõikama.

Kui funktsioon ei ole pidev, siis omadus 2 üldiselt ei kehti. Näiteks võib tuua joonisel 2.15 kujutatud katkeva funktsiooni. Antud funktsioon ei saavuta oma vähima ja suurima väärtuse vahel neid väärtusi, mis asuvad poolõigul $[b_1; b_2)$.



Joonis 6.13

Paneme tähele, et omaduse 2 eelduste hulgas on nõutud ka hulga sidusust. Funktsioon, mis on pidev tõkestatud ja kinnisel, kuid mittesidusal hulgal, ei tarvitse seal saavutada kõiki väärtusi oma absoluutsete ekstreemumite vahel. Seda võib täheldada joonisel 6.13 kujutatud funktsiooni korral. Funktsioon on pidev kinnises tõkestatud hulgal $[a_1; b_1] \cup [a_2; b_2]$, mis ei ole sidus. Kui valida arv h funktsiooni absoluutsete ekstreemumite vahele jäävast vahemikust $(y_1; y_2)$, siis funktsioon ei saavuta väärtust h .

Omadus 3. Kui funktsioon f on pidev kinnises tõkestatud sidusas piirkonnas D ja omandab selles piirkonnas nii positiivseid kui negatiivseid väärtusi, siis leidub selles piirkonnas vähemalt üks punkt A nii, et $f(A) = 0$.

Tõestus. Vastavalt omadusele 1 saavutab funktsioon f oma suurima ja vähima väärtuse piirkonnas D . Kuna funktsioon f omandab piirkonnas D nii positiivseid kui negatiivseid väärtusi, siis on selle funktsiooni suurim väärtus piirkonnas D positiivne ja vähim väärtus negatiivne. Teisest küljest: vastavalt omadusele 2 saavutab f piirkonnas D iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna antud juhul 0 jääb suurima ja vähima väärtuse vahele, siis kuskil peab vaadeldav funktsioon saavutama väärtuse 0. See tähendabki, et piirkonnas D leidub vähemalt üks punkt A nii, et $f(A) = 0$.

Peatükk 7

Osatuletised ja nende rakendused

7.1 Mitmemuutuja funktsiooni osatuletised

Osatuletise mõiste.

Olgu antud m -muutuja funktsioon $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja olgu $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ mingi punkt funktsiooni f määramispiirkonnas. Järgmist piirväärtust:

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)}{x_i - a_i} \quad (7.1)$$

nimetatakse funktsiooni f (ehk muutuja z) *osatuletiseks* argumenti x_i järgi punktis A ja tähistatakse

$$f'_{x_i}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A)$$

või

$$z'_{x_i}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial z}{\partial x_i}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} z(A).$$

Seega argumenti x_i järgi osatuletise võtmisel fikseeritakse funktsiooni f ülejäänud argumentid $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$, st võetakse nad võrdseteks vastavalt arvudega $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m$. Vabaks jäetud argumenti x_i suhtes arvutatakse funktsiooni muut (selleks on valemis (7.1) esineva murru lugeja), jagatakse see argumenti muuduga $x_i - a_i$ ja arvutatakse saadud jagatise piirväärtus argumenti muudu lähenemisel nullile. Järelikult, kui me defineerime ainult muutujast x_i sõltuva ühemuutuja funktsiooni g selliselt, et fikseerime m -muutuja funktsiooni argumentid $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ äsjakirjeldatud viisil, st

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

siis ilmselt langeb funktsiooni f osatuletis argumenti x_i järgi punktis $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ kokku ühemuutuja funktsiooni g tavalise tuletisega punktis a_i , st kehtib võrdus

$$g'(a_i) = f'_{x_i}(A).$$

Kui f on ühemuutuja funktsioon, siis tema osatuletis ühtib tuletisega.

Näide. Arvutame funktsiooni

$$u = x^2 + \sin y + yz$$

osatuletised muutujate x , y ja z suhtes. Kui leitakse osatuletist teatud fikseeritud argumenti suhtes, siis kõiki teisi argumente käsitletakse konstantidena. Arvutades näiteks osatuletist x suhtes, on y ja z konstandid ning seega on konstantne ka liidetav $\sin y + yz$ funktsiooni avaldises. Konstantse liidetava tuletis on aga null. Järelikult, kasutades astmefunktsiooni x^2 tuletise valemit, saame $u'_x = 2x$. Kui me arvutame osatuletist y suhtes, on liidetav x^2 konstantne ja ühtlasi esineb liidetavas yz konstantne kordaja z . Konstantse kordaja saab aga tuletise märgi alt välja tuua:

$$(yz)'_y = z \cdot y'_y = z \cdot 1 = z.$$

Tulemusena saame $u'_y = \cos y + z$. Lõpuks avaldame ka osatuletise argumenti z suhtes. Selle arvutamisel on x ja y konstandid. Saame $u'_z = y$.

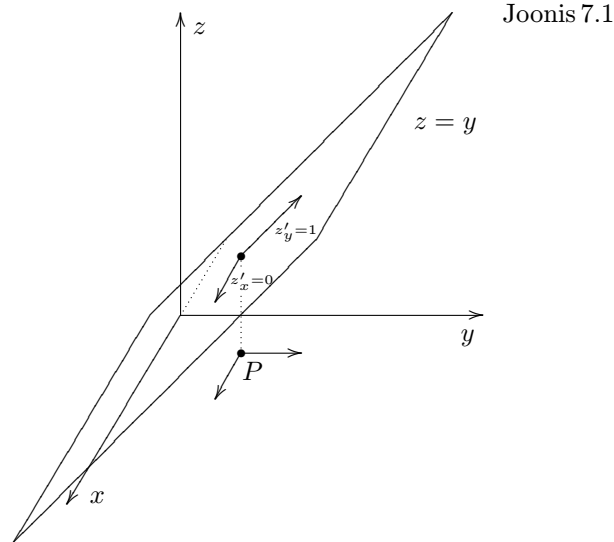
Osatuletis kui funktsioon. Eksisteerigu funktsioonil f lõplik osatuletis muutuja x_i järgi mingi piirkonna D kõigis punktides. See tähendab et igale punktile P piirkonnast D saab vastavusse seada ühe kindla reaalarvu $f'_{x_i}(P)$. Siis on osatuletis f'_{x_i} piirkonnas D määratud funktsioon.

Mitmemuutuja funktsiooni osatuletiste tõlgendus. Tuletame meelde, et ühemuutuja funktsiooni osatuletis võrdub selle funktsiooni graafiku puutuja tõusuga vaadeldavas punktis ning on tõlgendatav funktsiooni "kasvu kiirusena". Mitmemuutuja funktsiooni osatuletistele võib anda sarnase tõlgenduse. Kuna mitmemuutuja funktsioonil on palju argumente, siis võib selle funktsiooni "kasvu kiirus" olla erinev, kui me liigume argumentidega erinevas suunas. Mitmemuutuja funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osatuletis muutuja x_i suhtes näitab selle funktsiooni kasvu kiirust, kui argumentidega $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ liikuda x_i -telje suunas.

Kui vaatluse all on näiteks kahemuutuja funktsioon $z = f(x, y)$, mille graafik on pind kolmemõõtmelises ruumis, siis selle funktsiooni osatuletis muutuja x suhtes võrdub pinna $z = f(x, y)$ puutuja tõusuga argumenti $P = (x, y)$ nihutamisel x -telje suunas ning osatuletis muutuja y suhtes võrdub pinna $z = f(x, y)$ puutuja tõusuga argumenti $P = (x, y)$ nihutamisel y -telje suunas.

Näiteks muutujate x ja y funktsiooni $z = y$ osatuletised on $z'_x = 0$ ja $z'_y = 1$. Selle funktsiooni graafik on tasand, mis paikneb paralleelselt x -teljega ja tõuseb 45° - kraadise nurga all y -telje suunas (vt joonis 7.1). Seega, kui me liigume x -telje suunas, siis funktsioon ei kasva ega ei kahane. Graafiku tõus võrdub nulliga. Seda näitab ka võrdus $z'_x = 0$. Kui me aga liigume y -telje suunas, siis

funktsioon kasvab ja tema graafiku tõus võrdub $\tan 45^\circ = 1$. See on kooskõlas ka võrdusega $z'_y = 1$.



7.2 Liitfunktsiooni osatuletised. Täistuletis

Liitfunktsiooni osatuletiste valemid.

Olgu antud argumentid $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ sõltuvad m -muutuja funktsioonid

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ja argumentid $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sõltuv n -muutuja funktsioon

$$z = F(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Vaatleme liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} z &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= F\left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\right). \end{aligned}$$

Fikseerime funktsiooni f argumenti x_i ja vaatleme f osatuletist selle argumenti suhtes, st $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Selle osatuletise jaoks kehtib järgmine valem komponentide $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ja F osatuletiste kaudu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}. \quad (7.2)$$

Selle valemi tõestame allpool §2.5.

Kuna funktsiooni φ_j sõltuv argument on u_j , siis võib osatuletise $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ kirjutada kujul $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Peale selle, kuna funktsioonide F ja f sõltuv muutuja on z , võib osatuletisi $\frac{\partial F}{\partial u_j}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tähistada vastavalt sümbolitega $\frac{\partial z}{\partial u_j}$ ja $\frac{\partial z}{\partial x_i}$. Järelikult saab valemi (7.2) kirja panna ka järgmiselt:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

või

$$z'_{x_i} = z'_{u_1} u'_{1,x_i} + z'_{u_2} u'_{2,x_i} + \dots + z'_{u_n} u'_{n,x_i} = \sum_{j=1}^n z'_{u_j} u'_{j,x_i}.$$

Näide. Olgu kahemuutuja funktsioonide

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y) \quad \text{ja} \quad z = F(u, v)$$

baasil moodustatud liitfunktsioon

$$z = f(x, y) = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Valemite (7.2) ja (7.3) rakendamisel saame järgmised seosed liitfunktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiste jaoks:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

ehk ekvivalentsel kujul

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

või

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y.$$

Täistuletise mõiste.

Vaatleme juhtu, kui on antud ühe muutuja funktsioonid

$$u_1 = \varphi_1(x), \quad u_2 = \varphi_2(x), \dots, \quad u_n = \varphi_n(x)$$

ja F sõltub lisaks argumentidele $u_1, u_2, \dots, u_n$ ka muutujast x , st

$$z = F(x, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Siis on liitfunktsioon

$$z = f(x) = F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$$

ühe muutuja, so x funktsioon. Teatavasti ühtib ühemuutuja funktsiooni osatuletis tema tuletisega. Järelikult

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x).$$

Peale selle,

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varphi'_1(x), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \varphi'_2(x), \dots, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \varphi'_n(x). \quad (7.5)$$

Valemeid (7.2), (7.3) ja (7.4), (7.5) rakendades saame funktsiooni f tuletise jaoks järgmised seosed:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \varphi'_1(x) + \frac{\partial F}{\partial u_2} \varphi'_2(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \varphi'_n(x) \end{aligned}$$

ehk ekvivalentset

$$z'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u_1} u'_1(x) + \frac{\partial z}{\partial u_2} u'_2(x) + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} u'_n(x). \quad (7.6)$$

Valemis (7.6) esineb sõltuva muutuja z kaks erinevat tuletist: $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $z'(x)$. Esimene neist on $n+1$ -muutuja funktsiooni $z = F(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ osatuletis esimese argumendi x järgi ja teine on liitfunktsiooni

$$z = f(x) = F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \quad (7.7)$$

(mis on ühe muutuja x funktsioon) tuletis.

Liitfunktsiooni (7.7) tuletist $z'(x)$ nimetatakse sõltuva muutuja z *täistuletiseks*.

Nimetus "täistuletis" tuleneb sellest, et tema arvutamisel on võetud arvesse muutuja z sõltuvust argumendist x täielikult liitfunktsiooni f komponentide F ja $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ kaudu. Seevastu osatuletise $\frac{\partial z}{\partial x}$ arvutamisel on arvestatud funktsiooni F sõltuvust esimesest argumendist x , kuid on jäetud arvestamata asjaolu, et F ülejäänud argumendid $u_1, u_2, \dots, u_n$ sõltuvad samuti x -st.

Näide. Olgu antud funktsioonid

$$u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = \sin x \quad \text{ja} \quad z = x^3 + u_1^2 + u_2.$$

Leiame z osatuletise argumendi x suhtes. Selle leidmisel käsitatakse ülejäänud argumente u_1 ja u_2 funktsiooni z valemis konstantidena. Seega $z'_x = 3x^2$. Järgnevalt toome sisse muutujate u_1 ja u_2 sõltuvuse x -st. Siis ei ole suurused u_1 ja u_2 enam konstandid. Saame järgmise võrduse:

$$z = x^3 + e^{2x} + \sin x.$$

Selle funktsiooni tuletis ongi muutuja z täistuletis, st $z'(x) = 3x^2 + 2e^{2x} + \cos x$.

7.3 Ilmutamata ja parameetrilise funktsiooni tuletised

Ilmutamata funktsiooni tuletise valem.

Olgu ühemuutuja funktsioon $y = f(x)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$F(x, y) = 0.$$

Eeldame et tuletis $f'(x)$ ja osatuletised F'_x , F'_y eksisteerivad mingis vaadeldavas punktis. Eesmärgiks on tuletada valem $f'(x)$ jaoks F'_x ja F'_y kaudu. Selleks leiame kõigepealt ühemuutuja funktsiooni $F(x, f(x))$ tuletise avaldise. Täistuletise arvutamise eeskirja (7.6) põhjal kehtib järgmine valem:

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x). \quad (7.8)$$

Järgmiseks kasutame asjaolu, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab ilmutamata kujul funktsiooni $y = f(x)$. Sellest tulenevalt kehtib samasus

$$F(x, f(x)) \equiv 0. \quad (7.9)$$

Kuna nullfunktsiooni tuletis võrdub samuti nulliga, siis valemist (7.9) järeldub et

$$\frac{dF}{dx}(x, f(x)) \equiv 0.$$

Seega võrdub avaldise (7.8) vasak pool nulliga. Saame

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0$$

ehk

$$F'_y(x, f(x))f'(x) = -F'_x(x, f(x)).$$

Eeldades, et $F'_y(x, f(x)) \neq 0$ tuletame viimasest võrdusest järgmise valemi ilmutamata funktsiooni f tuletise jaoks:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \quad (7.10)$$

Näide. Olgu funktsiooni $y = y(x)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$y - \sin y + x^3 + e^x = 0.$$

Leiame $y'(x)$. Antud juhul $F(x, y) = y - \sin y + x^3 + e^x$. Arvutame: $F'_x = 3x^2 + e^x$, $F'_y = 1 - \cos y$. Seega (7.10) põhjal

$$y' = -\frac{F'_y}{F'_x} \Rightarrow y' = \frac{\cos y - 1}{3x^2 + e^x}.$$

Parameetrilise kahemuutuja funktsiooni osatuletiste arvutamine.

Olgu kahemuutuja funktsioon $z = f(x, y)$ antud järgmiste parameetriliste võrranditega:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in G. \quad (7.11)$$

Eesmärgiks on leida funktsiooni f osatuletised f'_x ja f'_y . Selleks asendame x ja y oma parameetriliste võrranditega funktsiooni f :

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

ja avaldame z osatuletised kasutades liitfunktsiooni osatuletiste leidmise eeskirja:

$$z'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u, \quad z'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v. \quad (7.12)$$

Tekib järgmine 2×2 lineaarne võrrandisüsteem tundmatute f'_x ja f'_y määramiseks:

$$\begin{cases} x'_u f'_x + y'_u f'_y = z'_u \\ x'_v f'_x + y'_v f'_y = z'_v. \end{cases} \quad (7.13)$$

Süsteemi (7.13) saame lahendada Crameri valemite abil. Lahend on järgmine:

$$f'_x = \frac{\begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad f'_y = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\Delta},$$

kus $\Delta = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$ on süsteemi determinant.

Näide. Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \sin u + \cos v \\ y = \cos u + \sin v \\ z = u + 2v. \end{cases} \quad (7.14)$$

Avaldame f'_x ja f'_y . Selleks asendame x ja y oma parameetriliste võrranditega funktsiooni f :

$$z = f(\sin u + \cos v, \cos u + \sin v).$$

Kirjutame välja saadud liitfunktsiooni osatuletised:

$$\begin{aligned} z'_u &= f'_x \cdot (\sin u + \cos v)'_u + f'_y \cdot (\cos u + \sin v)'_u = f'_x \cos u - f'_y \sin u, \\ z'_v &= f'_x \cdot (\sin u + \cos v)'_v + f'_y \cdot (\cos u + \sin v)'_v = -f'_x \sin v + f'_y \cos v. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Peale selle, kolmandast parameetrilisest võrrandist (7.14) saame

$$z'_u = 1, \quad z'_v = 2. \quad (7.16)$$

Seoste (7.15) ja (7.16) põhjal tekib järgmine süsteem:

$$\begin{cases} \cos u \cdot f'_x - \sin u \cdot f'_y = 1 \\ -\sin v \cdot f'_x + \cos v \cdot f'_y = 2. \end{cases} \quad (7.17)$$

Süsteemi determinant on

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ -\sin v & \cos v \end{vmatrix} = \cos u \cos v - \sin u \sin v = \cos(u + v).$$

Seega on lahend järgmine:

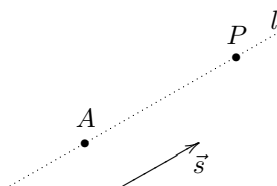
$$f'_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\sin u \\ 2 & \cos v \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\cos v + 2 \sin u}{\cos(u + v)}, \quad f'_y = \frac{\begin{vmatrix} \cos u & 1 \\ -\sin v & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \cos u + \sin v}{\cos(u + v)}.$$

7.4 Tuletis etteantud suunas

Suunatuletise mõiste.

Olgu antud m -muutuva funktsioon $z = f(P)$ argumentiga $P = (x_1, \dots, x_m)$ ja olgu $A = (a_1, \dots, a_m)$ mingi punkt tema määramispiirkonnas. Peale selle, olgu $\vec{s} = (s_1, \dots, s_m)$ vektor ruumis $\mathbb{R}^m$. Paiknegu punkt P vektoriga $\vec{s}$ määratud sirgel l punkti A suhtes positiivses suunas (joonis 7.2).

Joonis 7.2



Funktsiooni f argumenti muutu punktis A iseloomustab punktide P ja A vaheline kaugus $|PA|$. Funktsiooni f muut punktis A võrdub vahega $f(P) - f(A)$. Jagatis

$$\frac{f(P) - f(A)}{|PA|}$$

annab funktsiooni f suhtelise muudu suunas $\vec{s}$ punktide A ja P vahel.

Vaatleme piirprotsessi $P \rightarrow A$, mille käigus punkt P läheneb punktile A mööda vektori $\vec{s}$ suunalist sirget l . Selles protsessis defineeritud piirväärtus

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{f(P) - f(A)}{|PA|} \quad (7.18)$$

iseloomustab funktsiooni f muutumise määra punktis A suunas $\vec{s}$.

Piirväärtust (7.18) nimetatakse funktsiooni f (ehk muutuva z) *tuletiseks vektori $\vec{s}$ suunas* punktis A ja tähistatakse

$$f'_{\vec{s}}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{s}} f(A)$$

või

$$z'_{\vec{s}}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{s}} z(A)$$

Suunatuletise valem.

Tuletame valemi suunatuletise $f'_{\vec{s}}(A)$ jaoks funktsiooni f osatuletiste kaudu. Alustame sellest, et esitame sirge l parameetrilisel kujul. Kuna sirge l läbib

punkti A ja on vektori $\vec{s}$ suunaline, siis vastavalt valemile (6.7) on tema parameetrilised võrrandid järgmised:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + s_1 t, \\ x_2 = a_2 + s_2 t, \\ \dots \\ x_m = a_m + s_m t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7.19)$$

Kui $t > 0$, siis asub punkt P sirgel l punkti A suhtes positiivses suunas. Võrranditest (7.19) saame leida ka punktide P ja A vahelise kauguse sirgel l :

$$\begin{aligned} |PA| &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} = \sqrt{(s_1 t)^2 + \dots + (s_m t)^2} \\ &= \sqrt{(s_1)^2 + \dots + (s_m)^2} t = |\vec{s}| t. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Edasi arutleme järgmiselt. Kuna sirge l on ühemõõtmeline objekt, siis peaks funktsioon f selle sirge peal olema ühe muutuja funktsioon. Esitamegi f -i selle sirge peal ühe muutuja funktsioonina. Selleks paneme tähele, et sirgel l asuv punkt P sõltub parameetrist t , st

$$P(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)).$$

Seega on funktsioon f argumenti väärtusel $P(t)$ ühe muutuja funktsioon, mis avaldub kujul

$$g(t) = f(P(t)) = f(x_1(t), \dots, x_m(t)) = f(a_1 + s_1 t, \dots, a_m + s_m t). \quad (7.21)$$

Nüüd saame soovitava suunatuletise sirgel l saame avaldada ühemuutuja funktsiooni g tuletise kaudu. Selleks paneme kõigepealt tähele, et

$$g(0) = f(a_1, \dots, a_m) = f(A).$$

Peale selle, kuna $t = \frac{|PA|}{|\vec{s}|}$, siis piirprotsessis $P \rightarrow A$ läheneb muutuja t nullile. Järelikult

$$\begin{aligned} f'_s(A) &= \lim_{P \rightarrow A} \frac{f(P) - f(A)}{|PA|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{|\vec{s}| t} \\ &= \frac{1}{|\vec{s}|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{1}{|\vec{s}|} g'(0). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Et soovitud valemit $f'_s(A)$ jaoks kätte saada, jääb veel avaldada $g'(0)$. Liitfunktsiooni osatuletiste arvutamise eeskirja põhjal saame võrdusest (7.21)

$$g'(t) = f'_{x_1}(P)x'_1(t) + f'_{x_2}(P)x'_2(t) + \dots + f'_{x_m}(P)x'_m(t).$$

Seejuures valemist (7.19) tuleme

$$x'_1(t) = s_1, \dots, x'_m(t) = s_m.$$

Seega

$$g'(t) = f'_{x_1}(P)s_1 + f'_{x_2}(P)s_2 + \dots + f'_{x_m}(P)s_m.$$

Kui $t = 0$, siis $P = A$ ja

$$g'(0) = f'_{x_1}(A)s_1 + f'_{x_2}(A)s_2 + \dots + f'_{x_m}(A)s_m.$$

Järelikult saame (7.22) põhjal *suunatuletise* $f'_s(A)$ jaoks järgmise valemi *osatuletiste kaudu*:

$$f'_s(A) = \frac{1}{|\vec{s}|} \left[f'_{x_1}(A)s_1 + f'_{x_2}(A)s_2 + \dots + f'_{x_m}(A)s_m \right]. \quad (7.23)$$

Näide. Arvutame funktsiooni

$$f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$$

tuletise punktis $A = (1; 4; 9)$ suunas, mis viib punktist $(1; 2; 1)$ punkti $(7; 4; 4)$. Avaldame osatuletised:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= \frac{1}{2\sqrt{xyz}} (xyz)'_x = \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, & f'_y(x, y, z) &= \frac{1}{2\sqrt{xyz}} (xyz)'_y = \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, \\ f'_z(x, y, z) &= \frac{1}{2\sqrt{xyz}} (xyz)'_z = \frac{xy}{\sqrt{xyz}}. \end{aligned}$$

Vektor, mis viib punktist $(1; 2; 1)$ punkti $(7; 4; 4)$, on järgmine:

$$\vec{s} = (7 - 1; 4 - 2; 4 - 1) = (6; 2; 3).$$

Vektori pikkus on $|\vec{s}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$. Kasutades valemit (7.23) saame otsitava suunatuletise avaldise:

$$f'_s(x, y, z) = \frac{6yz + 2xz + 3xy}{14\sqrt{xyz}}.$$

Punktis $A = (1; 4; 9)$ on sellel tuletisel järgmine väärtus: $f'_s(1; 4; 9) = \frac{41}{14}$.

Telgedesuunalised tuletised. Olgu $\vec{s}$ x_k -telje suunaline vektor, st

$$\vec{s} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \times}, s_k, 0, \dots, 0),$$

kusjuures $s_k > 0$. Siis $s_j = 0$ kui $j \neq k$, $\frac{s_k}{|\vec{s}|} = 1$ ja valemist (7.23) jäeldub võrdus

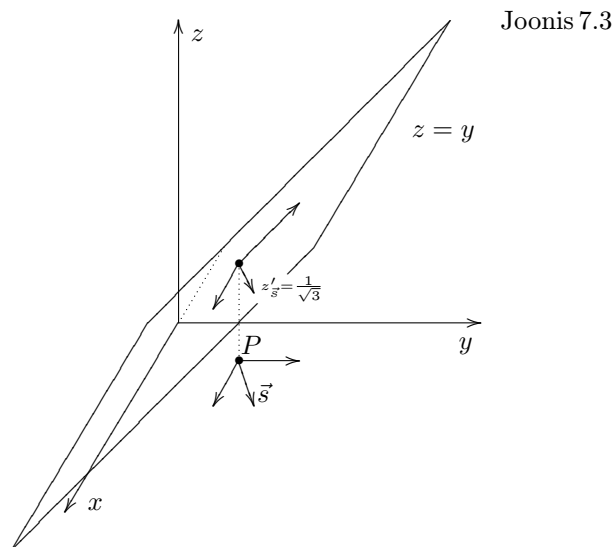
$$f'_s(A) = f'_{x_k}(A).$$

Tuletis x_k -telje suunas võrdub osatuletisega muutuja x_k suhtes.

Suunatuletise tõlgendus. §7.1 nägime, et mitmemuutuja funktsiooni $z =$

$f(x_1, \dots, x_m)$ osatuletis muutuja x_i suhtes näitab selle funktsiooni "kasvu kiirust", kui argumentidega $P = (x_1, \dots, x_m)$ liikuda x_i -telje suunas.

Funktsiooni $z = f(x_1, \dots, x_m)$ osatuletis vektori $\vec{s}$ suunas näitab selle funktsiooni "kasvu kiirust", kui argumentidega $P = (x_1, \dots, x_m)$ liikuda vektori $\vec{s}$ suunas.



Näiteks vaatleme kahe muutuja x ja y funktsiooni $z = y$, mida sai analüüsitud ka §7.1. Arvutame selle funktsiooni tuletise suunas $\vec{s} = (\sqrt{2}, 1)$. Kasutades valemit (7.23) ja arvestades, et $|\vec{s}| = \sqrt{3}$, $z'_x = 0$ ja $z'_y = 1$, saame

$$z'_s = \frac{1}{|\vec{s}|} [z'_x s_1 + z'_y s_2] = \frac{1}{\sqrt{3}} [0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 1] = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Jooniselt 7.3 näeme, et see funktsioon kasvab kõige kiiremini, kui punktiga P liikuda y -telje suunas. Siis on graafiku tõusunurk 45° . Kui liikuda x -telje suunas, siis funktsioon on konstantne. Kui aga punktiga P liikuda vektori $\vec{s}$ suunas, siis on kasvukiirus $z'_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$. See vastab graafiku tõusunurgale 30° , sest $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7.5 Diferentseeruv mitmemuutuja funktsioon ja täisdiferentsiaal

Olgu antud m -muutuja funktsioon $z = f(P)$, kus $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja olgu $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ punkt selle funktsiooni määramispiirkonnas. Toome sisse järgmised mõisted:

$\Delta x_i = x_i - a_i$ – argumenti x_i muut punktis A ,

$\Delta z = f(P) - f(A)$ – funktsiooni f täismuut punktis A .

Punktide P ja A vaheline kaugus avaldub Δx_i -de kaudu valemiga

$$|PA| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}.$$

Diferentseeruv mitmemuutuva funktsioon. Funktsiooni

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

nimetatakse *diferentseeruvaks* punktis A , kui selle funktsiooni täismuudu Δz saab esitada järgmise summana:

$$\Delta z = C_1 \Delta x_1 + C_2 \Delta x_2 + \dots + C_m \Delta x_m + \beta, \quad (7.24)$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_m$ on konstandid, mis üldiselt sõltuvad punktist A ja β on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus punktide P ja A vahelise kauguse $|PA|$ suhtes piirprotsessis $|PA| \rightarrow 0$.

Täisdiferentsiaali definitsioon. Argumendi muutude Δx_i suhtes lineaarset liiget

$$C_1 \Delta x_1 + C_2 \Delta x_2 + \dots + C_m \Delta x_m$$

valemis (7.24) nimetatakse funktsiooni f (ehk muutuva z) *täisdiferentsiaaliks* kohal A ja tähistatakse dz või df . Seega kehtib valem

$$dz = df = C_1 \Delta x_1 + C_2 \Delta x_2 + \dots + C_m \Delta x_m.$$

Kui on vaja rõhutada täisdiferentsiaali sõltuvust punktist A , siis kirjutatakse $dz(A)$ või $df(A)$.

Kui f on diferentseeruv punktis A ja mõni C_i -dest on nullist erinev, siis väikese $|PA|$ korral hakkab liige dz funktsiooni muudu Δz avaldises liikme β suhtes domineerima. Teiste sõnadega, Δz on ligikaudselt lineaarses sõltuvuses argumendi muutudest $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$, st

$$\Delta z \approx dz = C_1 \Delta x_1 + C_2 \Delta x_2 + \dots + C_m \Delta x_m.$$

Piisavateks tingimusteks, mis garanteerivad f diferentseeruvuse punktis A on näiteks osatuletiste $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ olemasolu punkti A mingis ümbruses ja nende osatuletiste pidevus punktis A .

Näide. Leiame funktsiooni $f(x, y) = x^2 + y^2$ täisdiferentsiaali punktis $A = (a, b)$. Tähistades $\Delta x = x - a$ ja $\Delta y = y - b$ teisendame selle funktsiooni täismuutu:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x, y) - f(a, b) = x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = x^2 - a^2 + y^2 - b^2 = \\ &= (a + \Delta x)^2 - a^2 + (b + \Delta y)^2 - b^2 = \\ &= a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 + b^2 + 2b\Delta y + \Delta y^2 - b^2 = \\ &= 2a\Delta x + 2b\Delta y + (x - a)^2 + (y - b)^2. \end{aligned}$$

Seega antud funktsiooni korral $C_1 = 2a$ ja $C_2 = 2b$ ning täisdiferentsiaal avaldub järgmiselt:

$$dz = 2a\Delta x + 2b\Delta y.$$

Liidetav $\beta = (x - a)^2 + (y - b)^2$ täismuudu Δz avaldises on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus punktide $P = (x, y)$ ja $A = (a, b)$ vahelise kauguse suhtes piirprotsessis $|PA| \rightarrow 0$. Tõepoolest: kuna $|PA| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, siis

$$\lim_{|PA| \rightarrow 0} \frac{\beta}{|PA|} = \lim_{|PA| \rightarrow 0} \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = \lim_{|PA| \rightarrow 0} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = 0.$$

Täisdiferentsiaali valem.

Kui f on diferentseeruv ja me soovime tema diferentsiaali dz kasutada mingites rakendustes, siis läheb vaja sobivaid valemeid kordajate C_i jaoks. Teatud juhul saab C_i avaldada f osatuletiste kaudu. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 7.1. *Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis A ja osatuletised $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ eksisteerivad punktis A , siis*

$$C_i = f'_{x_i}(A), \quad (7.25)$$

millest järeldub, et täisdiferentsiaali valem on järgmine:

$$dz = f'_{x_1}(A)\Delta x_1 + f'_{x_2}(A)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(A)\Delta x_m. \quad (7.26)$$

Tõestus. Kuna funktsioon f on diferentseeruv punktis A , siis on Δz avaldatav kujul (7.24), kus β on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus $|PA|$ suhtes kui $|PA| \rightarrow 0$. Fikseerime ühe konkreetse i väärtuse 1 - st kuni m -ni ja valime punkti P järgmiselt:

$$P = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

kus $x_i \neq a_i$. Siis

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \dots = \Delta x_m = 0$$

ja $\Delta x_i = x_i - a_i \neq 0$. Järelikult $|PA| = |\Delta x_i|$. Seega saame valemist (7.24)

$$\Delta z = C_i \Delta x_i + \beta, \quad (7.27)$$

kus β on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus Δx_i suhtes, kui $\Delta x_i \rightarrow 0$.

