Peatükk 4

Tuletise rakendusi

4.1 Funktsiooni lähendamine. Taylori polünoom.

Mitmetes matemaatika rakendustes on vaja leida keerulistele funktsioonidele lihtsaid lähendeid. Enamasti konstrueeritakse taolised lähendid polünoomide hulgast. Polünoomiga on lihtne opereerida. Polünoomi väärtuse arvutamisel tuleb ju teostada ainult aritmeetilisi tehteid (liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist). Näiteks taskuarvuti leiab funktsioonide 10^x, $\sin x$ jms tegelike väärtuste asemel nende funktsioonide polünomiaalsete lähendite väärtusi. Polünoomi on lihtne ka diferentseerida ja integreerida. Seetõttu kasutatakse polünomiaalset lähendamist inseneriteadustes üsna palju.

Funktsiooni lineaarne lähend. Lihtsaima polünomiaalse lähendi saame funktsiooni lineariseerimise teel. Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv punkti a mingis ümbruses. Eelnevalt nägime, et funktsiooni muudu jaoks kehtib järgmine valem (valem (3.8), Ptk 3):

$$\Delta y \;=\; f'(a)\Delta x \;+\; \beta\,.$$

Asendame siin $\Delta x = x - a$ ja $\Delta y = f(x) - f(a)$. Saame

$$f(x) - f(a) \;=\; f'(a)(x-a) \;+\; \beta\,.$$

Avaldame $f(x)$:

$$f(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a) + \beta\,. \tag{4.1}$$

Jättes funktsiooni $f(x)$ avaldisest välja jääkliikme β, saame uue funktsiooni, mis on lineaarne:

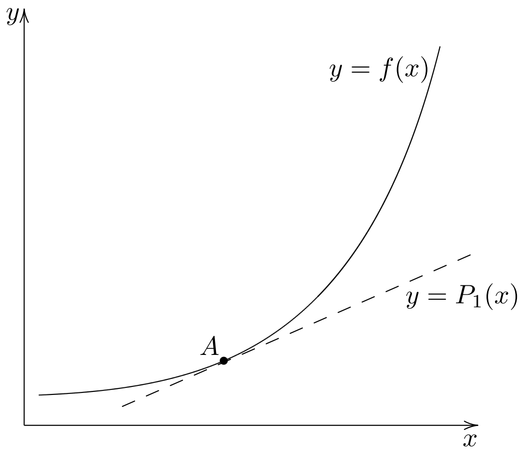
$$P_1(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a)\,. \tag{4.2}$$

Kui $x \approx a$, siis β on suhteliselt väike ja võime kirjutada järgmise ligikaudse võrduse:

$$f(x) \approx P_1(x). \tag{4.3}$$

Funktsioon $P_1(x)$ on funktsiooni $f(x)$ *lineaarne lähend*. Jääkliikme β eemaldamisega funktsiooni avaldisest me *lineaariseerisime* selle funktsiooni.

Lineaarse lähendi $y = P_1(x)$ graafikuks on joone $y = f(x)$ puutuja punktis $A(a, f(a))$. Geomeetriliselt tähendab lineariseerimine joone asendamist oma puutujaga puutepunkti ümbruses (vt joonis 4.1).



Joonis 4.1

Lineariseerimisel säilivad funktsiooni f väärtus punktis a:

$$P_1(a) = f(a)$$

ja joone $y = f(x)$ tõus, so f tuletis punktis a:

$$P_1'(a) = f'(a).$$

Kaotsi läheb joone "kõverus". Seetõttu tekib küsimus: kas on võimalik konstrueerida lineaarsest lähendist paremaid lähendeid, mis arvestavad ka "kõverust". Joone "kõverust", iseloomustab teist järku tuletis. Seega, kui õnnestuks konstrueeritavasse lähendisse üle kanda ka esialgse funktsiooni $f(x)$ teise tuletise väärtus, st kui lähendi $P(x)$ puhul kehtiks seos $P''(a) = f''(a)$, siis saaksime joone "kõveruse" teatud mõttes säilitada. Kahjuks lineaarne lähend selleks ei sobi, sest lineaarse funktsiooni teine tuletis on alati null. Seega peame kasutusele võtma vähemalt teise astme ehk ruutpolünoomid. Funktsiooni $f(x)$ ruutlähend punkti $x = a$ ümbruses ruutfunktsioon $P_2(x)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$P_2(a) = f(a)\,, \quad P_2'(a) = f'(a)\,, \quad P_2''(a) = f''(a)\,.$$

Järgmises alamparagrahvis püstitame ja lahendame üldisema ülesande: leida polünoom, $P_n(x)$, mis säilitab funktsiooni f tuletised kuni järguni n.

