Peatükk 3

Tuletis ja diferentsiaal

3.1 Tuletise ja diferentseeruva funktsiooni mõisted.

Olgu antud funktsioon f ja kuulugu punkt a selle funktsiooni määramispiirkonda.

Tuletis ja diferentseeruv funktsioon. Funktsiooni f *tuletiseks punktis* a nimetatakse järgmist suurust:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \tag{3.1}$$

Kui funktsioon f omab punktis a *lõplikku tuletist*, siis öeldakse et ta on selles *punktis diferentseeruv*. Tuletise arvutamist nimetatakse *diferentseerimiseks*.

Tuletist defineeriva piirväärtuse võib kirja panna ka argumendi muudu ja funktsiooni muudu kaudu. Olgu nii nagu ennegi

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a \quad - \quad \text{argumendi muut kohal } a\,, \\ \Delta y &= f(x) - f(a) \quad - \quad \text{funktsiooni muut kohal } a\,. \end{aligned}$$

Siis

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Funktsiooni diferentseeruvuse ja pidevuse vahel kehtib järgmine seos:

Teoreem 3.1. Punktis a diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.

Tõestus. Kuna punktis a diferentseeruv funktsioon on määratud punktis a, siis on täidetud pidevuse definitsioonis (vt §2.8) toodud 1. tingimus. Jääb veel näidata 2. ja 3. tingimuse kehtivust, st tuleb tõestada, et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ eksisteerib ja võrdub arvuga $f(a)$. Kuid see järeldub järgmisest võrduste reast:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] + f(a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)\,. \end{aligned}$$

Seega on teoreem tõestatud.

Teoreemile 3.1 vastupidine väide ei ole õige. Pidev funktsioon ei tarvitse diferentseeruv olla.

Näiteks funktsioon $y = |x|$ on punktis $x = 0$ pidev, kuna $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$. Samas ei ole see funktsioon punktis $x = 0$ diferentseeruv. Et seda näha, arvutame järgmised ühepoolsed piirväärtused:

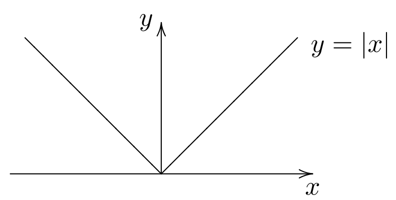
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = +1.$$

Kuna need on erinevad, siis piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$, mis määrab funktsiooni $y = |x|$ tuletise punktis $x = 0$, ei eksisteeri.

Järelikult on funktsiooni diferentseeruvus rangem tingimus kui pidevus. Diferentseeruvate funktsioonide hulk on väiksem kui pidevate funktsioonide hulk.

Tuletame meelde, et geomeetriliselt tähendab funktsiooni pidevus joone pidevust. Diferentseeruvuse geomeetriliseks tähenduseks on pideva joone *siledus*. Punktis, kus funktsioon ei ole diferentseeruv, esineb tema graafikul murdepunkt.

Näiteks funktsiooni $y = |x|$ graafik on järgmine:



Joonis 3.1

Graafik on kõikjal pidev (me saame selle joonestada ilma pliiatsit paberilt tõstmata). Samas koordinaatide alguspunktis esineb murdepunkt – funktsioon ei ole diferentseeruv $x = 0$ korral.

Sublimatsiooni (tahke aine aurustumine) käigus temperatuuri suurenemisel suureneb sublimeerunud gaasi rõhk. Teatud temperatuuri väärtusest alates (seda nimetatakse kolmikpunktiks) hakkab toimuma ka sulamine, st protsessi iseloom muutub kvalitatiivselt. Peale kolmikpunkti läbimist gaasi rõhu kasv jätkub pidevalt, kuid kolmikpunktis on rõhufunktsioonil murdepunkt (tuletis puudub). Vastava joonise võib leida nt aadressilt
https://www.taskutark.ee/m/faasisiirded-ja-siirdesoojused/ .