Vaatleme nüüd järgmist ühe muutuja funktsiooni:

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m).$$

Kuna f'_{x_i} eksisteerib punktis A , siis eksisteerib ka g' punktis a_i . Seega on g muut $\Delta g = g(x_i) - g(a_i)$ esitatav kujul

$$\Delta g = g'(a_i)\Delta x_i + \beta_i, \quad (7.28)$$

kus β_i on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus Δx_i suhtes protsessis $\Delta x_i \rightarrow 0$ (vt ühemuutuja funktsiooni diferentsiaali käsitlust §3.6).

Kuna $\Delta z = \Delta g$, siis valemist (7.27) ja (7.28) saame võrduse

$$C_i \Delta x_i + \beta = g'(a_i) \Delta x_i + \beta_i.$$

Viies selles võrduses $g'(a_i) \Delta x_i$ vasakule poole ja β paremale poole ning jagades Δx_i -ga tuleme seose

$$C_i - g'(a_i) = \frac{\beta_i - \beta}{\Delta x_i}. \quad (7.29)$$

Kuna β_i ja β on kõrgemat järku lõpmatult kahanevad suurused Δx_i suhtes protsessis $\Delta x_i \rightarrow 0$, siis võrduse (7.29) parem pool läheneb nullile, kui $\Delta x_i \rightarrow 0$. Seega peab vasak pool (mis on konstantne) võrduma nulliga. Seega kehtib $C_i - g'(a_i) = 0$ ehk

$$C_i = g'(a_i).$$

Kuna $g'(a_i) = f'_{x_i}(A)$, saamegi valemi (7.25). Sellega on teoreem tõestatud.

Eespooltoodud näites funktsiooniga $f(x, y) = x^2 + y^2$ saime konstantidele C_1 ja C_2 järgmised väärtused: $C_1 = 2a$ ja $C_2 = 2b$. Need arvud ongi funktsiooni f osatuletised punktis $A = (a, b)$. Tõepoolest: kuna $f'_x(x, y) = 2x$ ja $f'_y(x, y) = 2y$, siis $f'_x(a, b) = 2a$ ja $f'_y(a, b) = 2b$.

Argumentide diferentsiaalid täisdiferentsiaali valemis.

Asendame valemis (7.26) olevad argumentide muudud nende täisdiferentsiaalidega. Selleks tuleb kõigepealt leida funktsioonide

$$f(P) = x_i$$

täisdiferentsiaalid. Kui $f(P) = x_i$, siis

$$f'_{x_i} = 1 \quad \text{ja} \quad f'_{x_j} = 0, \quad \text{kui } j \neq i.$$

Seega avaldub funktsiooni $z = x_i$ täisdiferentsiaal dx_i valemi (7.26) põhjal järgmiselt:

$$dx_i = 0\Delta x_1 + 0\Delta x_2 + \dots + 0\Delta x_{i-1} + 1\Delta x_i + 0\Delta x_{i+1} + \dots + 0\Delta x_m = \Delta x_i.$$

Seega

$$\Delta x_i = dx_i.$$

Olgu nüüd f uuesti suvaline teoreemi 7.1 eeldusi rahuldav funktsioon. Asendades Δx_i suurusega dx_i valemis (7.26) saame funktsiooni $z = f(P)$ täisdiferentsiaali esitada argumentide täisdiferentsiaalide kaudu järgmisel kujul:

$$dz = f'_{x_1}(A)dx_1 + f'_{x_2}(A)dx_2 + \dots + f'_{x_m}(A)dx_m = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(A)dx_i. \quad (7.30)$$

Liitfunktsiooni osatuletise valemi tõestus.

Täisdiferentsiaali saab kasutada liitfunktsiooni osatuletise valemi (7.2) tõestamisel.

Olgu antud argumentid $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ sõltuvad m -muutuja funktsioonid

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ja argumentid $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sõltuv n -muutuja funktsioon

$$z = F(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Paneme neist kokku liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} z &= f(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= F(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

Eeldame, et funktsioonid $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, F ja f on diferentseeruvad ja omavad osatuletisi kõigi argumentide suhtes. Need eeldused on vajalikud valemi (7.30) kasutamiseks.

Paneme kirja funktsiooni f täisdiferentsiaali. Vastavalt valemile (7.30) saame

$$dz = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k. \quad (7.31)$$

Sama suuruse dz saame ka siis, kui me arvutame funktsiooni $z = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ täisdiferentsiaali:

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} du_j. \quad (7.32)$$

Viimases valemis esinevad funktsioonide $u_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$ täisdiferentsiaalid du_j . Avaldame ka need:

$$du_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k. \quad (7.33)$$

Asendades (7.33) valemisse (7.32) ja grupeerides liidetavad ümber saame

$$dz = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right] dx_k. \quad (7.34)$$

Seega kehtib (7.31) ja (7.34) põhjal järgmine võrdus:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right] dx_k. \quad (7.35)$$

Selles võrduses me võime valida suvalised argumentide muudud dx_k . Fikseerime mingi indeksi i ja valime need muudud järgmiselt:

$$dx_1 = dx_2 = \dots = dx_{i-1} = 0, \quad dx_i = 1, \quad dx_{i+1} = \dots = dx_m = 0.$$

Siis on võrduses (7.35) vasakul ja paremal pool summas $\sum_{k=1}^m$ kõik liidetavad, välja arvatud liidetav indeksiga $k = i$, võrdsed nulliga. Saame

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}.$$

See ongi valem (7.2).

7.6 Täisdiferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes ja veahinnangutes

§7.5 toodud ligikaudne võrdus $\Delta z \approx dz$ omab üsna laia praktilist kasutusvaldkonda. Järgnevalt vaatleme selle seose kasutamist ligikaudsetes arvutustes ja arvutusvigade hindamisel.

Ligikaudsed arvutused.

Olgu antud m -muutuja funktsioon $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, mis on diferentseeruv ja omab osatuletisi punktis $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Siis

$$dz = f'_{x_1}(A)\Delta x_1 + f'_{x_2}(A)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(A)\Delta x_m$$

ja seose $\Delta z \approx dz$ saab kirjutada kujul

$$\Delta z \approx f'_{x_1}(A)\Delta x_1 + f'_{x_2}(A)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_m}(A)\Delta x_m. \quad (7.36)$$

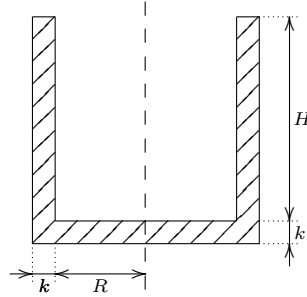
Vaatleme ühte näidet valemi (7.36) kasutamise kohta.

Näide. Arvutada silindrilise anuma valmistamiseks kuluva materjali hulk, kui anuma mõõtmed on järgmised:

seesmise silindri kõrgus: $H = 20\text{cm}$
 seesmise silindri raadius: $R = 4\text{cm}$
 anuma seinte ja põhja paksus: $k = 0,1\text{cm}$.

Anuma vertikaallõige on kujutatud joonisel 7.4 (H , R ja k täpseid arvulisi väärtusi selle joonise juures arvestatud ei ole).

Joonis 7.4



Esitame anuma seesmise silindri ruumala V põhja raadiuse R ja kõrguse H funktsioonina: $V = V(R, H) = \pi R^2 H$. Anuma välimise silindri ruumala arvutamisel tuleb raadiusele ja kõrgusele liita vastavalt seinte ja põhja paksus, milleks on k . Seega võrdub välimise silindri ruumala avaldisega

$$V(R+k, H+k) = \pi(R+k)^2(H+k).$$

Anuma valmistamiseks kuluva materjali hulga saame, kui lahutame välimise silindri ruumalast sisemise silindri ruumala, st arvutame funktsiooni V täismuudu

$$\Delta V = V(R+k, H+k) - V(R, H).$$

Lahendame seda ülesannet kahel erineval viisil: täpselt ja ligikaudselt.

- 1) Täpne lahendus. Kuna $V(R, H) = \pi R^2 H$ siis

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H \\ &= \pi(R^2 + 2Rk + k^2)(H+k) - \pi R^2 H \\ &= \pi(R^2 H + R^2 k + 2RHk + 2Rk^2 + Hk^2 + k^3) - \pi R^2 H \\ &= \pi(R^2 k + 2RHk + 2Rk^2 + Hk^2 + k^3). \end{aligned}$$

Asendades selles valemis R , H ja k etteantud arvuliste väärtustega saame vastuseks $\Delta V = 17,881\pi$.

- 2) Ligikaudne lahendus. Paneme kirja ligikaudse valemi (7.36) funktsiooni $V = V(R, H)$ täismuudu jaoks:

$$\Delta V \approx V'_R(R, H)\Delta R + V'_H(R, H)\Delta H. \quad (7.37)$$

Kuna $V(R, H) = \pi R^2 H$, siis $V'_R(R, H) = 2\pi RH$ ja $V'_H(R, H) = \pi R^2$. Argumentide muudud ΔR ja ΔH võrduvad vastavalt anuma seina ja põhja paksusega, st $\Delta R = \Delta H = k$. Seega teisendub valem (7.37) järgmisele kujule:

$$\Delta V \approx 2\pi RHk + \pi R^2 k = \pi(R^2 k + 2RHk).$$

Asendades siin jällegi R , H ja k etteantud arvuliste väärtustega saame vastuseks $\Delta V \approx 17,6\pi$.

Veahinnangud.

Olgu vaatluse all mingi füüsikaline protsess, mida iseloomustavad $m+1$ suurust: $x_1, x_2, \dots, x_m$ ja z . Eeldame, et z on muutujate $x_1, x_2, \dots, x_m$ funktsioon, st

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Olgu suuruste $x_1, x_2, \dots, x_m$ täpsed arvulised väärtused vaadeldavas protsessis $a_1, a_2, \dots, a_m$. Oletame, et suurusi x_i mõõdetakse. Teatavasti on mõõtmine alati ebatäpne. Järelikult saadakse mõõtmise tulemusena suuruse x_i täpse väärtuse a_i asemel tema ligikaudne väärtus $a_i + \Delta x_i$. Liidetav Δx_i on siin suuruse x_i mõõtmisel tehtud viga.

Suuruse z väärtus arvutatakse valemist $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Tema täpne väärtus on $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Mõõtmistulemuste alusel arvutatav z väärtus on

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m).$$

Järelikult võrdub suuruse z viga funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ täismuuduga

$$\Delta z = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Kui Δx_i on väike, siis

$$\Delta z \approx dz = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_m) \Delta x_i.$$

Vea Δx_i täpne väärtus ei ole teada. Küll aga on teada suuruse x_i mõõtmisel kasutatava seadme vea ülempiir Δx_i^* . Seega saab viga Δx_i hinnata järgmiselt:

$$|\Delta x_i| \leq \Delta x_i^*. \quad (7.38)$$

Kasutades hinnangut (7.38) ja absoluutväärtuse omadusi

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| |b|$$

saame hinnata ka suuruse z viga:

$$\begin{aligned} |\Delta z| \approx |dz| &= \left| \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_m) \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_m)| |\Delta x_i| \leq \sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_m)| \Delta x_i^*. \end{aligned}$$

Tähistame

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_m)| \Delta x_i^*. \quad (7.39)$$

Seega kehtib võrratus $|\Delta z| \leq \Delta z^*$, millest nähtub, et valemiga (7.39) antud suuruse Δz^* võib võtta z vea ülempiiriks.

Näide. Arvutada takistus R ja hinnata tema viga, kui on antud voolutugevus $I = 10 \pm 0,01 A$ ja pinge $U = 200 \pm 0,1 V$.

Avaldame takistuse voolutugevuse ja pinge funktsioonina:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Vastavalt ülesande algandmetele saame järgmise takistuse väärtuse: $R = \frac{200}{10} = 20 \Omega$. Järgnevalt hindame takistuse viga. Selleks arvutame $R'_U = \frac{1}{I} = \frac{1}{10} = 0,1$ ja $R'_I = -\frac{U}{I^2} = -\frac{200}{100} = -2$. Valemi (7.39) põhjal

$$\Delta R^* = |R'_U| \Delta U^* + |R'_I| \Delta I^* = 0,1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,01 = 0,03.$$

Ülesande vastuseks saame $R = 20 \pm 0,03 \Omega$.

7.7 Pinna puutujatasand, normaalvektor ja normaalsirge

Vaatleme kahemuutuja funktsiooni $z = f(x, y)$. Eeldame, et f on diferentseeruv ja omab osatuletisi punktis $A = (a, b)$. Siis valemite (7.24) ja (7.25) põhjal on tema täismuut $\Delta z = f(x, y) - f(a, b)$ esitatav kujul

$$\Delta z = f'_x(a, b) \Delta x + f'_y(a, b) \Delta y + \beta,$$

kus $\Delta x = x - a$ ja $\Delta y = y - b$ on argumentide x ja y muudud ning β on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus $|PA|$ suhtes, kui $|PA| \rightarrow 0$. Järelikult

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \beta. \quad (7.40)$$

Väikese punktide P ja A vahelise kauguse korral on viimases võrduses esinev liidetav β suhteliselt väike. Defineerime uue funktsiooni jättes funktsiooni f avaldisest (7.40) välja liidetava β . Uus funktsioon on järgmine:

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). \quad (7.41)$$

Funktsioon (7.41) on lineaarne ja tema graafikuks on teatud tasand.

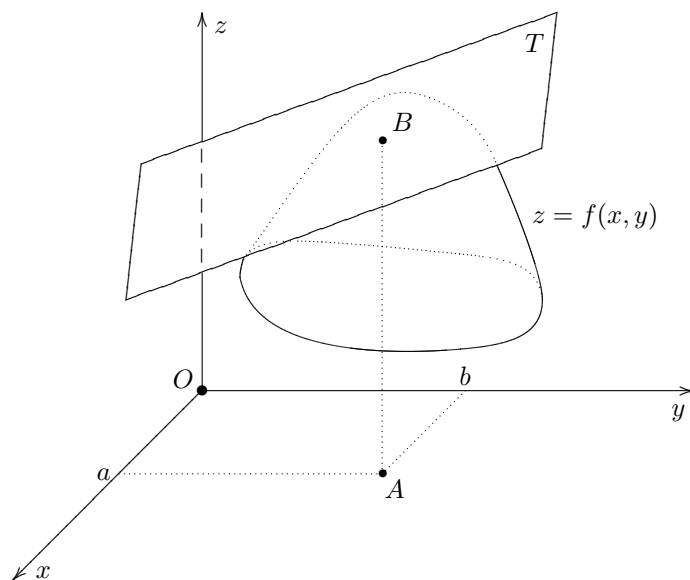
Tasandit, mille võrrandiks on (7.41), nimetatakse pinna $z = f(x, y)$ *puutujatasandiks* punktis $B = (a, b, f(a, b))$.

Joonisel 7.5 on kujutatud pinna $z = f(x, y)$ puutujatasand T punktis B .

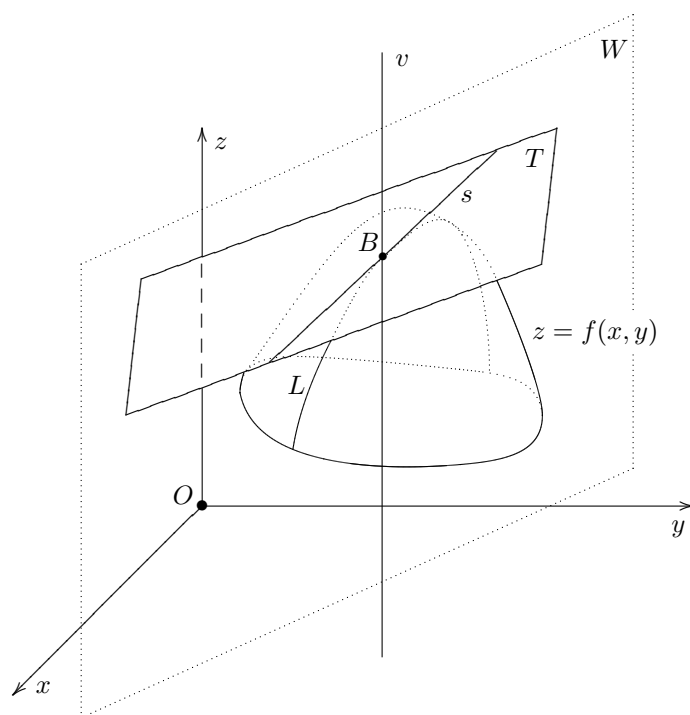
Puutujatasand koosneb pinna lõikejoonte puutujatest. Seda omadust saab jälgida jooniselt 7.6. Punktist B on tõmmatud läbi vertikaalsirge (st z -teljega paralleelne sirge) v . On joonistatud suvaline sirge v sisaldav tasand W . Tasand W lõikab pinnast $z = f(x, y)$ välja joone L ja tasandist T välja sirge s . Sirge

s on joone L puutuja punktis B . Keerates lõiketasandit W sirge ümber sirge v 180 kraadi võrra, kujundab sirge s puutujatasandi T .

Joonis 7.5

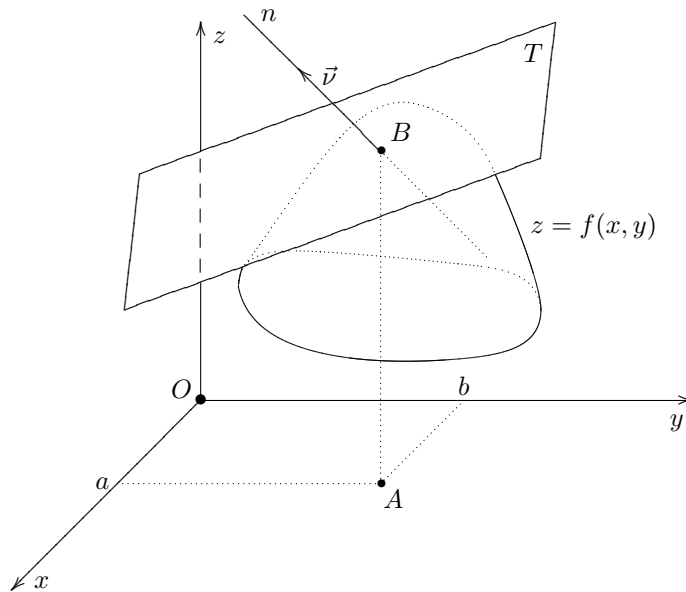


Joonis 7.6



Pinna $z = f(x, y)$ *normaalvektoriks* punktis B nimetatakse vektorit, mis ristub puutujatasandiga selles punktis. Pinna $z = f(x, y)$ *normaalsirgeks* punktis B nimetatakse sirget, mis läbib punkti B ja ristub puutujatasandiga selles punktis. Joonisel 7.7 on kujutatud pinna $z = f(x, y)$ normaalvektor $\vec{v}$ ja normaalsirge n .

Joonis 7.7



Leiame normaalvektori $\vec{v}$ koordinaadid ja normaalsirge n kanoonilised võrrandid.

Lineaaralgebra kursusest on teada järgmised väited. Kui tasand on antud võrrandiga $C_1x + C_2y + C_3z + C_4 = 0$, siis temaga ristuva vektori koordinaadid on C_1, C_2 ja C_3 ning temaga ristuva ja punkti (x_1, y_1, z_1) läbiva sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - x_1}{C_1} = \frac{y - y_1}{C_2} = \frac{z - z_1}{C_3}.$$

Puutujatasandi T võrrand on (7.41). Viies selles võrrandis muutuja z paremale poole ja avades sulud saame

$$f'_x(a, b)x + f'_y(a, b)y - z + f(a, b) - f'_x(a, b)a - f'_y(a, b)b = 0.$$

Siit näeme, et puutujatasandi võrrand on esitatav kujul

$$C_1x + C_2y + C_3z + C_4 = 0,$$

kus

$$C_1 = f'_x(a, b), \quad C_2 = f'_y(a, b), \quad C_3 = -1,$$

$$C_4 = f(a, b) - f'_x(a, b)a - f'_y(a, b)b.$$

Järelikult on pinnal $z = f(x, y)$ punktis B järgmine normaalvektor:

$$\vec{\nu} = (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1).$$

Normaalsirge n läbib punkti B , mille koordinaadid on

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = f(a, b).$$

Seega on normaalsirge n kanoonilised võrrandid järgmised:

$$\frac{x - a}{f'_x(a, b)} = \frac{y - b}{f'_y(a, b)} = f(a, b) - z.$$

7.8 Kõrgemat järku osatuletised. Segatuletiste võrdsus

Vaatleme m -muutuja funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Eeldame, et sellel funktsioonil eksisteerib osatuletis $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ piirkonnas D . Sellisel juhul on $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ piirkonnas D määratud funktsioon. See funktsioon võib samuti omada osatuletisi.

Funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osatuletise osatuletisi nimetatakse selle funktsiooni *teist järku osatuletisteks*.

Teist järku osatuletisi on kahte liiki.

1. Kui võtta funktsioonist $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ kaks korda osatuletist ühe ja sama muutuja x_i suhtes, siis saab selle funktsiooni *teist järku osatuletise x_i suhtes*, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad f''_{x_i x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

2. Kui aga võtta funktsioonist $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ kõigepealt osatuletis muutuja x_i suhtes ja seejärel osatuletis muutuja x_j suhtes, kus $i \neq j$, siis tekib selle funktsiooni *teist järku segatuletis x_i ja x_j suhtes*, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad f''_{x_i x_j}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Ilmselt on viimasel juhul võimalik segatuletist võtta ka eelnevaga vastupidises järjekorras, st kõigepealt muutuja x_j suhtes ja seejärel muutuja x_i suhtes. Siis me saame segatuletise x_j ja x_i suhtes, st

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{ehk} \quad f''_{x_j x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Osutub, et teist järku segatuletise väärtus ei sõltu üksikute tuletiste võtmise järjekorrast, st kehtib järgmine teoreem:

Teoreem 7.2. Kui f'_{x_i} , f'_{x_j} , $f''_{x_i x_j}$ ja $f''_{x_j x_i}$ on pidevad punktis P , siis

$$f''_{x_i x_j}(P) = f''_{x_j x_i}(P). \quad (7.42)$$

Näide. Avaldame funktsiooni $z = xy^2 + x^3 \cos y$ teist järku segatuletised:

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2 + 3x^2 \cos y \\ z''_{xy} &= 2y - 3x^2 \sin y \\ z'_y &= 2xy - x^3 \cos y \\ z''_{yx} &= 2y - 3x^2 \sin y. \end{aligned}$$

Nagu näeme, kehtib võrdus $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Arvutades funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ teist järku osatuletise osatuletise, saame selle funktsiooni kolmandat järku osatuletise, viimasest osatuletise arvutamisel neljandat järku osatuletise jne.

Näiteks kui me võtame funktsioonist $f''_{x_i x_j}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osatuletise muutuja x_i suhtes, saame kolmandat järku osatuletise, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^3}{\partial x_j x_i^2} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad f'''_{x_j x_i x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Kui me aga võtame funktsioonist $f''_{x_i x_j}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osatuletise muutuja x_k suhtes, saame kolmandat järku osatuletise, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^3}{\partial x_j x_i x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad f'''_{x_j x_i x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ n -järku osatuletise avaldis on järgmine:

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_m^{p_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Siin on arvutatud p_1 korda osatuletist x_1 järgi, p_2 korda osatuletist x_2 järgi jne. Osatuletiste koguarv on $n = p_1 + p_2 + \dots + p_m$.

Segatuletiste võrdsus kehtib ka kõrgemat kui teist järku osatuletiste korral. See tähendab, et kõrgemat järku osatuletise väärtus ei sõltu üksikute tuletiste arvutamise järjekorrast. Näiteks kehtivad teatud pidevuse eeldustel kolmandat järku osatuletiste jaoks järgmised võrdused:

$$f'''_{x_i^2 x_j} = f'''_{x_i x_j x_i} = f'''_{x_j x_i^2}.$$

Küll aga sõltub kõrgemat järku osatuletis sellest mitu korda on iga üksiku argumenti järgi tuletist võetud. Näiteks üldjuhul võrdus $f'''_{x_i^2 x_j} = f'''_{x_i x_j^2}$ ei kehti, sest vasakul pool on muutuja x_i järgi tuletist võetud kaks korda aga paremal pool ainult üks kord.

7.9 Väljateooria mõisteid

Skalaarväli ja vektorväli.

Mitmemuutuja funktsiooni sünonüüm on *skalaarväli*. Taoline mõiste tuleneb sellest, et funktsioon f seab igale oma määramispiirkonna punktile P vastavusse parajasti ühe reaalarvu ehk skalaari $f(P)$.

Olgu D piirkond ruumis $\mathbb{R}^m$. Kujutist, mis seab igale punktile $P \in D$ vastavusse ühe kindla vektori ruumis $\mathbb{R}^m$, nimetatakse piirkonnas D antud *vektorväljaks*.

Olgu piirkonnas D antud vektorväli tähistatud sümboliga $\vec{F}$. Siis on punktile P vastava vektori tähis järgmine: $\vec{F}(P)$.

Kuna $\vec{F}(P)$ on vektor ruumis $\mathbb{R}^m$, siis on tal m koordinaati. Olgu need koordinaadid $F_1(P), F_2(P), \dots, F_m(P)$, st

$$\vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P), \dots, F_m(P)).$$

Koordinaadid $F_1(P), F_2(P), \dots, F_m(P)$ sõltuvad punktist P . Järelikult on nad piirkonnas D määratud m -muutuja funktsioonid ehk skalaarväljad. Seega koosneb ruumi $\mathbb{R}^m$ piirkonnas D antud vektorväli $\vec{F}$ m skalaarsest komponendist $F_1, F_2, \dots, F_m$.

Gradient ja selle omadused.

Olgu $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ m -muutuja funktsioon ehk skalaarväli piirkonnas D . Eeldame, et funktsioonil f on olemas kõik osatuletised piirkonnas D . Vektorit

$$\text{grad}f(P) = (f'_{x_1}(P), f'_{x_2}(P), \dots, f'_{x_m}(P))$$

nimetatakse skalaarvälja ehk funktsiooni f *gradiendiks* punktis P . Kujutist, mis seab igale punktile P hulgast D vastavusse vektori $\text{grad}f(P)$, nimetatakse skalaarvälja f *gradientväljaks*.

Vaatleme gradiendi omadusi.

Omadus 1. Olgu $\vec{s}$ vektor ruumis $\mathbb{R}^m$. Siis kehtib valem

$$f'_{\vec{s}}(P) = \frac{\text{grad}f(P) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \quad (7.43)$$

Erijuhul $|\vec{s}| = 1$ taandub valem (7.43) kujule

$$f'_{\vec{s}}(P) = \text{grad}f(P) \cdot \vec{s}. \quad (7.44)$$

Tõestus. Siirdume §7.4 tuletatud suunatuletise valemi (7.23) juurde. Arvestades gradiendi definitsiooni ja skalaarkorrutise definitsiooni (6.8), saame selle valemi kirjutada kujul (7.43). Sellega ongi omadus 1 tõestatud.

Omadus 2. Tuletis vektori $\vec{s}$ suunas on maksimaalne siis, kui $\vec{s}$ on gradiendi suunaline. Sellisel juhul $f'_{\vec{s}}(P) = |\text{grad}f(P)|$.

Tõestus. Hindame valemit (7.43) kasutades Cauchy-Schwartzi võrratust (6.10).

Saame

$$|f'_s(P)| = \left| \frac{\text{grad}f(P) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} \right| = \frac{|\text{grad}f(P) \cdot \vec{s}|}{|\vec{s}|} \leq \frac{|\text{grad}f(P)| |\vec{s}|}{|\vec{s}|} = |\text{grad}f(P)|.$$

Järelikult ei saa $f'_s(P)$ olla suurem kui $|\text{grad}f(P)|$. Kui meil õnnestub näidata, et gradiendiga samasuunalise $\vec{s}$ korral kehtib võrdus

$$f'_s(P) = |\text{grad}f(P)|,$$

siis on $\vec{s}$ -suunaline tuletis maksimaalne ning omadus 2 on tõestatud. Olgu $\vec{s}$ ja $\text{grad}f(P)$ samasuunalised. Tuletame meelde, et samasuunaliste vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutise jaoks kehtib seos (6.12). Kasutades seda seost vektorite $\vec{s}$ ja $\text{grad}f(P)$ jaoks ja arvestades valemist (7.43) saame

$$f'_s(P) = \frac{\text{grad}f(P) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{|\text{grad}f(P)| |\vec{s}|}{|\vec{s}|} = |\text{grad}f(P)|.$$

Olemegi näidanud, et gradiendiga samasuunalise vektori $\vec{s}$ korral kehtib $f'_s(P) = |\text{grad}f(P)|$. Seega on omadus 2 tõestatud.

Näide. Leiame funktsiooni $f(x, y, z) = x^2 - y^3 + z$ kiireima kasvu suuna ja suurima kasvu kiiruse punktis $A = (2, 1, 1)$. Selleks avaldame osatuletised:

$$f'_x(x, y, z) = 2x, \quad f'_y(x, y, z) = -3y^2, \quad f'_z(x, y, z) = 1$$

ja moodustame gradiendi

$$\text{grad}f(x, y, z) = (2x, -3y^2, 1).$$

Arvutame: $\text{grad}f(A) = (4, -3, 1)$. Funktsiooni kiireima kasvu suund punktis A järgmine: $\vec{s} = (4, -3, 1)$. Suurim kasvu kiirus on aga gradiendi pikkus, st $|\text{grad}f(A)| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{26}$.

Omadus 3. Olgu $u = f(x, y, z)$ kolmemuutuja funktsioon ja A punkt tema määramispiirkonnas. Vektor $\text{grad}f(A)$ on funktsiooni f nivoopinna normaalvektor punktis A .

Omadus 3 järeldub ühest teisest, samuti nivoopinna seotud omadusest, mis on järgmine:

Tuletis funktsiooni $u = f(x, y, z)$ nivoopinna puutuja suunas võrdub nulliga.

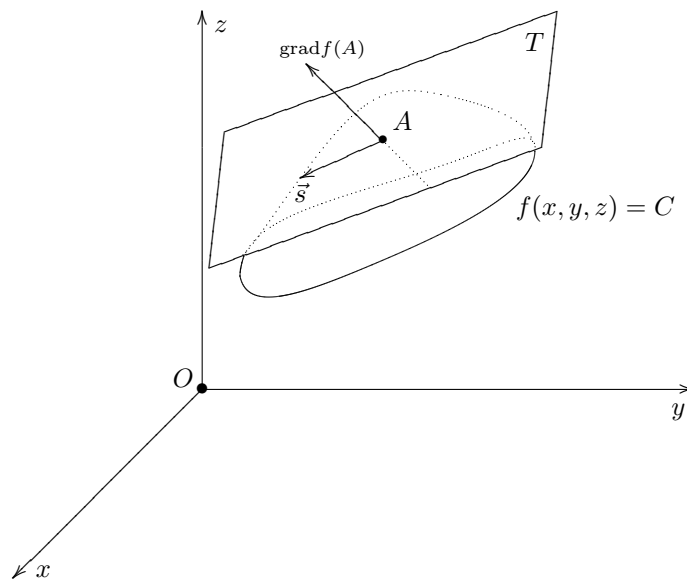
Viimast omadust saab lihtsalt selgitada. Kui liigutakse pinna puutuja suunas, siis liigutakse mööda seda pinda. Nivoopinna on funktsiooni f väärtus konstantne, st $f(x, y, z) = C$. Seega on funktsioon nivoopinna puutuja suunas liikumisel konstantne. Kuid konstantse funktsiooni tuletis on null. Järelikult võrdub nivoopinna puutuja suunaline tuletis nulliga.