Taylori polünoom. Olgu funktsiooni $y = f(x)$ kohta on teada tema väärtus ja tuletised kuni järguni n punktis a, st $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. Ülesanne on järgmine: leida n-astme polünoom $P_n(x)$, mis koos oma tuletistega kuni järguni n langeb punktis a kokku funktsiooniga f, st rahuldab tingimusi

$$P_n(a) = f(a)\,, \quad P_n'(a) = f'(a)\,, \ \ldots\,, \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,. \tag{4.4}$$

Otsime meid huvitavat polünoomi järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 \\ &\quad + C_4(x-a)^4 + \ldots + C_n(x-a)^n\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kus $C_0, C_1, \ldots, C_n$ on konstantsed kordajad. Nende kordajate määramiseks arvutame kõigepealt P_n tuletised kuni järguni n:

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= 1C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + 4C_4(x-a)^3 \\ &\quad + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}\,, \\ P_n''(x) &= 2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + 4\cdot 3C_4(x-a)^2 \\ &\quad + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}\,, \\ P_n'''(x) &= 3\cdot 2\cdot 1C_3 + 4\cdot 3\cdot 2C_4(x-a) \\ &\quad + \ldots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}\,, \\ &\ \ \vdots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1C_n\,. \end{aligned}$$

Pannes neis avaldistes ja valemis (4.5) muutuja x võrduma a-ga saame

$$\begin{aligned} &P_n(a) = C_0\,, \ \ P_n'(a) = 1!\,C_1\,, \ \ P_n''(a) = 2!\,C_2\,, \\ &P_n'''(a) = 3!\,C_3\,, \ \ldots\,, \ P_n^{(n)}(a) = n!\,C_n\,. \end{aligned}$$

Sümbol $n!$ tähistab arvu n faktoriaali:

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Kasutades tingimusi (4.4) tuletame järgmised valemid kordajate $C_0, C_1, \ldots, C_n$ jaoks:

$$\begin{aligned} &C_0 = f(a)\,, \ \ C_1 = \frac{f'(a)}{1!}\,, \ \ C_2 = \frac{f''(a)}{2!}\,, \\ &C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}\,, \ \ldots\,, \ C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,. \end{aligned}$$

Seega saame valemi (4.5) kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Polünoomi P_n nimetatakse funktsiooni f *Taylori polünoomiks ehk n-järku lähendiks* punkti a ümbruses.

Kui $x \approx a$, siis kehtib ligikaudne valem

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Mida suurem on n seda täpsem see valem on. See tähendab, et polünoomi astme suurenemisel lähendi täpsus paraneb.

Erijuhtudel $n = 1$ ja $n = 2$ saame Taylori polünoomist vastavalt lineaarse ja ruutlähendi:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)\,, \quad P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\,.$$

Kui $a = 0$, siis nimetatakse Taylori polünoomi ka *McLaurini polünoomiks.* Seega on funktsiooni $f(x)$ McLaurini polünoom järgmine:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4.7}$$

Näiteid. 1. Olgu $f(x) = e^x$. Kuna funktsioon e^x diferentseerimisel ei muutu, siis $f^{(n)}(x) = e^x$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Asendades need suurused valemisse (4.7) tuletame funktsiooni e^x McLaurini polünoomi:

$$e^x \;\approx\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^i}{n!}.$$

2. Olgu $f(x) = \sin x$. Arvutame tuletised:

$$f'(x) = \cos x\,, \quad f''(x) = -\sin x\,, \quad f'''(x) = -\cos x\,, \quad f^{IV}(x) = \sin x\,,$$
$$f^{V}(x) = \cos x \quad \text{jne.}$$

Kuna $\sin 0 = 0$ ja $\cos 0 = 1$, saame

$$f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad f''(0) = 0\,, \quad f'''(0) = -1\,,$$
$$f^{IV}(0) = 0\,, \quad f^{V}(0) = 1 \quad \text{jne.}$$