Tuletis kui funktsioon. Kui funktsioon f on diferentseeruv oma määramispiirkonna alamhulga D kõigis punktides, siis öeldakse, et see funktsioon on *diferentseeruv hulgas* D.

Olgu f diferentseeruv hulgas D. Siis igale arvule x hulgast D vastab üks kindel reaalarv $f'(x)$. Seega on f' funktsioon, mis on määratud hulgas D.

Kirjutame funktsiooni f tuletise valemi välja argumendi väärtusel x. Kui tähistada Δx-ga argumendi muutu punktis x, siis avaldub vastav funktsiooni muut järgmiselt: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Seega vastavalt tuletise definitsioonile saame

$$f'(x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Tuletise teisi tähistusi. Funktsiooni $y = f(x)$ tuletist punktis x tähistatakse veel sümbolitega

$$y'\,,\ \dot{y}\,,\ \dot{f}\,.$$

Tuletiste tabel.

1) $C' \;=\; 0\,, \quad C$ – konstant,
2) $(x^a)' \;=\; a x^{a-1}\,,$
3) $(a^x)' \;=\; a^x \ln a\,, \quad$ sealhulgas $\quad (e^x)' \;=\; e^x\,,$
4) $(\log_a x)' \;=\; \dfrac{1}{x \ln a}\,, \quad$ sealhulgas $\quad (\ln x)' \;=\; \dfrac{1}{x}\,,$
5) $(\sin x)' \;=\; \cos x\,,$
6) $(\cos x)' \;=\; -\sin x\,,$
7) $(\tan x)' \;=\; \dfrac{1}{\cos^2 x}\,,$
8) $(\cot x)' \;=\; -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,,$
9) $(\arcsin x)' \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
10) $(\arccos x)' \;=\; -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
11) $(\arctan x)' \;=\; \dfrac{1}{1+x^2}\,,$
12) $(\operatorname{arccot} x)' \;=\; -\dfrac{1}{1+x^2}$
13) $(\operatorname{sh} x)' \;=\; \operatorname{ch} x\,,$
14) $(\operatorname{ch} x)' \;=\; \operatorname{sh} x\,,$
15) $(\operatorname{th} x)' \;=\; \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,,$
16) $(\operatorname{cth} x)' \;=\; -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,.$

Tõestame *näiteks* valemi 5. Vastavalt tuletise definitsioonile peame arvutama järgmise piirväärtuse:

$$(\sin x)' \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Kasutades trigonomeetriast tuntud valemit

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

suurustega $\alpha = x + \Delta x$ ja $\beta = x$ saame

$$(\sin x)' \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Kuna $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ piirprotsessis $\Delta x \to 0$, siis $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Peale selle, funktsiooni $\cos x$ pidevuse tõttu kehtib $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2} = \cos\frac{2x+0}{2} = \cos x$. Seega $(\sin x)' = \cos x$, mida oligi vaja tõestada.

Kõrgemat järku tuletised. Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv hulgas D. Siis on tema tuletis f' hulgas D määratud funktsioon. Oletame, et f' on samuti diferentseeruv hulgas D. Siis saame me arvutada funktsiooni f' tuletise ehk funktsiooni f teise tuletise, mida tähistatakse f''. Seda protseduuri võib jätkata. Funktsiooni f teise tuletise diferentseerimisel saame selle funktsiooni kolmanda tuletise f''' jne.

Funktsiooni $y = f(x)$ *n-järku tuletiseks* nimetatakse selle funktsiooni $n-1$ - järku tuletise tuletist ja tähistatakse $f^{(n)}$. Lõplikku n-järku tuletist omavat funktsiooni nimetatakse *n korda diferentseeruvaks.*

Kui funktsioonil on olemas kõik tuletised $f^{(n)}$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja neil on lõplikud väärtused, siis nimetatakse seda funktsiooni *lõpmata arv kordi diferentseeruvaks.*

Neljandat ja kõrgemat järku tuletisi tähistatakse ka rooma numbritega. Näiteks f^{IV} on neljandat järku tuletis, f^{VII} on seitsmendat järku tuletis jne.

