Peatükk 5

Integraalid ja diferentsiaalvõrrandid

5.1 Algfunktsioon ja määramata integraal.

Algfunktsiooni mõiste. Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f *algfunktsiooniks*, kui kehtib võrdus

$$F'(x) = f(x).$$

Näiteks funktsioon $\sin x$ on funktsiooni $\cos x$ algfunktsioon, sest $(\sin x)' = \cos x$.

Paneme tähele, et algfunktsioon ei ole üheselt määratud. Näiteks on funktsiooni $f(x) = \cos x$ algfunktsioonideks ka kõik funktsioonid $\sin x + C$, kus C on suvaline konstant. Tõepoolest, kuna konstandi tuletis on null, kehtib $(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$.

Teoreem 5.1. Kui F on funktsiooni f algfunktsioon, siis funktsioonid kujul $F + C$, kus C on suvaline konstant, on samuti funktsiooni f algfunktsioonid.

Tõestus. Olgu F funktsiooni f algfunktsioon. Arvutame $F + C$ tuletise:

$$[F(x) + C]' \;=\; F'(x) + C' \;=\; F'(x) \;=\; f(x).$$

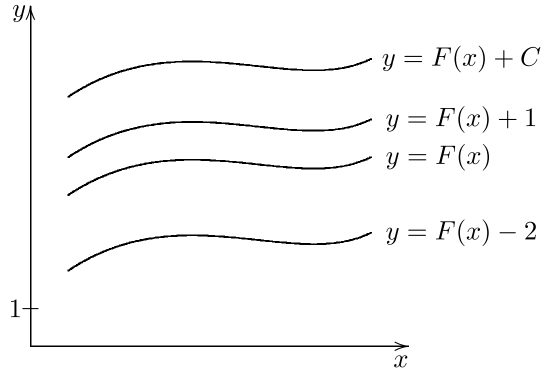
See näitabki, et $F + C$ on funktsiooni f algfunktsioon.

Määramata integraali mõiste. Funktsiooni f algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+C$, kus C on konstant, nimetatakse funktsiooni f *määramata integraaliks* ja tähistatakse $\int f(x)dx$. Seega definitsiooni kohaselt

$$\int f(x)dx \;=\; F(x) + C\,, \quad C \,-\, \text{konstant}\,. \tag{5.1}$$

Algfunktsiooni leidmist nimetatakse *integreerimiseks*.

Määramata integraal ei ole ühene funktsioon. Fikseeritud x korral on tal lõpmatult palju erinevaid väärtusi, mis sõltuvad valitud konstandist C. Teisest küljest võib määramata integraali tõlgendada kui üheste funktsioonide parve $y = F(x) + C$, kus konstandi C igale väärtusele vastab üks ühene funktsioon. Kujutades seda funktsioonideparve graafiliselt tasandil xy-koordinaadistikus saame jooneteparve, mille jooned on üksteisest tuletatavad y-telje sihilise paralleellükke abil (joonis 5.1).



Joonis 5.1

5.2 Integraalide tabel. Määramata integraali omadused.

Integraalide tabel.

1. $\int dx \;=\; x + C\,,$

   kuna $(x + C)' = 1$.

2. $\int x^a dx \;=\; \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$ kus $a \neq -1$,

   kuna $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = (a+1)\frac{x^a}{a+1} = x^a$.

3. $\int \frac{dx}{x} \;=\; \ln|x| + C$.

Tõestame valemi 3. Selleks peame näitama, et $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$.

Kui $x > 0$, siis $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.
Kui $x < 0$, siis $(\ln|x| + C)' = [\ln(-x) + C]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Kui $x = 0$, siis ei ole $\ln|x|$ määratud. Oleme tõestanud valemi 3 kehtivuse kõikide $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral.

4. $\int a^x dx \;=\; \frac{a^x}{\ln a} + C$, kus $\;a > 0, a \neq 1,$

   kuna $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x}{\ln a} \ln a = a^x.$

   Erijuht: $\int e^x dx \;=\; e^x + C.$

5. $\int \sin x dx \;=\; -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx \;=\; \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \;=\; \tan x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \;=\; -\cot x + C.$

9. $\int \frac{dx}{k^2+x^2} \;=\; \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + C.$

   Erijuht: $\int \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \arctan x + C.$

10. $\int \frac{dx}{k^2-x^2} \;=\; \frac{1}{2k} \ln \left|\frac{k+x}{k-x}\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} \;=\; \arcsin \frac{x}{k} + C.$

   Erijuht: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x + C.$

11. $\int \operatorname{sh} x\, dx \;=\; \operatorname{ch} x + C$

12. $\int \operatorname{ch} x\, dx \;=\; \operatorname{sh} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} \;=\; \operatorname{th} x + C$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} \;=\; -\operatorname{cth} x + C.$

Valemite 5 - 14 kontrollimiseks tuleb arvutada nende paremate poolte tuletised ning võrrelda saadud tulemusi integraalialuste funktsioonidega.

Näiteid valemite 9 – 11 rakendamise kohta:

$$\int \frac{dx}{4+x^2} \;=\; \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C\,, \int \frac{dx}{5+x^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{2-x^2} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C\,, \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} \;=\; \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Määramata integraali omadused.

1. $\int [f(x) \pm g(x)] dx \;=\; \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

   NB! Omadus 1 ei kehti korrutamise ja jagamise korral! See tähendab, et

$$\int [f(x)g(x)] dx \;\neq\; \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx \quad \text{ja}$$

$$\int [f(x) : g(x)] dx \;\neq\; \int f(x) dx : \int g(x) dx.$$

2. $\int a\, f(x)dx \;=\; a\int f(x)dx$, kus a on konstant.

3. Kui $\int f(x)dx \;=\; F(x)+C$ ja a, b on konstandid, siis

$$\int f(ax+b)dx \;=\; \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Tõestame omaduse 3. Selleks me peame näitama, et

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right]' = f(ax+b).$$

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja ja võrdust $F'(x) \;=\; f(x)$ saame valemi

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right]' \;=\; \frac{1}{a}[F(ax+b)]' \;=\; \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' \;=$$
$$=\; \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a \;=\; f(ax+b),$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näiteid omaduse 3 rakendamise kohta.

1. Arvutame $\int \cos(3x+4)dx$. Kuna $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, siis

$$\int \cos(3x+4)dx \;=\; \frac{1}{3}\sin(3x+4)+C.$$

2. Arvutame $\int \frac{dx}{ax+b}$. Kuna $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, siis

$$\int \frac{dx}{ax+b} \;=\; \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

3. Arvutame $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$. Kuna $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$, siis

$$\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)} \;=\; \frac{1}{-1}\tan(1-x)+C \;=\; -\tan(1-x)+C.$$

4. Arvutame $\int \frac{dx}{3+2x^2}$. Kuna $\int \frac{dx}{3+x^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C$, siis

$$\int \frac{dx}{3+2x^2} = \int \frac{dx}{3+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$$

4. Arvutame $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$. Kuna $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}+C$, siis

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+C.$$

5.3 Asendusvõte ja ositi integreerimine määramata integraali avaldamisel.

Asendusvõte. Vaatleme määramata integraali

$$\int f(x)dx\,. \tag{5.2}$$

Integraali (5.2) avaldamisel asendusvõttega tehakse selle integraali all muutuja vahetus. Selleks valitakse mingi funktsioon

$$u = \varphi(x)$$

ja integreerimine muutuja x järgi asendatakse integreerimisega muutuja u järgi. Eeldame, et φ on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame funktsiooni φ pöördfunktsiooni ψ-ga. Seega

$$x \;=\; \psi(u)\,. \tag{5.3}$$

Paneme kirja funktsiooni ψ tuletise diferentsiaalide jagatisena: $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$. Korrutades seda võrdust du-ga saame

$$dx \;=\; \psi'(u)du\,. \tag{5.4}$$

Kasutades valemeid (5.3) ja (5.4) asendame x ja dx integraali (5.2) all. Saame avaldise

$$\int f(x)dx \;=\; \int f[\psi(u)]\psi'(u)du\,. \tag{5.5}$$

Näited. 1. Avaldame $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ muutuja vahetusega $u = \frac{1}{x}$. Funktsiooni $u = \frac{1}{x}$ pöördfunktsioon on $x = \frac{1}{u}$. Arvutame diferentsiaali: $dx = -\frac{du}{u^2}$. Nüüd on olemas valemid suuruste x ja dx asendamiseks integraali all. Arvutame:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}}$$

Kui $u > 0$, siis $\sqrt{u^2} = u$ ja me saame

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Kui aga $u < 0$, siis $\sqrt{u^2} = -u$ ja

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Seega on vastus järgmine:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} -\arcsin\frac{1}{x} + C & \text{kui } x > 0 \\ \arcsin\frac{1}{x} + C & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

2. Avaldame $\int xe^{x^2}dx$, kusjuures sobiv muutuja vahetus ei ole ette antud, vaid tuleb ise leida. Ülesande lahendamise idee on järgmine. Püüame integraali teisendada nii, et selle alla tekiks liitfunktsiooni korrutis oma sisemise komponendi diferentsiaaliga. Siis võttes selle sisemise komponendi uueks muutujaks, on võimalik teostada asendus, mis integraali lihtsustab.