Üldiselt

$$f^{(2k)}(0) = 0\,, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

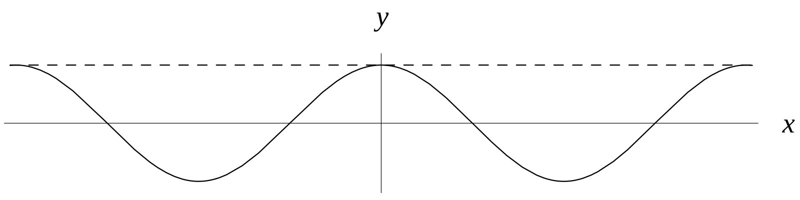
Järelikult sisaldab funktsiooni $f(x) = \sin x$ McLaurini polünoom ainult paarituid liidetavaid vahelduvate märkidega:

$$\sin x \;\approx\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

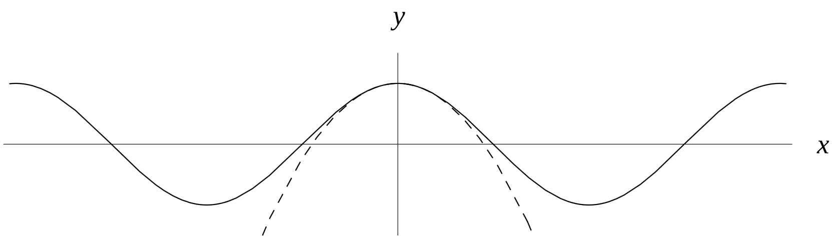
3. Analoogiliselt leiame ka $f(x) = \cos x$ Mclaurini polünoomi. Erinevalt funktsioonist $\sin x$ sisaldab see ainult paaris liidetavaid:

$$\cos x \;\approx\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

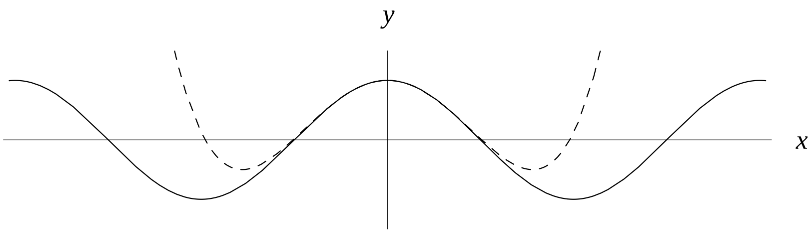
Funktsiooni $y = \cos x$ erineva astmega lähendeid punktis $a = 0$ on kujutatud joonistel 4.2 - 4.7. Mida kõrgem on lähendi aste, seda täpsemini vastab ta funktsioonile $y = \cos x$.



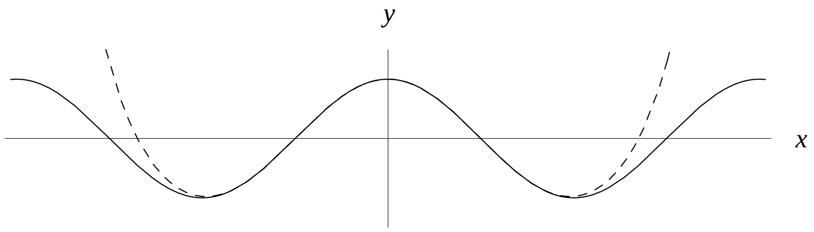
Joonis 4.2: $y = \cos(x)$ lähend $P_1(x)$



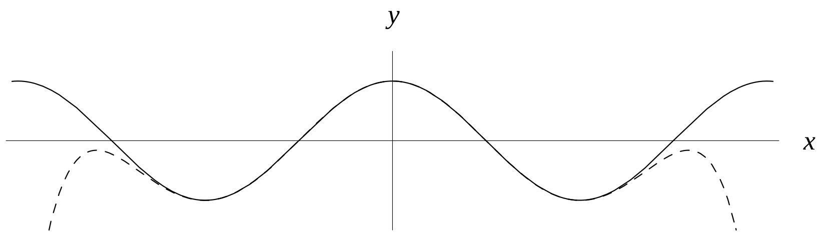
Joonis 4.3: $y = \cos(x)$ lähend $P_2(x)$