Nii nagu 1. järku tuletise korral, võib ka kõrgemat järku tuletiste tähistes f asendada sõltuva muutujaga tähisega y. Näiteks teist järku tuletis on y'', n-järku tuletis on $y^{(n)}$ jne.

Näiteks funktsioon $y = \sin x$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$ jne.

3.2 Tuletiste arvutamise põhireeglid

Paneme kirja aritmeetiliste tehetega seotud reeglid.

1. $(f+g)' = f' + g'$,
2. $(fg)' = f'g + fg'$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Need reeglid on võimalik tõestada piirväärtuste omadusi kasutades. Piirdume reegli 2 tõestamisega. Saame

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big\{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]\Big\} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) + \\ &\qquad + f(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f'g + fg')(x)\,.\end{aligned}$$

Sellega ongi reegel 2 tõestatud.

Reeglitest 1 ja 2 järelduvad veel 2 lihtsat valemit:

4. $(Cf)' = C'f + C\,f' = 0\,f + C\,f' = C\,f'\,, \quad C$ – konstant,
5. $(f-g)' = [f + (-1)g]' = f' + [(-1)g]' = f' + (-1)g' = f' - g'.$

Liitfunktsiooni tuletise arvutamise reegel on järgmine:

6. $\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]\,f'(x).$

Selle reegli tõestame allpool, funktsiooni diferentsiaali käsitlemise juures.

3.3 Näiteid tuletiste kohta.

Kiirus ja kiirendus. Vaatleme materiaalse objekti sirgjoonelist liikumist x-teljel. Olgu t aeg. Ajavahemikus $(t, t+\Delta t)$ liigub objekt teepikkuse $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ võrra. Kuna antud ajavahemiku pikkus on Δt, siis on keskmine kiirus selles ajavahemikus arvutatav valemiga $v_{kesk} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$. Hetkkiiruse ajahetkel t saame, kui me kahandame vaadeldava ajavahemiku pikkuse Δt nulliks. Seega, tuletise definitsiooni põhjal avaldub hetkkiirus valemiga

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t).$$

Sarnaselt saab käsitleda ka kiirendust. Ajavahemikus $(t, t+\Delta t)$ on kiiruse muut järgmine: $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$. Kiirendus on kiiruse suhteline muut ajas. Seega avaldub keskmine kiirendus vaadeldavas ajavahemikus järgmiselt: $a_{kesk} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$. Hetkkiirenduse saame jällegi piirprotsessis $\Delta t \to 0$:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

Kiirus ei tarvitse alati olla seotud ruumilise liikumisega. Olgu keemilises reaktsioonis osaleva aine kontsentratsioon c. Kontsentratsioon muutub ajas, st c on t funktsioon: $c = c(t)$. Suhe $r_{kesk} = \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}$ annab keskmise reaktsiooni kiiruse ajavahemikus $(t, t+\Delta t)$. Võttes piirväärtuse, saame keemilise reaktsiooni kiiruse ajahetkel t:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = c\,'(t).$$

Töö tegemise kiirus on võimsus. Tähistame ajas muutuva jõu poolt nullhetkest $t = 0$ kuni positiivse ajahetkeni $t > 0$ tehtud töö sümboliga $A(t)$. Suhe $P_{kesk} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$ väljendab keskmist võimsust ajavahemikus $(t, t+\Delta t)$. Võimsus ajahetkel t avaldub valemiga

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = A'(t).$$

Aine massivoog. Aine massivooks nimetatakse ühikpinda ajaühikus läbivat aine massi. Olgu vaatluse all aine ühemõõtmeline liikumine (nt torus). Olgu ristlõike ühikpindala nullhetkest $t = 0$ kuni positiivse ajahetkeni $t > 0$ läbiv aine mass tähistatud $m(t)$-ga. Keskmine massivoog ajavahemikus $(t, t+\Delta t)$ on $j_{kesk} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t}$. Massivoog ajahetkel t avaldub valemiga