Püüamegi viia integraali $\int xe^{x^2}dx$ sellisele kujule. Paneme tähele, et integraali all on juba olemas liitfunktsioon e^{x^2}. Selle liitfunktsiooni sisemise funktsiooni x^2 diferentsiaal on $2xdx$. Seega kirjutame integraali järgmiselt:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot 2xdx.$$

Nüüd on ta viidud kujule, kus liitfuntksioon on korrutatud oma sisemise komponendi diferentsiaaliga. Seega teeme muutuja vahetuse $u = x^2$, $du = 2xdx$ ja saame

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ositi integreerimine. Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise (vt. diferentsiaali omadus 3 §3.5:

$$d(uv) = vdu + udv\,.$$

Integreerime seda avaldist. Saame

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv\,.$$

Kuna $\int d(uv) = uv + C$ integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis

$$uv + C = \int vdu + \int udv\,.$$

Konstandi C võib sellest valemist välja jätta, sest mõlemad määramata integraalid $\int udv$ ja $\int vdu$ sisaldavad juba määramata konstante. Viies $\int vdu$ võrduse teisele poolele saame

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \tag{5.6}$$

Saadud avaldis kannab ositi integreerimise valemi nime.

Ositi integreerimise valemit kasutades saab avaldada integraale

$$\int x^n \sin(ax)dx\,, \quad \int x^n \cos(ax)dx\,, \quad \int x^n e^{ax}dx\,, \quad \int (\ln x)^n dx\,,$$

kus n on positiivne täisarv ja a on reaalarvuline konstant. Samuti saab seda võtet kasutades leida integraale arkusfunktsioonidest.

Näited. 1. Avaldame $\int x\cos 2x\,dx$. Võtame

$$u = x \quad \text{ja} \quad dv = \cos 2x\,dx.$$

Siis on avaldatav integraal kujul $\int udv$. Ositi integreerimise valemi (5.6) kasutamiseks peame me avaldama ka suurused du ja v, mis asuvad selle valemi paremal poolel. Kuna $u = x$, siis

$$du = dx.$$

Funktsiooni v leidmiseks tuleb meil integreerida diferentsiaali $dv = \cos 2x\,dx$. See tähendab funktsiooni $\cos 2x$ algfunktsiooni leidmist. Funktsiooni $\cos 2x$ algfunktsioonide üldavaldis on $\frac{1}{2}\sin 2x + C$, kus C on suvaline konstant. Ositi integreerimise valemis läheb vaja ainult ühte algfuntsioonidest. Seega võtame neist lihtsaima:

$$v = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Nüüd on meil olemas vajalikud suurused u, v, du, dv ja me saame ositi integreerida:

$$\int x\cos 2x\,dx \;=\; x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx \;=\; \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx.$$

Kuna $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, on lõpptulemus järgmine:

$$\int x\cos 2x\,dx \;=\; \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

2. Avaldame $\int \ln x\,dx$. Seekord võtame

$$u = \ln x \quad \text{ja} \quad dv = dx.$$

Siis

$$du \;=\; \frac{dx}{x} \quad \text{ja} \quad v = x.$$

Integreerime ositi:

$$\int \ln x\,dx \;=\; x\ln x - \int x\frac{dx}{x} \;=\; x\ln x - \int dx \;=\; x\ln x - x + C.$$

2. Avaldame $\int \arctan x\,dx$. Olgu

$$u = \arctan x \quad \text{ja} \quad dv = dx.$$

Siis

$$du \;=\; \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad v = x.$$

Integreerime ositi:

$$\int \arctan x\,dx \;=\; x\arctan x - \int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Integraali $\int \frac{xdx}{1+x^2}$ avaldamisel kasutame asendusvõtet. Selleks kirjutame ta kujul

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

ja teeme muutuja vahetuse $t = 1 + x^2$. Siis $dt = 2xdx$. Saame

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \;=\; \frac{1}{2}\ln|u| + C \;=\; \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

Kokkuvõttes on vastus järgmine:

$$\int \arctan x\, dx \;=\; x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

5.4 Diferentsiaalvõrrandid.

Diferentsiaalvõrranditega seotud põhimõisted. *Diferentsiaalvõrrand* on võrrand, mis sisaldab tuletisi või diferentsiaale otsitavatest funktsioonidest.

Näiteks

$$x - u''' + u' + u^2 = 0 \tag{5.7}$$

või

$$x^2du = (u - x)dx, \tag{5.8}$$

kus $u(x)$ on otsitav funktsioon või

$$\frac{\partial}{\partial t}v - \frac{\partial^2}{\partial x^2}v = f, \tag{5.9}$$

kus $v(x, t)$ on otsitav funktsioon, on diferentsiaalvõrrandid.

Diferentsiaalvõrrandi *järguks* nim selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku.

Näiteks võrrand (5.7) on 3. järku, võrrand (5.8) 1. järku ja võrrand (5.9) 2. järku.

Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit *harilikuks diferentsiaalvõrrandiks* (HDV). *Näiteks* (5.7) ja (5.8) on HDV-d.

Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, millest tulenevalt esinevad võrrandis osatuletised, siis nimetatakse seda võrrandit *osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks* (ODV). *Näiteks* (5.9) on ODV.

Diferentsiaalvõrrandi lahendid. Diferentsiaalvõrrandi *lahend* on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit.

Märgime, et diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv. See tähendab, et lahendeid on palju. *Näiteks* 1. järku HDV

$$u' \;=\; \cos x$$

lahenditeks on kõik funktsioonid kujul $u = \sin x + C$, kus C on suvaline konstant. Seevastu 2. järku võrrandit

$$u'' = \cos x$$

tuleb kaks korda integreerida, seega sõltub selle lahend kahest konstandist. Tõepoolest: esmakordsel integreerimisel saame $u' = \sin x + C_1$ ja teistkordsel integreerimisel avaldame lahendi $u = -\cos x + C_1 x + C_2$, kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Üldiselt n. järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.

n. järku HDV *üldlahendiks* nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. *Erilahendiks* nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.

Näiteks $u = \sin x + C$ on võrrandi $u' = \cos x$ üldlahend. Funktsioonid $u = \sin x$, $u = \sin x + 1$, $u = \sin x - 2$ jne on selle võrrandi erilahendid.

1. järku HDV üld- ja normaalkuju. Paragrahvi ülejäänud osas tegeleme 1. järku HDV-dega.

1. järku HDV *üldkuju* on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0\,,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon. Kui võrrandis on tuletis teiste liikmete kaudu ilmutatud, siis öeldakse, et see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV *normaalkuju* järgmine:

$$u' = f(x, u)\,,$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.

Näiteks diferentsiaalvõrrand $\sqrt{u} - \ln u' + x = 0$ on antud üldkujul. Avaldades sellest võrrandist tuletise u' teisendame ta normaalkujule $u' = e^{\sqrt{x}+u}$.

Cauchy ülesanne. Vaatleme normaalkujulist 1. järku HDV-d $u' = f(x, u)$. Selle võrrandi üldlahend sõltub suvalisest konstandist C. Konstandi määramiseks peame lisama sellele võrrandile ühe lisatingimuse. Selleks on mitmeid võimalusi. Vaatleme lähemalt ühte võimalust.

Olgu teada argumendi väärtusele x_0 vastav lahendi väärtus u_0. See tähendab, et on antud tingimus $u(x_0) = u_0$. Koos võrrandiga $u' = f(x, u)$ saame järgmise ülesande:

$$u' = f(x, u)\,, \quad u(x_0) = u_0. \tag{5.10}$$

Seda ülesannet nimetatakse *Cauchy ülesandeks* 1. järku HDV-le. Cauchy ülesandel on parajasti üks lahend.