Omaduse 3 tõestamiseks valime suvalise punktist A lähtuva vektori nivoopinna $f(x, y, z) = C$ puutujatasandil T . Tähistame selle vektori $\vec{s}$ -ga (joonis 7.8). Siis, nagu nägime, kehtib võrdus $f'_s(A) = 0$. Seetõttu saame valemist (7.43)

$$f'_s(A) = \frac{\text{grad}f(A) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grad}f(A) \cdot \vec{s} = 0.$$

See näitab, et $\text{grad}f(A)$ ristub vektoriga $\vec{s}$. Kuna $\vec{s}$ valiti puutujatasandil T suvaliselt, siis $\text{grad}f(A)$ ristub terve tasandiga T , st $\text{grad}f(A)$ on funktsiooni f nivoopinna normaalvektor punktis A . Omadus 3 on tõestatud.

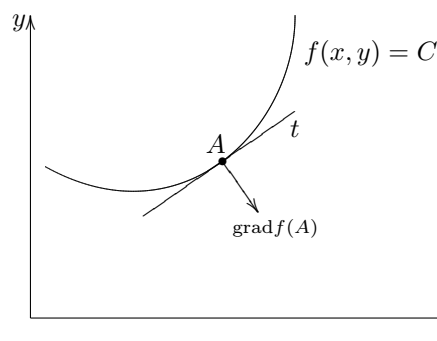
Joonis 7.8



Märgime, et omadusega 3 sarnane omadus kehtib ka kahemuutuja funktsiooni korral, nimelt:

Olgu $z = f(x, y)$ kahemuutuja funktsioon ja A punkt tema määramispiirkonnas. Vektor $\text{grad}f(A)$ on funktsiooni f nivoojoone normaalvektor punktis A .

Joonis 7.9



Seda omadust on illustreeritud joonisel 7.9. Nivoojoonele $f(x, y) = C$ on punktis A tõmmatud puutuja t . Gradient ristub puutujaga punktis A .

Nabla.

Eemaldades funktsiooni $f(P)$ gradiendist

$$\text{grad}f(P) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(P), \frac{\partial}{\partial x_2}f(P), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}f(P) \right)$$

funktsiooni $f(P)$, jääb järgi järgmine sümbolne vektor, mis koosneb ainult osatuletistest:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right). \quad (7.45)$$

Seda vektorit nimetatakse *Hamiltoni operaatoriks* e *nablaks*. Seega Hamiltoni operaator funktsioonist $f(P)$ võrdub selle funktsiooni gradiendiga, st

$$\nabla f(P) = \text{grad}f(P).$$

Divergents. Solenoidaalne väli.

Olgu antud vektorväli $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$. Moodustame nabla ja $\vec{F}$ skalaarkorrutise:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_1}F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}F_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}F_m. \quad (7.46)$$

Tegemist on skalaarväljaga. Seda välja nimetatakse vektorvälja $\vec{F}$ *divergentsiks* ja tähistatakse $\text{div } \vec{F}$. Seega

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}. \quad (7.47)$$

Divergents on seotud allikate tihedusega mitmesugustes füüsikalistes protsessides. Toome siinkohal ühe näite. Olgu vaatluse all vedeliku voolamine mingis keskkonnas (nt põhjavee voolamine maapinnas). Olgu $\vec{v}(P)$ vedeliku voolu kiirus punktis P . Siis on $\text{div } \vec{v}(P)$ võrdne punktis P paiknevate vooluallikate tihedusega. Kui $\text{div } \vec{v}(P) = 0$ iga P korral, siis vooluallikad puuduvad, st vedeliku mass ei muutu. Täpsemalt: suvalise piirkonna D korral on ajaühikus piirkonda D sisse voolava vedeliku mass võrdne ajaühikus piirkonnast D välja voolava vedeliku massiga.

Vektorvälja $\vec{F}$, mille puhul $\text{div } \vec{F} = 0$, so välja, milles allikad puuduvad, nimetatakse *solenoidaalseks* väljaks.

Vektorite vektorkorrutis.

Lisaks skalaarkorrutisele esineb vektoralgebras ka vektorkorrutise mõiste. Kahe kolmemõõtmelise vektori $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorkorrutis on samuti kolmemõõtmeline vektor, mis avaldub valemiga

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (7.48)$$

kus e_1, e_2 ja e_3 on telgede suunalised ühikvektorid. Arendades valemis (7.48) esineva 3×3 determinandi välja esimese rea järgi saame

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 = \quad (7.49)$$

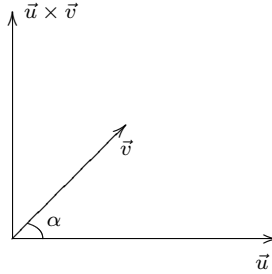
$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (7.50)$$

Seega on vektori $\vec{u} \times \vec{v}$ valem komponentide kaupa välja kirjutatuna selline:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Vektorkorrutis $\vec{u} \times \vec{v}$ ristub vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ poolt määratud tasandiga ja on suunatud nii, et $\vec{u} \times \vec{v}$ tipu poolt vaadatuna paikneb vektor $\vec{v}$ vektori $\vec{u}$ suhtes vastupäeva (vt joonis 7.10).

Joonis 7.10



Vektori $\vec{u} \times \vec{v}$ pikkus on vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ pikkuste kaudu antud valemiga $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$, kus α on $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vaheline nurk.

Rootor. Keerisevaba väli.

Olgu antud kolmemõõtmeline vektorväli $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Moodustame nabla ja $\vec{F}$ vektorkorrutise:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \quad (7.52)$$

Saadud vektorvälja nimetatakse vektorvälja $\vec{F}$ *rootoriks* ja tähistatakse $\text{rot } \vec{F}$. Seega

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}. \quad (7.53)$$

Komponentidekaupa üles kirjutatuna (vrdl (7.51)) on rootori valem järgmine:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \quad (7.54)$$

Vektorvälja $\vec{F}$, mille puhul $\text{rot } \vec{F} = 0$, nimetatakse *keerisevabaks* väljaks.

Potentsiaalne väli.

Vektorvälja $\vec{F}(P)$ nimetatakse *potentsiaalseks*, kui ta on mingi skalaarvälja gradientväli, st

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \text{grad } U \quad \text{ehk} \\ (F_1, F_2, \dots, F_m) &= (U'_{x_1}, U'_{x_2}, \dots, U'_{x_m}).\end{aligned}\quad (7.55)$$

Funktsiooni U selles valemis nimetatakse vektorvälja $\vec{F}$ *potentsiaalsiks*.

Potentsiaalsed on näiteks gravitatsioonijõu väli, elektrijõu väli jms. On ka selliseid füüsikalisi välju, mis ei ole potentsiaalsed (näiteks voolava vedeliku kiiruse väli teatud tingimustes).

Teeme kindlaks milliseid matemaatilisi tingimusi peavad vektorvälja komponendid F_i rahuldama selleks, et see väli oleks potentsiaalne. Kui $\vec{F}(P)$ on potentsiaalne, siis vastavalt valemile (7.55)

$$F_i = U'_{x_i} \quad \text{iga } i = 1, \dots, m \text{ korral.} \quad (7.56)$$

Valime kaks suvalist indeksit $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ ja kirjutame võrduse (7.56) välja nende indeksite korral:

$$F_i = U'_{x_i}, \quad F_j = U'_{x_j}. \quad (7.57)$$

Võtame esimesest võrdusest osatuletise muutuja x_j suhtes ja teisest võrdusest osatuletise muutuja x_i suhtes. Saame

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = U''_{x_i x_j}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = U''_{x_j x_i}. \quad (7.58)$$

Kuna segatuletised on omavahel võrdsed, st $U''_{x_i x_j} = U''_{x_j x_i}$, siis

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (7.59)$$

Potentsiaalse välja $\vec{F}$ komponendid F_i rahuldavad tingimusi (7.59).

Lõpuks näitame, et potentsiaalne vektorväli on keerisevaba. Olgu antud kolmemõõtmeline potentsiaalne vektorväli $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Arvutame selle rootori. Vastavalt tingimustele (7.59) kehtivad seosed

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}.$$

Nende seoste tõttu saame valemist (7.54) võrduse $\text{rot } \vec{F} = 0$. Seega võibki väita, et *potentsiaalne väli on keerisevaba*.

7.10 Kahemuutuja funktsiooni Tayloriga polünoom

Kombinatsioonid. Binoomvalem.

Antud n -elemendilise hulga m -elemendilisi (järjestamata) alamhulki nimetatakse *kombinatsioonideks* n elemendist m -kaupa. Kombinatsioonide arvu n elemendist m -kaupa tähistatakse sümboliga $\binom{n}{m}$.

Näiteks kaheelemendilise hulga $\{A; B\}$ kombinatsioon 0-kaupa on $\emptyset$, kombinatsioonid 1-kaupa on $\{A\}$, $\{B\}$ ja kombinatsioon 2-kaupa on $\{A; B\}$. Seega

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1.$$

Kolmeelemendilise hulga $\{A; B; C\}$ kombinatsioon 0-kaupa on $\emptyset$, kombinatsioonid 1-kaupa on $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, kombinatsioonid 2-kaupa on $\{A; B\}$, $\{A; C\}$, $\{B; C\}$ ja kombinatsioon kolmekaupana on $\{A; B; C\}$. Järelikult

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1.$$

Kombinatsioonide arvu leidmiseks saab kasutada järgmist üldist valemit:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (7.60)$$

Eespool nägime, et kombinatsioonide arvud $n = 2$ ja $n = 3$ korral võrduvad vastavalt summa ruudu ja summa kuubi valemite kordajatega. Seega

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} x^{2-i} y^i$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} x^{3-i} y^i.$$

Kahe muutuja summa n -aste avaldub *Newtoni binoomvalemiga*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i. \quad (7.61)$$

Kahemuutuja funktsiooni polünoomid.

Tuletame meelde, et muutuja x ülimalt n -astme polünoomi üldkuju on järgmine:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n,$$

kus $c_0, \dots, c_n$ on konstantsed kordajad. Kui $c_n \neq 0$, siis on tegemist täpselt n -astme polünoomiga.

Vaatleme nüüd kahe muutuja polünoome. Muutujate x ja y ülimalt n -astme polünoom on järgmine funktsioon:

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k c_{ki} x^{k-i} y^i, \quad (7.62)$$

kus c_{ki} on konstantsed kordajad. Indeks k näitab polünoomi liidetava summaarset astet: x^{k-i} ja y^i astmeid kokku liites saame $k-i+i = k$. Kõige kõrgema astme liidetavate puhul on k võrdne n -ga. Kui vähemalt üks kõige

kõrgema astme liidetavate kordajatest $c_{n0}, c_{n1}, \dots, c_{nn}$ on nullist erinev, siis on polünoomi aste täpselt n .

Näiteks muutujate x ja y ülimalt 1-astme polünoom on

$$P_1(x, y) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^k c_{ki} x^{k-i} y^i = c_{00} + c_{10}x + c_{11}y.$$

Kui vähemalt üks kordajatest c_{10}, c_{11} on nullist erinev, siis on tegemist 1-astme polünoomi e lineaarfunktsiooniga. Muutujate x ja y ülimalt 2-astme polünoom on

$$P_2(x, y) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^k c_{ki} x^{k-i} y^i = c_{00} + c_{10}x + c_{11}y + c_{20}x^2 + c_{21}xy + c_{22}y^2.$$

Kui vähemalt üks arvudest c_{20}, c_{21}, c_{22} on nullist erinev, siis on tegemist 2-astme polünoomi e ruutfunktsiooniga. Ülimalt 3-astme polünoom on

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^k c_{ki} x^{k-i} y^i = \\ &= c_{00} + c_{10}x + c_{11}y + c_{20}x^2 + c_{21}xy + c_{22}y^2 + c_{30}x^3 + c_{31}x^2y + c_{32}xy^2 + c_{33}y^3 \end{aligned}$$

jne.

Näiteks olgu toodud binoomvalem

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n. \end{aligned}$$

Seal esineb n -astme polünoom, mis sisaldab vaid kõige kõrgema astmega liikmeid, st liikmeid, mille summaarne aste on n .

Kui me nihutame argumenti x konstandi a võrra ja argumenti y konstandi b võrra, siis teisendub ülimalt n astme polünoom (7.62) järgmisele kujule:

$$\tilde{P}_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k c_{ki} (x - a)^{k-i} (y - b)^i.$$

Kahemuutuja funktsiooni Taylori polünoom.

Ühemuutuja funktsiooni $f(x)$ Taylori polünoom punktis a avaldub järgmise valemiga (vt §3.12):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \\ &+ \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n. \end{aligned}$$

Taylori polünoom lähendab funktsiooni $f(x)$ punkti a lähedal, st $f(x) \approx P_n(x)$.

Vaatleme nüüd kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$. Seame endale eesmärgiks leida muutujate x ja y polünoom, mis lähendab funktsiooni $f(x, y)$ mingi fikseeritud punkti $A = (a, b)$ lähedal. Idee on järgmine. Tõmbame punktide $A = (a, b)$ ja $M = (x, y)$ vahele suunatud sirglõigu parameetriga t . Siis on funktsioon f selle sirge peal ühe muutuja t funktsioon. Kirjutades selle funktsiooni jaoks välja Taylori polünoomi, saamegi kahemuutuja polünoomi, mis lähendab funktsiooni f .

Lõigu AM parameetrilised võrrandid on järgmised:

$$\begin{cases} u = \varphi(t) = a + (x - a)t \\ v = \psi(t) = b + (y - b)t, \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (7.63)$$

kus $P = (u, v)$ on lõigul AM asuv punkt. Parameetri väärtustele 0 ja 1 vastavad lõigu otspunktid A ja M :

$$(\varphi(0), \psi(0)) = (a, b) \quad \text{ja} \quad (\varphi(1), \psi(1)) = (x, y).$$

Defineerime järgmise ühemuutuja funktsiooni:

$$g(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Siis

$$f(a, b) = f(\varphi(0), \psi(0)) = g(0) \quad \text{ja} \quad f(x, y) = f(\varphi(1), \psi(1)) = g(1).$$

Tähistame Q_n -ga funktsiooni $g(t)$ Taylori polünoomi nullpunktis, st

$$g(t) \approx Q_n(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n. \quad (7.64)$$

Seda valemit kasutades saab tuletada funktsioonile f kuitahes kõrge astmega polünoomiaalse lähendi. Teeme tuletuskäigu läbi $n = 1$ ja $n = 2$ korral.

Kui $n = 1$, siis

$$f(x, y) = g(1) \approx Q_1(1) = g(0) + g'(0). \quad (7.65)$$

Nagu nägime,

$$g(0) = f(a, b). \quad (7.66)$$

Valemi (7.65) rakendamiseks peame arvutama ka $g'(0)$. Vastavalt liitfunktsiooni tuletise arvutamise reeglile saame

$$g'(t) = \frac{d}{dt}f(\varphi(t), \psi(t)) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

Kasutades funktsioonide φ ja ψ definitsioone (vt (7.63)) arvutame nende tuletised:

$$\varphi'(t) = x - a, \quad \psi'(t) = y - b.$$

Seega

$$g'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))(x - a) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))(y - b). \quad (7.67)$$

Kuna $\varphi(0) = a$ ja $\psi(0) = b$, siis

$$g'(0) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). \quad (7.68)$$

Asendades (7.66) ja (7.68) valemisse (7.65) saame funktsiooni f lineaarse lähendi ehk esimese astme Tayloriga polünoomi punktis A :

$$f(x, y) \approx P_1(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). \quad (7.69)$$

Seda lähendit me käsitlesime juba eespool §7.7 (valem (7.41)). Funktsiooni $z = P_1(x, y)$ graafik on pinna $z = f(x, y)$ puutujatasand punktis $B = (a, b, f(a, b))$.

Kui $n = 2$, siis (7.64) põhjal

$$f(x, y) = g(1) \approx Q_2(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2}. \quad (7.70)$$

Suuruste $g(0)$ ja $g'(0)$ valemid on juba olemas. Täiendavalt tuleb arvutada veel $g''(0)$. Selleks leiame avaldise (7.67) tuletise:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} f'_x(\varphi(t), \psi(t))(x - a) + \frac{d}{dt} f'_y(\varphi(t), \psi(t))(y - b) = \\ &= [f''_{xx}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f''_{xy}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)](x - a) + \\ &= [f''_{yx}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f''_{yy}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)](y - b). \end{aligned}$$

Kuna $\varphi'(t) = x - a$, $\psi'(t) = y - b$ ja segatuletised on võrdsed, st $f''_{xy} = f''_{yx}$, saame

$$\begin{aligned} g''(t) &= f''_{xx}(\varphi(t), \psi(t))(x - a)^2 + 2f''_{xy}(\varphi(t), \psi(t))(x - a)(y - b) + \\ &+ f''_{yy}(\varphi(t), \psi(t))(y - b)^2. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} g''(0) &= f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \\ &+ f''_{yy}(a, b)(y - b)^2. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Kasutades valemid (7.66), (7.68) ja (7.71) võrduses (7.70) saame funktsiooni f ruutlähendi ehk teise astme Tayloriga polünoomi punktis A :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx P_2(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ &+ \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2]. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Seda meetodit jätkates saame tuletada funktsiooni $f(x, y)$ n -astme Tayloriga polünoomi punktis A :

$$f(x, y) \approx P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k}{\partial x^{k-i} \partial y^i} f(a, b)(x - a)^{k-i}(y - b)^i. \quad (7.73)$$

Näide. Leiame funktsiooni $f(x, y) = e^x \cos y$ teise astme Taylorig polünoomi punktis $O = (0, 0)$. Selleks avaldame osatuletised kuni teise järguni:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= e^x \cos y, & f'_y(x, y) &= -e^x \sin y, \\ f''_{xx}(x, y) &= e^x \cos y, & f''_{xy}(x, y) &= -e^x \sin y, \\ f''_{yy}(x, y) &= -e^x \cos y. \end{aligned}$$

Arvutame funktsiooni ja tema osatuletiste väärtused punktis O :

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, & f'_x(0, 0) &= 1, & f'_y(0, 0) &= 0, \\ f''_{xx}(0, 0) &= 1, & f''_{xy}(0, 0) &= 0, & f''_{yy}(0, 0) &= -1. \end{aligned}$$

Rakendades valemit (7.72) saame antud funktsiooni teise astme Taylorig polünoomi:

$$e^x \cos y \approx P_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2} [x^2 - y^2].$$

7.11 Mitmemuutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Olgu antud mitmemuutuja funktsioon $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Lokaalse ekstreemumi mõiste.

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_1 *lokaalne maksimum*, kui

1. funktsioon f on määratud punkti P_1 mingis ümbruses $U(P_1, \epsilon)$,
2. iga $P \in U(P_1, \epsilon)$ korral kehtib võrratus $f(P) \leq f(P_1)$.

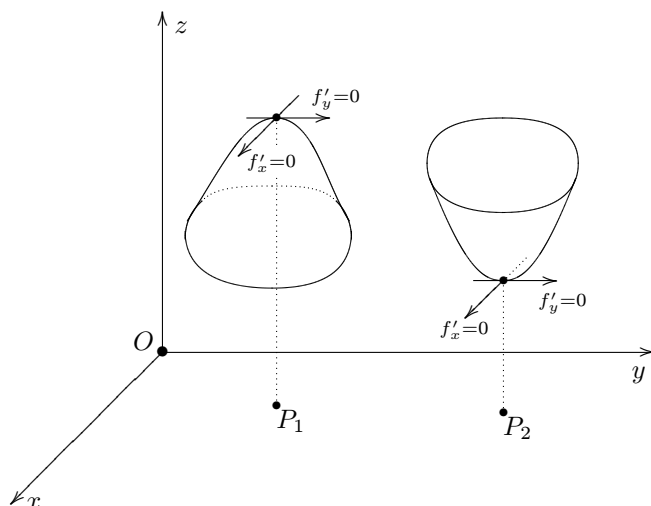
Öeldakse, et funktsioonil f on punktis P_1 *lokaalne miinimum*, kui

1. funktsioon f on määratud punkti P_1 mingis ümbruses $U(P_1, \epsilon)$,
2. iga $P \in U(P_1, \epsilon)$ korral kehtib võrratus $f(P) \geq f(P_1)$.

Funktsiooni lokaalseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *lokaalseteks ekstreemumiteks*.

Kahemuutuja funktsiooni graafikul on lokaalse maksimumi kohal "tipp" ja lokaalse miinimumi kohal "org". Joonisel 7.10 on vasemal funktsioonil lokaalne maksimum punktis P_1 ja paremal funktsioonil lokaalne miinimum punktis P_2 .

Joonis 7.10



Lokaalsete ekstreemumite tarvilikud ja piisavad tingimused.

Jooniselt 7.10 näeme, et lokaalse ekstreemumi kohal on kahemuutuja graafiku puutujad paralleelsed xy -tasandiga. Nii x - kui y -telje suunas liikudes funktsioon ei kasva ega ei kahane. Seega on lokaalse ekstreemumi kohal kahemuutuja funktsiooni mõlemad osatuletised võrdsed nulliga. Samasugune omadus kehtib ka kolme- ja enama muutuja funktsioonide korral. Lokaalses ekstreemumis on kõik osatuletised (juhul kui nad eksisteerivad) võrdsed nulliga.

Funktsiooni f *statsionaarseks punktiks* nimetatakse punkti, kus selle funktsiooni kõik osatuletised võrduvad nulliga. See tähendab, et statsionaarses punktis P_1 kehtivad järgmised võrdsused:

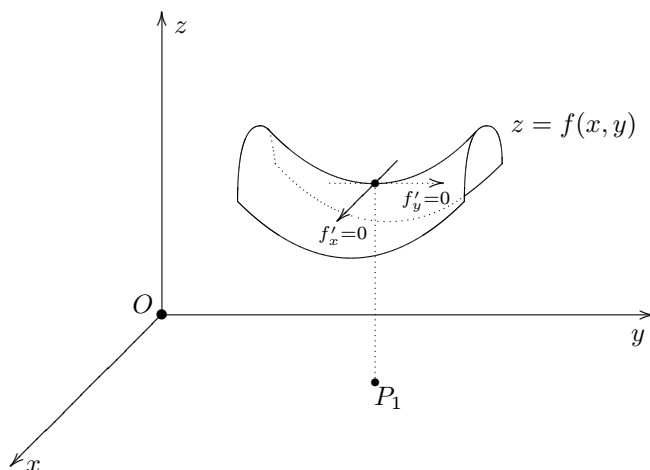
$$f'_{x_1}(P_1) = f'_{x_2}(P_1) = \dots = f'_{x_m}(P_1) = 0 \quad (\text{ehk } \text{grad } f(P_1) = 0).$$

Saame formuleerida järgmise teoreemi.

Teoreem 7.3 (Lokaalse ekstreemumi tarvilik tingimus). *Olgu funktsioonil $z = f(P)$ punktis P_1 lokaalne ekstreemum ja eksisteerigu osatuletised $f'_{x_1}(P_1), f'_{x_2}(P_1), \dots, f'_{x_m}(P_1)$. Siis on P_1 funktsiooni f statsionaarne punkt.*

Siiski ei ole statsionaarsed punktid samastatavad lokaalsete ekstreemumitega. Lokaalne ekstreemum saab esineda ainult statsionaarses punktis, kuid funktsioonil võib olla ka selliseid statsionaarseid punkte, kus lokaalset ekstreemumi ei ole.

Joonis 7.11



Näiteks võib tuua joonisel 7.11 kujutatud kahemuutuja funktsiooni. Punktis P_1 on selle funktsiooni mõlemad osatuletised võrdsed nulliga, st P_1 on statsionaarne punkt, kuid lokaalset ekstreemumi seal ei ole. Tegemist on nn "sadulpunktiga". Funktsiooni graafik on x -telje sihis kumer ja y -telje sihis nõgus.

Seega tekib küsimus: milliseid täiendavaid tingimusi peab rahuldama funktsiooni statsionaarne punkt, et seal oleks lokaalne ekstreemum? Lihtsuse mõttes anname sellele küsimusele vastuse vaid kahemuutuja funktsiooni korral.

Teoreem 7.4 (Lokaalse ekstreemumi piisavad tingimused). Olgu P_1 kahemuutuja funktsiooni $f(x, y)$ statsionaarne punkt, st

$$f'_x(P_1) = f'_y(P_1) = 0.$$

Tähistame:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_1) & f''_{xy}(P_1) \\ f''_{yx}(P_1) & f''_{yy}(P_1) \end{vmatrix} = f''_{xx}(P_1)f''_{yy}(P_1) - [f''_{xy}(P_1)]^2.$$

Siis kehtivad järgmised väited.

1. Kui $\mathcal{A} > 0$ ja $f''_{xx}(P_1) < 0$, siis on funktsioonil f punktis P_1 lokaalne maksimum.
2. Kui $\mathcal{A} > 0$ ja $f''_{xx}(P_1) > 0$, siis on funktsioonil f punktis P_1 lokaalne miinimum.
3. Kui $\mathcal{A} < 0$, siis ei ole funktsioonil f punktis P_1 lokaalset ekstreemumi.

Juhul $\mathcal{A} = 0$ jääb küsimus lokaalse ekstreemumi olemasolust punktis P_1 lahtiseks.

Näide. Leiame funktsiooni $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy - 4$ statsionaarsed punktid ja määrame nende liigi. Alustame osatuletiste avaldamisest:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 + 3x.$$

Statsionaarsete punktide leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Esimesest võrandist saame seose $y = -x^2$. Asendades teises võrandis y -i suurusena $-x^2$ tekib järgmine võrandi x jaoks: $x + x^4 = 0$. Lahendame selle:

$$x + x^4 = 0 \Rightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -1.$$

Funktsioonil on kaks statsionaarset punkti: $P_1 = (0, 0)$ ja $P_2 = (-1, -1)$.

Statsionaarsete punktide liigi kindlaks tegemiseks tuleb hinnata suurust $\mathcal{A} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$. Teist järku tuletised on

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{yy}(x, y) = 6y, \quad f''_{xy}(x, y) = 3.$$

Seega

$$\mathcal{A} = 36xy - 9.$$

Punkti $P_1 = (0, 0)$ korral on $\mathcal{A} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$. Järelikult ei ole teoreem 7.4 põhjal selles punktis lokaalset ekstreemumi. Punkti $P_2 = (-1, -1)$ korral on $\mathcal{A} = 36 \cdot (-1) \cdot (-1) - 9 = 27 > 0$. Teoreem 7.4 põhjal on selles punktis lokaalne ekstreemum. Kuna $f''_{xx}(-1, -1) = 6 \cdot (-1) < 0$, on tegemist lokaalse maksimumiga. Arvutame ka

$$f(-1, -1) = (-1)^3 + (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 = -3.$$

Seega on maksimumpunkti koordinaadid järgmised: $(P_2, f(P_2)) = (-1, -1, -3)$.

7.12 Kahemuutuja funktsiooni tinglike ja absoluutsete ekstreemumite leidmine

Kahemuutuja funktsiooni tinglikud ekstreemumid ja nende leidmine.

Vaatleme nüüd ülesannet kahemuutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumite ehk suurima ja vähima väärtuse leidmiseks lisatingimused

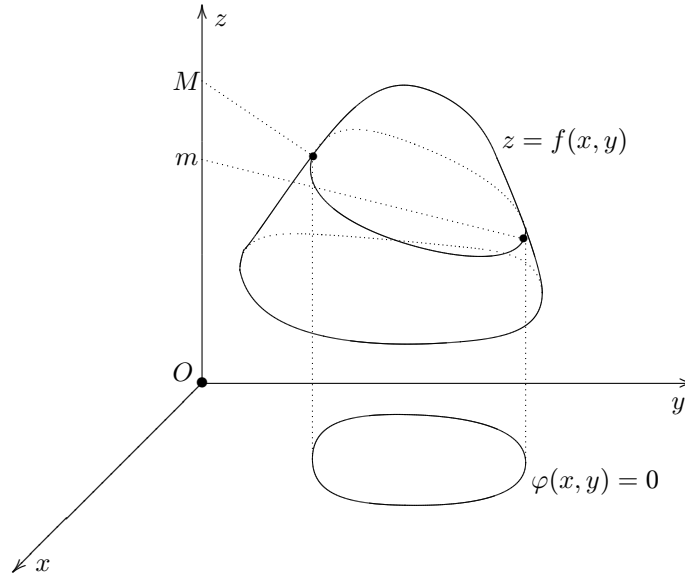
$$\varphi(x, y) = 0, \tag{7.74}$$

kus φ on samuti mingi kahemuutuja funktsioon. Võrrand (7.74) määrab teatud joone xy -tasandil. Lihtsuse mõttes eeldame, et joon $\varphi(x, y) = 0$ on kinnine, st tema alg- ja lõpp-punkt ühtivad.

Geomeetriliselt tähendab tingliku ekstreemumülesande lahendamine pinna $z = f(x, y)$ madalaima ja kõrgeima punkti leidmist joone $\varphi(x, y) = 0$ kohal.

Joonisel 7.12 kujutatud funktsiooni maksimum ja miinimum lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$ on vastavalt M ja m .

Joonis 7.12



Tingliku ekstreemumülesande lahendamisel saab kasutada selle ülesandega seotud *Lagrange'i funktsiooni*. Antud ülesande korral on Lagrange'i funktsioon järgmine:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y). \quad (7.75)$$

Kordajat λ funktsiooni φ ees nimetatakse *Lagrange'i kordajaks*. Tingliku ekstreemumülesande lahendamise saab nüüd taandada Lagrange'i funktsiooni statsionaarsete punktide leidmisele. Nimelt kehtib järgmine teoreem:

Teoreem 7.4. *Leidub $\lambda \in \mathbb{R}$ nii, et funktsiooni $f(x, y)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$ saavutatakse Lagrange'i funktsiooni $F(x, y, \lambda)$ statsionaarsetes punktides.*

Järelikult tuleb punkte $P = (x, y)$, kus f saavutab tingliku ekstreemumi, otsida Lagrange'i funktsiooni F statsionaarsete punktide hulgast. Funktsiooni F statsionaarsed punktid on teatavasti sellised kus

$$F'_x(x, y, \lambda) = F'_y(x, y, \lambda) = 0.$$

Asendades nendesse võrdustesse funktsiooni F valemi (7.75) põhjal saame järgmised võrrandid:

$$f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0. \quad (7.76)$$

Üldiselt võib funktsiooni F statsionaarseid punkte (st (7.76) lahendeid) olla rohkem kui funktsiooni f tinglikke ekstreemumeid. Tõepoolest: miski ei garanteeri, et süsteemi (7.76) lahend (x, y) rahuldaks ekstreemumülesandes nõutud tingimust $\varphi(x, y) = 0$. Seega tuleb (7.76) lahendite hulgast välja selekteerida eelkõige sellised mis rahuldavad tingimust $\varphi(x, y) = 0$. Süsteem (7.76) sisaldab 3 tundmatut x, y ja λ kuid ainult 2 võrrandit. Lisatundmatu λ võimaldabki meil täiendada süsteemi (7.76) kolmanda võrrandiga $\varphi(x, y) = 0$, viies sellega tundmatute ja võrrandite arvud omavahel võrdseks. Saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (7.77)$$

Tingimusliku ekstreemumülesande lahendi(te) leidmiseks lahendataksegi 3×3 võrrandisüsteem (7.77). Siiski võib ka (7.77) lahendite hulgas olla selliseid, mis ei ole esialgse ekstreemumülesande lahendiks. Õigete lahendite välja selekteerimiseks puuduvad üldised eeskirjad. Seda tuleb teha konkreetse ülesande sisust lähtuvalt.