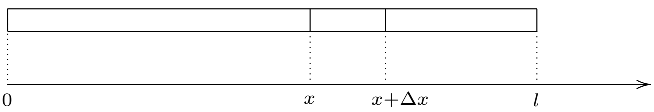
$$j(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = m'(t).$$

Sarnane mõiste elektrodünaamikast on voolutihedus. Selleks on juhtme ristlõike ühikpindala ajaühikus läbiv laeng. Olgu ristlõike ühikpindala nullhetkest $t = 0$ kuni positiivse ajahetkeni $t > 0$ läbiv laeng $q(t)$. Voolutihedus ajahetkel t avaldub valemiga

$$j(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

Voolutugevuse arvutamiseks tuleb voolutihedus korrutada juhtme ristlõike pindalaga S, st $I = Sj = Sq'(t)$.

Joontihedus. Olgu vaatluse all x-telje sihis paiknev materiaalne objekt, mille pikkus on l ja mõõdud teistes dimensioonides on suhteliselt väikesed (nt toru mis täidetud gaasiga, tahkest ainest koosnev varras).



Joontiheduse all mõeldakse massi suhet pikkusesse. Kui aine paikneb ühtlaselt, avaldub selle joontihedus lihtsa valemiga $\gamma = \frac{m}{l}$, kus m on aine kogumass.

Käsitleme keerulisemat juhtu, kui aine on jaotunud ebaühtlaselt. Sellisel juhul on aine tihedus erinevates punktides erinev. Tähistame osalõigu $[0, x]$ kohal paikneva aine massi $m(x)$-ga. Siis on osalõigu $[x, x+\Delta x]$ kohal paikneva mass $\Delta m = m(x+\Delta x) - m(x)$. Jagades Δm osalõigu pikkusega saame aine keskmise joontiheduse osalõigul $[x, x+\Delta x]$:

$$\gamma_{kesk} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Aine joontiheduse valemi punktis x saame keskmise joontiheduse valemist kahandades osalõigu pikkuse Δx nulliks:

$$\gamma(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} = m'(x).$$

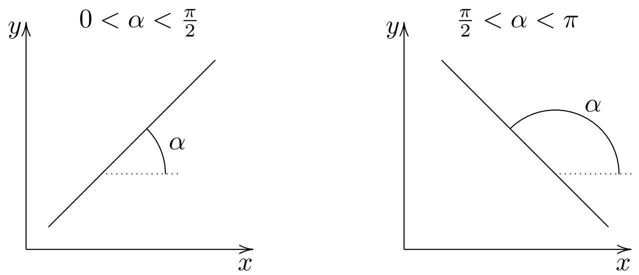
Marginaalkulu ja -tulu. Olgu vaatluse all ettevõte, mis väljastab mingit toodangut. Toodangu mahu tähistame q-ga. Tootmine on seotud teatud kuludega. Olgu kulud tähistatud C-ga. Mida suurem on toodangu maht, seda suuremad on ka kulud. Seega on C suuruse q funktsioon, st $C = C(q)$. Mikroökonoomikas nimetatakse kulufunktsiooni tuletist marginaalkuluks ja tähistatakse MC-ga. Seega $MC(q) = C'(q)$. Marginaalkulu võrdub ligikaudselt lisakuluga, mis on vajalik selleks, et suurendada toodangu mahtu ühe ühiku võrra.

Olgu $R(q)$ toodangu hulga q müümisest saadav tulu. Tulufunktsiooni tuletis on nn marginaaltulu ja seda tähistatakse MR-ga. Seega $MR(q) = R'(q)$. Marginaaltulu võrdub ligikaudselt lisatuluga, mis saadakse ühe täiendava toodanguühiku müügist.