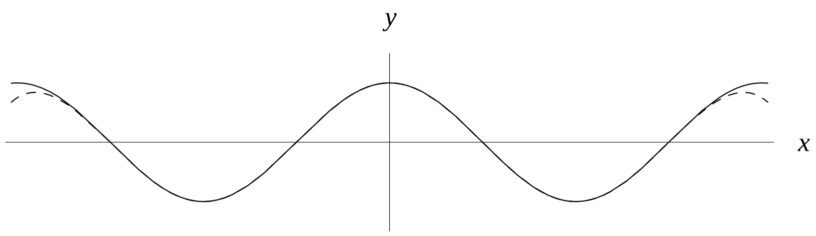
Joonis 4.4: $y = \cos(x)$ lähend $P_4(x)$



Joonis 4.5: $y = \cos(x)$ lähend $P_8(x)$



Joonis 4.6: $y = \cos(x)$ lähend $P_{10}(x)$



Joonis 4.7: $y = \cos(x)$ lähend $P_{14}(x)$

4.2 Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. Fermat' teoreem

Lokaalse ekstreemumi mõiste.

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis x_1 *lokaalne maksimum*, kui

1. funktsioon f on määratud punkti x_1 mingis ümbruses $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$;
2. iga $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ korral kehtib võrratus $f(x) \leq f(x_1)$.

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis x_1 *lokaalne miinimum*, kui

1. funktsioon f on määratud punkti x_1 mingis ümbruses $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$;
2. iga $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ korral kehtib võrratus $f(x) \geq f(x_1)$.

Funktsiooni lokaalseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Kui funktsioon ei ole konstantne lokaalse maksimumipunkti ümbruses, siis on selles punktis funktsiooni graafikul "tipp". Läbides maksimumpunkti vasakult paremale asendub funktsiooni kasvamine kahanemisega. Seevastu on lokaalne maksimum funktsiooni graafiku "org". Läbides seda punkti vasakult paremale asendub funktsiooni kahanemine kasvamisega.

Lokaalseid ekstreemume saab vaadelda nt Ptk 2 joonisel 2.11. Seal kujutatud funktsioonil on punktis x_1 lokaalne maksimum ja punktis x_3 lokaalne miinimum.

Funktsiooni lokaalseid ekstreemume ei tohi segi ajada funktsiooni absoluutsete ekstreemumitega, millest oli juttu §2.9. Näiteks joonisel 2.11 toodud funktsioon saavutab absoluutse miinumumi punktis a, kuid seal lokaalset miinimumi ei ole. Põhjus on selles, et ei leidu lokaalse ekstreemumi definitsioonis nõutavat a ümbrust, kus funktsioon oleks määratud. Punktist a vasakul on funktsioon määramata.

Küll võib väita, et juhul, kui funktsioon on määratud lõigul $[a, b]$ ja saavutab oma absoluutse ekstreemumi vahemikus (a, b), siis on see ühtlasi lokaalne ekstreemum.

Kehtib järgmine väide.

Teoreem 4.1 (Fermat' teoreem). Kui funktsioonil f on punktis x_1 lokaalne ekstreemum ja funktsioon on diferentseeruv selles punktis, siis $f'(x_1) = 0$.

Tõestus. Vaatleme juhtu, kui funktsioonil f on punktis x_1 lokaalne maksimum. Siis, vastavalt lokaalse maksimumi definitsioonile, leidub punkti x_1 ümbrus nii, et iga x korral sellest ümbrusest kehtib võrratus

$$f(x) - f(x_1) \leq 0. \tag{4.8}$$

Selles ümbruses asuva arvu x me saame võtta punktist x_1 nii vasakult kui ka paremalt. Asugu x punktist x_1 vasakul. Siis $x - x_1 < 0$. Jagame võrratuse

(4.8) negatiivse arvuga $x - x_1$. Kuna negatiivse arvuga jagamisel võrratuse märk muutub vastupidiseks, saame

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0.$$

See võrratus jääb kehtima ka siis, kui me võtame temast piirväärtuse protsessis $x \to x_1$. Seega tuletise definitsiooni põhjal

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0. \tag{4.9}$$

Järgnevalt olgu x punktist x_1 paremal. Siis $x - x_1 > 0$. Jagades võrratuse (4.8) positiivse arvuga $x - x_1$ saame

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0.$$

Võtame piirväärtuse:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0. \tag{4.10}$$

Võrratused (4.9) ja (4.10) näitavad, et $f'(x_1) \geq 0$ ja $f'(x_1) \leq 0$. See on võimalik vaid siis, kui $f'(x_1) = 0$. Seega on lemma tõestatud juhul, kui x_1-s on lokaalne miinimum. Analoogiliselt saab käsitleda ka juhtu, kui x_1-s on lokaalne miinimum.