Näide. Leiame funktsiooni $f(x, y) = x + y$ ekstreemumid tingimusel $x^2 + y^2 = 1$. Ülesande Lagrange'i funktsioon on järgmine:

$$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Avaldame osatuletised:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda y.$$

Süsteem (7.77) on järgmine:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (7.78)$$

Kahest esimesest võrrandist saame

$$1 + 2\lambda x = 1 + 2\lambda y \Rightarrow 2\lambda x = 2\lambda y \Rightarrow x = y.$$

Asendades y -i x -ga süsteemi (7.78) kolmandas võrrandis arvutame x -i:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Järelikult on Lagrange'i funktsiooni statsionaarsed punktid, mis vastavad tingimusele $x^2 + y^2 = 1$, järgmised:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Lõpuks tuleb otsustada, millistes leitud punktides on funktsiooni tinglikud miinimumid, maksimumid või ekstreemumid puuduvad. Selleks arvutame funktsiooni väärtused antud punktides:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Funktsiooni $z = x + y$ graafik on ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ kohal pidev joon, millel on olemas kõrgeim ja madalaim punkt. Seega on antud funktsioonil olemas nii tinglik maksimum kui ka tinglik miinimum. Järelikult, punktis $P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ saab olla vaid tinglik miinimum väärtusega $-\sqrt{2}$ ja punktis $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ saab olla vaid tinglik maksimum väärtusega $\sqrt{2}$. Ülesanne on lahendatud.

Lõpuks olgu mainitud, et kui $\varphi(x, y) = 0$ ei ole kinnine joon (st tema alg- ja lõpp-punkt on erinevad), võivad tinglikud ekstreemumid esineda lisaks Lagrange'i funktsiooni statsionaarsetele punktidele ka joone $\varphi(x, y) = 0$ otspunktides. Sellisel juhul tuleb funktsiooni f väärtustele mainitud statsionaarsetes punktides lisada ka funktsiooni väärtused joone $\varphi(x, y) = 0$ otspunktides ja neist välja valida suurim ja vähim.

Kahemuutuja funktsiooni absoluutsete ekstreemumite leidmine.

Olgu kahemõõtmelises kinnises ja tõkestatud piirkonnas D antud pidev kahemuutuja funktsioon $f(x, y)$. Eesmärgiks on leida selle funktsiooni suurim ja vähim väärtus piirkonnas D . Nagu me teame, sellistel eeldustel funktsiooni absoluutsed ekstreemumid eksisteerivad. On kaks võimalust.

- a) Absoluutne ekstreemum saavutatakse piirkonna D sisepunktis P (nagu P_1 joonisel 6.12). Siis on antud absoluutne ekstreemum ühtlasi ka lokaalne ekstreemum. Teoreem 7.2 põhjal on P funktsiooni f statsionaarne punkt.
- b) Absoluutne ekstreemum saavutatakse piirkonna D rajapunktis P (nagu P_2 joonisel 6.12). Kui piirkonna rajajoonele on antud võrrandiga $\varphi(x, y) = 0$, siis on antud absoluutne ekstreemum ühtlasi ka tinglik ekstreemum lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$. Teoreem 7.4 põhjal on P Lagrange'i funktsiooni statsionaarne punkt.

Siit nähtub, et me võime funktsiooni f absoluutsed ekstreemumid piirkonnas D leida järgmist eeskirja kasutades.

1. Leiame kõik funktsiooni f statsionaarsed punktid piirkonnas D . Olgu need $P_1, \dots, P_n$.
2. Konstrueerime piirkonna D rajajoonele $\varphi(x, y) = 0$ vastava Lagrange'i funktsiooni $F_\lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ja leiame selle statsionaarsed punktid joonel $\varphi(x, y) = 0$. Olgu need $Q_1, \dots, Q_m$.
3. Arvutame funktsiooni väärtused $f(P_1), \dots, f(P_n), f(Q_1), \dots, f(Q_m)$. Leia nende hulgast suurima ja vähima. Tulemusena saamegi funktsiooni suurima ja vähima väärtuse piirkonnas D .

Näide. Leiame funktsiooni

$$f(x, y) = 2x - x^2 - y^2 - 1$$

suurima ja vähima väärtuse kinnises ringis $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Alustame f statsionaarsete punktide arvutamisest. Selleks avaldame osatuletised:

$$f'_x(x, y) = 2 - 2x, \quad f'_y(x, y) = -2y.$$

Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Lahend on $x = 1, y = 0$. Seega on funktsioonil f üks statsionaarne punkt $P_1 = (1, 0)$, mis paikneb ringis D .

Piirkonna D rajajoone võrrand on $x^2 + y^2 = 4$. Sellele võrrandile vastab Lagrange'i funktsioon

$$F(x, y, \lambda) = 2x - x^2 - y^2 - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Arvutame Lagrange'i funktsiooni osatuletised:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2 - 2x + 2\lambda x, \quad F'_y(x, y, \lambda) = -2y + 2\lambda y.$$

Moodustame süsteem (7.77):

$$\begin{cases} 2 - 2x + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \quad (7.79)$$

Teisest võrrandist saame

$$-2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2(\lambda - 1)y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Asetame $y = 0$ viimasesse võrrandisse. Saame

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Muutuja x väärtustele -2 ja 2 vastavad λ väärtused saame arvutada süsteemi esimesest võrrandist. Need tulevad $\lambda = \frac{3}{2}$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$ (kuigi λ väärtused ülesande lahendamise seisukohast enam olulised ei ole). Seega on Lagrange'i funktsioonil kaks statsionaarset punkti $Q_1 = (-2, 0)$ ja $Q_2 = (2, 0)$, mis paiknevad joonel $x^2 + y^2 = 4$.

Arvutame f väärtused saadud kolmes punktis:

$$f(P_1) = 0, \quad f(Q_1) = -9, \quad f(Q_2) = -1.$$

Funktsiooni suurim väärtus on 0 ja vähim väärtus on -9 .

Peatükk 8

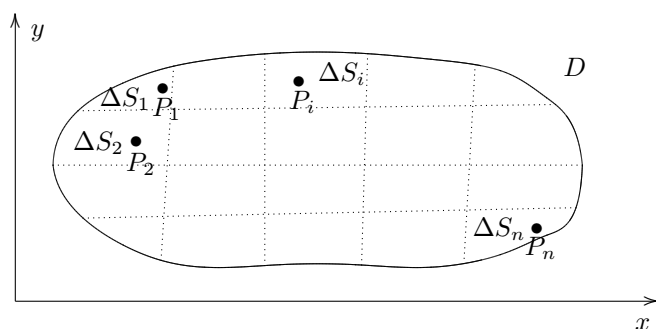
Kahekordne integraal

8.1 Kahekordse integraali mõiste ja geomeetriaalne sisu

Kahemuutuja funktsiooni integraalsumma.

Olgu D kinnine tõkestatud piirkond ruumis $\mathbb{R}^2$. Olgu $z = f(x, y)$ piirkonnas D määratud pidev funktsioon. Jaotame piirkonna D n tükiks $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (joonis 8.1). Tähistagu ΔS_i samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki pindala.

Joonis 8.1



Valime igal tükil ΔS_i ühe punkti P_i . Moodustame järgmise summa:

$$V_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \dots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i. \quad (8.1)$$

Summat V_n nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* piirkonnas D .

Kahekordne integraal.

Olgu d_i osapiirkonna ΔS_i läbimõõt. (Hulga *läbimõõduks* nimetatakse selle hulga kahe punkti vahelist maksimaalset kaugust.) Tähistame

$$\varepsilon_n = \max\{d_1; d_2; \dots; d_n\}.$$

See tähendab, et ε_n on osapiirkondade $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ suurim läbimõõt. Muudame piirkonna D tükeldust järjest peenemaks selliselt, et osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile. Kui f on pidev piirkonnas D , siis on integraalsummal V_n taolises piirprotsessis lõplik piirväärtus. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f kahekordseks integraaliks piirkonnas D ja tähistatakse

$$\iint_D f(P) dS \quad \text{või} \quad \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.2)$$

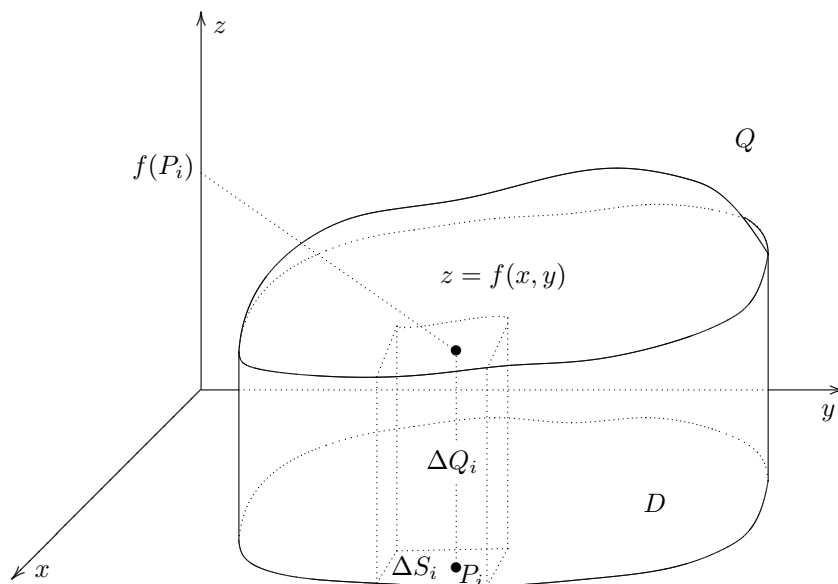
Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} V_n = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (8.3)$$

Piirkonda D nimetatakse *integreerimispiirkonnaks*.

Suurus $dS = dx dy$ integraali tähises (8.2) on *pindala diferentsiaal*. Tegemist on väikese ristküliku pindalaga, mille küljed on dx ja dy .

Joonis 8.2



Kahekordse integraali geomeetriline sisu.

Olgu $f(x, y)$ pidev mittenegatiivne funktsioon. Vaatleme keha Q , mis on ülalt piiratud pinnaga $z = f(x, y)$, alt tasandiga $z = 0$ ja küljelt silindriga, mille moodustajad on paralleelsed z -teljega ja juhtjooneks on piirkonna D rajajoon (joonis 8.2). Eesmärgiks on leida valem keha Q ruumala jaoks.

Tükeldame piirkonna D tükkeks $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (joonis 8.1). Tähistagu ΔS_i samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki pindala. Vaatleme osapiirkonna ΔS_i kohal paiknevat keha osa ΔQ_i (joonis 8.2). Keha ΔQ_i kõrgus punktis $P \in \Delta S_i$ võrdub $f(P)$ -ga. Kui ΔS_i läbimõõt on väike, siis võib pideva funktsiooni $f(P)$ lugeda tükil ΔS_i ligikaudselt konstantseks. Seega, valides $P_i \in \Delta S_i$, võime kirjutada

$$f(P) \approx f(P_i) \text{ iga } P \in \Delta S_i \text{ korral.} \quad (8.4)$$

Sellest tuleneb, et ΔQ_i on ligikaudselt konstantse kõrgusega, st ligikaudselt silinder. Silindri ruumala võrdub kõrguse ja põhja pindala korrutisega. Seega saame

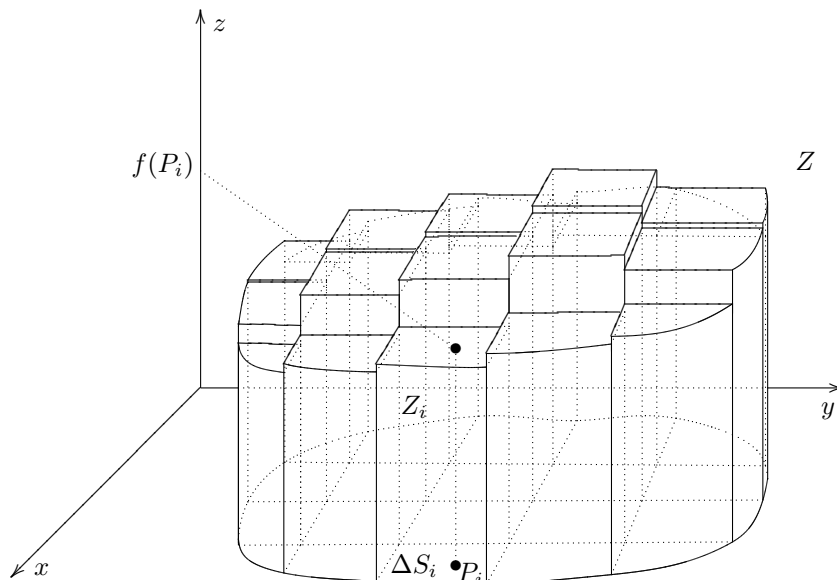
$$\Delta Q_i \text{ ruumala} \approx f(P_i) \Delta S_i. \quad (8.5)$$

Summeerides ΔQ_i -de ruumalad tuletame keha Q ruumala ligikaudse valemi:

$$Q \text{ ruumala} \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (8.6)$$

Olgu märgitud, et valemi (8.6) paremal poolel seisab joonisel 8.3 kujutatud "treppkeha" Z ruumala.

Joonis 8.3



Paneme tähele, et (8.6) paremal poolel seisev avaldis on ühtlasi funktsiooni $f(P)$ integraalsumma piirkonnas D . Seega, kui osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile, koondub antud integraalsumma funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraaliks $\iint_D f(x, y) dx dy$. Teisest küljest: mida väiksem on ε_n , seda täpsem on ligikaudne võrdus (8.4) ning seetõttu on seda täpsem ka ligikaudne valem (8.6). Kokkuvõttes saame piirprotsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ järgmise täpse ruumala valemi:

$$Q \text{ ruumala} = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.7)$$

8.2 Kahekordse integraali omadusi

1. $\iint_D [f(P) + g(P)] dS = \iint_D f(P) dS + \iint_D g(P) dS.$
2. $\iint_D C f(P) dS = C \iint_D f(P) dS$, kus C on konstant

Alljärgnevate omaduste 3 - 5 põhjendamisel saab kasutada kahekordse integraali geomeetrilist sisu: kui $f(P) \geq 0$, siis kahekordne integraal $\iint_D f(P) dS$ võrdub keha Q ruumalaga, mis asub piirkonna D kohal funktsiooni $z = f(P)$ graafiku all (joonis 8.2).

3. Kui $D = D_1 \cup D_2$, kusjuures D_1 ja D_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint_D f(P) dS = \iint_{D_1} f(P) dS + \iint_{D_2} f(P) dS.$$

Põhjendus. Vaatleme juhtu, kui $f(P) \geq 0$. Olgu Q , Q_1 ja Q_2 kehad, mis asuvad funktsiooni $z = f(P)$ graafiku all vastavalt piirkondade D , D_1 ja D_2 peal. Siis

$$Q \text{ ruumala} = \iint_D f(P) dS,$$

$$Q_1 \text{ ruumala} = \iint_{D_1} f(P) dS \text{ ja}$$

$$Q_2 \text{ ruumala} = \iint_{D_2} f(P) dS.$$

Kuna D_1 ja D_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis ka Q_1 ja Q_2 ei oma ühiseid sisepunkte (st Q_1 ja Q_2 võivad vaid teatud osas oma rajast kokku puutuda). Sellest tuleneb, et

$$Q \text{ ruumala} = Q_1 \text{ ruumala} + Q_2 \text{ ruumala}.$$

Siit järeldubki omadus 3.

4. Olgu piirkonna D pindala S . Siis kehtib võrdus $\iint_D dS = S$.

Põhjendus. Olgu Q keha, mis asub konstantse funktsiooni $f(P) \equiv 1$ graafiku all piirkonna D peal. Siis

$$Q \text{ ruumala} = \iint_D dS$$

Teisest küljest: Q on silinder, mille põhi on D ja kõrgus on 1. Esitades Q ruumala põhja pindala ja kõrguse korrutisena saame

$$Q \text{ ruumala} = S \cdot 1 = S.$$

Sellest järeldubki omadus 4.

5. Kui $f_1(P) \leq f_2(P)$ iga $P \in D$ korral, siis

$$\iint_D f_1(P) dS \leq \iint_D f_2(P) dS.$$

Põhjendus. Vaatleme juhtu, kui $0 \leq f_1(P) \leq f_2(P)$. Olgu Q_1 ja Q_2 kehad, mis asuvad piirkonna D peal vastavalt funktsioonide $z = f_1(P)$ ja $z = f_2(P)$ graafikute all. Siis

$$Q_1 \text{ ruumala} = \iint_D f_1(P) dS \text{ ja}$$

$$Q_2 \text{ ruumala} = \iint_D f_2(P) dS.$$

Kuna $f_1(P) \leq f_2(P)$, siis $Q_1 \subseteq Q_2$, millest järeldub, et

$$Q_1 \text{ ruumala} \leq Q_2 \text{ ruumala}.$$

Siit järeldubki omadus 5.

Lõpuks formuleerime ilma tõestamata keskväärtusteoreemi kahekordse integraali jaoks.

6. *Keskväärtusteoreem:* Piirkonnas D leidub vähemalt üks punkt A nii, et kehtib järgmine võrdus:

$$\iint_D f(P) dS = f(A) \iint_D dS = f(A)S.$$

8.3 Kahekordse integraali teisendamine kaksik-integraaliks

Üks võimalus kahekordse integraali arvutamiseks on taandada ta kahele järjestikusele kahekordsele integraalile (so kaksikintegraalile) ning seejärel avaldada viimased Newton-Leibnitzi valemit kasutades. Käesolevas paragrahvis vaatlemegi kahekordse integraali teisendamist kaksikintegraaliks.

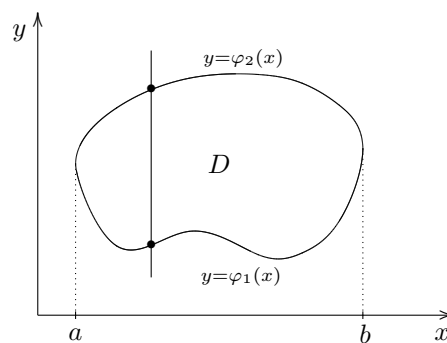
Kaksikintegraal y -telje suhtes regulaarse piirkonna korral.

Piirkonda D nimetatakse *regulaarseks y -telje suhtes*, kui iga sirge, mis on paralleelne y -teljega, lõikab piirkonna D rajajoont maksimaalselt kahes punktis.

Kui D on kinnine y -telje suhtes regulaarne piirkond, siis leiduvad arvud $a \leq b$ ning funktsioonid $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ nii, et piirkond D on antud järgmiste võrratustega:

$$D : a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x).$$

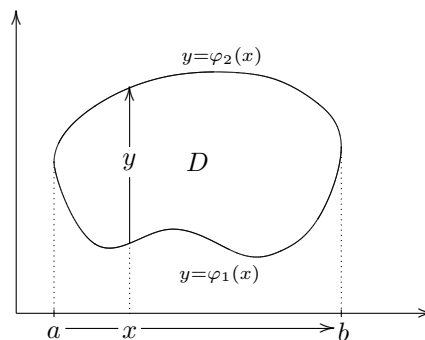
Näide y -telje suhtes regulaarse piirkonna kohta on toodud joonisel 8.4. Piirkond asub funktsioonide $y = \varphi_1(x)$ ja $y = \varphi_2(x)$ graafikute vahel. Suvaline vertikaalsirge saab piirkonna rajajoont lõigata maksimaalselt kahes punktis. Üks lõikepunkt asub alumisel rajajoonel $y = \varphi_1(x)$ ja teine lõikepunkt asub ülemisel rajajoonel $y = \varphi_2(x)$.



Joonis 8.4

Kui D on regulaarne y -telje suhtes, siis on *kahekordne integraal üle piirkonna D esitatav järgmise kaksikintegraalina:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (8.8)$$



Joonis 8.5

Skemaatiliselt on integreerimist kaksikintegraalis (8.8) kujutatud joonisel 8.5. Välimises integraalis liigutakse x -ga arvust a arvuni b (horisontaalnool

joonisel). Kui muutujal x on mingi konkreetne väärtus a ja b vahel, siis liigutakse sisemises integraalis y -ga arvust $\varphi_1(x)$ arvuni $\varphi_2(x)$ (vertikaalnool joonisel). Sellisel viisil kaetakse liikuva punktiga $P = (x, y)$ kogu piirkond D .

Traditsiooniliselt kirjutatakse kaksikintegraal (8.8) selliselt, et sisemise integraali ja dx kohad on vahetatud, st

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8.9)$$

Kaksikintegraal x -telje suhtes regulaarse piirkonna korral.

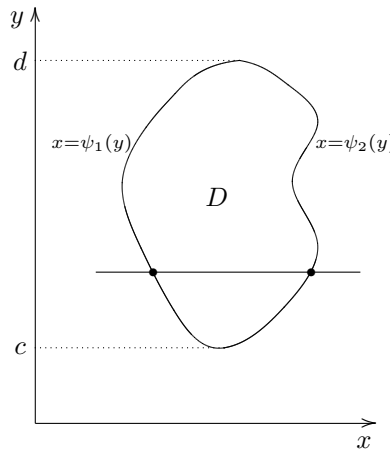
Piirkonda D nimetatakse *regulaarseks x -telje suhtes*, kui iga sirge, mis on paralleelne x -teljega, lõikab piirkonna D rajajoont maksimaalselt kahes punktis.

Kui D on kinnine x -telje suhtes regulaarne piirkond, siis leiduvad arvud $c \leq d$ ning funktsioonid $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ nii, et piirkond D on antud järgmiste võrratustega:

$$D : \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Näide x -telje suhtes regulaarse piirkonna kohta on toodud joonisel 8.6. Piirkond asub funktsioonide $x = \psi_1(y)$ ja $x = \psi_2(y)$ graafikute vahel. Suvaline horisontaalsirge saab piirkonna rajajoont lõigata maksimaalselt kahes punktis. Üks lõikepunkt asub vasakpoolisel rajajoonel $x = \psi_1(y)$ ja teine lõikepunkt asub parempoolisel rajajoonel $x = \psi_2(y)$.

Joonis 8.6



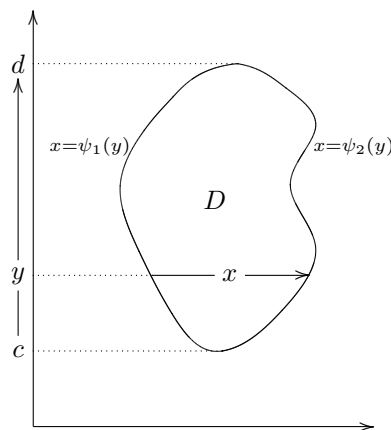
Kui D on regulaarne x -telje suhtes, siis on *kahekordne integraal üle piirkonna D esitatav järgmise kaksikintegraalina*:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (8.10)$$

Vahetades sisemise integraali ja dy kohad saab selle valemi kirjutada ka nii:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (8.11)$$

Integreerimist kaksikintegraalile (8.10) on skemaatiliselt näidatud joonisel 8.7. Välimes integraalis liigutakse y -ga arvust c arvuni d (vertikaalnool joonisel). Kui muutujal y on mingi konkreetne väärtus c ja d vahel, siis liigutakse sisemises integraalis x -ga arvust $\psi_1(y)$ arvuni $\psi_2(y)$ (horisontaalnool joonisel).

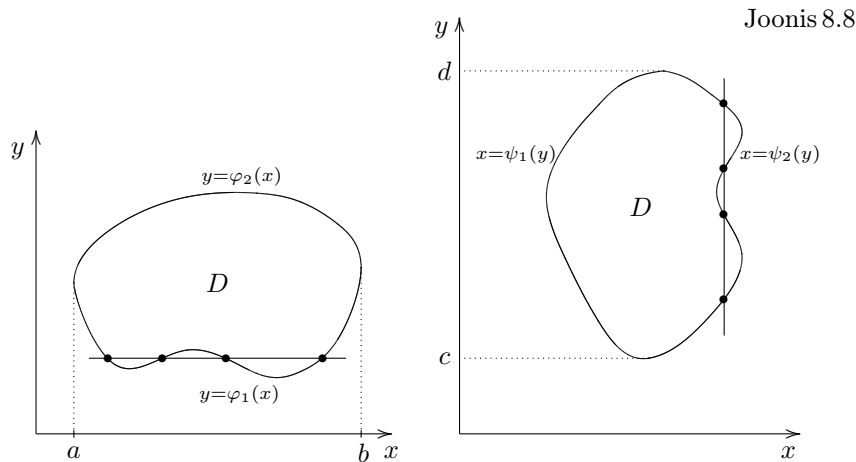


Joonis 8.7

Üldjuht. Näited.

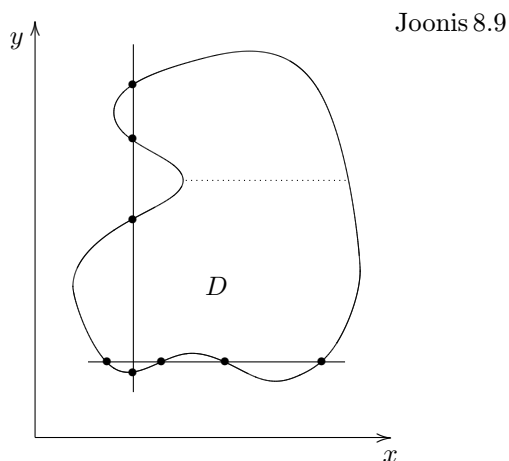
Kui piirkond on regulaarne nii x - kui ka y -telje suhtes, siis nimetatakse seda piirkonda *regulaarseks*.

Regulaarsed piirkonnad on näiteks ringid, ellipsid, hulknurgad jne. Olgu märgitud, et joonisel 8.4 kujutatud piirkond ei ole regulaarne, sest tal puudub regulaarsus x -telje suhtes. Leiduvad x -teljega paralleelsed sirged, mis lõikavad selle piirkonna rajajoont rohkemas kui kahes punktis (joonis 8.8 vasakul). Samuti ei ole regulaarne joonisel 8.6 kujutatud piirkond, sest tal puudub regulaarsus y -telje suhtes. Leiduvad y -teljega paralleelsed sirged, mis lõikavad selle piirkonna rajajoont rohkemas kui kahes punktis (joonis 8.8 paremal).



Kui piirkond D on regulaarne, siis saab kahekordse integraali arvutamisel kasutada nii valemit (8.9) kui ka valemit (8.11).

Natuke keerulisem on olukord siis, kui piirkond D ei ole regulaarne kummagi telje suhtes (nagu näiteks joonisel 8.9).



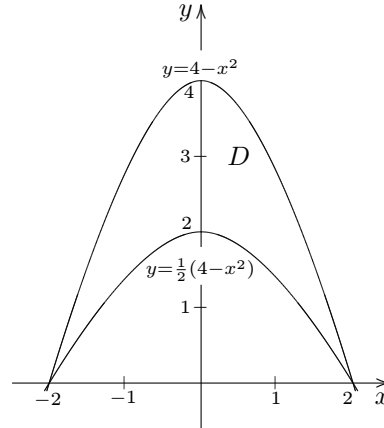
Piirkonna, mis ei ole regulaarne kummagi telje suhtes, saab tükeldada alampiirkondadeks, mis on regulaarsed mingi telje suhtes. Integraal üle piirkonna D avaldub siis summana integraalidest üle mainitud alampiirkondade. Viimaste jaoks saab juba kasutada valemeid (8.9) ja (8.11).

Näiteks on joonisel 8.9 kujutatud piirkond tükeldatav kaheks y -telje suhtes regulaarseks alampiirkonnaks mööda joonisel toodud punktiirjoont.

Lahendame mõned näiteülesanded.

Näide 1. Arvutame funktsiooni $f(x, y) = x^2 y$ integraali üle piirkonna D , mis on piiratud joontega $y = 4 - x^2$ ja $y = \frac{1}{2}(4 - x^2)$. Et taandada see integraal kaksikintegraalile, tuleb määrata viimase rajad. Selleks teeme joonise:

Joonis 8.10



Jooniselt näeme, et D on y -telje suhtes regulaarne piirkond, mis on kirjeldatav järgmiste võrratustega:

$$D : -2 \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{2}(4 - x^2) \leq y \leq 4 - x^2.$$

Seega

$$I = \iint_D x^2 y \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}(4-x^2)}^{4-x^2} x^2 y \, dy.$$

Kõigepealt arvutame sisemise integraali y suhtes. Muutuja y suhtes integreerimisel käsitatakse teisi muutujaid konstantidena. Seega x^2 on konstantne kor-daja, mille võib sisemise integraali alt välja tuua. Saame

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}(4-x^2)}^{4-x^2} x^2 y \, dy &= x^2 \int_{\frac{1}{2}(4-x^2)}^{4-x^2} y \, dy = x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}(4-x^2)}^{4-x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \left[(4-x^2)^2 - \frac{1}{4}(4-x^2)^2 \right] = \frac{3}{8} [16x^2 - 8x^4 + x^6]. \end{aligned}$$

Lõpuks arvutame välimise integraali:

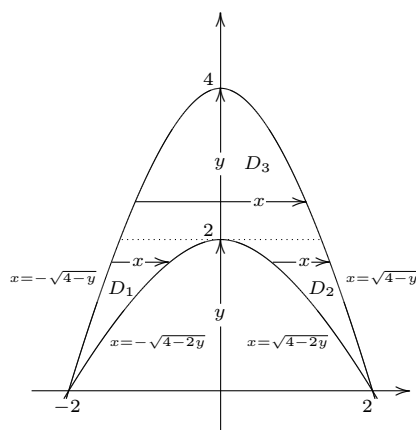
$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \frac{3}{8} [16x^2 - 8x^4 + x^6] \, dx = \frac{3}{8} \left[\frac{16x^3}{3} - \frac{8x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right] \Big|_{-2}^2 \\ &= \frac{3}{8} \left\{ \left[\frac{16 \cdot 2^3}{3} - \frac{8 \cdot 2^5}{5} + \frac{2^7}{7} \right] - \left[\frac{16 \cdot (-2)^3}{3} - \frac{8 \cdot (-2)^5}{5} + \frac{(-2)^7}{7} \right] \right\} = \\ &= \frac{128}{35}. \end{aligned}$$

Näide 2. Ülesanne on sõnastatud järgmiselt: muuta integreerimise järjekorda kaksikintegraalis

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}(4-x^2)}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

Integreerimispiirkond on sama, mis eelmises näites, so joonisel 8.10 kujutatud hulk. Ülesande lahendamist komplitseerib see, et antud piirkond ei ole regulaarne x -telje suhtes. Seega tuleb ta sobival viisil tükeldada, et saaks moodustada nõutavad kaksikintegraalid. Tükeldame piirkonna D joonisel 8.11 näidatud punktiirjoonega kõrgusel 2.

Joonis 8.11



Sellega jaotub integreerimispiirkond kolmeks x -telje suhtes regulaarseks alampiirkonnaks: D_1 , D_2 ja D_3 . Kuna sisemised integraalid tuleb kirja panna muutuva x suhtes, peame me lahendama piirkonna D rajajoonte võrrandid x suhtes. Piirkonna D ülemise rajajoone võrrand on $y = 4 - x^2$. Lahendame selle x suhtes. Saame kaks lahendit:

$$x = -\sqrt{4-y} \quad \text{ja} \quad x = \sqrt{4-y}.$$

Seejuures $x = -\sqrt{4-y}$ on ülemise raja vasakpoolne (so y -teljest vasakul asuv) osa ja $x = \sqrt{4-y}$ on ülemise parempoolne (so y -teljest paremal asuv) osa. Alumise rajajoone võrrand on $y = \frac{1}{2}(4 - x^2)$. Sellel on muutuva x suhtes samuti kaks lahendit:

$$x = -\sqrt{4-2y} \quad \text{ja} \quad x = \sqrt{4-2y}.$$

Jällegi $x = -\sqrt{4-2y}$ ja $x = \sqrt{4-2y}$ on vastavalt alumise raja vasak- ja parempoolne osa. Nüüd on skemaatiliselt võimalik kirjeldada integreerimist järgmiselt (vt seda ka jooniselt):

hulgas D_1 muutub y rajades 0 kuni 2 ja x rajades $-\sqrt{4-y}$ kuni $-\sqrt{4-2y}$

hulgas D_2 muutub y rajades 0 kuni 2 ja x rajades $\sqrt{4-2y}$ kuni $\sqrt{4-y}$

hulgas D_3 muutub y rajades 2 kuni 4 ja x rajades $-\sqrt{4-y}$ kuni $\sqrt{4-y}$.