3.4 Joone puutuja. Tuletise geomeetriline sisu.

Sirge tõusunurk ja tõus. Tasandil xy - teljestikus antud sirge s *tõusunurgaks* α nimetatakse selle sirge ja x - telje positiivse suuna vahelist nurka, mille väärtus radiaanides jääb poollõigule $[0, \pi)$. Tõusva sirge korral $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja langeva sirge korral $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (vt joonis 3.2).

Sirge s *tõusuks* p nimetatakse tema tõusunurga tangensit, st $p = \tan \alpha$.



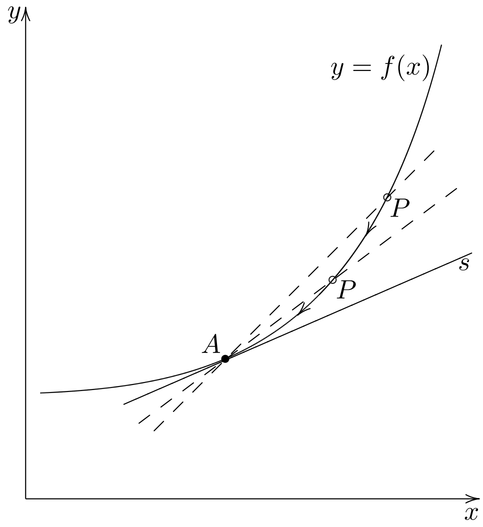
Joonis 3.2

Punkti $A = (a, b)$ läbiva ja tõusu p omava sirge võrrand on

$$y - b = p(x - a)\,. \tag{3.2}$$

Viimane valem kehtib juhul, kui tõus p on määratud, st kui $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Juhul kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on p määramata (tinglikult võrdne ∞-ga). Siis on s paralleelne y - teljega ja tema võrrand on $x = a$.

Joone puutuja ja selle tõus. Puutuja võrrand. Olgu tasandil xy - teljestikus antud joon $y = f(x)$ (st funktsiooni $y = f(x)$ graafik). Joone $y = f(x)$ *puutujaks* punktis A nimetatakse tema lõikaja AP piirsirget, mis tekib punkti P lähenemisel punktile A mööda joont $y = f(x)$ (vt joonis 3.3, puutuja on seal tähistatud s-ga).



Joonis 3.3

Meie eesmärgiks on tuletada valem puutuja tõusu jaoks ja koostada puutuja võrrand. Kõigepealt märgime, et valemi (3.2) põhjal avaldub puutuja s võrrand punktis $A(a, f(a))$ kujul

$$y - f(a) \,=\, p(x-a)\,, \tag{3.3}$$

kus p on s tõus. Momendil on p veel tundmatu suurus. Avaldame suuruse p funktsiooni f tuletise kaudu. Selleks vaatleme joonist 3.4. Joonisel on lõikaja AP tõusunurk tähistatud β-ga. Seega on lõikaja AP tõus $\bar{p} = \tan\beta$. Täisnurkselt kolmnurgalt APQ näeme, et

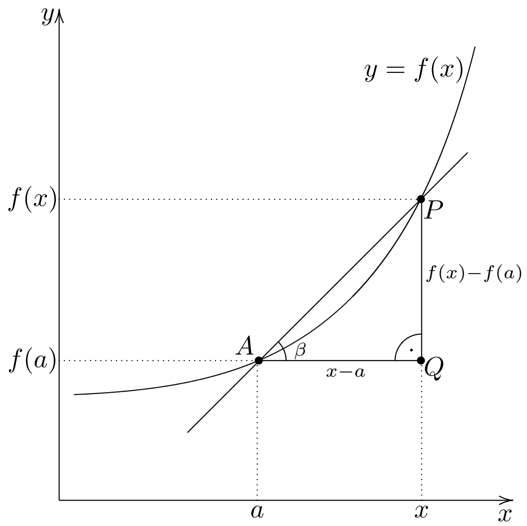
$$\bar{p} \,=\, \tan\beta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Vaatleme nüüd piirprotsessi $x \to a$. Kui $x \to a$, siis P läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$. Vastavalt puutuja definitsioonile läheneb lõikaja AP joone $y = f(x)$ puutujale punktis A. Seega läheneb ka lõikaja tõus $\bar{p}$ puutuja tõusule p. Järelikult, tuletise definitsiooni põhjal saame puutuja tõusu jaoks järgmise valemi:

$$p \,=\, \lim_{x\to a} \bar{p} \,=\, \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,=\, f'(a)\,. \tag{3.4}$$

Valemitest (3.3) ja (3.4) saamegi puutuja võrrandi

$$y - f(a) \,=\, f'(a)(x-a)\,. \tag{3.5}$$



Joonis 3.4

Nagu nägime, funktsiooni $y = f(x)$ *tuletis* argumendi väärtusel $x = a$ võrdub selle funktsiooni graafiku *puutuja tõusuga* punktis koordinaatidega $(a, f(a))$.

3.5 Funktsiooni muudu lineariseerimine. Diferentsiaal

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis kui graafiku puutuja tõus näitab selle funktsiooni kasvu määra. Rakendustes tekib aga sageli vajadus avaldada valemi kujul või hinnata funktsiooni absoluutset juurdekasvu ehk muutu Δy.

Meie eesmärgiks on analüüsida Δy struktuuri ja tuletada lihtne ligikaudne valem Δy jaoks.

Vastavalt tuletise definitsioonile, $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kus

$$\Delta x = x - a \quad \text{ja} \quad \Delta y = f(x) - f(a).$$

Eeldame, et

$$f'(a) \neq 0.$$

Tähistame $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja $f'(a)$ vahe järgmiselt:

$$r(\Delta x) := \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\,. \tag{3.6}$$

Arvutame:

$$\lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Big[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Big] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) =$$
$$= f'(a) - f'(a) = 0 \, . \tag{3.7}$$

Siirdume nüüd funktsiooni muudu Δy avaldamise juurde. Selleks avaldame võrdusest (3.6) suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + r(\Delta x)$$

ja korrutame saadud avaldise Δx-ga. Saame valemi

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \beta \, , \quad \text{kus} \quad \beta = r(\Delta x)\Delta x. \tag{3.8}$$

Funktsiooni muut Δy koosneb kahest liidetavast: $f'(a)\Delta x$ ja β. Esimene liidetav $f'(a)\Delta x$ sõltub *lineaarselt* argumendi muudust Δx.

Suurust $f'(a)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *diferentsiaaliks* punktis a ja tähistatakse dy või df.

Seega

$$\Delta y = dy + \beta \, . \tag{3.9}$$

Nii dy kui ka β on lõpmatult kahanevad suurused protsessis $\Delta x \to 0$. Võrdleme neid suurusi Δx suhtes. Esiteks, eelduse $f'(a) \neq 0$ põhjal saame

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(a)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(a) = f'(a) \neq 0 \, .$$

Teiseks, (3.7) põhjal kehtib

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} r(\Delta x) = 0 \, .$$

Näeme, et esimene liidetav, so diferentsiaal dy, on sama järku lõpmatult kahanev suurus Δx suhtes ja teine liidetav β on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus Δx suhtes. Järelikult väikese Δx korral hakkab diferentsiaal funktsiooni muudu avaldises domineerima. Seetõttu võime lugeda diferentsiaali dy funktsiooni muudu *peaosaks*. *Jääkliikme* β võib väikese Δx korral funktsiooni muudu avaldises ära jätta. Kehtib ligikaudne valem

$$\Delta y \approx dy \quad \text{kui} \quad \Delta x \approx 0 \, . \tag{3.10}$$