Näide. Lahendame Cauchy ülesande

$$u' = \cos x, \quad u(0) = -3.$$

Üldlahend on $u = \sin x + C$. Lisatingimus $u(0) = -3$ ütleb, et $x = 0$ korral $u = -3$. Seega saame järgmise võrrandi konstandi C määramiseks: $-3 = \sin 0 + C$. Lahendiks on $C = -3$. Ülesande lahend on seega $u = \sin x - 3$.

Tihtipeale on on diferentsiaalvõrrandis otsitava funktsiooni argumendiks aeg ja lisatingimus on antud nullhetkel. Siis nimetatakse Cauchy ülesannet ka *algtingimusega ülesandeks*.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid. 1. järku HDV-d nimetatakse *eralduvate muutujatega võrrandiks*, kui ta on teisendatav järgmisele kujule:

$$g(u)du \;=\; h(x)dx, \tag{5.11}$$

kus g ja h on mingid funktsioonid. Võrrandis (5.11) on muutujad *eraldatud*, st ühel pool on ainult muutuja u ja teisel pool ainult muutuja x. Võrrandit (5.11) saab lahendada otsese integreerimise teel, st

$$\int g(u)du \;=\; \int h(x)dx.$$

Näiteid.

1. Lahendada võrrand $x^2u' = \frac{x}{\sin u}$.

Asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega:

$$x^2\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sin u}.$$

Korrutamiste ja jagamistega teisendame võrrandi sellisele kujule, kus vasakul pool on ainult u ja paremal pool on ainult x. Kõigepealt korrutame suurusega dx. Saame

$$x^2du = \frac{xdx}{\sin u}.$$

Jagame suurusega x^2. Saame

$$du = \frac{dx}{x\sin u}.$$

Lõpuks korrutame suurusega $\sin u$. Jõuamegi eraldatud muutujatega võrrandini:

$$\sin u\, du = \frac{dx}{x}.$$

Integreerime:

$$\int \sin u\, du = \int \frac{dx}{x}.$$

Avaldame integraalid. Saame

$$-\cos u = \ln|x| + C.$$

See ongi vaadeldava diferentsiaalvõrrandi üldlahend, kuigi ilmutamata kujul. Ilmutamiseks tuleb avaldada u. Ilmutatud lahend on $u = \arccos(-\ln|x| + C)$.

2. Lahendada Cauchy ülesanne $\frac{v'}{t^2} - v^2 = 0$, $v(1) = 1$.

Eraldame muutujad:

$$\frac{v'}{t^2} - v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{t^2} = v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{t^2 dt} = v^2 \quad \Rightarrow \quad dv = v^2 t^2 dt \quad \Rightarrow$$
$$\frac{dv}{v^2} = t^2 dt.$$

Integreerime:

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int t^2 dt.$$

Saame üldlahendi: $-\frac{1}{v} = \frac{t^3}{3} + C$. Lisatingimus ütleb, et $t = 1$ korral $v = 1$. Seega $-1 = \frac{1}{3} + C$. Järelikult $C = -\frac{4}{3}$. Cauchy ülesande lahend on $-\frac{1}{v} = \frac{t^3-4}{3}$.

3. Lahendada võrrand $u' = au$, kus a on konstant ja u argument on t.

Eraldame muutujad:

$$u' = au \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = au \quad \Rightarrow \quad du = audt \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = adt.$$

Integreerime:

$$\int \frac{du}{u} = a \int dt.$$

Saame üldlahendi ilmutamata kujul:

$$\ln |u| = at + C.$$

Ilmutame lahendi. Rakendades eksponentfunktsiooni tuletame:

$$|u| = e^{at+C}.$$

Kasutades valemit $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$ saame

$$|u| = e^C e^{at}.$$

Kuna $|u|$ võib sõltuvalt u märgist võrduda kas $+u$ või $-u$ -ga, siis

$$u = \pm e^C e^{at}.$$

Kuna C on suvaline reaalarv, siis ka $\pm e^C$ on suvaline reaalarv. Tähistades $\pm e^C$ ümber C-ga saame vaadeldava võrrandi üldlahendi ilmutatud kujul:

$$u = Ce^{at}.$$

5.5 Näiteid diferentsiaalvõrrandite kohta.

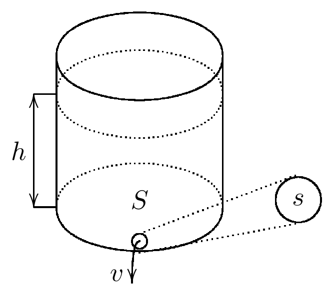
Reaktsiooni kineetilised võrrandid. Olgu keemilises reaktsioonis osaleva reaktandi kontsentratsioon c. Kontsentratsiooni tuletis $r(t) = c'(t)$ näitab reaktsiooni kiirust ajahetkel t. Kuna reaktandi kontsentratsioon kahaneb, on tuletis negatiivne, so $r < 0$. Kui reaktandi kontsentratioon on suur, siis on reaktsioon kiire, kui kontsentratsioon on muutunud väikeseks, siis reaktsioon aeglustub. Lineaarses lähenduses on reaktandi kahanemiskiirus $-r$ proportsionaalne kontsentratsiooniga c, st $-r = kc$, kus k on konstant. Seega $r = -kc$ ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$c' = -kc.$$

Selle diferentsiaalvõrrandi saame lahendada nii nagu eelmise paragrahvi näites 3 toodud võrrandi. Üldlahendiks on $c = Ce^{-kt}$, kus C on suvaline konstant. Olgu alghetkele $t = 0$ vastav kontsentratsioon c_0. Siis saame konstandi C jaoks võrrandi $c_0 = Ce^0$, millest leiame $C = c_0$. Seega on antud algtingimusele vastav erilahend

$$c = c_0 e^{-kt}.$$

Anuma tühjenemine. Olgu vaatluse all silindrikujuline ülevalt avatud anum, mis on täidetud vedelikuga. Anuma allosas on auk, millest vedelik hakkab välja voolama (vt joonist).



Vedelikutaseme kõrgus olgu h ja silindri ristlõike pindala S. Augu pindala olgu s ja august väljavoolavate vedelikumolekulide kiirus v. Vool aeglustub vedeliku taseme langemisel. Nii h kui ka v sõltuvad ajast t.

Vedeliku voolamise pidevuse lause (vedeliku voolamise kiiruse ja toru ristlõike pindala korrutis on konkreetse toru korral konstantne suurus) põhjal kehtib seos $VS = vs$, kus V on vedelikutaseme languse kiirus anumas. Kuna $V = -h'$, saame võrduse $-Sh' = sv$, millest avaldame

$$h' = -\frac{sv}{S}. \tag{5.12}$$

Teisest küljest, Torricelli seaduse põhjal $v = \sqrt{2gh}$. Seega saame avaldisest (5.12) diferentsiaalvõrrandi

$$h' = -k\sqrt{h}, \quad \text{kus} \quad k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}.$$

Lahendame selle võrrandi. Eraldame muutujad:

$$h' = -k\sqrt{h} \;\Rightarrow\; \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h} \;\Rightarrow\; dh = -k\sqrt{h}dt \;\Rightarrow\; \frac{dh}{\sqrt{h}} = -kdt.$$

Integreerime:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -k \int dt.$$

Saame üldlahendi $2\sqrt{h} = -kt + C$. Olgu ajahetkel $t = 0$ vedelikutaseme kõrgus h_0. Asetades need arvud lahendi avaldisse, leiame konstandi C väärtuse: $C = 2\sqrt{h_0}$. Algtingimusele vastav erilahend on $2\sqrt{h} = -kt + 2\sqrt{h_0}$. Ilmutame lahendi:

$$h = \left[\sqrt{h_0} - \frac{kt}{2}\right]^2.$$

Anum saab tühjaks, kui $\sqrt{h_0} - \frac{kt}{2} = 0$, st ajahetkel $t = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$.