4.3 Keskväärtusteoreemid.

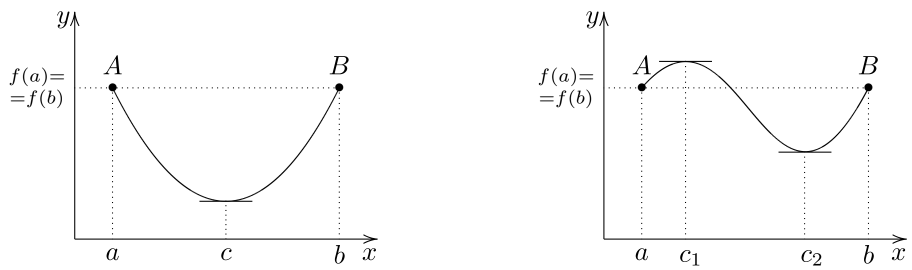
Teoreem 4.2 (Rolle'i teoreem). Kui funktsioon f on lõigul $[a, b]$ pidev, vahemikus (a, b) diferentseeruv ja rahuldab tingimust $f(a) = f(b)$, siis leidub vahemikus (a, b) vähemalt üks punkt c nii, et $f'(c) = 0$.

Tõestus. Olgu M ja m vastavalt funktsiooni f suurim ja vähim väärtus lõigul $[a, b]$.

Kui $M = m$, siis on funktsioon lõigul $[a, b]$ konstantne, st kõigi $x \in [a, b]$ korral kehtib $f(x) = M = m$. Sellisel juhul on f tuletis nullfunktsioon, st $f'(x) = 0$ kõigi $x \in [a, b]$ korral, ja teoreemi väide on täidetud suvalise $c \in (a, b)$ korral.

Edasi vaatleme juhtu, kui $M > m$. Funktsioon võib oma absoluutse ekstreemumi saavutada kas lõigu $[a, b]$ otspunktis või vahemikus (a, b). Oletame kõigepealt, et mõlemad absoluutsed ekstreemumid saavutatakse lõigu otspunktides a ja b. Siis on $f(x)$ väärtus ühes otspunktis M ja teises otspunktis m ning võrratusest $M > m$ tuleneb, et $f(x)$ väärtused lõigu otspunktides on erinevad. Kuid me ju eeldasime, et funktsiooni väärtused lõigu otspunktides on võrdsed (vt tingimus $f(a) = f(b)$ teoreemi sõnastuses!). Tekib vastuolu. Järelikult ei olnud oletus, et mõlemad absoluutsed ekstreemumid saavutatakse lõigu otspunktides a ja b, õige. Funktsioon $f(x)$ peab vähemalt ühe oma absoluutsetest ekstreemumitest (kas suurima või vähima väärtuse) saavutama vahemikus (a,b) asuvas punktis. Tähistame selle punkti c-ga. Kuna vahemikus (a,b) asuv absoluutne ekstreemum on ühtlasi ka lokaalne ekstreemum, omab funktsioon f lokaalset ekstreemumit punktis c. Peale selle on f teoreemi eelduste põhjal diferentseeruv punktis c. Järelikult, Fermat' teoreemi põhjal saame $f'(c) = 0$. Teoreem on tõestatud.

Rolle'i teoreemil on lihtne geomeetriline sisu. See on järgmine. Nimelt teoreemi eeldustel on funktsiooni $y = f(x)$ graafik sile joon, mille otspunktid $A(a, f(a))$ ja $B(b, f(b))$ asuvad x-telje suhtes samal kõrgusel. Teoreem väidab, et sellisel juhul leidub vahemikus (a,b) vähemalt üks punkt c, mille korral funktsiooni tuletis on null, st funktsiooni graafiku puutuja on paralleelne x- teljega. Teoreemi illustreerib joonis 4.8. Vasakpoolsel graafikul on üks taoline punkt c, parempoolsel graafikul aga kaks punkti c_1 ja c_2.