Näide. Olgu $f(x) = x^2$. Arvutame

$$\Delta y = f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = (x+a)(x-a) = (2a + x - a)(x-a) =$$
$$= 2a(x-a) + (x-a)^2.$$

Seega

$$\Delta y \;=\; 2a\Delta x + \Delta x^2.$$

Esimene liidetav selles valemis on diferentsiaal $dy = 2a\Delta x$, kusjuures tegur $2a$ võrdub funktsiooni f tuletisega punktis a, st $f'(a) = 2a$. Teine liidetav on jääkliige $\beta = \Delta x^2$, mis on kõrgemat järku lõpmatult kahanev Δx suhtes. Järelikult $\Delta x \approx 0$ korral saame $\Delta y \approx 2a\Delta x$.

Argumendi diferentsiaal. Tuletise esitus diferentsiaalide suhte kaudu. Vastavalt diferentsiaali definitsioonile,

$$dy \;=\; f'(a)\Delta x\,. \tag{3.11}$$

Vaatleme konkreetselt juhtu, kui funktsioon väärtus võrdub oma argumendiga, st $y = x$. Tähistame funktsiooni $y = x$ diferentsiaali sümboliga dx ja nimetame seda *argumendi x diferentsiaaliks.*

Kui $y = x$, siis $y' = 1$ ja rakendades valemit (3.11) saame

$$dx \;=\; \Delta x\,.$$

Järelikult võrdub argumendi diferentsiaal argumendi muuduga Δx.

Olgu $y = f(x)$ jällegi suvaline funktsioon. Asendame suuruse Δx suurusega dx valemis (3.11). Saame võrduse

$$dy \;=\; f'(a)dx\,. \tag{3.12}$$

Siit tuleneb järgmine valem tuletise jaoks diferentsiaalide suhte kaudu:

$$f'(a) \;=\; \frac{dy}{dx}\,. \tag{3.13}$$

Liitfunktsiooni tuletise valemi tõestus. Tõestame liitfunktsiooni tuletise valemi (reegel nr 6 §3.2). Olgu $y = f(x)$ ja $z = g(y)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni ning olgu nendest moodustatud liitfunktsioon $z = g[f(x)]$. Funktsiooni tuletise saab esitada sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena (valem (3.13)). Kuna funktsiooni f argument on x ja sõltuv muutuja y, siis kirjutades valemi (3.13) üles punktis x, saame $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Analoogiliselt toimime ka funktsiooniga g, mille argument on y ja sõltuv muutuja z. Esitame g tuletise sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena. Saame $g'(y) = \frac{dz}{dy}$. Viimaks avaldame ka liitfunktsiooni $z = g[f(x)]$ tuletise tema argumendi on x ja sõltuva muutuja z diferentsiaalide jagatisena. Saame $\{g[f(x)]\}' = \frac{dz}{dx}$. Kasutades neid valemeid arvutame:

$$\{g[f(x)]\}' \;=\; \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{dz\,dy}{dy\,dx} \;=\; \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \;=\; g'(y)f'(x) \;=\; g'[f(x)]\,f'(x)\,.$$

Seega olemegi tõestanud liitfunktsiooni tuletise arvutamise valemi

$$\{g[f(x)]\}' \;=\; g'[f(x)]\,f'(x).$$

Diferentsiaali omadused.

1. $d(u+v) \;=\; du + dv,$
2. $d(u-v) \;=\; du - dv,$
3. $d(uv) \;=\; vdu + udv,$
4. $d(Cu) \;=\; Cdu\,, \quad C\, -$ konstant,
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) \;=\; \frac{vdu - udv}{v^2}$ kui $v \neq 0.$

Need omadused järelduvad vahetult tuletiste arvutamise põhireeglitest 1 - 5 (vt §3.2). Näiteks tuletiste arvutamise põhireegli 2 ja diferentsiaali valemi $df = f'dx$ põhjal

$$d(uv) \;=\; (uv)'dx \;=\; (u'v + v'u)dx \;=\; v\,u'dx + u\,v'dx \;=\; vdu + udv\,,$$

mis tõestab omaduse 3.