Newtoni jahtumisseadus. Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T. Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_e. Kui $T > T_e$, siis hakkab keha jahtuma, st temperatuur T kahaneb ajas. Seega on funktsiooni $T(t)$ tuletis negatiivne: $T'(t) < 0$. Mida suurem on sise ja välistemperatuuri vahe, seda kiiremimini keha jahtub ehk seda väiksem on T tuletis. Lineaarses lähenduses on $-T'$ on võrdeline sise- ja välistemperatuuride vahega $T - T_e$. Seega kehtib järgmine HDV:

$$-T' = \kappa(T - T_e), \tag{5.13}$$

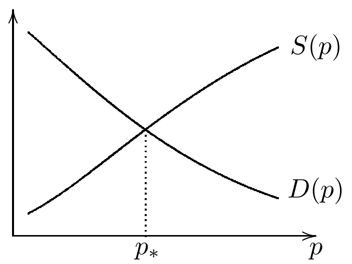
kus κ on positiivne konstant (soojusvahetustegur). Lahendame võrrandi (5.13). Eraldame muutujad:

$$-T' = \kappa(T - T_e) \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_e) \;\Rightarrow\; dT = -\kappa(T - T_e)dt \;\Rightarrow$$
$$\frac{dT}{T - T_e} = -\kappa dt.$$

Integreerime: $\int \frac{dT}{T-T_e} = -\kappa \int dt$. Saame $\ln|T - T_e| = -\kappa t + C$. Ilmutame lahendi nii nagu eelmise paragrahvi näites 3. Saame $T = T_e + Ce^{-\kappa t}$. Olgu keha algtemperatuur T_0. See annab seose $T_0 = T_e + C$, millest leiame konstandi väärtuse $C = T_0 - T_e$. Algtingimusele vastav lahend on

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\kappa t}.$$

Evansi hinnamudel. Olgu kauba hind p, pakkumine S ja nõudlus D. Hinna kasvades pakkumine suureneb kuid nõudlus väheneb.



Tasakaalupunktis p_* kehtib võrdus $S(p_*) = D(p_*)$. Oletame, et hind on väiksem kui p_*. Siis on tegemist kauba defitsiidiga, st $D(p) > S(p)$. Hind hakkab kasvama. Hind kasvab seda kiiremini, mida suurem on D ja S vahe. Lineaarses lähenduses on hinna kasvu kiirus võrdeline suurusega $D - S$. See annab järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$p' = K(D(p) - S(p)),$$

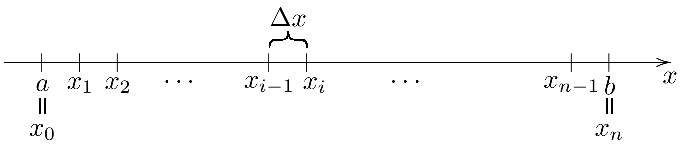
kus K on konstant.

5.6 Integraalsumma ja määratud integraal.

Integraalsumma mõiste. Olgu antud funktsioon f, mis on *pidev* lõigul $[a, b]$. Jaotame lõigu $[a, b]$ n osalõiguks punktidega

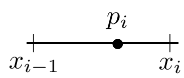
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

mis paiknevad konstantsete vahedega. Tähistame $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ (Joonis 5.2)



Joonis 5.2

Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti p_i:

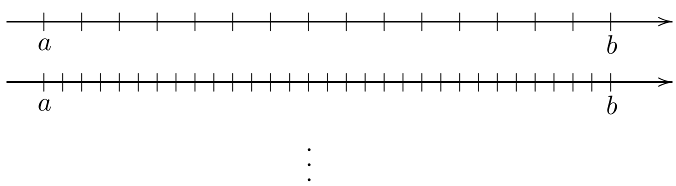


Moodustame summa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x\,. \tag{5.14}$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni f *integraalsummaks* lõigul $[a, b]$.

Määratud integraali mõiste. Muudame lõigu $[a, b]$ tükeldust järjest peenemaks nii, et $\Delta x \to 0$:



Kui funktsioon f on pidev lõigul $[a, b]$, siis on integraalsummal S_n piirprotsessis $\Delta x \to 0$ lõplik piirväärtus, mis ei sõltu punktide p_i valikust osalõikudel. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *määratud integraaliks* lõigul $[a, b]$ ja tähistatakse

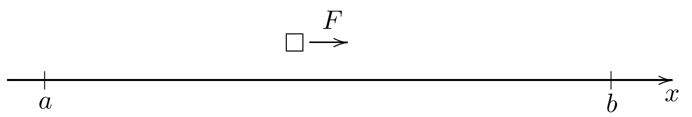
$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} S_n\,. \tag{5.15}$$

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ komponendid kannavad järgmisi nimetusi: a - integraali alumine raja, b - integraali ülemine raja, $[a, b]$ - integreerimislõik, x - integreerimismuutuja, f - integreeritav funktsioon, $f(x)dx$ - integraalialune avaldis.

Näide füüsikast. Liikugu materiaalne objekt x-teljel punktist a punkti b. Mõjugu temale jõud F, mis üldiselt sõltub koordinaadist x, st $F = F(x)$.



Eesmärgiks on leida valem töö A arvutamiseks, mille jõud F teeb vaadeldava objekti liikumisel punktist a punkti b.

Kui F on konstantne, siis avaldub töö valemiga

$$A = F(b - a).$$

Kui F ei ole konstantne, siis tuleb töö arvutamisel kasutada integreerimist.

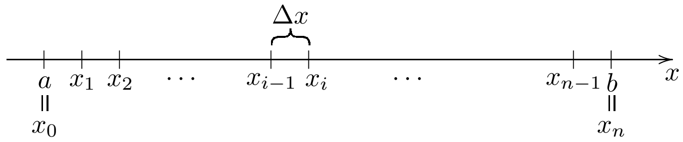
Idee on järgmine: jaotame vaadeldava lõigu $[a, b]$ väikesteks osalõikudeks nii, et igal osalõigul on jõud ligikaudselt konstantne. Igal osalõigul arvutame töö eraldi, kasutades selleks ülaltoodud valemit. Seejärel liidame osalõikudel tehtud tööd kokku saades töö tervel lõigul $[a, b]$. Niiviisi saame ligikaudse töö valemi. Täpse töö valemi saame, kui muudame lõigu tükelduse ”lõpmata peeneks”, st võtame ligikaudsest töö valemist piirväärtuse osalõigu pikkuse lähenemisel nullile.

Asume töö valemi tuletamise juurde. Seejuures eeldame, et funktsioon F on pidev. Pidevus on vajalik selleks, et $F(x)$ muutuks väikestel osalõikudel vähe. Teatavasti läheneb pideva funktsiooni muut nullile tema argumendi muudu lähenemisel nullile (vt §2.8).

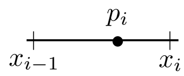
Jaotame lõigu $[a, b]$ n osalõiguks ühtlaste vahedega paiknevate punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

ja tähistame $\Delta = x_i - x_{i-1}$:

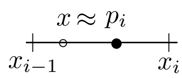


Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti p_i:



Kui osalõigu pikkus on väike, siis muutub pidev funktsioon F osalõigul vähe, st

$$F(x) \approx F(p_i) \quad \text{iga} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{korral}:$$



$$\Rightarrow F(x) \approx F(p_i)$$

Seega on osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ tehtud töö ΔA_i ligikaudselt võrdne $F(p_i)$ ja osalõigu pikkuse Δx korrutisega, st

$$\Delta A_i \approx F(p_i)\Delta x.$$

Summeerides tööd üle osalõikude saame töö ligikaudse avaldise kogu lõigul $[a, b]$:

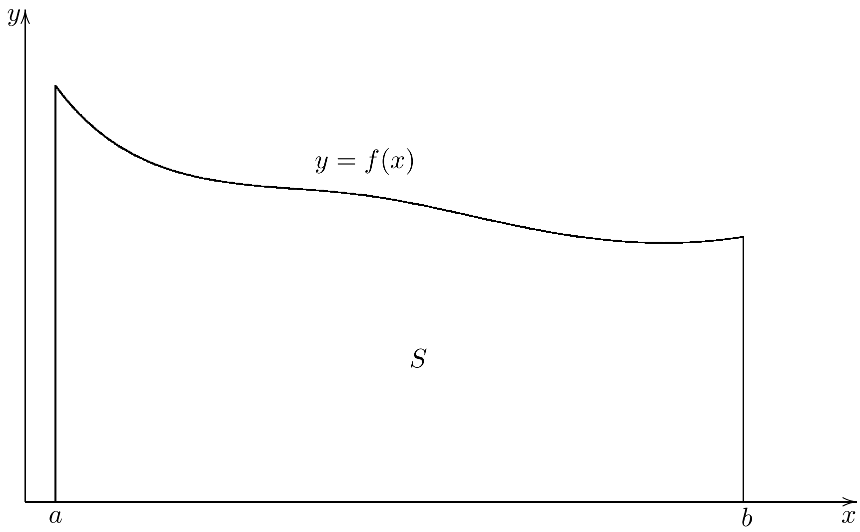
$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(p_i)\Delta x. \tag{5.16}$$