Joonis 4.8

Teoreem 4.3 (Lagrange'i teoreem). Kui funktsioon f on lõigul $[a,b]$ pidev ja vahemikus (a,b) diferentseeruv, siis leidub vahemikus (a,b) vähemalt üks punkt c nii, et

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ehk} \quad f(b) - f(a) \;=\; f'(c)(b - a)\,. \tag{4.11}$$

Tõestus. Defineerime järgmise funktsiooni:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\,. \tag{4.12}$$

Arvutame:

$$F(a) = f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a - a) = f(a),$$

$$F(b) = f(b) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Seega $F(a) = F(b)$. Ühtlasi on $F(x)$ pidev lõigul $[a,b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a,b). Järelikult rahuldab funktsioon $F(x)$ Rolle'i teoreemi eeldusi.

Rolle'i teoreemi põhjal leidub vahemikus (a, b) vähemalt üks punkt c nii, et $F'(c) = 0$. Valemist (4.12) leiame funktsiooni $F(x)$ tuletise:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Seega $F'(c) = 0$ põhjal

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Siit järeldubki (4.11). Teoreem on tõestatud.

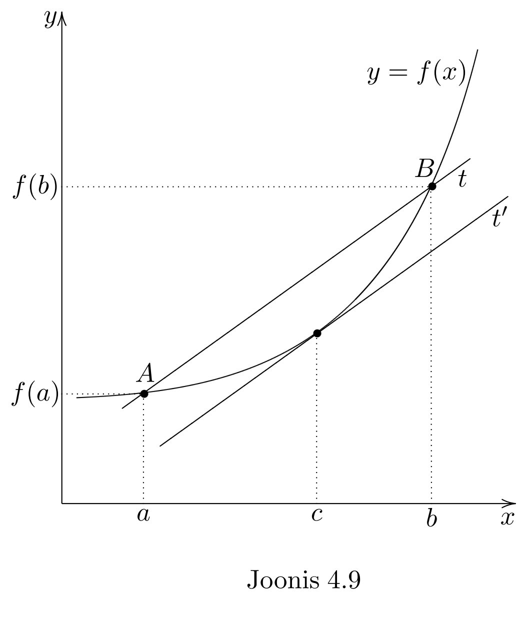
Lagrange'i teoreemi geomeetrilist sisu vaatleme jooniselt 4.9. Punktidest $A(a, f(a))$ ja $B(b, f(b))$ läbi tõmmatud lõikaja t tõus võrdub suhtega

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Viime paralleellükkega sirge t uude asendisse nii, et saadud uus sirge t' oleks joone $y = f(x)$ puutuja. Tähistame puutepunkti x-koordinaadi c-ga. Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõus võrdub funktsiooni tuletisega vaadeldavas punktis, siis sirge t' tõus on $f'(c)$. Kuna sirged t ja t' on paralleelsed, siis on nende tõusud omavahel võrdsed, seega

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Saame valemi (4.11). Kokkuvõttes: Lagrange'i teoreem väidab, et sileda joone lõikaja saab paralleellükkega viia selle joone puutujaks.



Joonis 4.9

4.4 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Funktsiooni kasvamine ja kahanemine on seotud funktsiooni tuletise märgiga. Konkreetselt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 4.3. Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b). Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on kasvav vahemikus (a, b).

2. Kui $f'(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on kahanev vahemikus (a, b).

Tõestus. Tõestame väite 1. Olgu $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Valime vahemikus (a, b) kaks suvalist punkti x_1 ja x_2 nii et $x_1 < x_2$. Kui meil õnnestub näidata, et kehtib võrratus $f(x_1) < f(x_2)$, siis on f kasvav vahemikus (a, b) ning väide 1 ongi tõestatud.

Lagrange'i teoreemi põhjal leidub vahemikus (x_1, x_2) vähemalt üks punkt c nii, et kehtib võrdus

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\,. \tag{4.13}$$

Selle võrduse paremal poolel olev tuletis $f'(c)$ on nullist suurem, kuna me eeldasime $f'(x)$ positiivsust vahemikus (a, b). Nullist suurem on ka vahe $x_2 - x_1$, kuna me valisime punktid x_1 ja x_2 selliselt, et $x_1 < x_2$. Seega on valemi (4.13) parem pool nullist suurem. Saame $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Sellest järeldubki soovitud võrratus $f(x_1) < f(x_2)$.

Väide 2 tõestatakse analoogiliselt.