Seega on ülesande lahend

$$I = \int_0^2 dy \left[\int_{-\sqrt{4-y}}^{-\sqrt{4-2y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-2y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right] + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx.$$

Näide 3. Arvutame integraali

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \int_0^1 y \cos(xy^2) dy.$$

Alustame sisemisest integraalist $\int_0^1 y \cos(xy^2) dy$. Teeme muutuja vahetuse $u = xy^2$. Siis $du = 2xy dy$ (x on selle integraali juures konstant!). Alumises rajas $y = 0 \Rightarrow u = 0$ ja ülemises rajas $y = 1 \Rightarrow u = x$. Seega

$$\begin{aligned} \int_0^1 y \cos(xy^2) dy &= \frac{1}{2x} \int_0^1 \cos(xy^2) \cdot 2xy dy = \frac{1}{2x} \int_0^x \cos u du = \\ &= \frac{1}{2x} \sin u \Big|_{u=0}^{u=x} = \frac{1}{2x} [\sin x - \sin 0] = \frac{1}{2x} \sin x. \end{aligned}$$

Lõpuks arvutame ka välimise integraali:

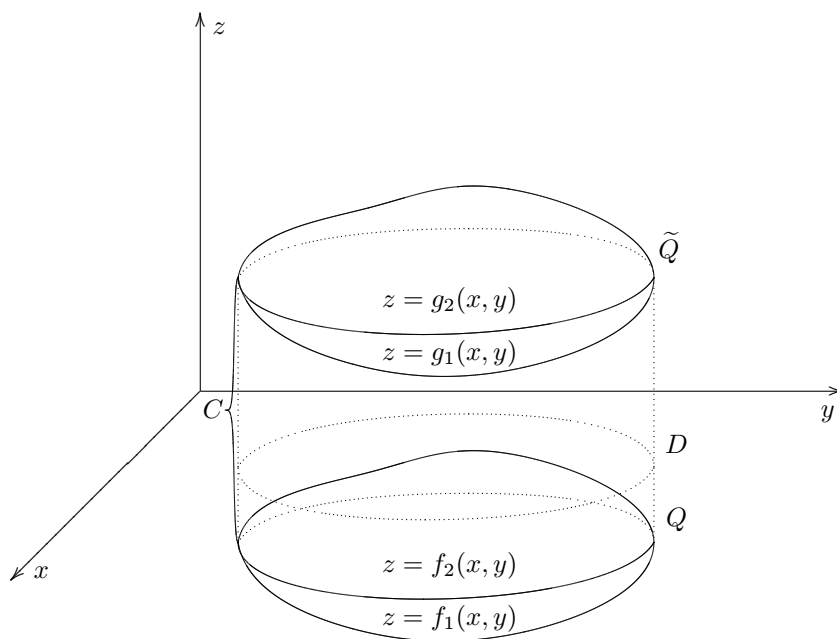
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cdot \frac{1}{2x} \sin x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right] = \frac{1}{2}.$$

8.4 Ruumala arvutamine kahekordse integraali abil

Olgu antud funktsioon $f(x, y) \geq 0$. Vaatleme joonisel 8.2 kujutatud pinna $z = f(x, y)$ ja tasandi $z = 0$ vahel paiknevat keha Q . Nagu nägime §8.1, avaldub selle keha ruumala valemiga

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.12)$$

Järgnevalt käsitleme pisut teistsugust juhtu. Vaatleme keha Q , mis on alt piiratud pinnaga $z = f_1(x, y)$ ja ülalt pinnaga $z = f_2(x, y)$ (joonis 8.12).



Olgu Q projektsioon xy -tasandile tähistatud D -ga. Meid huvitab Q ruumala. Näitame, et Q ruumala saab esitada f_2 ja f_1 vahe integraalina, st

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \quad (8.13)$$

Valemi (8.13) tõestamiseks nihutame Q ülespoole tasandit $z = 0$. Selleks leiame sellise positiivse arvu C , mille korral kehtib võrratus $f_1(x, y) + C \geq 0$ ja defineerime funktsioonid

$$g_1(x, y) = f_1(x, y) + C \quad \text{ning} \quad g_2(x, y) = f_2(x, y) + C.$$

Olgu $\tilde{Q}$ pindade $z = g_1(x, y)$ ja $z = g_2(x, y)$ vahel paiknev keha. Tänu C sobivale valikule asetseb keha $\tilde{Q}$ tasandi $z = 0$ peal (joonis 8.12). Märgime, et juhul kui Q asetseb juba tasandi $z = 0$ peal, siis ei ole taolist nihutamise operatsiooni vaja teha, st võtame $C = 0$ ja $\tilde{Q} = Q$.

Kehade Q ja $\tilde{Q}$ ruumalad on võrdsed. Järelikult tuleb V leidmiseks arvutada $\tilde{Q}$ ruumala. Kuna pinnad $z = g_1(x, y)$ ja $z = g_2(x, y)$ asetsevad ülalpool tasandit $z = 0$, siis võib keha $\tilde{Q}$ ruumala arvutada selliselt, et lahutame pinna $z = g_2(x, y)$ ja tasandi $z = 0$ vahele jääva silindri ruumalast pinna $z = g_1(x, y)$ ja tasandi $z = 0$ vahele jääva silindri ruumala. Kuna valemi (8.12) põhjal võrdub $z =$

$g_2(x, y)$ ja $z = 0$ vahele jääva silindri ruumala integraaliga $\iint_D g_2(x, y) dx dy$ ning $z = g_1(x, y)$ ja $z = 0$ vahele jääva silindri ruumala integraaliga $\iint_D g_1(x, y) dx dy$, siis $V = \iint_D [g_2(x, y) - g_1(x, y)] dx dy$. Lõpuks arvutame

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [g_2(x, y) - g_1(x, y)] dx dy = \iint_D [f_2(x, y) + C - f_1(x, y) - C] dx dy \\ &= \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

Olemegi tõestanud valemi (8.13).

8.5 Muutujate vahetus kahekordse integraali all. Integreerimine polaarkoordinaatides

Muutujate vahetus üldjuhul.

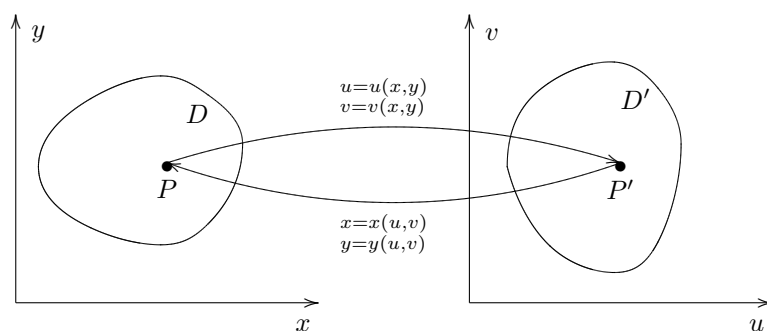
Vaatleme kahekordset integraali $\iint_D f(x, y) dx dy$. Valime kaks funktsiooni

$$u = u(x, y) \quad \text{ja} \quad v = v(x, y),$$

mis on määratud piirkonnas D . Eesmärgiks on sooritada vaadeldava integraali all muutujate vahetus, st asendada integreerimine muutujate x ja y järgi integreerimisega muutujate u ja v järgi.

Funktsioonid u ja v seavad igale punktile $P = (x, y)$ hulgast D vastavusse ühe kindla punkti $P' = (u(x, y), v(x, y))$ uv -tasandil. Kui P jookseb läbi kogu piirkonna D , siis kujutispunkt P' kujundab uv -tasandil teatud piirkonna D' (joonis 8.13).

Joonis 8.13



Olgu täidetud järgmised tingimused:

1. Eeldame, et punkt P on üheselt taastatav punkti P' põhjal, st iga $P' \in D'$ korral leidub üks ja ainult üks $P \in D$ nii, et P' on P kujutiseks. Sellisel juhul eksisteerib pöördteisendus, mis seab igale punktile $P' = (u, v) \in D'$ vastavusse parajasti ühe punkti $P = (x, y) \in D$. Seda teisendust määravad kaks funktsiooni: funktsioon, mis seab arvupaarile u, v vastavusse punkti P esimese koordinaadi x ja funktsioon, mis seab arvupaarile u, v vastavusse punkti P teise koordinaadi y . Olgu need funktsioonid tähistatud järgmiselt:

$$x = x(u, v) \quad \text{ja} \quad y = y(u, v).$$

2. Olgu nimetatud pöördteisendust määravatel funktsioonidel $x(u, v)$ ja $y(u, v)$ olemas osatuletised x'_u, x'_v, y'_u ja y'_v terves piirkonnas D' .

Kui on täidetud tingimused 1 ja 2, siis kehtib järgmine muutuja vahetuse valem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv, \quad (8.14)$$

kus $J(u, v)$ on nn *funktsionaaldeterminant* e *jakobiaan*, mis avaldub x ja y osatuletiste kaudu järgmiselt:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}. \quad (8.15)$$

Integreerimine polaarkoordinaatides.

Olgu $A = (a, b)$ fikseeritud punkt xy -tasandil. Tuletame meelde (vt §6.1), et punkti $P = (x, y)$ polaarkoordinaadid punkti A suhtes on arvupaar ϱ ja φ , kus ϱ on P ja A vaheline kaugus ja φ on nurk, mis tekib liikumisel x -telje suunaliselt vektorilt vektorile $\overrightarrow{AP}$ vastupäeva. Ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu valemitega (6.2).

Vaatleme nüüd ristkoordinaatides x ja y antud kahekordse integraali

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

teisendamist polaarkoordinaatidesse ϱ ja φ . Olgu hulgas D paiknevatele punktidele $P = (x, y)$ vastavate polaarkoordinaatide hulk D' . Muutujate vahetuse teostamiseks peame me arvutama jakobiaani $J(\varrho, \varphi)$. Kasutades avaldisi (6.2) saame

$$\begin{aligned} J(\varrho, \varphi) &= \begin{vmatrix} x'_\varrho(\varrho, \varphi) & x'_\varphi(\varrho, \varphi) \\ y'_\varrho(\varrho, \varphi) & y'_\varphi(\varrho, \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho. \end{aligned}$$

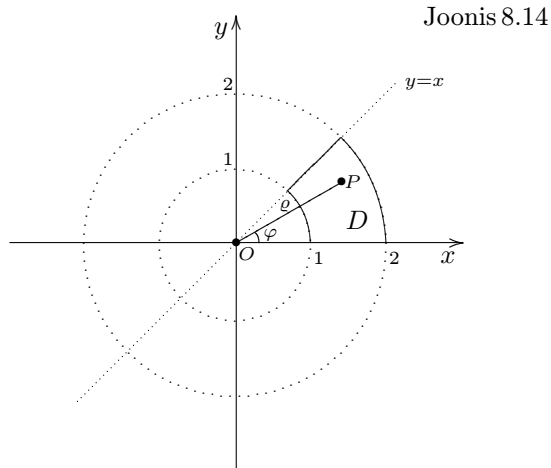
Valemis (vt (8.14)) esineb jakobiaani absoluutväärtus. Kuna polaarkaugus ϱ on mittenegatiivne, siis $|J(\varrho, \varphi)| = |\varrho| = \varrho$. Järelikult on soovitud muutuja vahetuse valem järgmine:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(a + \varrho \cos \varphi, b + \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho d\varphi. \quad (8.16)$$

Näide. Arvutame integraali

$$I = \iint_D \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dx dy$$

üle piirkonna D , mis on määratud võrratustega $y \leq x$, $y \geq 0$ ja $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Teeme joonise:



Kasutame polaarkoordinaate koordinaatide alguspunkti O suhtes. Sellisel juhul muutub hulgas D paikneva punkti $P = (x, y)$ polaarkaugus ϱ piirides 1 kuni 2 ja polaarnurk φ piirides 0 kuni $\frac{\pi}{4}$. Järelikult on hulgas D paiknevatele punktidele $P = (x, y)$ vastav polaarkoordinaatide hulk järgmine ristikülik:

$$D' : 1 \leq \varrho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

See tähendab, et muutujate vahetusega me teisendame kahekordse integraali üle piirkonna D kahekordseks integraaliks üle ristiküliku. Viimast on väga lihtne kaksikintegraalina kirja panna: rajad on ju konstantsed. Integraalialuse funktsiooni esitamisel uutes muutujates ϱ ja φ kasutada valemeid (6.3). Vastavalt neile valemitele

$$\frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \varrho^2 \tan \varphi.$$

Seega (8.16) põhjal

$$I = \iint_{D'} \varrho^2 \tan \varphi \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 \varrho^3 \tan \varphi \, d\varrho.$$

Arvutame sisemise integraali:

$$\int_1^2 \varrho^3 \tan \varphi \, d\varrho = \tan \varphi \int_1^2 \varrho^3 \, d\varrho = \tan \varphi \left. \frac{\varrho^4}{4} \right|_{\varrho=1}^{\varrho=2} = \tan \varphi \left[\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right] = \frac{15}{4} \tan \varphi.$$

Jääb veel arvutada välimine integraal

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{15}{4} \tan \varphi \, d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Kasutame asendust $t = \cos \varphi$. Siis $dt = -\sin \varphi \, d\varphi$ ja $\varphi = 0$ korral $t = \cos 0 = 1$ ning $\varphi = \frac{\pi}{4}$ korral $t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Seega

$$\begin{aligned} I &= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = -\frac{15}{4} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t} = -\frac{15}{4} \ln t \Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= -\frac{15}{4} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1 \right] = -\frac{15}{4} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{15}{4} \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ülesanne on lahendatud.

8.6 Tasandilise kujundi mass ja masskese

Tasandilise kujundi pindtihedus.

Olgu tasandiline piirkond D kaetud mingi ainega, mis paikneb ebahühtlaselt sellel piirkonnal. Vaatleme suvalist piirkonna D osapiirkonda ΔS . Tähistame ΔS -i pindala samuti ΔS -iga. Olgu ΔS -i mass Δm . Suhet

$$\gamma_{\Delta S} = \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

nimetatakse aine *keskmiseks pindtiheduseks* osapiirkonnas ΔS . Osapiirkonna ΔS mass avaldub keskmise pindtiheduse ja pindala kaudu järgmiselt:

$$\Delta m = \gamma_{\Delta S} \Delta S.$$

Oletame, et osapiirkond ΔS kahaneb tõmbudes kokku punktiks P . Vaatleme aine keskmise pindtiheduse $\gamma_{\Delta S}$ piirväärtust selles protsessis. Tegemist on suurega, mis sõltub punkti P asukohast, st on kahemuutuja funktsioon. Tähistame selle funktsiooni γ -ga. Seega

$$\gamma(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}.$$

Suurst $\gamma(P)$ nimetatakse aine *pindtiheduseks* punktis P .

Tasandilise kujundi mass.

Püstitame järgmise ülesande. Olgu antud aine pindtihedus $\gamma(P)$ kogu piirkonnas D , kusjuures eeldame, et γ on pidev. Määrata tuleb piirkonnas D sisalduva aine mass m .

Ülesande lahendamiseks jaotame piirkonna D osapiirkondadeks

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

ja valime igas osapiirkonnas ΔS_i ühe punkti P_i (vt joonist 8.1). Tähistagu ΔS_i samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki pindala. Olgu ΔS_i mass Δm_i . Kui osapiirkond ΔS_i on väike, siis võib aine pindtiheduse ΔS_i peal lugeda ligikaudselt konstantseks ja võrdseks arvuga $\gamma(P_i)$. Järelikult

$$\Delta m_i \approx \gamma(P_i) \Delta S_i.$$

Summeerides saame D massi ligikaudse valemi

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i. \quad (8.17)$$

Valem (8.17) on seda täpsem, mida peenem on piirkonna D jaotus. Teisest küljest: valem (8.17) paremal poolel seisab funktsiooni γ integraalsumma. Järelikult, kui osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile, saame kahekordse integraali definitsiooni põhjal valemist (8.17) järgmise täpse massi valemi:

$$m = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i = \iint_D \gamma(P) dS. \quad (8.18)$$

Masspunktide süsteemi masskese.

Olgu xy -tasandil antud n masspunkti

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_n = (x_n, y_n)$$

massidega $m_1, m_2, \dots, m_n$. Mehaanikast on teada, et taolise masspunktide süsteemi masskeskme $P_c = (x_c, y_c)$ koordinaadid avalduvad valemitega

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (8.19)$$

Tasandilise kujundi masskese.

Vaatleme järgmist ülesannet. Olgu antud tasandiline materiaalne kujund D pideva pindtihedusega $\gamma(P)$. Määrata tuleb kujundi D masskeskme $P_c = (x_c, y_c)$ koordinaadid.

Ülesande lahendamiseks jaotame piirkonna D osapiirkondadeks

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

ja valime igas osapiirkonnas ΔS_i ühe punkti $P_i = (x_i, y_i)$ (joonis 8.1). Tähistagu ΔS_i jälle samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki pindala ning tüki ΔS_i mass olgu Δm_i . Eelnevalt nägime, et väikese osapiirkonna ΔS_i korral

$$\Delta m_i \approx \gamma(P_i) \Delta S_i. \quad (8.20)$$

Asendame materiaalse pinnatüki ΔS_i punkti P_i kontsentreeritud masspunktiga, mille mass on Δm_i . (Piltlikult väljendudes: lükkame pinnatükil ΔS_i paikneva aine kokku punkti P_i .) Tehes sellise operatsiooni kõigi osapiirkondadega $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, saame n masspunktist $P_1, P_2, \dots, P_n$ koosneva süsteemi massidega $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$. Valemite (8.19) põhjal avalduvad selle süsteemi masskeskme $P_{cn} = (x_{cn}, y_{cn})$ koordinaadid järgmiselt:

$$x_{cn} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}, \quad y_{cn} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}.$$

Kui osapiirkonnad $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ on väikesed langeb D masskese P_c ligikaudselt kokku masspunktide süsteemi $P_1, P_2, \dots, P_n$ masskeskmega P_{cn} . Seega

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i}.$$

Asendades siia Δm_i valemi (8.20) põhjal saame

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n x_i \gamma(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n y_i \gamma(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i}. \quad (8.21)$$

Valemid (8.21) on seda täpsemad, mida peenem on D tükeldus, st neis valemites tekib täpne võrdus, kui osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile. Peale selle paneme tähele, et valemite (8.21) nimetajates on funktsiooni $\gamma(x, y)$ integraalsumma ning lugejates on vastavalt funktsioonide $x\gamma(x, y)$ ja $y\gamma(x, y)$ integraalsummad. Järelikult, kahekordse integraali definitsiooni põhjal

$$x_c = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \gamma(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i} = \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad (8.22)$$

$$y_c = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n y_i \gamma(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i} = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}. \quad (8.23)$$

Peatükk 9

Kolmekordne integraal

9.1 Kolmekordse integraali mõiste. Ruumilise keha massi arvutamine

Kolmemuutuja funktsiooni integraalsumma ja kolmekordne integraal. Olgu V kinnine tõkestatud piirkond ruumis $\mathbb{R}^3$. Olgu $u = f(x, y, z)$ piirkonnas V määratud pidev funktsioon. Jaotame piirkonna V n tükiks

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n.$$

Tähistagu ΔV_i samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki ruumala.

Valime igal tükil ΔV_i ühe punkti P_i . Moodustame järgmise summa:

$$\sigma_n = f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + \dots + f(P_n)\Delta V_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i. \quad (9.1)$$

Summat σ_n nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* piirkonnas V .

Olgu d_i osapiirkonna ΔV_i läbimõõt. Tähistame:

$$\varepsilon_n = \max\{d_1; d_2; \dots; d_n\},$$

so ε_n on osapiirkondade $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ suurim läbimõõt. Muudame piirkonna V tükeldust järjest peenemaks selliselt, et osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile. Kui f on pidev piirkonnas V , siis on integraalsummal σ_n taolises piirprotsessis lõplik piirväärtus. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *kolmekordseks integraaliks* piirkonnas V ja tähistatakse

$$\iiint_V f(P) dV \quad \text{või} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz. \quad (9.2)$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i. \quad (9.3)$$

Piirkonda V nimetatakse *integreerimispiirkonnaks*.

Suurus $dV = dx dy dz$ integraali tähises (9.2) on *ruumala diferentsiaal*. Tege- mist on väikese risttahuka ruumalaga, mille servad on dx , dy ja dz .

Keha ruumtihedus.

Olgu V ebaühtlase tihedusega materiaalne keha. Vaatleme suvalist osapiirkonda ΔV kehas V . Olgu ΔV ruumala samuti ΔV . Tähistame ΔV massi Δm -iga. Suhe

$$\varrho_{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

võrdub aine keskmise ruumtihedusega osapiirkonnas ΔV . Osapiirkonna ΔV mass võrdub keskmise ruumtiheduse ja ruumala korrutisega, st $\Delta m = \varrho_{\Delta V} \Delta V$.

Oletame, et osapiirkond ΔV kahaneb tõmbudes kokku punktiks P . Aine keskmise ruumtiheduse $\varrho_{\Delta V}$ piirväärtus selles protsessis annab aine ruumtihe- duse punktis P . Tähistades ruumtiheduse punktis P $\varrho(P)$ -ga saame valemi

$$\varrho(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Ruumilise keha massi arvutamine.

Vaatleme järgmist ülesannet: leida etteantud pideva ruumtiheduse $\varrho(P)$ põhjal keha V mass m .

Ülesande lahendamiseks jaotame V osapiirkondadeks

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$$

ja valime igas osapiirkonnas ΔV_i ühe punkti P_i . Tähistagu ΔV_i samaaegselt nii i -ndat tükki kui i -nda tüki ruumala. Olgu ΔV_i mass Δm_i . Kui tükk ΔV_i on väike, siis võib aine ruumtiheduse selles tükis lugeda ligikaudselt konstantseks ja võrdseks arvuga $\varrho(P_i)$. Järelikult

$$\Delta m_i \approx \varrho(P_i) \Delta V_i.$$

Summeerides korrutised $\varrho(P_i) \Delta V_i$ saame keha V ligikaudse massi

$$m \approx \sum_{i=1}^n \varrho(P_i) \Delta V_i. \quad (9.4)$$

Valem (9.4) on seda täpsem, mida peenem on V tükeldus. Teisest küljest: valemi (9.4) paremal poolel seisab funktsiooni ϱ integraalsumma. Järelikult, kui osapiirkondade suurim läbimõõt ε_n läheneb nullile, siis kolmekordse integraali definitsiooni kohaselt saame valemist (9.4) järgmise täpse massi valemi:

$$m = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varrho(P_i) \Delta V_i = \iiint_V \varrho(P) dV. \quad (9.5)$$

9.2 Kolmekordse integraali omadusi

1. $\iiint_V [f(P) + g(P)] dV = \iiint_V f(P) dV + \iiint_V g(P) dV.$
2. $\iiint_V C f(P) dV = C \iiint_V f(P) dV$, kus C on konstant.

Järgnevate omaduste 3 - 5 põhjendamisel saame kasutada eelmises paragrahvis kirjeldatud kolmekordse integraali füüsikalist sisu: keha V mass avaldub valemiga $m = \iiint_V \varrho(P) dV$, kus $\varrho(P)$ on ruumtihedus.

3. Kui $V = V_1 \cup V_2$, kusjuures V_1 ja V_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_{V_1} f(P) dV + \iiint_{V_2} f(P) dV.$$

Põhjendus. Tõestame omaduse juhul, kui f on aine ruumtihedus piirkonnas V , so $f(P) = \varrho(P)$. Siis

$$V \text{ mass} = \iiint_V \varrho(P) dV,$$

$$V_1 \text{ mass} = \iiint_{V_1} \varrho(P) dV \text{ ja}$$

$$V_2 \text{ mass} = \iiint_{V_2} \varrho(P) dV.$$

Hulgad V_1 ja V_2 ei oma ühiseid sisepunkte (st V_1 ja V_2 võivad vaid teatud osas oma rajast kokku puutuda). Sellest tuleneb, et

$$V \text{ mass} = V_1 \text{ mass} + V_2 \text{ mass}.$$

Siit järeldubki omadus 3 funktsiooniga $f = \varrho$.

4. Olgu piirkonna V ruumala V . Siis kehtib võrdus $\iiint_V dV = V$.

Põhjendus. Olgu V keha, mille ruumtihedus on konstantne ja võrdne arvuga 1, so $\varrho(P) \equiv 1$. Siis vastavalt valemile (9.5) kehtib võrdus

$$V \text{ mass} = \iiint_V dV.$$

Teisest küljest: kui $\varrho(P) \equiv 1$, siis on mass arvuliselt võrdne ruumalaga, st $V \text{ mass} = V$.

Siit järeldubki omadus 4.

5. Kui $f_1(P) \leq f_2(P)$ iga $P \in V$ korral, siis

$$\iiint_V f_1(P) dV \leq \iiint_V f_2(P) dV.$$

Põhjendus. Tõestame omaduse jällegi juhul, kui $f_1 = \varrho_1$ ja $f_2 = \varrho_2$ on aine ruumtihedused. Täpsemalt: vaatleme kahte samas piirkonnas piirkonnas V paiknevat keha: esimese keha W_1 ruumtihedus olgu $\varrho_1(P)$ ja teise keha W_2 ruumtihedus olgu $\varrho_2(P)$. Eeldame, et $\varrho_1(P) \leq \varrho_2(P)$ iga $P \in V$ korral. Vastavalt valemile (9.5) kehtivad võrdused

$$W_1 \text{ mass} = \iiint_V \varrho_1(P) dV \text{ ja}$$

$$W_2 \text{ mass} = \iiint_V \varrho_2(P) dV.$$

Kuna $\varrho_1(P) \leq \varrho_2(P)$, siis on keha W_1 kergem kui keha W_2 , st

$$W_1 \text{ mass} \leq W_2 \text{ mass}.$$

Siit järeldubki omadus 5 funktsioonidega $f_1 = \varrho_1$ ja $f_2 = \varrho_2$.

Lõpuks formuleerime ilma tõestamata keskväärtusteoreemi kolmekordse integraali jaoks.

6. *Keskväärtusteoreem*: Piirkonnas V leidub vähemalt üks punkt A nii, et kehtib võrdus

$$\iiint_V f(P) dV = f(A) \iiint_V dV = f(A)V.$$

9.3 Kolmekordse integraali esitamine kolmikintegraalina

Teatud eeldustel integreerimispiirkonna kohta saab kolmekordse integraali teendada kolmikintegraaliks ehk kolmeks järjestikuseks määratud integraaliks. Selisel juhul taandub kolmekordse integraali arvutamine määratud integraalide arvutamisele.

Eeldame integreerimispiirkonna V kohta järgmist:

1. Piirkond V on alt piiratud pinnaga $z = \omega_1(x, y)$ ja ülalt pinnaga $z = \omega_2(x, y)$.
2. Piirkonna V projektsioon xy -tasandile on regulaarne kas y - või x -telje suhtes.

Tähistame V projektsiooni xy -tasandile tähega D .

Vaatleme kõigepealt juhtu, kui D on regulaarne y -telje suhtes. Siis leiduvad arvud $a \leq b$ ja funktsioonid $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ nii, et piirkond D on antud võrratustega

$$D : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x).$$

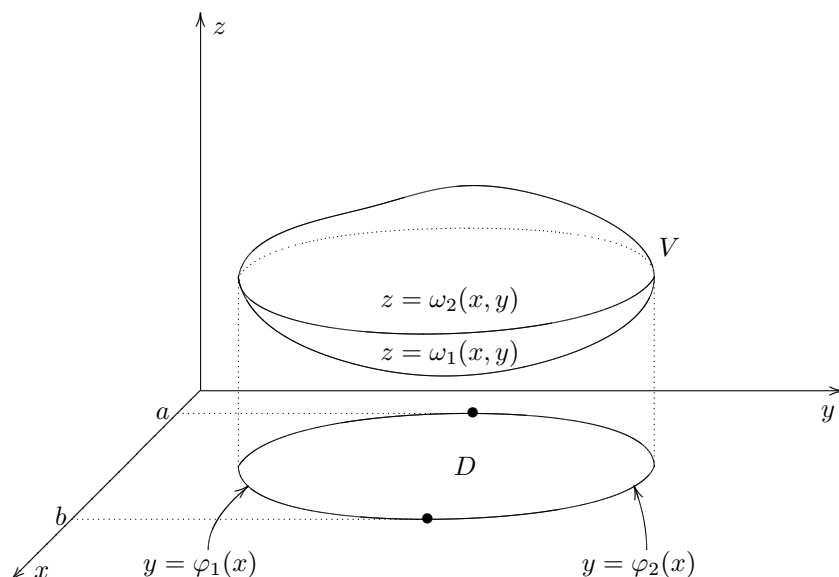
Järelikult, arvestades eeldust 1, on piirkond V antud järgmiste võrratustega:

$$V : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)$$

(vt joonis 9.1). Antud juhul saab kolmekordse integraali üle piirkonna V esitada kolmikintegraalina järgmiselt:

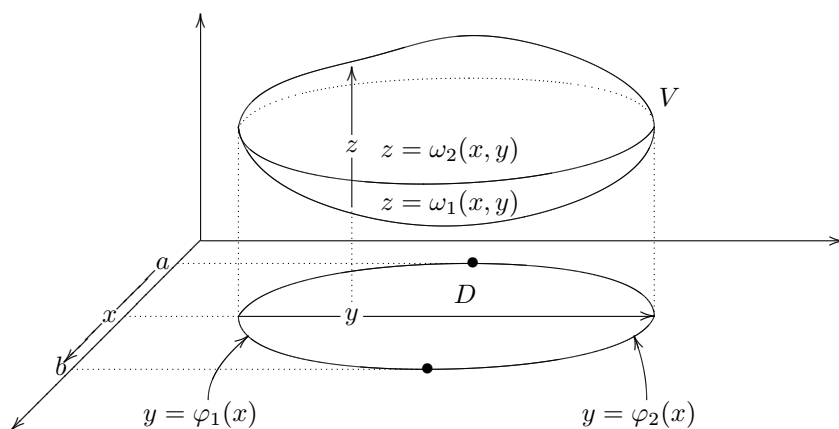
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\omega_1(x, y)}^{\omega_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (9.6)$$

Joonis 9.1



Integreerimist kolmikintegraalis (9.6) on skemaatiliselt kirjeldatud joonisel 9.2. Välimises integraalis liigutakse x -ga arvust a arvuni b . Kui muutujal x on mingi konkreetne väärtus a ja b vahel, siis liigutakse keskmises integraalis y -ga arvust $\varphi_1(x)$ arvuni $\varphi_2(x)$. Kui ka y -l on mingi konkreetne väärtus $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ vahel, siis liigutakse sisemises integraalis z -ga arvust $\omega_1(x, y)$ arvuni $\omega_2(x, y)$.

Joonis 9.2



Teiseks vaatleme juhtu, kui D on regulaarne x -telje suhtes. Siis leiduvad arvud $c \leq d$ ja funktsioonid $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ nii, et piirkond D on antud võrratustega

$$D : \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

Sellest järeldub, et V on määratud võrratustega

$$V : \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y).$$

Sellisel juhul saab kolmekordse integraali üle piirkonna V esitada kolmikintegraalina järgmiselt:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{\omega_1(x, y)}^{\omega_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (9.7)$$

Kui D on regulaarne nii x kui y -telje suhtes, siis saab kasutada mõlemaid valemite (9.6) ja (9.7).