Mida väiksem on osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ pikkus Δx, seda vähem muutub jõud sellel osalõigul ja seda täpsem on ligikaudne valem $A_i \approx F(p_i)\Delta x$. Seega, mida peenem on tükeldus, seda täpsem on ka ligikaudne valem (5.16). Teisest küljest, valemi (5.16) paremal poolel seisab funktsiooni F integraalsumma lõigul $[a, b]$. Integraalsumma läheneb määratud integraalile protsessis $\Delta x \to 0$. Seega saame ligikaudsest valemist (5.16) piirprotsessis $\Delta x \to 0$ järgmise täpse valemi töö jaoks:

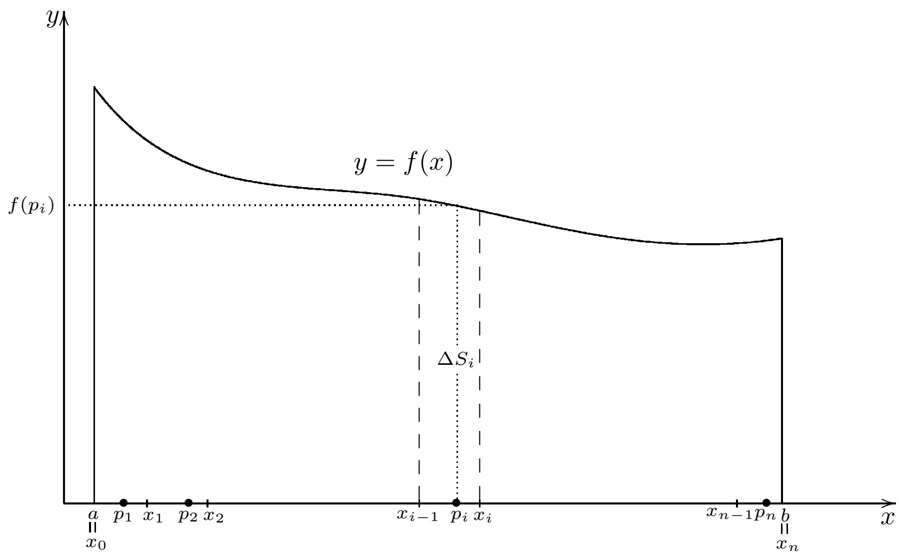
$$A = \int_a^b F(x)dx\,.$$

5.7 Määratud integraali geomeetriline sisu.

Olgu funktsioon f pidev lõigul $[a, b]$. Eeldame, et $f(x) \geq 0$. Vaatleme joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsit (joonis 5.3). Tähistame selle kujundi pindala sümboliga S. Meie eesmärk on tuletada valem S jaoks.



Joonis 5.3



Joonis 5.4

Tükeldame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

mis paiknevad ühtlaste vahedega $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Fikseerime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti p_i. Vaatleme osalõigule $[x_{i-1}, x_i]$ toetuvat kõvertrapetsi osa ΔS_i (joonisel 5.4 on selle küljed kujutatud katkendliku joonega).

Kui Δx on väike, siis muutub pidev funktsioon f osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ vähe. Seega võib ta sellel osalõigul lugeda ligikaudselt võrdseks konstandiga $f(p_i)$ ehk

$$f(x) \approx f(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]\,. \tag{5.17}$$

Järelikult on ΔS_i ligikaudselt ristkülik ja tema pindala avaldub ligikaudu kõrguse ja aluse korrutisena:

$$\Delta S_i \approx f(p_i)\Delta x\,.$$

Terve kõvertrapetsi ligikaudse pindala valemi saame, kui summeerime osapiirkondade pindalad:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x\,. \tag{5.18}$$

Mida väiksem on Δx, seda vähem muutub funktsioon f osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ peal, järelikult seda täpsem on valem (5.17). Seega, mida peenem on $[a, b]$ tükeldus, seda täpsem on ka pindala valem (5.18). Teisest küljest, valemi (5.18) paremal poolel on funktsiooni f integraalsumma lõigul $[a, b]$. Järelikult, kui Δx läheneb nullile, siis läheneb nimetatud integraalsumma määratud integraalile $\int_a^b f(x)dx$. Kokkuvõttes, piirprotsessis $\Delta x \to 0$ saame ligikaudsest valemist (5.18) järgmise täpse valemi pindala jaoks:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.19}$$

Näide. Arvutame $\int_a^b dx = \int_a^b 1\,dx$. Kuna lõigule $[a, b]$ toetuva ja kõrgust 1 omava ristküliku pindala on $b - a$, siis

$$\int_a^b dx = b - a.$$

5.8 Määratud integraali omadused. Integraali keskväärtusteoreem.

Määratud integraali omadusi.

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

   NB! Omadus 1 ei kehti korrutamise ja jagamise korral! See tähendab, et

$$\int_a^b [f(x)g(x)]dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx \quad \text{ja}$$
$$\int_a^b [f(x) : g(x)]dx \neq \int_a^b f(x)dx : \int g(x)dx.$$

2. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, C - konstant.

Lisame veel mõned olulised omadused. Nende omaduste põhjendamisel on hea kasutada määratud integraali füüsikalist sisu: jõu $F(x)$ pool tehtud töö materiaalse objekti liikumisel punktist a punkti b avaldub valemiga $A = \int_a^b F(x)dx$.

Me defineerisime määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ lõigul $[a, b]$. Et selline definitsioon omaks mõtet, peab kehtima võrratus $a < b$. Teatud põhjustel on aga vaja määratud integraali definitsiooni laiendada ka juhule kui $a \geq b$. Näiteks asendusvõtte rakendamise tulemusena (vt. §5.10) tekib sageli integraal, mille alumine raja on suurem kui ülemine. Alljärgnevatest omadustest esimesed kaks ongi definitsioonid, mis laiendavad määratud integraali juhule $a \geq b$.

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

   Põhjendus: kui $a = b$, siis on läbitud teepikkus võrdne nulliga, seega on ka töö võrdne nulliga, st $\int_a^a F(x) = 0$.

4. Kui $a > b$, siis $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

   Põhjendus. Jõu $F(x)$ poolt tehtud töö liikumisel punktist a punkti b on $\int_a^b F(x)dx$ ning töö liikumisel punktist b punkti a on $\int_b^a F(x)dx$. Seega, kui materiaalne objekt liigub punktist a punkti b ja sealt tagasi punkti a, on kogu tehtud töö võrdne summaga $\int_a^b F(x)dx + \int_b^a F(x)dx$. Kuid kuna sel juhul on kogu läbitud teepikkus võrdne nulliga, kehtib võrdus

$$\int_a^b F(x)dx + \int_b^a F(x)dx = 0.$$

   Viies selles võrduses teise liidetava paremale poole tekibki valem

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_b^a F(x)dx.$$

Järgnev omadus ütleb, et integreerimislõikude liitmisel integraalide väärtused liituvad:

5. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

   Põhjendus. Jõu $F(x)$ poolt tehtud tööd liikumisel punktist a punkti b ning punktist b punkti c on vastavalt $\int_a^b F(x)dx$ ning $\int_b^c F(x)dx$. Seega, kui objekt liigub punktist a üle punkti b punkti c, on jõu poolt tehtud kogutöö võrdne summaga

$$\int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx.$$

   Kuid teisest küljest on jõuvälja poolt tehtud töö liikumisel punktist a punkti c võrdne ka integraaliga $\int_a^c F(x)dx$. Seega saamegi valemi

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx.$$

Võrratus, mida rahuldavad kaks funktsiooni, laieneb ka nende funktsioonide integraalidele:

6. Kui $a \le b$ ja $f_1(x) \le f_2(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral, siis $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$.

   Põhjendus. Jõufunktsioonide $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ poolt tehtud tööd liikumisel punktist a punkti b on vastavalt $\int_a^b F_1(x)dx$ ja $\int_a^b F_2(x)dx$. Kui $F_1(x) \le F_2(x)$ ja läbitud teepikkus on positiivne, st $b > a$, siis on jõu F_2 poolt tehtud töö suurem või võrdne jõu F_1 poolt tehtud tööst, st

$$\int_a^b F_1(x)dx \le \int_a^b F_2(x)dx.$$

Teoreem 5.2 (Integraali keskväärtusteoreem). Kui $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt c nii, et

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b dx = f(c)\,(b-a)\,. \tag{5.20}$$

Tõestus. Olgu M ja m vastavalt funktsiooni $f(x)$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[a,b]$. Siis kehtivad iga $x \in [a,b]$ korral võrratused $m \le f(x) \le M$. Määratud integraali omaduse 6 põhjal

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Kuna m ja M on konstandid, siis omaduse 2 põhjal $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx$ ja $\int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx$. Seega

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx.$$

Jagades suurusega $\int_a^b dx$ saame

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx} \le M.$$

Näeme, et arv $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}$ paikneb funktsiooni $f(x)$ suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon $f(x)$ saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel (Teoreem 2.4), siis leidub vähemalt üks punkt $c \in [a,b]$ nii, et

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}.$$

Korrutades seda võrdust arvuga $\int_a^b dx$ ja arvestades, et $\int_a^b dx = b-a$, saame valemi (5.20). Teoreem on tõestatud.