4.5 Ekstreemumülesannete lahendamine.

Lokaalsete ekstreemumite ning kasvamis- ja kahanemispiirkondade leidmine. Argumendi väärtust, kus funktsiooni tuletis võrdub nulliga, nimetatakse selle funktsiooni *statsionaarseks punktiks* ehk *kriitiliseks punktiks*. Statsionaarses punktis on funktsiooni graafiku puutuja horisontaalne.

Fermat' teoreemi põhjal on diferentseeruva funktsiooni lokaalses ekstreemumis selle funktsiooni tuletis võrdne nulliga, st tegemist on statsionaarse punktiga. Vastupidine väide (st "statsionaarses punktis on funktsioonil lokaalne ekstreemum") ei ole õige. Funktsioonil võib olla ka selliseid statsionaarseid punkte, kus lokaalset ekstreemumit ei ole.

Näiteks funktsiooni $f(x) = x^3$ tuletis avaldub valemiga $f'(x) = 3x^2$. Punktis $x = 0$ on tuletisel nullkoht, kuid funktsioonil seal ekstreemumit ei ole. Funktsioon $f(x) = x^3$ kasvab kõikjal.

Erinevad võimalikud juhud statsionaarsetest punktidest on kujutatud joonisel 4.10. Graafikutel 1 ja 2 esineb lokaalne ekstreemum, kuid graafikutel 3 ja 4 lokaalset ekstreemumit ei ole.

Joonis 4.10

Lokaalsete ekstreemumite väljaselekteerimiseks tuleks jälgida tuletise märki statsionaarsest punktist vasakul ja paremal. Kui statsionaarse punkti läbimisel muutub tuletise märk plussist miinuseks, siis esineb vaadeldavas punktis lokaalne maksimum (juht 1 joonisel 4.10). Kui aga statsionaarse punkti läbimisel muutub tuletise märk miinusest plussiks, siis esineb vaadeldavas punktis lokaalne miinumum (juht 2 joonisel 4.10). Kui tuletis statsionaarse punkti läbimisel märki ei muuda, siis vaadeldavas punktis lokaalset ekstreemumit ei ole (juhud 3 ja 4 joonisel 4.10).

Näide. Olgu antud funktsioon

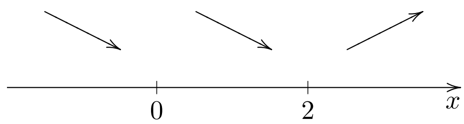
$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 4\,.$$

Leiame selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ja lokaalsed ekstreemumid.

Kuna kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid peavad asuma funktsiooni määramispiirkonnas, leiame kõigepealt antud funktsiooni loomuliku määramispiirkonna. Vaadeldav funktsioon on määratud suvalise reaalarvu x korral. Seega $X = \mathbb{R}$. Avaldame tuletise:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2).$$

Statsionaarsete punktide leidmiseks lahendame võrrandi $f'(x) = 0$. Saame kaks statsionaarset punkti $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$. Kanname need teljele:



Vaadeldava funktsiooni tuletis on pidev ja saab märki muuta ainult oma nullkohtades. Seega säilitab $f'(x)$ märki vahemikes $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ ja $(2, \infty)$. Tuletise märgi kindlaks tegemiseks neis vahemikes valime igas vahemikus suvalised kontrollpunktid ja leiame neis kontrollpunktides tuletise märgi. Näiteks valime $-1 \in (-\infty, 0)$, $1 \in (0, 2)$ ja $3 \in (2, \infty)$. Arvutame:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 12(-1)^2(-1-2) = -36 < 0\,, \\ f'(1) &= 12(-1)^2(1-2) = -12 < 0\,, \\ f'(3) &= 12(-1)^2(3-2) = 12 > 0\,. \end{aligned}$$

Tuletise märgi põhjal koostame funktsiooni kasvamis-kahanemisdiagrammi tõusvate ja langevate noolekestega x-teljel (vt ülal). Diagrammilt leiame funktsiooni kasvamispiirkonna: $\overset{\nearrow}{X} = (2, \infty)$ ja kahanemispiirkonna: $\overset{\searrow}{X} = (-\infty, 2)$. Punktis $x = 2$ funktsiooni kahanemine asendub kasvamisega. Järelikult on seal lokaalne miiminum. Miinimumpunkt koos koordinaatidega on $P(2, -12)$. Teine statsionaarne punkt $x = 0$ asub funktsiooni kahanemispiirkonnas. Selle punkti ümbruses näeb funktsiooni graafik välja nagu juht 4 joonisel 4.10.

Funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine. Vaatleme funktsiooni $f(x)$ suurima ja vähima väärtuse leidmist lõigul $[a, b]$. Kui suurim (vähim) väärtus saavutatakse vahemiku (a, b) punktis, siis samas punktis omab funktsioon ka lokaalset maksimumi (miinimumi), seega on see punkt ühtlasi funktsiooni statsionaarne punkt. Kuid funktsioon võib saavutada suurima või vähima väärtuse ka lõigu otspunktis a või b. Seega tuleb lisaks statsionaarsetele punktidele kontrollida funktsiooni väärtusi ka lõigu otspunktides.

Kokkuvõttes: funktsiooni f suurima (vähima) väärtuse leidmiseks lõigul $[a, b]$ tuleb

1) leida funktsiooni statsionaarsed punktid vahemikus (a, b) ja arvutada funktsiooni väärtused neis punktides;

2) arvutada $f(a)$ ja $f(b)$;

3) saadud arvudest valida suurim (vähim).

Näide. Leiame funktsiooni $f(x) = x^3 - 3x$ suurima ja vähima väärtuse lõigul $[0, 2]$.

Alustame statsionaarsete punktide määramisest. Selleks arvutame tuletise: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Funktsioonil on kaks statsionaarset punkti: $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Kuna punkt $x_1 = -1$ ei asu lõigus $[0, 2]$, siis jääb see vaatluse alt välja. Seega tuleb funktsiooni väärtusi võrrelda kolmes punktis: statsionaarne punkt $x = 1$ ja lõigu otspunktid $x = 0$ ja $x = 2$. Arvutame:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0\,, \quad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2\,, \quad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Järelikult on suurim väärtus 2 ja vähim väärtus -2. Suurim väärtus saavutatakse lõigu parempoolses otspunktis $x = 2$ ja vähim väärtus saavutatakse statsionaarses punktis $x = 1$.

Suurima ja vähima väärtuse leidmisel lõpmatul poollõigul $[a, \infty)$ tuleb tegutseda analoogiliselt. Lisaks funktsiooni väärtuste võrdlemisele statsionaarsetes punktides ja lõigu otspunktis a tuleb analüüsida funktsiooni käitumist ka piirprotsessis $x \to \infty$.

Näide. Leida funktsiooni $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ suurim ja vähim väärtus poollõigul $[0, \infty)$.

Avaldame tuletise: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ ja leiame statsionaarsed punktid: $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$. Mõlemad statsionaarsed punktid asuvad poollõigus $[0, \infty)$. Arvutame funktsiooni väärtused statsionaarsetes punktides ja lõigu vasakpoolses otspunktis:

$$f(0) = 0\,, \quad f(x_1) \approx 0.3849\,, \quad f(x_2) \approx -0.3849.$$

Kuna funktsiooni $f(x)$ valemis esinev liidetav x^3 on kõrgemat järku lõpmatult kasvav suurus teiste liidetavate suhtes protsessis $x \to \infty$, siis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

Funktsiooni vähim väärtus on ligikaudu -0.3849 ja suurim väärtus puudub, sest funktsioon läheneb lõpmatusele protsessis $x \to \infty$.

Suurima ja vähima väärtuse leidmisel tervel reaalarvude hulgal tuleb lisaks funktsiooni väärtuste võrdlemisele statsionaarsetes punktides analüüsida funktsiooni käitumist ka piirprotsessides $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$.

Näide. Leida funktsiooni $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ suurim ja vähim väärtus tervel reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$.

Avaldame tuletise: $f'(x) = \frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2}$ ja leiame statsionaarsed punktid: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Arvutame funktsiooni väärtused statsionaarsetes punktides:

$$f(x_1) \approx -1.2071\,, \quad f(x_2) \approx 0.2071.$$

Leiame piirväärtuse:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Analoogiliselt $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$. Funktsioon läheneb protsessides $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$ arvule 0, mis asub arvude -1.2071 ja 0.2071 vahel. Suurim väärtus on ligikaudu 0.2071 ja vähim väärtus on ligikaudu -1.2071.