Näide 1. Arvutada kolmekordne integraal $I = \iiint_V xyz dx dy dz$ üle piirkonna V , mis on antud võrratustega

$$V : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq z \leq xy.$$

Moodustame kolmikintegraali vastavalt valemile (9.6):

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xyz dz.$$

Kõigepealt arvutame sisemise integraali. Kuna seal integreeritakse muutuja z järgi, siis käsitatakse ülejäänud muutujaid x ja y konstantidena. Seega

$$\int_0^{xy} xyz dz = xy \int_0^{xy} z dz = xy \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=0}^{z=xy} = xy \left[\frac{(xy)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{(xy)^3}{2}.$$

Järgnevalt arvutame keskmise integraali. Kuna seal integreeritakse y -i järgi, on x konstant. Saame

$$\int_0^x \frac{(xy)^3}{2} dy = \frac{x^3}{2} \int_0^x y^3 dy = \frac{x^3}{2} \left. \frac{y^4}{4} \right|_{y=0}^{y=x} = \frac{x^3}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{x^7}{8}.$$

Lõpuks jääb veel leida välimine integraal:

$$I = \int_0^1 \frac{x^7}{8} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^7 dx = \left. \frac{x^8}{64} \right|_0^1 = \frac{1}{64}.$$

Näide 2. Arvutada integraal

$$I = \int_1^2 dy \int_0^{\frac{\pi}{2y}} dx \int_{-x}^x \cos(yz) dz.$$

Alustame sisemisest integraalist, mis on muutuja z järgi. Seal on x ja y konstandid. Seega

$$\int_{-x}^x \cos(yz) dz = \frac{1}{y} \sin(yz) \Big|_{z=-x}^{z=x} = \frac{1}{y} [\sin(yx) - \sin(-yx)] = \frac{2}{y} \sin(yx).$$

Keskmise integraali arvutamisel on y konstant. Seega

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2y}} \frac{2}{y} \sin(yx) dx &= \frac{2}{y} \int_0^{\frac{\pi}{2y}} \sin(yx) dx = -\frac{2}{y} \cdot \frac{1}{y} \cos(yx) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2y}} = \\ &= -\frac{2}{y^2} \left[\cos\left(y \frac{\pi}{2y}\right) - \cos(y \cdot 0) \right] = -\frac{2}{y^2} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right] = \frac{2}{y^2}. \end{aligned}$$

Lõpuks arvutame välimise integraali:

$$I = \int_1^2 \frac{2}{y^2} dy = 2 \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = -2 \cdot \frac{1}{y} \Big|_1^2 = -2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right] = 1.$$

Ülesanne on lahendatud.

9.4 Muutujate vahetus kolmekordse integraali all

Vaatleme kolmekordset integraali

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

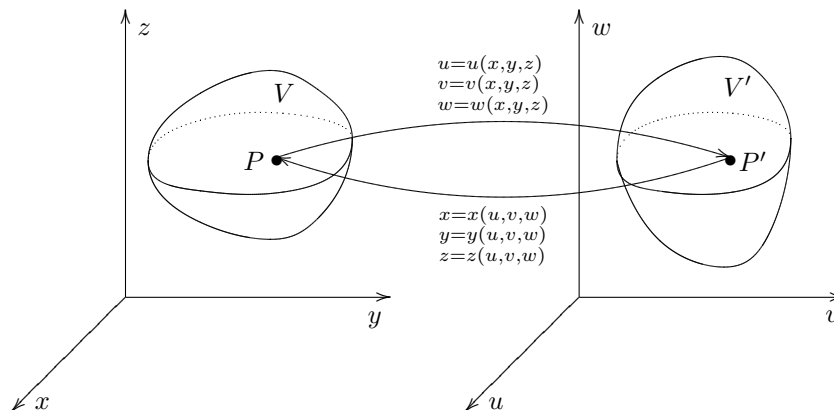
Valime kolm funktsiooni

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{ja} \quad w = w(x, y, z),$$

mis on määratud piirkonnas V . Eesmärgiks on teostada integraali all muutujate vahetus, mille tulemusena integreerimine muutujate x , y ja z suhtes asendub integreerimisega muutujate u , v ja w suhtes.

Validud kolm funktsiooni seavad igale punktile $P = (x, y, z)$ hulgast V vastavusse ühe kindla punkti $P' = (u, v, w)$. Kui P jookseb läbi kogu piirkonna V , siis kujutispunkt P' kujundab teatud ruumilise piirkonna V' (joonis 9.3).

Joonis 9.3



Kehtigu järgmised tingimused:

1. Eeldame, et P on üheselt taastatav P' põhjal, st iga $P' \in V'$ korral leidub üks ja ainult üks $P \in V$ nii, et P' on P kujutiseks. Siis eksisteerib pöördteisendus, mis seab igale punktile $P' = (u, v, w) \in V'$ vastavusse parajasti ühe punkti $P = (x, y, z) \in V$. Selle pöördteisendusega on seotud kolm funktsiooni

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w) \quad \text{ja} \quad z = z(u, v, w).$$

2. Olgu funktsioonidel $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ ja $z(u, v, w)$ olemas osatuletised $x'_u, x'_v, x'_w, y'_u, y'_v, y'_w, z'_u, z'_v$ ja z'_w terves piirkonnas V' .

Kui on täidetud tingimused 1 ja 2, siis kehtib järgmine muutuja vahetuse valem:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned} \quad (9.8)$$

kus $J(u, v, w)$ on *funktsionaaldeterminant* e *jakobiaan*, mis avaldub järgmiselt:

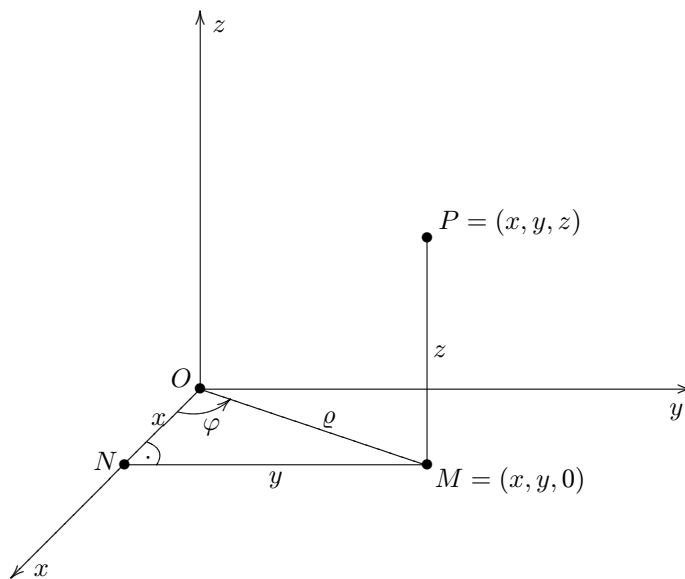
$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix}. \quad (9.9)$$

9.5 Silinderkoordinaadid. Integreerimine silinderkoordinaatides

Silinderkoordinaadid.

Olgu antud punkt $P = (x, y, z)$ ruumis $\mathbb{R}^3$. Tähistame punkti P projektsiooni xy -tasandile M -ga. Punkti P silinderkoordinaadid on arvud ϱ , φ ja z , kusjuures ϱ ja φ on punkti M polaarkaugus ja polaarnurk koordinaatide alguspunkti O suhtes xy -tasandil. Punkt P oma rist- ja silinderkoordinaatidega on kujutatud joonisel 9.4.

Joonis 9.4



Silinderkoordinaatidel on järgmised muutumiskiirgused:

$$\varrho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{ja} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Peale selle, kuna ϱ ja φ on punkti $M = (x, y, 0)$ polaarkoordinaadid O suhtes, siis nende jaoks kehtivad valemid (6.3). Lisades neile võrduse $z = z$, saame järgmised seosed punkti $P = (x, y, z)$ rist- ja silinderkoordinaatide vahel:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z \quad \text{ja} \quad (9.10)$$

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (9.11)$$

Kolmekordse integraali teisendamine silinderkoordinaatidesse.

Vaatleme kolmekordset integraali

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Tähistame hulgas V paiknevatele punktidele $P = (x, y, z)$ vastavate silinderkoordinaatide $P' = (\varrho, \varphi, z)$ hulga sümboliga V' . Muutujate vahetuse jaoks on vaja arvutada jakobiaan $J(\varrho, \varphi, z)$. Kasutades avaldisi (9.11) ja arvestades, et x ja y ei sõltu muutujast z ning z ei sõltu muutujatest ϱ ja φ saame

$$J(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} x'_{\varrho}(\varrho, \varphi) & x'_{\varphi}(\varrho, \varphi) & x'_z(\varrho, \varphi) \\ y'_{\varrho}(\varrho, \varphi) & y'_{\varphi}(\varrho, \varphi) & y'_z(\varrho, \varphi) \\ z'_{\varrho} & z'_{\varphi} & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho.$$

Kuna ϱ on mittenegatiivne, siis $|J(\varrho, \varphi, z)| = J(\varrho, \varphi, z) = \varrho$. Seega saame järgmise muutujate vahetuse valemi:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz. \quad (9.12)$$

Näide. Arvutada integraal

$$I = \iiint_V z(x + y) dx dy dz$$

üle piirkonna V , mis on antud järgmiste võrratustega:

$$V : x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0, \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Kuna $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, siis esimene võrratus V definitsioonis annab $0 \leq \varrho \leq 2$. Peale selle, xy -tasandi ülemises pooles, kus $y \geq 0$, muutub polaarnurk φ lõigul $[0, \pi]$. Seega on hulgas V paiknevatele punktidele vastavate silinderkoordinaatide hulk järgmine risttahukas:

$$V' : 0 \leq \varrho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Teeme muutujate vahetuse vastavalt valemile (9.12) ja teisendame saadava kolmekordse integraali kolmikintegraaliks:

$$I = \iiint_{V'} z(\varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho d\varphi dz = \iiint_{V'} z\varrho^2(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varrho d\varphi dz = \\ = \int_0^2 d\varrho \int_0^\pi d\varphi \int_1^3 z\varrho^2(\cos \varphi + \sin \varphi) dz.$$

Arvestades seda, et fikseeritud muutuja järgi integreerimisel on teised muutujad konstandid, toome sisemise integraali alt välja kordaja $\varrho^2(\cos \varphi + \sin \varphi)$ ja keskmise integraali alt välja kordaja ϱ^2 :

$$I = \int_0^2 \varrho^2 d\varrho \int_0^\pi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_1^3 z dz.$$

Oleme saanud kolme sõltumatu integraali korrutise. Arvutame need eraldi välja:

$$\int_0^2 \varrho^2 d\varrho = \left. \frac{\varrho^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3},$$

$$\int_0^\pi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^\pi = \sin \pi - \cos \pi - \sin 0 + \cos 0 = 2,$$

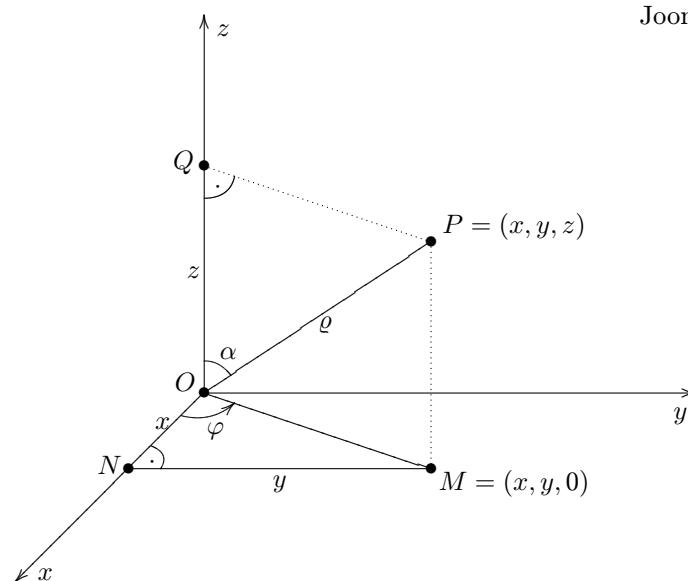
$$\int_1^3 z dz = \left. \frac{z^2}{2} \right|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4.$$

Ülesande vastus on $I = \frac{8}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{64}{3}$.

9.6 Sfäärkoordinaadid. Integreerimine sfäärkoordinaatides

Sfäärkoordinaadid.

Olgu antud punkt $P = (x, y, z)$ ruumis $\mathbb{R}^3$ ja tähistagu M selle punkti projektiooni xy -tasandile. Olgu O koordinaatide alguspunkt. Punkti P sfäärkoordinaadid on arvud ϱ , φ ja α , kus $\varrho = |OP|$, φ on punkti M polaarnurk O suhtes ja α on vektori $\overrightarrow{OP}$ ja z -telje vaheline nurk. Punkt P oma rist- ja sfäärkoordinaatidega on kujutatud joonisel 9.5.

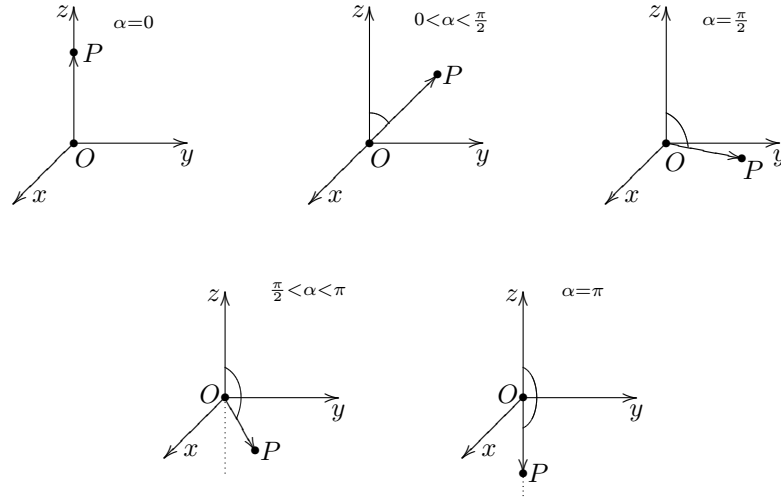


Joonis 9.5

Kuna ϱ ja φ on M polaarkoordinaadid, siis nende muutumispiirkonnad on $\varrho \geq 0$ ja $\varphi \in [0, 2\pi)$. Vaatame ka milline on vektori $\overrightarrow{OP}$ ja z -telje vahelise nurga α

muutumispiirkond. Joonisel 9.6 on kujutatud viis erinevat juhtu. Kui P asub z -telje positiivses osas, siis $\overline{OP}$ ja z -telg on samasuunalised, seega $\alpha = 0$. Kui P ei paikne z -teljel, kuid asub ülevalpool xy -tasandit, siis $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Kui P asub xy -tasandil, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Kui P asub allpool xy -tasandit väljaspool z -telge, siis $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Lõpuks, kui P asub z -telje negatiivses osas, siis $\alpha = \pi$.

Joonis 9.6



Seega on α muutumispiirkond lõik $[0, \pi]$. Kokkuvõttes: sfäärkoordinaatide muutumispiirkonnad on

$$\varrho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{ja} \quad \alpha \in [0, \pi].$$

Järgnevalt vaatleme ristkoordinaatide ja sfäärkoordinaatide omavahelisi seoseid. Kuna ϱ on punktide $O = (0, 0, 0)$ ja $P = (x, y, z)$ vaheline kaugus, siis

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (9.13)$$

Suuruste φ ja α valemid x, y ja z kaudu on keerukamad ja sellepärast neid siinkohal tuletama ei hakka.

Muutujate vahetuseks kolmekordses integraalis on siiski vaja ristkoordinaatide x, y ja z valemid sfäärkoordinaatide kaudu. Seepärast tuletame need valemid. Selleks kasutame joonist 9.5. Kolmnurgast OQP näeme et

$$z = \varrho \cos \alpha, \quad |QP| = \varrho \sin \alpha.$$

Samamoodi saame kolmnurgast ONM seosed

$$x = |OM| \cos \varphi, \quad y = |OM| \sin \varphi.$$

Kuna $|OM| = |QP| = \varrho \sin \alpha$, siis võib viimased seosed kirjutada järgmiselt:

$$x = \varrho \cos \varphi \sin \alpha, \quad y = \varrho \sin \varphi \sin \alpha.$$

Kokkuvõttes oleme tuletanud järgmised valemid ristkoordinaatide jaoks sfäärkoordinaatide kaudu:

$$x = \varrho \cos \varphi \sin \alpha, \quad y = \varrho \sin \varphi \sin \alpha, \quad z = \varrho \cos \alpha. \quad (9.14)$$

Kolmekordse integraali teisendamine sfäärkoordinaatidesse.

Vaatleme kolmekordse integraali

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

teisendamist sfäärkoordinaatidesse ϱ , φ ja α . Selleks tähistame hulgas V paiknevatele punktidele (x, y, z) vastavate sfäärkoordinaatide $(\varrho, \varphi, \alpha)$ hulga sümboliga V' ja arvutame jakobiaani $J(\varrho, \varphi, \alpha)$. Kasutades valemuid (9.14) saame

$$\begin{aligned} J(\varrho, \varphi, \alpha) &= \begin{vmatrix} x'_\varrho(\varrho, \varphi, \alpha) & x'_\varphi(\varrho, \varphi, \alpha) & x'_\alpha(\varrho, \varphi, \alpha) \\ y'_\varrho(\varrho, \varphi, \alpha) & y'_\varphi(\varrho, \varphi, \alpha) & y'_\alpha(\varrho, \varphi, \alpha) \\ z'_\varrho(\varrho, \varphi, \alpha) & z'_\varphi(\varrho, \varphi, \alpha) & z'_\alpha(\varrho, \varphi, \alpha) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \alpha & -\varrho \sin \varphi \sin \alpha & \varrho \cos \varphi \cos \alpha \\ \sin \varphi \sin \alpha & \varrho \cos \varphi \sin \alpha & \varrho \sin \varphi \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & -\varrho \sin \alpha \end{vmatrix} = \\ &= -\varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \alpha - \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos^2 \alpha - \varrho^2 \cos^2 \varphi \sin \alpha \cos^2 \alpha - \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \alpha = \\ &= -\varrho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^3 \alpha - \varrho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= -\varrho^2 \sin^3 \alpha - \varrho^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = -\varrho^2 \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\varrho^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Arvestades, et $\sin \alpha \geq 0$, kui $\alpha \in [0, \pi]$, saame

$$|J(\varrho, \varphi, \alpha)| = |-\varrho^2 \sin \alpha| = \varrho^2 \sin \alpha.$$

Järelikult on muutujate vahetuse valem järgmine:

$$\begin{aligned} &\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(\varrho \cos \varphi \sin \alpha, \varrho \sin \varphi \sin \alpha, \varrho \cos \alpha) \varrho^2 \sin \alpha d\varrho d\varphi d\alpha. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Näide. Arvutada integraal

$$I = \iiint_V (2x - y) dx dy dz$$

üle piirkonna V , mis on antud võrratustega

$$V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Leiame piirkonnale V vastavate sfäärkoordinaatide hulga. Kuna $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, siis esimene võrratus V definitsioonis annab $0 \leq \varrho \leq 1$. Kaks järgnevat võrratust $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määravad esimese veerandi xy -tasandil. Selles veerandis paikneva punkti $M = (x, y, 0)$ polaarnurk O suhtes asub lõigul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Viimane võrratus $z \geq 0$ hulga V definitsioonis määrab xy -tasandi kohal paikneva poolruumi. Seal on nurk α lõigul $[0, \frac{\pi}{2}]$ (vt joonis 9.6). Seega on hulgas V paiknevatele punktidele vastavate sfäärkoordinaatide hulk järgmine risttahukas:

$$V' : 0 \leq \varrho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Teeme muutujate vahetuse etteantud kolmekordses integraalis kasutades valemeid (9.15) ja (9.14) ning teisendame ta kolmikintegraaliks:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V'} (2\varrho \cos \varphi \sin \alpha - \varrho \sin \varphi \sin \alpha) \varrho^2 \sin \alpha \, d\varrho \, d\varphi \, d\alpha = \\ &= \int_0^1 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varrho \cos \varphi \sin \alpha - \varrho \sin \varphi \sin \alpha) \varrho^2 \sin \alpha \, d\alpha = \\ &= \int_0^1 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 (2 \cos \varphi - \sin \varphi) \sin^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= \int_0^1 \varrho^3 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

Arvutame saadud kolm sõltumatut integraali eraldi välja:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varrho^3 d\varrho &= \left. \frac{\varrho^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi &= (2 \sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= (2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}) - (2 \sin 0 + \cos 0) = 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \, d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ülesande vastus on järgmine: $I = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$.

Peatükk 10

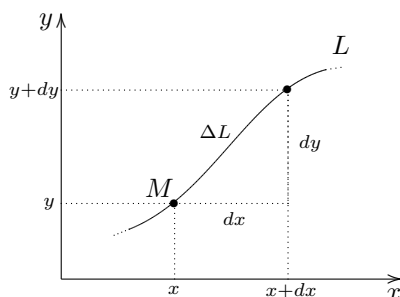
Joonintegraalid ja pindintegraal

10.1 Esimest liiki joonintegraali mõiste

Joone kaare pikkuse diferentsiaal.

Olgu kahemõtmelises ruumis antud sile joon L (joonis 10.1). Valime mingi punkti $M = (x, y)$ selle joonel ja fikseerime lühikese kaare ΔL , mille otspunkt on M . Kaare ΔL projektsioonid telgedele olgu dx ja dy .

Joonis 10.1



Tähistagu ΔL ühtlasi ka ΔL -i pikkust. Sile joon on suurendamisel sirgestuv, st väikese pikkusega kaar on ligikaudselt sirgloik. Seetõttu võime väikese ΔL -i avaldada ligikaudselt Pythagorase teoreemi kasutades:

$$\Delta L \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (10.1)$$

Mida väiksem on ΔL , seda täpsem on see valem. Järgmist suurust:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (10.2)$$

nimetatakse *tasandilise joone* L *kaare pikkuse diferentsiaaliks* punktis M . Kaare pikkuse diferentsiaal dL võrdne kaare ΔL otspunktide vahelise kaugusega. Valemid (10.1) ja (10.2) annavad ligikaudse seose

$$\Delta L \approx dL$$

kaare pikkuse ja selle diferentsiaali vahel.

Analoogiliselt saab joone kaare pikkuse diferentsiaali mõiste sisse tuua ka kolmemõõtmelises ruumis antud joone L jaoks. Olgu M mingi punkt selle joonel ja ΔL lühike kaar, mille otspunkt on M . Peale selle, olgu dx , dy ja dz kaare ΔL projektsioonid telgedele. Järgmist suurust:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (10.3)$$

nimetatakse *ruumilise joone* L *kaare pikkuse diferentsiaaliks* punktis M . Jällegi kehtib ligikaudne seos

$$\Delta L \approx dL.$$

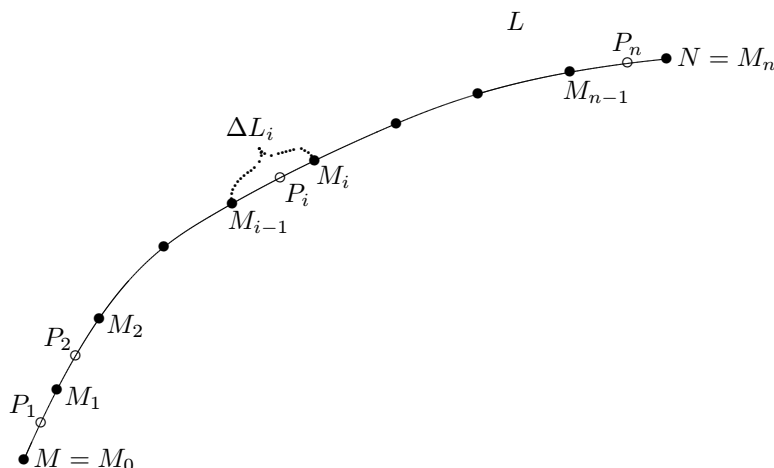
Esimest liiki joonintegraal.

Olgu kahe- või kolmemõõtmelises ruumis antud sile lõpliku pikkusega joon L otspunktidega M ja N . Peale selle, olgu antud funktsioon $f(P)$, mis on sellel joonel määratud. Jaotame joone L osakaarteks punktidega

$$M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N.$$

Valime igal osakaarel $M_{i-1}M_i$ ühe punkti P_i . Olgu ΔL_i osakaare $M_{i-1}M_i$ pikkus (vt joonis 10.2).

Joonis 10.2



Moodustame järgmise summa:

$$l_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta L_i. \quad (10.4)$$

See on funktsiooni $f(P)$ integraalsumma joonel L .

Olgu ε_n maksimaalne arvudest $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$. Integraalsumma l_n piirväärtust protsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ nimetatakse funktsiooni f esimest liiki joonintegraaliks ehk joonintegraaliks kaare pikkuse järgi üle joone L ja tähistatakse

$$\int_L f(P) dL. \quad (10.5)$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_L f(P) dL = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} l_n = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta L_i. \quad (10.6)$$

Rakendusi.

1. Esimest liiki joonintegraali kasutades saab arvutada joone L pikkuse. Kuna ΔL_i on osakaare $M_{i-1}M_i$ pikkus, siis osakaarte pikkuste summa

$$l_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i \quad (10.7)$$

võrdub joone L pikkusega. Summa (10.7) on aga integraalsumma funktsioonist 1. See on konstantne ε_n suhtes (joone L pikkus ei muutu, kui me muudame selle joone tükeldust!). Seega tema piirväärtus, st joonintegraal funktsioonist 1

$$\int_L dL$$

võrdub samuti joone L pikkusega.

2. Kui L on materiaalne joon pideva joontihedusega $\gamma(P)$, siis selle joone mass avaldub valemiga

$$m = \int_L \gamma(P) dL. \quad (10.8)$$

Selle valemi tuletamiseks arutleme järgmiselt. Kui osakaare $M_{i-1}M_i$ pikkus on väike, siis muutub joontihedus selle osakaare peal vähe. Seega

$$\gamma(P) \approx \gamma(P_i) \quad \text{iga} \quad P \in M_{i-1}M_i \quad \text{korral,}$$

kus P_i on mingi fikseeritud punkt osakaarel $M_{i-1}M_i$. Kuna mass avaldub joontiheduse ja pikkuse korrutisena, siis kehtib osakaare $M_{i-1}M_i$ massi jaoks järgmine ligikaudne valem:

$$\Delta m_i \approx \gamma(P_i) \Delta L_i. \quad (10.9)$$

Seega on kogu joone L massi ligikaudne valem järgmine:

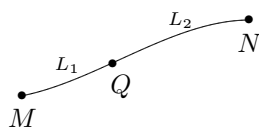
$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta L_i. \quad (10.10)$$

Selle valemi paremal poolel seisab funktsiooni $\gamma(P)$ integraalsumma joonel L . Seega kui pikima osakaare pikkus ε_n läheneb nullile, läheneb antud summa joonintegraalile $\int_L \gamma(P) dL$. Teisest küljest, mida väiksemad on osakaared, seda vähem muutub $\gamma(P)$ iga osakaare peal ja seda täpsem on ligikaudne võrdus (10.10). Seega läheb ligikaudne võrdus (10.10) piirprotsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ üle täpseks võrduseks. Kokkuvõttes saamegi piirprotsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ valemi (10.8).

10.2 Esimest liiki joonintegraali omadusi

1. $\int_L (F_1(P) + F_2(P)) dL = \int_L F_1(P) dL + \int_L F_2(P) dL$.
2. $\int_L C F(P) dL = C \int_L F(P) dL$, kus C on konstant.
3. Olgu joone L otspunktid M ja N . Peale selle olgu Q mingi kolmas punkt sellel joonel. Tähistame L_1 -ga joone osa, mis jääb punktide M ja Q vahele ning L_2 -ga joone osa, mis jääb punktide Q ja N vahele (joonis 10.3).

Joonis 10.3



Siis kehtib järgmine valem:

$$\int_L F(P) dL = \int_{L_1} F(P) dL + \int_{L_2} F(P) dL.$$

Põhjendus. Vaatleme juhtu, kui integreeritav funktsioon on joone L joontihedus, st $f(P) = \gamma(P)$. Siis

$$L \text{ mass} = \int_L \gamma(P) dL,$$

$$L_1 \text{ mass} = \int_{L_1} \gamma(P) dL \text{ ja}$$

$$L_2 \text{ mass} = \int_{L_2} \gamma(P) dL.$$

Ilmselt $L \text{ mass} = L_1 \text{ mass} + L_2 \text{ mass}$. Siit järeldubki omadus 3.

10.3 Esimest liiki joonintegraali arvutamine parameetrilise joone korral

Üks võimalus arvutada joonintegraali

$$\int_L F(P) dL \quad (10.11)$$

on taandada ta määratud integraalile ja avaldada viimane Newton-Leibnitzi valemit kasutades. See on võimalik siis, kui joon on antud parameetrilisel kujul.

Kahemõõtmeline juht.

Olgu tasandiline joon L antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases} \quad (10.12)$$

Seejuures vastavad joone L otspunktidele M ja N parameetri väärtused $t = a$ ja $t = b$, st $M = (\varphi(a), \psi(a))$ ja $N = (\varphi(b), \psi(b))$. Eeldame, et φ ja ψ on diferentseeruvad (st omavad lõplikke tuletisi).

Teisendame joonintegraali (10.11) määratud integraaliks parameetri t järgi lõigul $[a, b]$. Muutuja $P = (x, y)$ avaldub t kaudu järgmiselt:

$$P = (\varphi(t), \psi(t)).$$

Lisaks tuleb leida ka sobiv valem joone kaare pikkuse diferentsiaali dL jaoks. Selleks arvutame kõigepealt dx ja dy :

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt.$$

Seega (10.2) põhjal

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[\varphi'(t)dt]^2 + [\psi'(t)dt]^2} = \\ &= \sqrt{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\} dt^2} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Nüüd on olemas kõik valemid, et teostada vajalikud asendused integraali (10.11) all. Saame järgmise võrduse:

$$\int_L F(P) dL = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (10.13)$$

On kaks olulist erijuhtu.

1. Olgu L antud võrrandiga $y = f(x)$, kus $x \in [a, b]$. Siis saab L esitada parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Tegemist on võrranditega (10.12), kus $\varphi(t) = t$ ja $\psi(t) = f(t)$. Valem (10.13) teisendub järgmisele kujule:

$$\int_L F(P) dL = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (10.14)$$

2. Olgu L antud võrrandiga $x = g(y)$, kus $y \in [c, d]$. Siis saab L esitada parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = t, \quad t \in [c, d]. \end{cases}$$

Tegemist on võrranditega (10.12), kus $\varphi(t) = g(t)$ ja $\psi(t) = t$. Valem (10.13) teisendub järgmisele kujule:

$$\int_L F(P) dL = \int_c^d F(g(y), y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (10.15)$$

Näide. Arvutada integraal

$$I = \int_L y \sqrt{1 - y^2} dL$$

üle joone L , mis on antud võrrandiga $y = \cos x$, kus $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Kasutame valemit (10.14). Kuna $\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x$ ja $y' = -\sin x$, saame

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx.$$

Teeme asenduse $u = 1 + \sin^2 x$. Siis $du = 2 \sin x \cos x dx$ ja $x = 0$ korral $u = 1$ ning $x = \frac{\pi}{2}$ korral $u = 2$. Seega

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u \sqrt{u} \Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

Kolmemõõtmeline juht.

Olgu ruumiline joon L antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases} \quad (10.16)$$

Analoogiliselt eeltooduga saab tuletada järgmise valemi ruumilise joonintegraali jaoks:

$$\int_L F(P) dL = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \quad (10.17)$$

10.4 Teist liiki joonintegraali mõiste

Teist liiki joonintegraal tasandil.

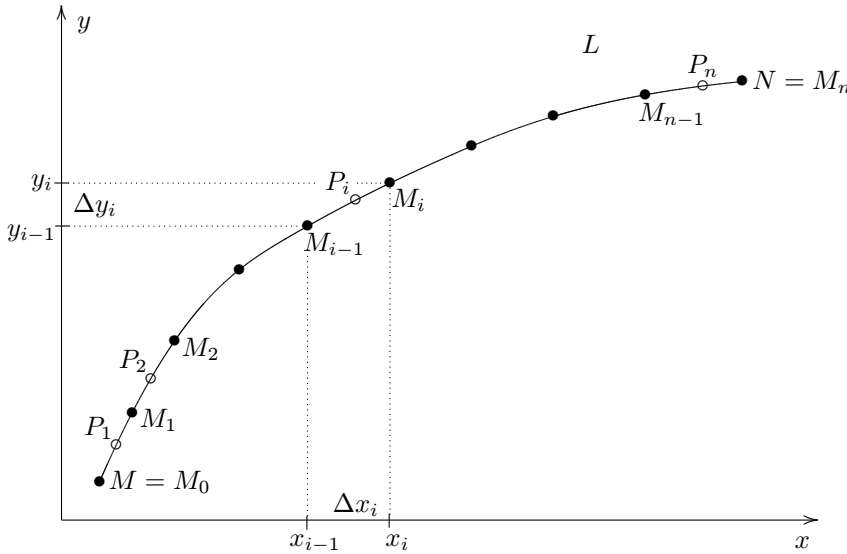
Olgu xy -tasandil antud lõpliku pikkusega joon L otspunktidega M ja N . Peale selle olgu antud kaks funktsiooni $F(P)$ ja $G(P)$, mis on määratud iga $P \in L$ korral.