5.9 Muutuva ülemise rajaga integraal. Newton-Leibnitzi valem.

Muutuva ülemise rajaga integraal. Oleme vaadelnud kahte liiki integraale:

1. määramata integraal $\int f(x)dx$, mis on defineeritud kui funktsiooni f algfunktsioonide üldavaldis;
2. määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$, mis on defineeritud kui funktsiooni f integraalsumma piirväärtus.

Järgnevalt vaatame ühte olulist seost nende kahe integraalitüübi vahel.

Olgu antud funktsioon $f(t)$, mis on pidev lõigul $[a, b]$. Siis on sellel funktsioonil olemas määratud integraal $\int_a^b f(t)dt$. Asendame selle integraali ülemise raja muutujaga x. Siis saame järgmise lõigul $[a, b]$ defineeritud funktsiooni:

$$\Phi(x) \,=\, \int_a^x f(t)dt\,, \quad x \in [a, b].$$

Osutub, et sellisel viisil oleme me teisendanud määratud integraali $\int_a^b f(t)dt$ määramata integraaliks. Täpsemalt: $\Phi(x)$ on funktsiooni f algfunktsioon, st üks konkreetne funktsioon määramata integraaliga $\int f(x)dx$ antud funktsioonide parvest. Sõnastame ja tõestame selle väite teoreemina.

Teoreem 5.3. Kui f on pidev lõigul $[a, b]$, siis funktsioon Φ, mis avaldub valemiga $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, on funktsiooni f algfunktsioon lõigul $[a, b]$.

Tõestus. Teoreemi väite tõestamiseks peame näitama, et

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \text{iga} \quad x \in [a, b] \quad \text{korral.}$$

Olgu x suvaline punkt lõigult $[a, b]$. Nagu tavaliselt, tähistame sümboliga Δx argumendi x muutu. Kasutades määratud integraali omadust 3 §5.8 arvutame:

$$\begin{aligned}\Phi(x + \Delta x) \,&=\, \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \,=\, \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &=\, \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.\end{aligned}$$

Seega saame funktsiooni Φ muudu jaoks seose

$$\Delta\Phi \,=\, \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \,=\, \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,. \tag{5.21}$$

Integraali keskväärtusteoreemi põhjal leidub punktide x ja $x + \Delta x$ vahel punkt c nii, et kehtib võrdus

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \,=\, f(c)(x + \Delta x - x) \,=\, f(c)\Delta x\,. \tag{5.22}$$

Võttes (5.21) ja (5.22) kokku saame seose $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, millest järeldub et

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)\,.$$

Selle võrduse vasakul pool olev jagatis koondub funktsiooni Φ tuletiseks punktis x piirprotsessis $\Delta x \to 0$. Peale selle, kuna c paikneb x ja $x + \Delta x$ vahel, siis $c \to x$, kui $\Delta x \to 0$. Kokkuvõttes saame võrduse

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)\,.$$

Olemegi tõestanud, et $\Phi'(x) = f(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral ja sellega ka teoreemi väite.

Newton-Leibnitzi valem. Eelmises alamparagrahvis vaatlesime ühte võimalust teisendada määratud integraal määramata integraaliks. Nüüd vaatleme teistpidist teisendust, st määratud integraali saamist määramata integraalist.

Konkreetselt olgu F funktsiooni f algfunktsioon, st F on üks konkreetne funktsioon määramata integraaliga $\int f(x)dx$ antud funktsioonide perest. Esitame küsimuse: kuidas oleks võimalik sellisel juhul arvutada määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$? Vastuse koos arvutusvalemiga annab järgmine teoreem.

Teoreem 5.4 (Newton-Leibnitzi valem). Kui F on pideva funktsiooni f algfunktsioon lõigul $[a,b]$, siis kehtib valem

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b\,. \tag{5.23}$$

Tõestus. Teoreemi eelduse kohaselt on F funktsiooni f algfunktsioon lõigul $[a,b]$. Peale selle, Teoreem 5.3 põhjal on ka funktsioon $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ funktsiooni f algfunktsioon lõigul $[a,b]$. Seega

$$\Phi'(x) = F'(x) = f(x).$$

Näeme, et $[\Phi(x) - F(x)]' = 0$. Nulltuletis on ainult konstantsel funktsioonil. Järelikult $\Phi(x) - F(x) = C$ ehk $\Phi(x) = F(x) + C$ ja saame võrduse

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C\,. \tag{5.24}$$

Järgnevalt leiame konstandi C väärtuse. Selleks paneme avaldises (5.24) muutuja x võrduma a-ga. Saame võrduse

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C\,,$$

mille vasak pool võrdub nulliga määratud integraali omaduse 1 põhjal (vt §5.8). Seega, $0 = F(a) + C$, millest tuletame konstandi C jaoks valemi $C = -F(a)$. Nüüd saame kirjutada võrduse (5.24) kujul

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)\,.$$

Pannes selles avaldises muutuja x võrduma arvuga b, jõuamegi Newton-Leibnitzi valemini (5.23). Teoreem on tõestatud.

Näiteid. 1. Arvutame $\int_{-1}^{1} e^x dx$. Kuna $\int e^x dx = e^x + C$, siis Newton-Leibnitzi valemit kasutades saame

$$\int_{-1}^{1} e^x dx \;=\; e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} \;=\; e - \frac{1}{e}.$$

2. Arvutame $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$. Kuna $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$, siis

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx \;=\; \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0] \;=\; \frac{1}{3}[1-0] \;=\; \frac{1}{3}.$$

Päratud integraalid. Määratud integraali üldistused juhule, kui integraali ülemine või alumine raja on kas pluss või miinus lõpmatus kannavad nimetust *lõpmatute rajadega päratud integraalid.* Taolised integraalid defineeritakse piirväärtuste abil:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \;=\; \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx\,.$$

Näiteid. 1. Arvutame integraali $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$. Vastavalt definitsoonile ja Newton-Leibnitzi valemile saame

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] \;=\; 1.$$

2. Arvutame integraali

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\Big|_1^b\right] \;=\; \lim_{b\to\infty}[\ln b - 0] \;=\; \infty.$$

5.10 Asendusvõte ja ositi integreerimine määratud integraali korral.

Asendusvõte. Vaatleme määratud integraali

$$\int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.25}$$

Teeme integraali all asenduse valides uueks muutujaks u, mis sõltub x-st järgmisel viisil: $u = \varphi(x)$. Eeldame, et φ on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame φ pöördfunktsiooni ψ-ga. Siis

$$x \;=\; \psi(u)\,. \tag{5.26}$$

Paneme kirja funktsiooni ψ tuletise diferentsiaalide jagatisena: $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$. Korrutades seda võrdust du-ga saame

$$dx = \psi'(u)du\,. \tag{5.27}$$

Kasutades valemeid (5.26) ja (5.27) saame integraali (5.25) all suurused x ja dx asendada vastavate u-st sõltuvate suurustega. Erinevalt määramata integraalist, tuleb määratud integraali korral lisaks suurustele x ja dx asendada ka integreerimislõik koos rajadega. Uus integreerimislõik koosneb funktsiooni $u = \varphi(x)$ väärtustest, mis on saadud argumendi x varieerimisel üle kogu esialgse integreerimislõigu $[a, b]$. Ühtlasi on uue integraali alumine raja võrdne u väärtusega, mis vastab muutuja x väärtusele a ja ülemine raja on võrdne u väärtusega, mis vastab muutuja x väärtusele b. Seega on uue integraali alumine raja $\varphi(a)$ ja ülemine raja $\varphi(b)$. Kokkuvõttes saame järgmise valemi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(u)]\psi'(u)du\,. \tag{5.28}$$

Näide. Arvutame $\int_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{arccot}x)^2dx}{1+x^2}$. Teeme asenduse $u = \mathrm{arccot}x$. Siis

$$du = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Taolise asenduse puhul lihtsustub integraalialune avaldis kujule $-u^2du$. Arvutame rajad uues integraalis: $\mathrm{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{arccot}\,1 = \frac{\pi}{4}$. Seega