Jaotame joone L n osakaareks punktidega

$$M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N$$

suunaga punkti M poolt punkti N poole (joonis 10.3).

Joonis 10.3



Olgu punkti M_i koordinaadid x_i ja y_i . Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Valime igal osakaarel $M_{i-1}M_i$ ühe punkti P_i . Moodustame järgmise summa:

$$A_n = \sum_{i=1}^n [F(P_i) \Delta x_i + G(P_i) \Delta y_i]. \quad (10.18)$$

Summat (10.18) nimetatakse funktsioonide F ja G *integraalsummaks koordinaatide järgi* joonel L .

Tähistame $d_i = |M_{i-1}M_i|$. Olgu ε_n maksimaalne arvudest $d_1, d_2, \dots, d_n$. Integraalsumma A_n piirväärtust protsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ nimetatakse funktsioonide F ja G *teist liiki joointegraaliks* ehk *joonintegraaliks koordinaatide järgi* üle joone L ja tähistatakse

$$\int_L F(x, y)dx + G(x, y)dy. \quad (10.19)$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned} \int_L F(x, y)dx + G(x, y)dy &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} A_n = \\ &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [F(P_i)\Delta x_i + G(P_i)\Delta y_i]. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Joone L suunda punktist M punkti N nimetatakse *integreerimissuunaks*. Kui integraali tähistuses on vaja näidata integreerimissuunda, siis võib ta kirjutada järgmiselt:

$$\int_{MLN} F(x, y)dx + G(x, y)dy \quad \text{või} \quad \int_M^N F(x, y)dx + G(x, y)dy.$$

Integreerimissuund on teist liiki joonintegraali juures oluline. Suuna muutmisel muutub integraali märk (vt omadus 4 §10.6 allpool). Seda võib intuiitselt põhjendada järgmiselt. Kui me muudame integreerimissuunda, st valime selleks suuna punkti N poolt punkti M poole, siis järjestuvad ümber kõik punktid M_i (st M_1 asetub M_{n-1} kohale, M_2 asetub M_{n-2} kohale jne). Analoogiliselt järjestuvad ümber ka punktide M_i koordinaadid x_i ja y_i . Tulemusena muutuvad integraalsummas olevate koordinaatide muutude $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ märgid ja seega ka integraalsumma ning integraali märk.

Võrdluseks olgu märgitud, et esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimissuunast. Vastavas integraalsummas esineva osakaare pikkuse ΔL_i väärtus ei sõltu sellest, kas seda mõõta punkti M poolt punkti N poole või vastupidi. Seega ei sõltu ka integraalsumma ja vastav joonintegraal suunast.

Vaatleme mõnda olulist erijuhtu teist liiki joonintegraali korral.

1. Olgu $G \equiv 0$. Siis puudub integraalsummas ja joonintegraalis funktsioon G .

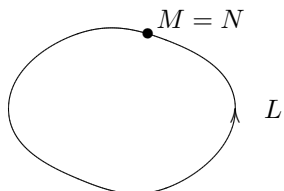
$$\text{Seega } A_n = \sum_{i=1}^n F(P_i)\Delta x_i \text{ ja } \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} A_n = \int_L F(x, y)dx.$$

2. Olgu $F \equiv 0$. Siis puudub integraalsummas ja joonintegraalis funktsioon F .

$$\text{Seega } A_n = \sum_{i=1}^n G(P_i)\Delta y_i \text{ ja } \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} A_n = \int_L G(x, y)dy.$$

3. Olgu $M = N$. Siis on L kinnine kontuur (joonis 10.4).

Joonis 10.4



Sellisel juhul ei sõltu joonintegraali väärtus integreerimise alg- ja lõpp-punktist kontuuril L . Küll sõltub integraali väärtus kontuuril valitud integreerimissuunast. Kokkuleppeliselt loetakse integreerimisel mööda kinnist kontuuri positiivseks suunaks kellaosuti liikumisele vastupidine suund (lühidalt: suund vastupäeva). Integraali mööda kinnist kontuuri L tähistatakse järgmiselt:

$$\oint_L F(x, y)dx + G(x, y)dy. \quad (10.21)$$

Teist liiki joonintegraal ruumis.

Analoogiliselt saab defineerida ka teist liiki joonintegraali kolmemõõtmelises ruumis. Erinevus integraalist tasandil seisneb vaid selles, et juurde tuleb üks koordinaat ja ka selle koordinaadiga seotud funktsioon integraali all.

Olgu ruumis $\mathbb{R}^3$ antud lõpliku pikkusega joon L otspunktidega M ja N . Olgu antud kolm funktsiooni $F(P)$, $G(P)$ ja $H(P)$, mis on määratud iga $P = (x, y, z) \in L$ korral. Jaotame joone L n osakaareks punktidega

$$M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N$$

suunaga punkti M poolt punkti N poole. Olgu punkti M_i koordinaadid x_i , y_i ja z_i . Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

Valime igal osakaarel $M_{i-1}M_i$ ühe punkti P_i . Moodustame järgmise summa:

$$A_n = \sum_{i=1}^n [F(P_i)\Delta x_i + G(P_i)\Delta y_i + H(P_i)\Delta z_i]. \quad (10.22)$$

Summat (10.22) nimetatakse funktsioonide F , G ja H *integraalsummaks koordinaatide järgi* joonel L .

Tähistame $d_i = |M_{i-1}M_i|$. Olgu ε_n maksimaalne arvudest $d_1, d_2, \dots, d_n$. Funktsioonide F , G ja H *teist liiki joonintegraal* ehk *joonintegraal koordinaatide järgi* üle joone L on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\int_L F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} A_n = \\
&= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [F(P_i)\Delta x_i + G(P_i)\Delta y_i + H(P_i)\Delta z_i]. \quad (10.23)
\end{aligned}$$

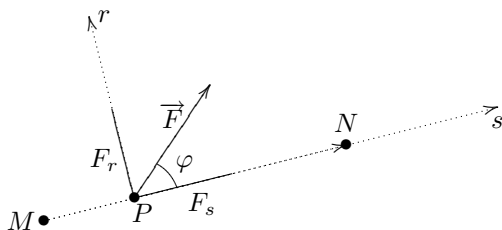
10.5 Töö arvutamine teist liiki joonintegraali abil

Töö konstantses jõuväljas.

Liikugu materiaalne punkt P sirgjooneliselt punktist M punkti N . Mõjugu punktile P konstantne jõud $\vec{F}$. Tõestame, et jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö avaldub valemiga

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}. \quad (10.24)$$

Vektorid $\overrightarrow{MN}$ ja $\vec{F}$ asuvad teataval ühisel tasandil. Moodustame sel tasandil 2 telge: liikumissuunaline telg s ja temaga ristuv telg r (joonis 10.5). Vektori $\vec{F}$ saab selles teljestikus panna kirja järgmiselt $\vec{F} = (F_s, F_r)$, kus F_s ja F_r on projektsioonid telgedele (vektori $\vec{F}$ koordinaadid).



Joonis 10.5

Liikumissuunaline jõu komponent F_s teeb tööd ja liikumissuunaga ristuv komponent F_r ei tee tööd. Kuna töö on võrdne liikumissuunas mõjuva jõu ja teepikkuse korrutisega, siis $A = F_s |\overrightarrow{MN}|$. Arvestades seda, et $F_s = |\vec{F}| \cos \varphi$ saame

$$A = |\vec{F}| |\overrightarrow{MN}| \cos \varphi.$$

Selle avaldise paremal poolel on vektorite $\vec{F}$ ja $\overrightarrow{MN}$ pikkuste ning nende vahelise nurga koosinuse korrutis. Kuid see võrdub ju nende vektorite skalaarkorrutisega. Siit järeldubki valem (10.24).

Töö mittekonstantses jõuväljas tasandil.

Vaatleme nüüd üldisemat ülesannet. Liikugu materiaalne punkt P xy -tasandil mööda (üldiselt kõverat) joont L punktist M punkti N . Sõltugu punktile P mõjuv jõud $\vec{F}$ punkti P asukohast. Viimane tähendab seda, et jõuvektori $\vec{F}$ koordinaadid F_1 ja F_2 on muutuja P funktsioonid, st

$$\vec{F} = \vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P)).$$

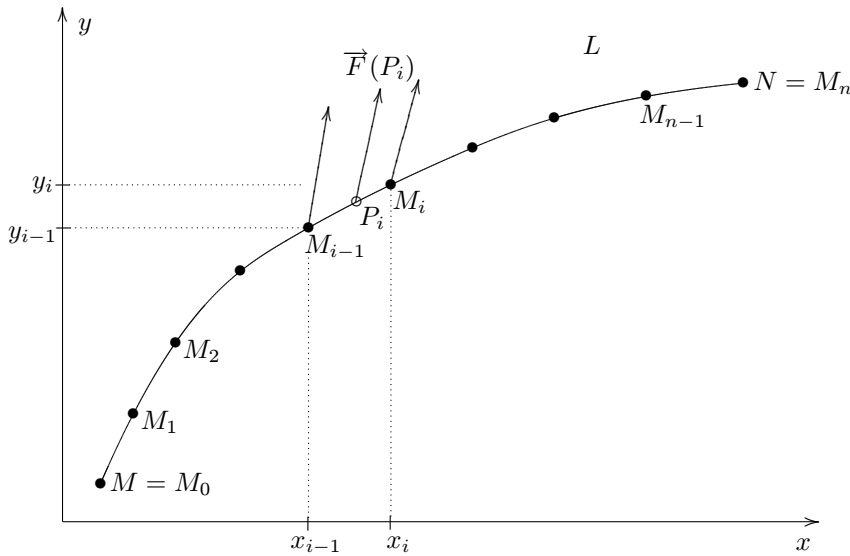
Eeldame, et F_1 ja F_2 on pidevad funktsioonid ja joon L on sile. Eesmärgiks on avaldada töö, mida teeb jõud $\vec{F}$ punkti P nihutamisel asendist M asendisse N .

Ülesande lahendamiseks jaotame joone L n osakaareks punktidega

$$M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N$$

suunaga punkti M poolt punkti N poole. Olgu M_i koordinaadid x_i ja y_i (joonis 10.6). Tähistame $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ja $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Joonis 10.6



Olgu osakaarel $M_{i-1}M_i$ tehtud töö on ΔA_i . Kogu joonel L tehtud töö avaldub osakaartel tehtud tööde summana, st

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i.$$

Valime punkti P_i kaarelt $M_{i-1}M_i$. Kui $d_i = |M_{i-1}M_i|$ on väike siis on jõud $\vec{F}$ kaarel $M_{i-1}M_i$ ligikaudselt konstantne ja võrdne jõuga punktis P_i , st

$$\vec{F}(P) \approx \vec{F}(P_i), \quad \text{kui } P \in M_{i-1}M_i. \quad (10.25)$$

Lisaks on sileda joone L väike osakaar $M_{i-1}M_i$ ligikaudselt sirglõik. Seega toimub osakaarel $M_{i-1}M_i$ ligikaudselt sirgjooneline liikumine konstantses jõuväljas. Valemi (10.24) põhjal

$$\Delta A_i \approx \vec{F}(P_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}. \quad (10.26)$$

Valemis (10.26) esinevad vektorid saab esitada koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$\vec{F}(P_i) = (F_1(P_i), F_2(P_i)) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i).$$

Sellega teisendub (10.26) järgmisele kujule:

$$\Delta A_i \approx F_1(P_i)\Delta x_i + F_2(P_i)\Delta y_i.$$

Summeerides tööd osalõikudel tuletame töö ligikaudse avaldise kogu joonel:

$$A \approx \sum_{i=1}^n [F_1(P_i)\Delta x_i + F_2(P_i)\Delta y_i]. \quad (10.27)$$

Valemi (10.27) paremal poolel seisab funktsioonide F_1 ja F_2 integraalsumma koordinaatide järgi. Olgu ε_n suurim arvudest $d_1, d_2, \dots, d_n$. Valem (10.27) on seda täpsem, mida peenem on joone L tükeldus, st mida väiksem on ε_n . Seega teist liiki joonintegraali definitsiooni põhjal saame järgmise täpse valemi töö jaoks:

$$A = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [F_1(P_i)\Delta x_i + F_2(P_i)\Delta y_i] = \int_L F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy. \quad (10.28)$$

Töö mittekonstantses jõuväljas ruumis.

Esitame ilma tuletuskäiguta ka valemi töö arvutamiseks kolmemõõtmelises ruumis. Liikugu materiaalne punkt $P = (x, y, z)$ ruumis $\mathbb{R}^3$ mööda joont L punktist M punkti N . Sõltugu punktile P mõjuv jõud $\vec{F}$ punkti P asukohast, st

$$\vec{F} = \vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P), F_3(P)).$$

Siis avaldub jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö punkti P nihutamisel asendist M asendisse N järgmise valemiga:

$$A = \int_L F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz. \quad (10.29)$$

10.6 Teist liiki joonintegraali omadusi

Piirdume tasandilise joonintegraali omaduste loetlemisega. Seejuures omaduste 3 ja 4 põhjendamisel kasutame eelmises paragrahvis käsitletud rakendust - töö arvutamist.

1. $\int_L (F_1 + F_2)dx + (G_1 + G_2)dy = \int_L F_1dx + G_1dy + \int_L F_2dx + G_2dy.$
2. $\int_L CFdx + CGdy = C \int_L Fdx + Gdy$, kus C on konstant.

3. Kui joone L otspunktid on M ja N ning Q on mingi kolmas punkt joonel L (vt joonis 10.3), siis

$$\int_{MLN} Fdx + Gdy = \int_{MLQ} Fdx + Gdy + \int_{QLN} Fdx + Gdy.$$

Põhjendus. Vaatleme juhtu, kui funktsioonid F ja G on jõuvektori $\vec{F} = (F_1, F_2)$ komponendid, st $F = F_1$ ja $G = F_2$. Siis jõuvälja $\vec{F}$ poolt tehtud töö materiaalse punkti nihutamisel mööga joont L

asendist M asendisse N võrdub $\int_{MLN} F_1dx + F_2dx$,

asendist M asendisse Q võrdub $\int_{MLQ} F_1dx + F_2dx$ ja

asendist Q asendisse N võrdub $\int_{QLN} F_1dx + F_2dx$.

Ilmselt võrdub töö materiaalse punkti nihutamisel asendist M asendisse N tööde summaga, mis tehakse selle punkti nihutamisel asendist M asendisse Q ja asendist Q asendisse N . Siit järeldubki omadus 3.

4. Integreerimissuuna muutmisel teist liiki joonintegraali märk muutub vastupidiseks, st

$$\int_{MLN} Fdx + Gdy = - \int_{NLM} Fdx + Gdy.$$

Põhjendus. Vaatleme jällegi juhtu, kui F ja G on jõuvektori $\vec{F} = (F_1, F_2)$ komponendid, st $F = F_1$ ja $G = F_2$. Siis jõuvälja $\vec{F}$ poolt tehtud töö materiaalse punkti nihutamisel mööga joont L

asendist M asendisse N võrdub $\int_{MLN} F_1dx + F_2dx$ ja

asendist N asendisse M võrdub $\int_{NLM} F_1dx + F_2dx$.

Liikugu materiaalne punkt asendist M asendisse N ja seejärel asendist N asendisse M . Sellise liikumise korral on summaarne läbitud teepikkus võrdne nulliga. Seega on ka summaarne töö võrdne nulliga. Kehtib võrdus

$$\int_{MLN} F_1dx + F_2dx + \int_{NLM} F_1dx + F_2dx = 0.$$

Viies teise liidetava võrduse paremale poole saamegi omaduse 4.

10.7 Teist liiki joonintegraali arvutamine parameetrilise joone korral

Käesolevas paragrahvis vaatleme teist liiki joonintegraali teisendamist määratud integraaliks parameetriliselt antud joone korral. See on üsna sarnane vastava teisendusega, mis me tegime esimest liiki joonintegraali käsitlemisel. Erinevus seisneb vaid diferentsiaalide käsitlemisel. Kui esimest liiki joonintegraalis tuli

asendada joone kaare pikkuse diferentsiaal dL parameetri diferentsiaaliga, siis teist liiki joonintegraalis tuleb asendada koordinaatide diferentsiaalid dx , dy (ja dz) parameetri diferentsiaaliga.

Kahemõõtmeline juht.

Olgu tasandiline joon L antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases} \quad (10.30)$$

Seejuures vastavad joone L otspunktidele M ja N parameetri väärtused $t = a$ ja $t = b$, st $M = (\varphi(a), \psi(a))$ ja $N = (\varphi(b), \psi(b))$. Eeldame, et φ ja ψ on diferentseeruvad (st omavad lõplikke tuletisi).

Teisendame teist liiki joonintegraali

$$\int_L F(x, y)dx + G(x, y)dy \quad (10.31)$$

määratud integraaliks parameetri t järgi lõigul $[a, b]$. Selleks avaldame diferentsiaalid dx ja dy :

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt. \quad (10.32)$$

Tehes asendused vastavalt seostele (10.30) ja (10.32) saame järgmise valemi:

$$\begin{aligned} \int_L F(x, y)dx + G(x, y)dy &= \\ &= \int_a^b [F(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + G(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Vaatleme kahte erijuhtu.

1. Olgu L antud võrrandiga $y = f(x)$, kus $x \in [a, b]$. Siis saab L esitada parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Tegemist on võrranditega (10.30), kus $\varphi(t) = t$ ja $\psi(t) = f(t)$. Valemist (10.33) saame seose

$$\int_L F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int_a^b [F(x, f(x)) + G(x, f(x))f'(x)]dx. \quad (10.34)$$

Erijuhul, kui $G \equiv 0$, lihtsustub see seos järgmiselt:

$$\int_L F(x, y)dx = \int_a^b F(x, f(x))dx. \quad (10.35)$$

2. Olgu L antud võrrandiga $x = g(y)$, kus $y \in [c, d]$. Siis saab L esitada parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = t, \quad t \in [c, d]. \end{cases}$$

Tegemist on võrranditega (10.30), kus $\varphi(t) = g(t)$ ja $\psi(t) = t$. Valemist (10.33) saame

$$\int_L F(x, y) dx + G(x, y) dy = \int_c^d [F(g(y), y)g'(y) + G(g(y), y)] dy. \quad (10.36)$$

Kui $F \equiv 0$, siis

$$\int_L G(x, y) dy = \int_c^d G(g(y), y) dy. \quad (10.37)$$

Näide. Arvutada integraal

$$I = \int_L xy dx + (x - y^3) dy$$

mööda joont, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sqrt{t}, \quad t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Leiame diferentsiaalid:

$$dx = \frac{dt}{t}, \quad dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Teeme asenduse ja lihtsustame:

$$I = \int_1^2 \left[\ln t \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{t} + (\ln t - \sqrt{t^3}) \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right] = \frac{3}{2} \int_1^2 \ln t \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \int_1^2 t dt.$$

Logaritmi sisaldava integraali arvutame ositi integreerimise abil. Selleks võtame $u = \ln t$ ja $dv = \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Siis $du = \frac{dt}{t}$ ja $v = 2\sqrt{t}$. Saame

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_1^2 \ln t \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} &= \frac{3}{2} \left[\ln t \cdot 2\sqrt{t} \Big|_1^2 - \int_1^2 2\sqrt{t} \frac{dt}{t} \right] = \frac{3}{2} \left[2 \ln t \sqrt{t} \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \left[2 \ln t \sqrt{t} \Big|_1^2 - 4\sqrt{t} \Big|_1^2 \right] = 3(\ln t - 2)\sqrt{t} \Big|_1^2 = 3(\ln 2 - 2)\sqrt{2} + 6. \end{aligned}$$

Arvutame ka $\frac{1}{2} \int_1^2 t dt = \frac{t^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{3}{4}$. Seega on ülesande vastus järgmine: $I = 3(\ln 2 - 2)\sqrt{2} + 6 - \frac{3}{4} = 3(\ln 2 - 2)\sqrt{2} + \frac{21}{4}$.

Kolmemõõtmeline juht.

Olgu ruumiline joon L antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases} \quad (10.38)$$

Analoogiliselt eeltooduga saab tuletada järgmise valemi ruumilise teist liiki joonintegraali jaoks:

$$\begin{aligned} \int_L F(x, y, z) dx + G(x, y, z) dy + H(x, y, z) dz = \\ = \int_a^b [F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + G(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + \\ + H(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \end{aligned} \quad (10.39)$$

10.8 Greeni valem

Olgu xy -tasandil antud regulaarne piirkond D , mis on piiratud kinnise kontuuriga L . Olgu antud funktsioonid F ja G , mis on määratud piirkonnas D , kaasa arvatud rajajoon L . Käesolevas paragrahvis tuletame nn Greeni valemi, mis taandab funktsioonide F ja G teist liiki joonintegraali mööda joont L kahekordsele integraalile üle joone L poolt piiratud piirkonna D .

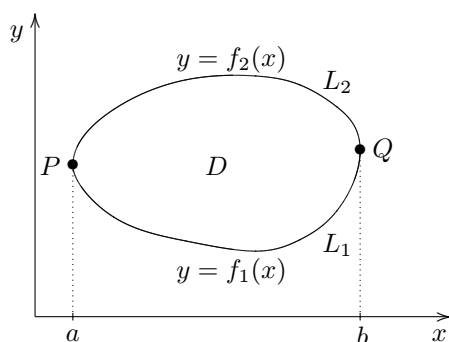
Kuna D on regulaarne, siis on ta ka regulaarne y -telje suhtes. Viimasest järeldub, et leiduvad arvud $a \leq b$ ja funktsioonid $f_1(x) \leq f_2(x)$ nii, et piirkond D on antud võrratustega

$$a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x).$$

Eeldame veel lihtsuse mõttes, et

$$f_1(a) = f_2(a) \quad \text{ja} \quad f_1(b) = f_2(b). \quad (10.40)$$

Neist eeldustest järeldub, et jooned $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ on otstest liidetud. Vastavad liitepunktid on joonisel 10.7 tähistatud P ja Q -ga.



Joonis 10.7

Tähistame joone $y = f_1(x)$ L_1 -ga ja joone $y = f_2(x)$ L_2 -ga. Siis $L = L_1 \cup L_2$.

Arvutame kahekordse integraali $\iint_D F'_y(x, y) dx dy$ minnes üle kaksikintegraalile ja kasutades Newton-Leibnitzi valemit. Saame

$$\begin{aligned} \iint_D F'_y(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F'_y(x, y) dy \\ &= \int_a^b dx F(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = \int_a^b [F(x, f_2(x)) - F(x, f_1(x))] dx. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Valemi (10.35) põhjal

$$\int_a^b F(x, f_1(x)) dx = \int_{PL_1Q} F(x, y) dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b F(x, f_2(x)) dx = \int_{PL_2Q} F(x, y) dx.$$

Asendades need seosed võrduse (10.41) paremasse poolde ja arvestades, et integraali $\oint_L F(x, y) dx$ kokkuleppeline suund on vastupäeva, saame

$$\begin{aligned} \iint_D F'_y(x, y) dx dy &= \int_{PL_2Q} F(x, y) dx - \int_{PL_1Q} F(x, y) dx \\ &= - \int_{QL_2P} F(x, y) dx - \int_{PL_1Q} F(x, y) dx = - \oint_L F(x, y) dx. \end{aligned}$$

Järelikult kehtib valem

$$\oint_L F(x, y) dx = - \iint_D F'_y(x, y) dx dy. \quad (10.42)$$

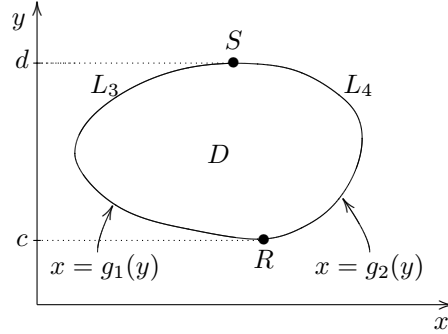
Valem (10.42) taandab funktsiooni F teist liiki joonintegraali mööda joont L kahekordsele integraalile üle joone L poolt piiratud piirkonna D . Et saada tervet Greeni valemit, peame me tuletama analoogilise valemi ka funktsiooni G joonintegraali $\oint_L G(x, y) dy$ jaoks. Selleks toome sisse piirkonna D uue kirjelduse. Kuna D on regulaarne, siis on ta ka regulaarne x -telje suhtes. Viimasest järeldub, et leiduvad arvud $c \leq d$ ja funktsioonid $g_1(y) \leq g_2(y)$ nii, et piirkond D on antud võrratustega

$$c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y).$$

Eeldame veel lihtsuse mõttes, et

$$g_1(c) = g_2(c) \quad \text{ja} \quad g_1(d) = g_2(d). \quad (10.43)$$

Neist eeldustest järeldub, et jooned $x = g_1(y)$ ja $x = g_2(y)$ on otstest liidetud. Vastavad liitepunktid on joonisel 10.8 tähistatud R ja S -ga.



Tähistame joone $x = g_1(y)$ L_3 -ga ja joone $x = g_2(y)$ L_4 -ga. Siis $L = L_3 \cup L_4$.

Arvutame integraali $\iint_D G'_x(x, y) dx dy$. Minnes üle kaksikintegraalile ja kasutades Newton-Leibnitzi valemit saame

$$\begin{aligned} \iint_D G'_x(x, y) dx dy &= \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} G'_x(x, y) dx \\ &= \int_c^d dy G(x, y) \Big|_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} = \int_c^d [G(g_2(y), y) - G(g_1(y), y)] dy. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Valemi (10.37) põhjal

$$\int_c^d G(g_1(y), y) dy = \int_{RL_3S} G(x, y) dy \quad \text{ja} \quad \int_c^d G(g_2(y), y) dy = \int_{RL_4S} G(x, y) dy.$$

Asendades need seosed võrduse (10.44) paremasse poolde ja arvestades, et integraali $\oint_L G(x, y) dy$ kokkuleppeline suund on vastupäeva, saame

$$\begin{aligned} \iint_D G'_x(x, y) dx dy &= \int_{RL_4S} G(x, y) dy - \int_{RL_3S} G(x, y) dy \\ &= \int_{RL_4S} G(x, y) dy + \int_{SL_3R} G(x, y) dy = \oint_L G(x, y) dy. \end{aligned}$$

Järelikult kehtib valem

$$\oint_L G(x, y) dy = \iint_D G'_x(x, y) dx dy. \quad (10.45)$$

Liites lõpuks võrdused (10.42) ja (10.45) tuletagemgi *Greeni valemit*:

$$\oint_L F(x, y) dx + G(x, y) dy = \iint_D [G'_x(x, y) - F'_y(x, y)] dx dy. \quad (10.46)$$

Olgu märgitud, et piirkonna D regulaarsus ja eeldused (10.40), (10.43) olid sisse toodud Greeni valemi tuletuskäigu lihtsustamiseks. See valem kehtib ka üldisemate, mitteregulaarsete piirkondade korral.

10.9 Teist liiki joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimus

Potentsiaalse vektorvälja integraal mööda kinnist kontuuri tasandil.

Olgu xy -tasandil antud piirkond D , mis on piiratud kinnise kontuuriga L . Olgu piirkonnas D antud funktsioonid $F(P)$ ja $G(P)$ nii, et neist funktsioonidest moodustatud vektorväli on potentsiaalne, st leidub $U(P)$ nii, et iga $P \in D$ korral on täidetud tingimused

$$F(P) = U'_x(P), \quad G(P) = U'_y(P) \quad \text{ehk} \quad (F(P), G(P)) = \text{grad } U(P). \quad (10.47)$$

Arvutame funktsioonide F ja G teist liiki joonintegraali mööda L -i. Kasutades Greeni valemit (10.46) ja võrdusi $G'_x = U''_{yx}$, $F'_y = U''_{xy}$, mis järelduvad tingimustest (10.47), saame

$$\oint_L F dx + G dy = \iint_D [G'_x - F'_y] dx dy = \iint_D [U''_{yx} - U''_{xy}] dx dy.$$

Kuna teist järku segatuletised on võrdsed, st $U''_{yx} = U''_{xy}$, saame

$$\oint_L F(x, y) dx + G(x, y) dy = 0. \quad (10.48)$$

Kui funktsioonid F ja G rahuldavad tingimusi (10.47), siis nende funktsioonide teist liiki joonintegraal üle kinnise kontuuri võrdub nulliga.

Näide. Olgu $F(x, y) = y$ ja $G(x, y) = x$. Need kaks funktsiooni moodustavad potentsiaalse vektorvälja. Tõepoolest: funktsiooni $U(x, y) = xy$ osatuletised on $U'_x = y = F$ ja $U'_y = x = G$. Olgu L ellips

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

suvaliste etteantud pooltelgedega $a, b > 0$. Näitame, et integraal mööda ellipsit ülesandes antud funktsioonidest võrdub nulliga, st

$$I = \oint_L y dx + x dy = 0.$$

Selleks leiame diferentsiaalid:

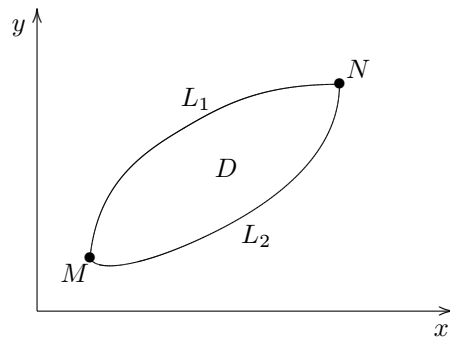
$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = b \cos t \, dt,$$

teeme integraali all asenduse ja arvutame:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [b \sin t(-a \sin t dt) + a \cos t \cdot b \cos t dt] = ab \int_0^{2\pi} [\cos^2 t - \sin^2 t] dt = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \frac{ab}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2} [\sin 4\pi - \sin 0] = 0. \end{aligned}$$

Tasandilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest.

Olgu xy -tasandil antud kaks punkti M ja N ja kaks joont L_1 ja L_2 , mis ühendavad neid punkte (joonis 10.9).



Joonis 10.9

Tähistame joonte L_1 ja L_2 ühendi L -ga, st $L = L_1 \cup L_2$, ja kontuuriga L piiratud ala D -ga. Olgu antud funktsioonid F ja G , mis rahuldavad piirkonnas D tingimusi (10.47). Esitame joointegraali üle kontuuri L integraalide summana mööda jooni L_1 ja L_2 :

$$\begin{aligned} \oint_L F(x, y) dx + G(x, y) dy \\ = \int_{ML_2N} F(x, y) dx + G(x, y) dy + \int_{NL_1M} F(x, y) dx + G(x, y) dy. \end{aligned}$$

Valemi (10.48) põhjal $\oint_L F(x, y) dx + G(x, y) dy = 0$. Seega

$$\int_{ML_2N} F(x, y) dx + G(x, y) dy + \int_{NL_1M} F(x, y) dx + G(x, y) dy = 0.$$

Siit järeldub, et

$$\int_{ML_2N} F(x, y) dx + G(x, y) dy = - \int_{NL_1M} F(x, y) dx + G(x, y) dy.$$

Muutes parempoolses integraalis integreerimissuunda tuletame valemi

$$\int_{ML_2N} F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int_{ML_1N} F(x, y)dx + G(x, y)dy. \quad (10.49)$$

Saadud tulemuse võib sõnastada järgmiselt:

Kui funktsioonid F ja G rahuldavad tingimusi (10.47), siis nende funktsioonide teist liiki joonintegraal ei sõltu integreerimisteest vaid ainult integreerimise alg- ja lõpp-punktist.

Ruumilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest.

Joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimus kehtib ka kolmemõõtmelises ruumis. Formuleerime selle väite ilma tõestamata.

Olgu kolmemõõtmelises piirkonnas D antud funktsioonid $F(P)$, $G(P)$, $H(P)$. Eeldame, vektorväli $(F(P), G(P), H(P))$ on potentsiaalne, st leidub funktsioon $U(P)$ nii, et iga $P = (x, y, z) \in D$ korral kehtivad tingimused

$$\begin{aligned} F(P) &= U'_x(P), \quad G(P) = U'_y(P), \quad H(P) = U'_z(P) \quad \text{ehk} \\ (F(P), G(P), H(P)) &= \text{grad } U(P). \end{aligned} \quad (10.50)$$

Olgu piirkonnas D antud kaks punkti M ja N ning kaks joont L_1 ja L_2 , mis ühendavad punkte M ja N . Siis kehtib valem

$$\begin{aligned} \int_{ML_2N} F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz \\ = \int_{ML_1N} F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + H(x, y, z)dz. \end{aligned} \quad (10.51)$$

See tähendab, et *tingimusi (10.50) rahuldavate funktsioonide F , G ja H teist liiki joonintegraal ei sõltu integreerimisteest, vaid ainult integreerimise alg- ja lõpp-punktist.*

Füüsikaline taust.

Valemeid (10.49) ja (10.51) kasutatakse sageli füüsilas. Näiteks vaatleme materiaalselt punkti, mis liigub kolmemõõtmelises ruumis asendist M asendisse N , kusjuures talle mõjub jõud $\vec{F} = \vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P), F_3(P))$. §10.5 nägime, et jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö avaldub valemiga

$$A = \int_{MLN} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz, \quad (10.52)$$

kus L on punkti liikumise trajektoor.

Vaatleme juhtu kui integraal (10.52) ei sõltu integreerimisteest L , vaid ainult integreerimise alg- ja lõpppunktidest M ja N . Siis on töö A sõltumatu punkti liikumise trajektooriga.

Kui jõuvälja $\vec{F}$ poolt tehtud töö ei sõltu liikumistest, vaid ainult liikumise alg- ja lõpp-punktist, siis nimetatakse seda jõuvälja *konservatiivseks*. Ülaltoodu põhjal võime väita, et *potentsiaalne jõuväli on konservatiivne*.

Tuntud konservatiivsed jõuväljad on gravitatsiooniväli ja elektriväli. Lihtne näide: maa raskusväljas kõrguselt h_1 kõrgusele h_2 kukkuvat keha korral on gravitatsioonivälja poolt tehtud töö võrdne potentsiaalse energia kaoga, so $A = mg(h_1 - h_2)$. See on sõltumatu trajektooriga, mida mööda keha langeb.

10.10 Esimest liiki pindintegraal ja selle rakendus

Olgu kolmemõõtmelises ruumis antud lõpliku pindalaga pind S ja sellel pinnal määratud funktsioon $f(P)$.

Jaotame pinna S n tükiks $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Tähistagu ΔS_i ühte tükki i -ndat tükki kui i -nda tüki pindala. Valime igal tükil ΔS_i ühe punkti P_i . Moodustame summa

$$\sigma_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \dots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i. \quad (10.53)$$

See on funktsiooni $f(P)$ *integraalsumma* pinnal S .

Olgu d_i tüki ΔS_i diameeter (so tükil ΔS_i asuva kahe punkti vaheline maksimaalne kaugus). Tähistame ε_n -ga maksimaalset arvudest $d_1, d_2, \dots, d_n$. Muudame pinna S tükeldust järjest peenemaks nii, et $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Integraalsumma σ_n piirväärtust taolises piirprotsessis nimetatakse funktsiooni f *esimest liiki pindintegraaliks* üle pinna S ja tähistatakse

$$\iint_S f(P) dS.$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_S f(P) dS = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i. \quad (10.54)$$

Rakendusi.

1. Esimest liiki pindintegraali kasutades saab arvutada pinna S pindala. Tõepoolest: kuna ΔS_i on tüki ΔS_i pindala, siis tükide pindalade summa

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad (10.55)$$

võrdub pinna S pindalaga. Summa (10.55) on aga integraalsumma funktsioonist 1. See on konstantne ε_n suhtes (pinna S pindala ei muutu, kui me

muudame selle pinna tükeldust!). Seega tema piirväärtus, st pindintegraali funktsioonist 1

$$\iint_S dS$$

võrdub samuti pinna S pindalaga.

2. Kui S on materiaalne pind pideva pindtihedusega $\gamma(P)$, siis selle pinna mass avaldub esimest liiki pindintegraali kaudu valemiga

$$m = \iint_S \gamma(P) dS. \quad (10.56)$$

Selle valemi tuletamiseks arutleme järgmiselt. Kui pinnatüki ΔS_i diameeter on väike, siis muutub pindtihenuse selle tüki peal vähe. Seega

$$\gamma(P) \approx \gamma(P_i) \quad \text{iga } P \in \Delta S_i \text{ korral,}$$

kus P_i on mingi fikseeritud punkt tükil ΔS_i . Kuna mass avaldub pindtiheduse ja pindala korrutisena, siis kehtib pinnatüki ΔS_i massi jaoks järgmine ligikaudne valem:

$$\Delta m_i \approx \gamma(P_i) \Delta S_i. \quad (10.57)$$

Seega on kogu pinna S massi ligikaudne valem järgmine:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(P_i) \Delta S_i. \quad (10.58)$$

Selle valemi paremal poolel seisab funktsiooni $\gamma(P)$ integraalsumma. Seega, kui pikima diameetri pikkus ε_n läheneb nullile, läheneb antud summa pindintegraalile $\iint_S \gamma(P) dS$. Teisest küljest: mida väiksemad on pinnatükid ΔS_i , seda vähem muutub $\gamma(P)$ iga pinnatüki peal ja seda täpsem on ligikaudne võrdus (10.58). Seega läheb ligikaudne võrdus (10.58) piirprotsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ üle täpseks võrduseks. Kokkuvõttes saamegi piirprotsessis $\varepsilon_n \rightarrow 0$ valemi (10.56).

Esimest liiki pindintegraali arvutamine parameetrilise pinna korral. Olgu pind S antud järgmiste parameetriliste võrranditega:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v), \end{cases}$$

kus parameetritepaar (u, v) omab väärtusi kahemõõtmelises hulgas D . Kui funktsioonide φ , ψ ja χ osatuletised on piirkonnas D pidevad, siis saab esimest liiki pindintegraali funktsioonist f esitada kahekordse integraalina üle piirkonna D järgmisel viisil:

$$\iint_S f(P) dS = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (10.59)$$

kus

$$\begin{aligned} E &= (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2 + (\chi'_u)^2, \quad F = \varphi'_u \varphi'_v + \psi'_u \psi'_v + \chi'_u \chi'_v, \\ G &= (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2 + (\chi'_v)^2. \end{aligned} \tag{10.60}$$

Matemaatikas ja rakendustes esineb ka teist liiki pindintegraal, kuid seda me antud loengukursuses ei käsitle.

Peatükk 11

Read

11.1 Arvrea mõiste. Arvrea koonduvus. Koonduvuse tarvilik tingimus.

Arvrea mõiste.

Olgu antud reaalarvude jada

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Avaldist

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (11.1)$$

nimetatakse *arvreaks* (lühidalt: *reaks*). Liidetavad a_i on *rea liikmed*. Rea (11.1) n esimese liikme summat

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (11.2)$$

nimetatakse selle rea n -ndaks osasummaks.

Osasummast saame rea, kui n läheneb lõpmatuseni. Järelikult on loomulik defineerida rea s *summa* järgmise piirväärtusena:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (11.3)$$

Kui piirväärtus $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et rida *koondub*. Vastasel juhul öeldakse, et rida *hajub*.

Geomeetriline rida ja selle koonduvus.

Vaatleme rida $s = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i$, kus $a \neq 0$ ja q on etteantud reaalarvud. See on nn

geomeetiline rida. Antud rea osasumma on ühtlasi geomeetrilise progressiooni summa tuntud valemiga

$$s_n = \sum_{i=0}^n aq^i = \begin{cases} a \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{aq^{n+1}}{q-1} + \frac{a}{1-q} & \text{kui } q \neq 1 \\ an & \text{kui } q = 1. \end{cases}$$

Et leida rea s summat, peame arvutama osasummade piirväärtuse $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Teeme seda eraldi juhtudel $0 \leq q < 1$, $q > 1$, $q = 1$, $-1 < q < 0$, $q < -1$ ja $q = -1$. Paralleelselt arvutame kõigil neil juhtudel välja ka rea liikme $a_i = aq^i$ piirväärtuse.

1) Juht $0 \leq q < 1$. Siis

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} aq^i = a \lim_{i \rightarrow \infty} q^i = 0,$$

sest eksponentfunktsioon alusega, mis on väiksem kui 1, läheneb nullile argumenti lähenemisel lõpmatusele (vt joonis 1.5 Matemaatiline analüüs I konspektist). Seega sellel juhul $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^{n+1} = 0$ ja

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{aq^{n+1}}{q-1} + \frac{a}{1-q} \right] = \frac{a}{1-q}.$$

Rida koondub.

2) Juht $q > 1$. Siis $\lim_{i \rightarrow \infty} q^i = \infty$, sest eksponentfunktsioon alusega, mis on suurem kui 1, läheneb lõpmatusele argumenti lähenemisel lõpmatusele (vt joonis 1.4 Matemaatiline analüüs I konspektist). Järelikult rea liikme piirväärtus

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} aq^i \quad \text{ei ole lõplik}$$

ja samuti

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{aq^{n+1}}{q-1} + \frac{a}{1-q} \right] \quad \text{ei ole lõplik.}$$

Rida hajub.

3) Juht $q = 1$. Rea liige on konstantne, st $a_i = aq^0 = a$. Seega

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a \neq 0.$$

Kuid rea summa

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} an \quad \text{ei ole lõplik,}$$

sest tegur n kasvab piiramatult. Rida hajub.

4) Juht $-1 < q < 0$. Siis on q negatiivne, seega saab ta esitada kujul $q = (-1)|q|$, kus $0 < |q| < 1$. Ühtlasi

$$q^i = (-1)^i |q|^i.$$

Viimase korrutise esimene tegur, so $(-1)^i$ on tõkestatud. Teine tegur, so $|q|^i$ on aga lõpmatult kahanev protsessis $n \rightarrow \infty$, sest see on jällegi eksponentfunktsioon, mille alus on väiksem kui 1. Kuna lõpmatult kahaneva ja tõkestatud suuruse korrutis on lõpmatult kahanev, saame $\lim_{i \rightarrow \infty} q^i = 0$. Seega

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} a q^i = a \lim_{i \rightarrow \infty} q^i = 0.$$

Samuti $\lim_{n \rightarrow \infty} a q^{n+1} = 0$, millest järeldub, et

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a q^{n+1}}{q-1} + \frac{a}{1-q} \right] = \frac{a}{1-q}.$$

Rida koondub.

5) Juht $q < -1$. Defineerime $g = \frac{1}{q}$. Siis $-1 < g < 0$. Arutledes samamoodi nagu juhul 4) konstandiga g konstandi q asemel saame, et $\lim_{i \rightarrow \infty} g^i = 0$, st g^i on lõpmatult kahanev. Suurus

$$q^i = \frac{1}{g^i}$$

on lõpmatult kahaneva suuruse pöördarv, seega lõpmatult kasvav. Sellest tuleneb, et piirväärtus

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} a q^i \quad \text{ei ole lõplik}$$

Ühtlasi

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a q^{n+1}}{q-1} + \frac{a}{1-q} \right] \quad \text{ei ole lõplik.}$$

Rida hajub.

5) Juht $q = -1$. Siis

$$a_i = a(-1)^i, \\ s_n = a \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-1 - 1} = \frac{a}{2} [1 - (-1)^{n+1}].$$

Jadas a_i esinevad vaheldumisi elemendid a ja $-a$ ning jadas s_n esinevad vaheldumisi elemendid a ja 0 . Nii a_i kui ka s_n ei oma piirväärtust. Rida hajub.

Kokkuvõte: geomeetriline rida $s = \sum_{i=1}^{\infty} a q^i$ koondub siis ja ainult siis, kui $-1 < q < 1$. Sellisel juhul $s = \frac{a}{1-q}$.

Mõned erijuhud:

$$a = 1, q = \frac{1}{2} : \quad s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$a = 1, q = -\frac{1}{2} : \quad s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a = 1, q = \frac{1}{3} : \quad s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$a = 1, q = -\frac{1}{3} : \quad s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$a = 1, q = 2 : \quad s = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \quad \text{rida hajub}$$

Arvrea koonduvuse tarvilik tingimus.

Paneme tähele, et geomeetrilise rea koonduvus on seotud sellega, kas rea liige $a_i = aq^i$ läheneb nullile või mitte. Tõepoolest: rea liige koondub nulliks siis ja ainult siis, kui $-1 < q < 1$. Seega koondub geomeetriline rida parajasti siis, kui tema liige läheneb nullile. Üldisem seos rea koonduvuse ja tema liikme nullile lähenemise vahel on järgmine.

Teoreem 11.1 (Arvrea koonduvuse tarvilik tingimus). *Kui rida $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ koondub, siis $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.*

Tõestus. Kuna $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ koondub, siis rea summa definitsiooni kohaselt

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (11.4)$$

Asendades selles võrduses suuruse n suurusega $n-1$ saame

$$s = \lim_{n-1 \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n-1 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \quad (11.5)$$

Ilmselt $n \rightarrow \infty$ siis ja ainult siis, kui $n-1 \rightarrow \infty$. Järelikult saab (11.5) kirjutada kujul

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \quad (11.6)$$

Lahutame nüüd (11.4) ja (11.6). Saame

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (11.7)$$

Seega $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$. Teoreem on tõestatud.

Tõestatud väite põhjal peavad koonduva arvrea liikmed nullile lähenema. Nagu nägime, geomeetriline rida koondub siis ja ainult siis, kui tema liige läheneb nullile. Üldjuhul on rea liikme nullile lähenemine rea koondumiseks vaid tarvilik. See tähendab, et *on ka selliseid ridu, mille liikmed lähenevad nullile, kuid mis ei koonduda.*

Näiteks vaatleme nn harmoonilist rida

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{i} + \dots$$

Ka selle rea liikmed lähenevad nullile. Sellele vaatamata harmooniline rida ei koonu (vt integraaltunnuse juures toodud näidet järgmises paragrahvis).

Oletame, et on antud arvrida $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, mille liikmed lähenevad nullile.

Püstitame küsimuse: milliseid täiendavaid tingimusi peale nullile lähenemise peavad rea liikmed veel rahuldama selleks, et rida koonduks? Taolisi, arvridade koonduvuseks piisavaid tingimusi, nimetatakse koonduvustunnusteks. Järgmises paragrahvis vaatleme mõningaid koonduvustunnuseid.

11.2 Arvridade koonduvustunnused.

Vaatleme kõigepealt positiivsete liikmetega arvridu, st ridu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, kus $a_i > 0$.

Majoranttunnus. Olgu antud positiivsete liikmetega read $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, kusjuures

$$a_i \leq b_i.$$

Kui rida $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ koondub, siis koondub ka rida $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ja kehtib võrratus

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Sealjuures nimetatakse rida $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ rea $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ majorandiks.

Näide. Hindame arvrea

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i(i+1)} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{8 \cdot 4} + \dots$$

koonduvust. Majoranttunnuse kasutamiseks peame antud rea liikmeid hindama mõne koonduva reaga liikmetega. Hindamiseks valime koonduva geomeetrilise rea

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

Kuna summa indeks rahuldab võrratust $i \geq 0$, siis $i+1 \geq 1$. Sellest järeldub, et $\frac{1}{i+1} \leq 1$. Seega kehtib võrratus

$$\frac{1}{2^i(i+1)} \leq \frac{1}{2^i},$$

millest nähtub, et rea s liikmed on hinnatavad rea σ liikmetega. Järelikult s koondub majoranttunnuse põhjal ja $s \leq 2$.

D'Alemberti tunnus. Olgu $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ positiivsete liidetavatega rida. Eeldame, et piirväärtus

$$l = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

eksisteerib ja on lõplik. Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kui $l < 1$, siis rida s koondub.
2. Kui $l > 1$, siis rida s hajub.
2. Kui $l = 1$, siis jääb küsimus rea s koonduvusest lahtiseks.

Näide 1. Hindame arvrea

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

koonduvust. Selleks arvutame piirväärtuse

$$l = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{i+1}{2^{i+1}}}{\frac{i}{2^i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i+1}{2i} = \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2}.$$

D'Alemberti tunnuse põhjal rida koondub.

Näide 2. Hindame arvrea

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^2} = 1 + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{4^2} + \dots$$

koonduvust. Arvutame piirväärtuse

$$\begin{aligned} l &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{i+1}}{(i+1)^2}}{\frac{2^i}{i^2}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2i^2}{(i+1)^2} = 2 \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 = \\ &= 2 \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{i}}\right)^2 = 2. \end{aligned}$$

D'Alemberti tunnuse põhjal rida hajub.

Integraaltunnus. Olgu $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ positiivsete liikmetega rida, kusjuures

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

Peale selle olgu $f(x)$ mingisugune pidev ja monotoonselt kahanev funktsioon, mis rahuldab tingimusi

$$f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2, \quad f(3) = a_3, \quad \dots$$

Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kui päratu integraal $\int_1^\infty f(x)dx$ koondub, siis koondub ka rida s .

2. Kui päratu integraal $\int_1^\infty f(x)dx$ hajub, siis hajub ka rida s .

Funtsiooni $f(x)$ nimetakse *monotoonselt kahanevaks*, kui iga x_1 ja x_2 korral, mis rahuldavad võrratust $x_1 < x_2$, kehtib mitterange võrratus $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Näide. Hindame arvrea

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots, \quad \text{kus } p \in \mathbb{R},$$

koonduvust. Märgime, et antud rea erijuht on harmooniline rida, mis tekib $p = 1$ korral. Integraaltunnuse kasutamiseks defineerime järgmise funktsiooni: $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Siis kehtivad tingimused

$$f(1) = 1 = a_1, \quad f(2) = \frac{1}{2^p} = a_2, \quad f(3) = \frac{1}{3^p} = a_3, \dots$$

Peale selle, $f(x)$ on monotoonselt kahanev. Järelikult, integraaltunnuse põhjal sõltub rea s koonduvus päratu integraali $\int_1^\infty f(x)dx$ koonduvusest. Arvutame selle päratu integraali eraldi juhutudel $p \neq 1$ ja $p = 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty f(x)dx &= \int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right). \end{aligned}$$

Suuruse b^{1-p} käitumine protsessis $b \rightarrow \infty$ sõltub tema astendaja $1-p$ märgist. Kui $1-p < 0$ (so $p > 1$), siis $b^{1-p} \rightarrow 0$. Kui aga $1-p > 0$ (so $p < 1$), siis $b^{1-p} \rightarrow \infty$. Seega saame järgmise tulemuse:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \begin{cases} -\frac{1}{1-p} & \text{kui } p > 1 \\ \infty & \text{kui } p < 1. \end{cases}$$

Rida s koondub, kui $p > 1$ ja hajub, kui $p < 1$.

2) Kui $p = 1$, siis

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty x^{-1}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \ln x \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Rida hajub.

Kokkuvõte: ülesandes antud rida koondub, kui $p > 1$ ja hajub, kui $p \leq 1$.

Lõpuks esitame ühe koonduvustunnuse, mis on kasutatav vahelduvate märkidega ridade korral. *Vahelduvate märkidega reaks* nimetatakse arvrida, millel on järgmine kuju:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots,$$

kus $a_i > 0$.

Leibnitzi tunnus. Kui vahelduvate märkidega rea $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$ liidetavad on sellised, et kehtivad võrratused

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

ja $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$, siis see rida koondub ja tema summa on positiivne arv, mis ei ületa rea esimest liidetavat.

Näide. Vaatleme rida

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Tegemist on vahelduvate märkidega reaga, mis vastab Leibnitzi tunnuse tingimustele. Seega antud rida koondub. Rea summa s on positiivne arv, mis ei ületa esimest liidetavat, so arvu 1.

11.3 Funktsionaalrida ja selle koonduvuspiirkond.

Olgu antud funktsioonide jada

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$$

Avaldist

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \quad (11.8)$$

nimetatakse *funktsionaalreaks*.

Muutuja x fikseerimisel saame funktsionaalreast konkreetse arvrea. Ühtede x väärtuste korral võib see arvrida koonduda ja ja teiste x väärtuste korral hajuda. Muutuja x nende väärtuste hulka, mille korral funktsionaalrida koondub, nimetatakse selle rea *koonduvuspiirkonnaks*.

Vaatleme ühte tunnust, mille alusel on võimalik hinnata funktsionaalrea koonduvust.

Funktsionaalrea majorant. Positiivsete liikmetega arvrida $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ nimetatakse funktsionaalrea $s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *majorandiks* hulgas D , kui iga $x \in D$ korral kehtib võrratus

$$|u_i(x)| \leq a_i.$$

Funktsionaalrea majoranttunnus. Olgu $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ funktsionaalrea $s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ majorant hulgas D . Kui koondub σ , siis koondub ka $s(x)$ iga $x \in D$

korral.

Näide. Hindame funktsionaalrea

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos x^i}{i^2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos x^2}{4} + \frac{\cos x^3}{9} + \frac{\cos x^4}{16} + \dots$$

koonduvust. Kuna $\left| \frac{\cos x^i}{i^2} \right| \leq \frac{1}{i^2}$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis on funktsionaalreal $s(x)$ järgmine majorant:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

hulgas $\mathbb{R}$. Integraaltunnuse juures toodud näites nägime, et rida σ koondub. Seega koondub ka $s(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Antud funktsionaalrea koonduvuspiirkond on terve reaalarvude hulk.

11.4 Astmerida. Tayloriga ja McLaurini read.

Astmerida.

Vaatleme nüüd funktsionaalrida, mille liidetavateks on astmefunktsioonid. Täpsemalt: olgu reas (11.8) esinev funktsioon u_i kujul

$$u_i(x) = a_i x^i,$$

kus a_i on reaalarv. Lisades vaadeldavasse ritta ka liikme $a_0 x^0 = a_0$, saame nn *astmerea*, millel on järgmine kuju:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (11.9)$$

Vaatamata sellele, et üldjuhul võib funktsionaalrea (11.8) koonduvuspiirkond olla üsna keeruline reaalarvudest koosnev hulk, on astmereaga (11.9) koonduvuspiirkond lihtsalt kirjeldatav. Nimelt kehtib järgmine teoreem:

Teoreem 11.2. *Astmerea koonduvuspiirkond on vahemik, mille keskpunkt 0, st vahemik kujul $(-R, R)$.*

Arvu R nimetatakse astmerea *koonduvusraadiuseks*. Koonduvusraadius võib olla ükskõik milline mittenegatiivne arv, kaasa arvatud ∞ . Erijuhul kui $R = 0$, on koonduvuspiirkond tühi hulk, st astmerida hajub kõikjal. Kui $R = \infty$, on koonduvuspiirkond kogu reaalarvude hulk $\mathbb{R}$.

Funktsionaalrida, millel on järgmine kuju:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \dots, \quad (11.10)$$

kus $a, a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ on reaalarvud, nimetatakse *nihutatud astmereaks*. Nihutatud astmerea (11.10) saame astmereast (11.9) argumendi x nihutamisega

konstandi a võrra. Nihutatud astmerea koonduvuspiirkond on vahemik, mille keskpunkt a , st vahemik kujul $(a - R, a + R)$. Arv R on rea koonduvusraadius.

Taylori ja McLaurini read.

§3.9 nägime, et lõpmatu arv kordi diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ saab punkti a lähedal esitada järgmise ligikaudse valemiga:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (11.11)$$

Valemi (11.11) paremal poolel seisvat n - astme polünoomi nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori polünoomiks punktis a . Kui $a = 0$ nimetatakse Taylori polünoomi ka McLaurini polünoomiks.

Valem (11.11) on seda täpsem, mida suurem on temas esineva polünoomi aste n . Piirprotsessis $n \rightarrow \infty$ tekib ligikaudsest võrdusest (11.11) täpne võrdus. Järelikult

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Valemis (11.12) esinevat funktsionaalrida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks punktis a . Tegemist on nihutatud astmeregaga (11.10), kus

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

Kui $a = 0$, siis nimetatakse Taylori rida ka McLaurini reaks. Seega on funktsiooni $f(x)$ McLaurini rida järgmine:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i. \quad (11.13)$$

Tegemist on astmeregaga (11.9), kus $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

Näiteid. Esitame siinkohal mõnede tuntud funktsioonide McLaurini read koos koonduvusraadiusega R .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad R = \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} \quad R = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \quad R = \infty$$

Kui funktsioon ei ole 0-punkti ümbruses lõpmata arv kordi diferentseeruv, siis ei saa teda McLaurini ritta arendada. Näiteks võib tuua funktsioonid $\frac{1}{x}$, $\ln x$ ja

$\sqrt{x}$. Funktsioonid $\frac{1}{x}$ ja $\ln x$ ei ole $x = 0$ korral määratud. Funktsioon $\sqrt{x}$ on küll $x = 0$ korral määratud ($\sqrt{0} = 0$), kuid tema tuletis ei ole ($(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ katkeb $x = 0$ korral). Taolisel juhul võib funktsiooni $f(x)$ arendada Tayloriga ritta mõnes teises, nullist erinevas punktis a , kus ta on lõpmata arv kordi diferentseeruv. See on samaväärne funktsiooni $f(a+x)$ arendamisega McLaurini ritta. Näiteks olgu toodud funktsioonide $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ ja $\sqrt{1+x}$ McLaurini read koos koonduvusraadiusega:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} \quad R = 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(2i-3)!}{2^{2i-2} i! (i-2)!} x^i \quad R = 1 \end{aligned}$$

11.5 Trigonomeetriline rida. Fourier rida.

Funktsionaalrida järgmisel kujul:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx], \quad (11.14)$$

kus a_0 , a_n ja b_n on konstandid, nimetatakse *trigonomeetriliseks reaks* perioodiga 2π . Ei ole raske näha, et taolise rea periood on tõesti 2π : kuna funktsioonid $\cos x$ ja $\sin x$ on 2π -perioodilised, siis suvalise positiivse täisarvu n korral kehtivad võrdused

$$\cos n(x+2\pi) = \cos(nx+2n\pi) = \cos nx, \quad \sin n(x+2\pi) = \sin(nx+2n\pi) = \sin nx,$$

millest järeldub, et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x+2\pi) + b_n \sin n(x+2\pi)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Trigonomeetrilise rea (11.14) abil saab esitada 2π -perioodilisi funktsioone. Vaatlemegi 2π -perioodilist funktsiooni $f(x)$, mis on esitatav taolise reana, st

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]. \quad (11.15)$$

Tuletame valemid selle rea kordajate jaoks. Kordaja a_0 leidmiseks integreerime seost (11.15) rajades $-\pi$ kuni π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right]. \quad (11.16)$$

Rakendades Newton-Leibnitzi valemit arvutame selles valemis esinevad integraalid:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi ,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{n} \sin n\pi - \frac{1}{n} \sin(-n\pi) = 0 - 0 = 0 , \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \cos(-n\pi) = \\ &= -\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \cos n\pi = 0 . \end{aligned} \quad (11.18)$$

Viimase integraali arvutamisel kasutasime asjaolu, et $\cos x$ on paarisfunktsioon, mistõttu $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$. Arvestades valemeid (11.17) ja (11.18) saab võrdus (11.16) järgmise kuju

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi .$$

Siit avaldamegi kordaja a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx . \quad (11.19)$$

Kordajate a_n ja b_n leidmiseks läheb vaja järgmisi abivalemeid:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{kui } n \neq k \\ \pi & \text{kui } n = k \end{cases} \quad (11.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{kui } n \neq k \\ \pi & \text{kui } n = k \end{cases} \quad (11.21)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0 . \quad (11.22)$$

Tõestame näiteks valemi (11.20). Kui $n \neq k$, siis tähistame avaldatava integraali $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx$ tähega I ja integreerime kaks korda ositi. Saame

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \cos nx \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \\ &\quad \begin{array}{ll} u = \cos nx & dv = \cos kx \, dx \\ du = -n \sin nx \, dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \\ &= \frac{1}{k} \cos n\pi \sin k\pi - \frac{1}{k} \cos(-n\pi) \sin(-k\pi) + \frac{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \\ &= \frac{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = -\frac{n}{k^2} \sin nx \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n^2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \\ &\quad \begin{array}{ll} u = \sin nx & dv = \sin kx \, dx \\ du = n \cos nx \, dx & v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n}{k^2} \sin n\pi \cos k\pi + \frac{n}{k^2} \sin(-n\pi) \cos(-k\pi) + \frac{n^2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \\
&= \frac{n^2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{n^2}{k^2} I.
\end{aligned}$$

(Siinkohal kasutasime seost $\sin m\pi = 0$, kui $m \in \mathbb{Z}$.) Seega oleme jõudnud võrrandini

$$I = \frac{n^2}{k^2} I.$$

Lahendame selle I suhtes. Viies liikme $\frac{n^2}{k^2} I$ vasakule poole saame

$$I \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right) = 0 \quad \text{ehk} \quad I \frac{k^2 - n^2}{k^2} = 0.$$

Selles nulliga võrduvas korrutises esineb kaks tegurit: I ja $\frac{k^2 - n^2}{k^2}$. Kuna $n \neq k$, siis teine tegur $\frac{k^2 - n^2}{k^2}$ on nullist erinev. Järelikult peab esimene tegur I võrduma nulliga. Seega

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = 0.$$

Oleme tõestanud valemi (11.20) $n \neq k$ korral. Kui $n = k$, siis

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2nx}{2} \right] dx = \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2n\pi}{4n} \right] - \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-2n\pi)}{4n} \right] = \pi.
\end{aligned}$$

Oleme tõestanud valemi (11.20) ka $n = k$ korral. Valemid (11.21) ja (11.22) tõestatakse analoogiliselt.

Tuleme nüüd tagasi kordajate a_n ja b_n määramise juurde valemis (11.15). Korrutame seda valemit funktsiooniga $\cos kx$, kus k on mingi positiivne täisarv, ja integreerime. Saame

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right].
\end{aligned}$$

Seoste (11.17), (11.20) ja (11.22) tõttu on selle võrduse paremal poolel kõik liidetavad võrdsed nulliga, va liidetav $a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx$ indeksi $n = k$ korral, kui ta võrdub arvuga $a_k \pi$. Seega

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \pi.$$

Avaldame siit kordaja a_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx. \quad (11.23)$$

Järgmiseks korrutame valemi (11.15) funktsiooniga $\sin kx$, kus k on positiivne täisarv, ja integreerime:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right].$$

Arvestades seoseid (11.18), (11.21) ja (11.22) saame

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \pi,$$

millest avaldame kordaja b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (11.24)$$

Kordajaid (11.19), (11.23) ja (11.24) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier kordajateks*. Trigonomeetrilist rida (11.15), mille kordajad avalduvad valemitega (11.19), (11.23) ja (11.24) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier reaks*. Fourier rida kasutatakse palju signaalitöötlustes.

Näiteid. Kõigis järgnevates näidetes on 2π -perioodiline funktsioon esitatud analüütiliselt poollõigul $(-\pi, \pi]$ ja jätkatud perioodiliselt kogu arvteljele valemiga

$$f(x + 2k\pi) = f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Olgu $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{kui } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{kui } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ Siis

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right].$$

2. Olgu $f(x) = x$ kui $x \in (-\pi, \pi]$. Siis

$$f(x) = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right].$$

3. Olgu $f(x) = x^2$ kui $x \in (-\pi, \pi]$. Siis

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right].$$

Üldistus. Vaatlesime sellise funktsiooni Fourier rida, mille periood on 2π . Kui funktsiooni $f(x)$ periood on $2l$, siis tema Fourier rida ja Fourier kordajad avalduvad järgmiste valemitega:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right],$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$