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{arccot}x)^2dx}{1+x^2} = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u^2du = -\frac{u^3}{3}\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \left(\frac{3\pi}{4}\right)^3\right] = \frac{13\pi^3}{92}.$$

Ositi integreerimine. Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise:

$$d(uv) = vdu + udv\,.$$

Integreerime seda avaldist rajades a-st b-ni. Saame

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv\,. \tag{5.29}$$

Arvutame eraldi selle avaldise vasaku poole. Kuna $\int d(uv) = uv+C$ integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis Newton-Leibnitzi valemi tõttu

$$\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b\,.$$

Tehes asenduse avaldise (5.29) vasakus pooles saame

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv\,.$$

Viies $\int_a^b v du$ võrduse teisele poolele, tuletame ositi integreerimise valemi määratud integraali jaoks:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\,. \tag{5.30}$$

Näide. Arvutame $\int_0^\pi x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$. Võtame $u = x^2$ ja $dv = \cos\frac{x}{2}\,dx$. Siis $du = 2xdx$ ja $v = 2\sin\frac{x}{2}$. Integreerime ositi:

$$\int_0^\pi x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx = 2x^2 \sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 4\int_0^\pi x\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

Integraali $\int_0^\pi x\sin\frac{x}{2}\,dx$ tuleb uuesti ositi integreerida. Selleks võtame $u = x$ ja $dv = \sin\frac{x}{2}\,dx$. Siis $du = dx$ ja $v = -2\cos\frac{x}{2}$. Saame

$$\int_0^\pi x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx = 2x^2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 4\left[-2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx\right] =$$

$$= 2x^2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 4\left[-2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^\pi + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi\right] = \left[(2x^2-16)\sin\frac{x}{2} + 8x\cos\frac{x}{2}\right]\Big|_0^\pi =$$

$$= \left[(2\pi^2-16)\sin\frac{\pi}{2} + 8\pi\cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[(2\cdot 0x^2 - 16)\sin 0 + 8\cdot 0\cdot\cos 0\right] = 2\pi^2 - 16.$$

5.11 Näiteid määratud integraali kohta rakendustes.

§5.6 tõime me näite määratud integraali rakendamise kohta töö arvutamisel. Selles paragrahvis käsitleme veel mõningaid määratud integraali rakendusi.

Kuna integreerimine on tuletise arvutamise pöördoperatsioon, saab tuletisi sisaldavaid valemeid esitada ka integraalsel kujul. Vaatleme kolme sellist näidet.

Teepikkuse leidmine kiiruse integreerimise abil. §3.3 nägime, et sirgjooneliselt liikuva materiaalse objekti kiirus v ja koordinaat x on seotud valemiga

$$v(t) = x'(t),$$

kus t on aeg. Leiame ajavahemikus (t_1, t_2) läbitud teepikkuse S. Selleks integreerime kiiruse valemit lõigul $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt.$$

Kuna funktsiooni x' algfunktsioon on x, siis Newton-Leibnitzi valemi põhjal

$$\int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt = x(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = x(t_2) - x(t_1) = S.$$

Teepikkuse valem on $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Massi arvutamine massivoo integreerimise abil. §3.3 me tuletasime järgmise valemi:

$$j(t) \;=\; m'(t),$$

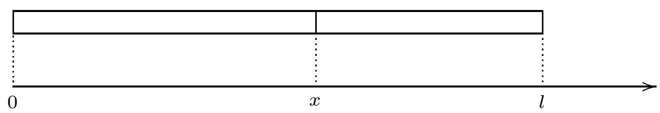
kus $j(t)$ on aine massivoog torus ja $m(t)$ on toru ristlõike ühikpindala nullhetkest $t = 0$ kuni positiivse ajahetkeni $t > 0$ läbinud aine mass. Püstitame järgmise ülesande: antud on massivoog $j(t)$ ja leida tuleb ajavahemikus $[0, T]$ ristlõike ühikpindala läbinud aine mass $m(T)$. Ülesande lahendamiseks integreerime massivoo valemit rajades 0 kuni T:

$$\int_0^T j(t)dt \;=\; \int_0^T m'(t)dt.$$

Vastavalt Newton Leibnitzi valemile $\int_0^T m'(t)dt \;=\; m(T) - m(0)$. Kuna $m(0) = 0$, siis $\int_0^T m'(t)dt \;=\; m(T)$. Seega saame järgmise valemi $m(T)$ jaoks:

$$m(T) \;=\; \int_0^T j(t)dt.$$

Massi arvutamine joontiheduse integreerimise abil. Vaatleme x-telje kohal paiknevat suhteliselt ühemõõtmelist objekti, mis paikneb x-telje sihis punktide 0 ja l vahel ja on täidetud mittehomogeenselt paikneva ainega, nt gaasiga täidetud toru, tahkest ainest koosnev varras jms.



§3.3 nägime, et kehtib valem

$$\gamma(x) = m'(x),$$

kus $\gamma(x)$ on aine joontihedus punktis x ja $m(x)$ on punktide 0 ja x vahel paikneva aineosa mass. Püstitame järgmise ülesande: antud on aine joontihedus $\gamma(x)$ lõigul $[0, l]$. Määrata tuleb aine kogumass $m(l)$. Massi leidmiseks integreerime joontiheduse valemit:

$$\int_0^l \gamma(x)dx \;=\; \int_0^l m'(x)dx = m(l) - m(0).$$

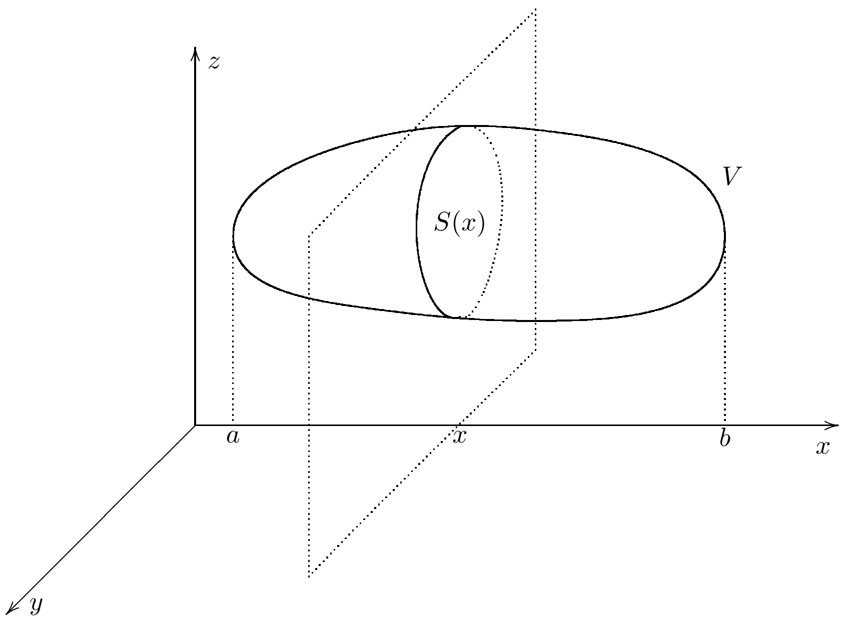
Kuna $m(0) = 0$, saame järgmise valemi kogumassi $m(l)$ jaoks:

$$m(l) \;=\; \int_0^l \gamma(x)dx.$$

Lõpuks vaatleme veel näiteid, milles rakendatakse määratud integraali definitsiooni.

Ruumala arvutamine ristlõigete pindalade järgi. Olgu antud ruumiline keha V, mis paikneb tasandite $x = a$ ja $x = b$ vahel. Tähistame selle keha ruumala samuti V-ga. Eesmärgiks on tuletada valem V arvutamiseks.

Vaatleme keha V lõiget x-teljega ristuva tasandiga (joonis 5.5). Tekkiva ristlõike pindala sõltub lõiketasandi asukohast, seega on ta muutuja x funktsioon. Tähistame ristlõike pindala $S(x)$-ga. Eeldame, et $S(x)$ on pidev.



Joonis 5.5

Tükeldame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

ühtlaste vahedega

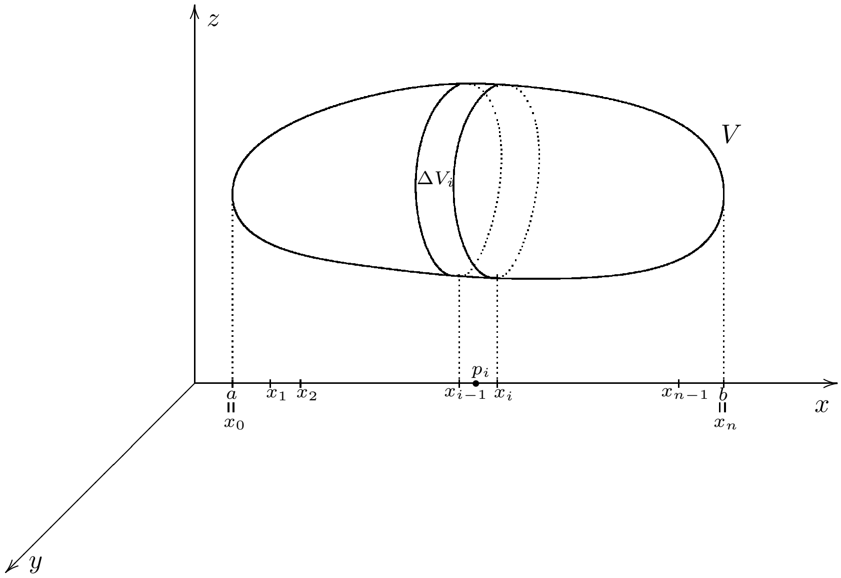
$$\Delta x = x_i - x_{i-1}.$$

Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti p_i. Vaatleme tasandite $x = x_{i-1}$ ja $x = x_i$ vahele jäävat keha kihti ΔV_i (joonis 5.6). Kui Δx on väike, siis muutub ristlõike pindala $S(x)$ osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ vähe ja me saame ta lugeda ligikaudselt võrdseks $S(p_i)$-ga, st

$$S(x) \approx S(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

Sellisel juhul on ΔV_i ligikaudselt silinder, mille põhja pindala ja kõrgus on vastavalt $S(p_i)$ ja Δx. Seega avaldub ΔV_i ruumala ligikaudselt valemiga

$$\Delta V_i \approx S(p_i)\Delta x\,.$$



Joonis 5.6

Terve keha ruumala ligikaudse valemi saame summeerides ΔV_i ruumalad:

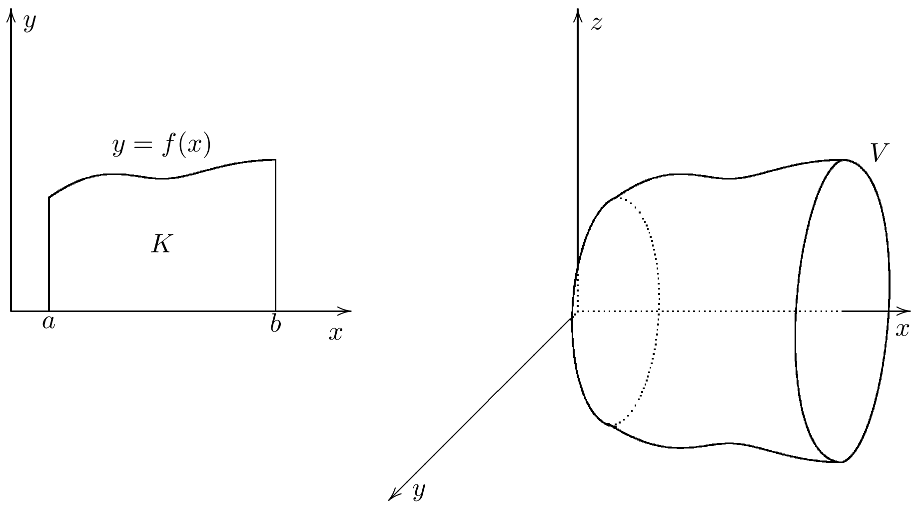
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(p_i)\Delta x\,. \tag{5.31}$$

Mida peenem on lõigu $[a,b]$ jaotus, seda täpsem on ligikaudne võrdus $\Delta V_i \approx S(p_i)\Delta x$ ning seda täpsem on ka valem (5.31). Teisest küljest: valemi (5.31) paremal poolel seisab funktsiooni S integraalsumma lõigul $[a,b]$. Järelikult saame Δx lähenemisel nullile järgmise täpse valemi keha ruumala jaoks ristlõigete pindalade järgi:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{5.32}$$

Erijuht: pöördkeha ruumala. Olgu antud funktsioon f lõigul $[a,b]$. Eeldame, et $f(x)$ on pidev ja $f(x) \geq 0$. Vaatleme joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsit K (joonis 5.7 vasakul). Paneme kujundi K pöörlema ümber x-telje. Tulemusena saame pöördkeha V (joonis 5.7 paremal). Keha V lõikamisel x-teljega ristuva tasandiga tekkiv lõige on ring, mille raadius võrdub $f(x)$-ga (sest kujundi K kõrgus punktis x on $f(x)$). Seega on ristlõike pindala $S(x) = \pi f^2(x)$ ja üldisest valemist (5.32) saame järgmise valemi V ruumala jaoks:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\,. \tag{5.33}$$



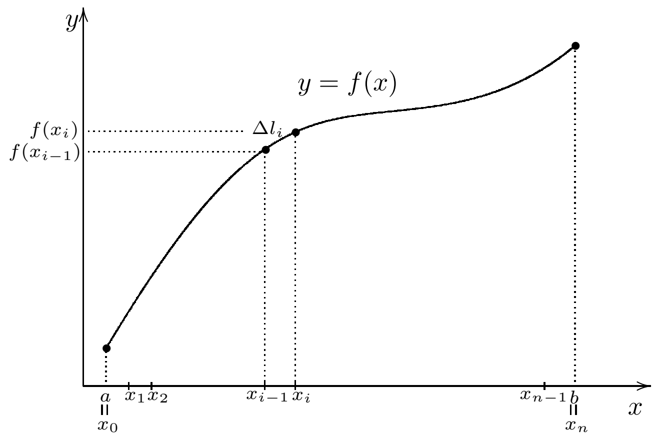
Joonis 5.7

Joone pikkuse arvutamine. Olgu antud joon võrrandiga $y = f(x)$, kus $a \leq x \leq b$. Tähistame selle joone pikkuse l-ga. Meid huvitab valem l arvutamiseks.

Eeldame, et $f(x)$ on diferentseeruv. Jaotame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks punktidega

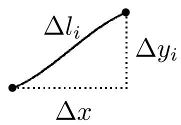
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

(joonis 5.8). Tähistame $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.



Joonis 5.8

Vaatleme osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ kohale jäävat joone osakaart Δl_i. See osakaar on suurendatult kujutatud joonisel 5.9.



Joonis 5.9

Kuna $f(x)$ on eelduse kohaselt diferentseeruv, on vaadeldav joon sile. Sile joon on aga sirgestuv (st suurendamisel muutub "sirgemaks"). Järelikult on väikese Δx korral osakaar Δl_i ligikaudselt sirglõik ja joonisel 5.9 on ligikaudne täisnurkne kolmnurk. Seega võime me Δl_i pikkuse arvutamisel kasutada Pythagorase teoreemi. Tähistades Δl_i pikkuse samuti Δl_i-ga saame

$$\Delta l_i \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2}\,. \tag{5.34}$$

Edasi avaldame selles valemis esineva funktsiooni muudu Δy_i argumendi muudu Δx kaudu. Selleks sobib kasutada Lagrange'i teoreemi (Teoreem 4.3). Nimetatud teoreemi põhjal leidub vahemikus (x_{i-1}, x_i) punkt p_i nii, et kehtib võrdus

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(p_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Seega

$$\Delta y_i \;=\; f'(p_i)\Delta x$$

ja valemit (5.34) saab teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned}\Delta l_i \approx \sqrt{\Delta x^2 + (f'(p_i)\Delta x)^2} \;&=\; \sqrt{\Delta x^2 + [f'(p_i)]^2 \Delta x^2} \;= \\ =\; \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2}\,\Delta x\,.\end{aligned}$$

Terve joone ligikaudse pikkuse saame kui summeerime Δl_i ligikaudsed pikkused:

$$l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2}\,\Delta x\,. \tag{5.35}$$

Mida väiksem on Δx, seda "sirgem" on osakaar Δl_i ja järelikult on seda täpsemad ka ligikaudsed võrdused (5.34) ja (5.35). Teisest küljest, valemi (5.35) paremal poolel seisab funktsiooni $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ integraalsumma lõigul $[a, b]$. Järelikult Δx lähenemisel nullile saame järgmise täpse valemi vaadeldava joone pikkuse jaoks:

$$l \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,. \tag{5.36}$$