3.6 Näiteid diferentsiaali kasutamise kohta.

Näide 1. Keemilise reaktsiooni kiirus on $C\,' = 4.2\frac{\text{mol}}{\text{L s}}$. Leida aine kontsentratsiooni juurdekasv 5 sekundi jooksul.

Kuna $\Delta C \approx dC$, saame $\Delta C \approx dC = C\,'dt = 4.2 \cdot 5 = 21\frac{\text{mol}}{\text{L}}$.

Näide 2. Ettevõtte kulufunktsioon on antud valemiga

$$C \;=\; 10^{-5}q^3 + 0.2q + 30 \quad \text{tuhat eurot}\,,$$

kus q on toodangu maht. Hetke toodangu maht on 100 ühikut. Millised on täiendavad kulud selleks, et suurendada toodangut 50 ühiku võrra? Mitme ühiku võrra on võimalik suurendada toodangut, kui tootmisse mahutada täiendavalt 20 tuhat eurot?

Leiame kulufunktsiooni tuletise

$$C\,' = 3 \cdot 10^{-5}q^2 + 0.2 = 3 \cdot 10^{-5}100^2 + 0.2 = 0.5.$$

Kui soovitakse suurendada toodangut 50 ühiku võrra, on täiendav kulu

$$\Delta C \approx dC = C\,'dq = 0.5 \cdot 50 = 25 \text{ tuhat eurot.}$$

Lahendame ka ülesande teise osa, kus tuleb leida toodandu mahu kasv, kui tootmisse on täiendavalt mahutatud 20 tuhat eurot. Selleks avaldame valemist $dC = C'dq$ suuruse dq. Saame $dq = \frac{dC}{C\,'}$. Arvutame toodangu mahu kasvu: $\Delta q = dq = \frac{dC}{C\,'} = \frac{20}{0.5} = 40$ ühikut.

Üks diferentsiaali rakendusvaldkondi on *vigade hindamine.* Olgu vaatluse all mingi protsess, mida iseloomustavad kaks suurust: x ja y, kusjuures y on x funktsioon, st $y = f(x)$. Olgu suuruse x täpne arvuline väärtus a. Oletame, et suurust x mõõdetakse. Teatavasti on mõõtmine alati ebatäpne. Mõõtmise tulemusena saadakse suuruse x täpse väärtuse a asemel tema ligikaudne väärtus $a+\Delta x$. Liidetav Δx on siin suuruse x mõõtmisel tehtud viga. Suuruse y väärtus arvutatakse valemist $y = f(x)$. Tema täpne väärtus on $f(a)$. Mõõtmistulemuste alusel arvutatav y väärtus on $f(a+\Delta x)$. Järelikult võrdub suuruse y viga funktsiooni f muuduga

$$\Delta y \;=\; f(a+\Delta x) - f(a)\,.$$

Suuruse x vea Δx täpne väärtus ei ole küll teada, kuid enamasti on teada mõõtmisel kasutatava seadme vea ülempiir Δx^*. Seega saab Δx hinnata järgmiselt: $|\Delta x| \;\leq\; \Delta x^*$. Suuruse y vea hindamisel saab aga kasutada diferentsiaali. Kui Δx on väike, siis

$$\Delta y \;\approx\; dy \;=\; f'(a)\Delta x.$$

Kasutades absoluutväärtuse omadusi saame

$$|\Delta y| \;\approx\; |dy| \;=\; |f'(a)\Delta x| = |f'(a)|\,|\Delta x| \leq |f'(a)|\,\Delta x^*\,.$$

Siit nähtub, et y vea ülempiiriks sobib järgmine suurus:

$$\Delta y^* = |f'(a)|\,\Delta x^*.$$

Näide 3. Ideaalgaasi võrrand $pV = nRT$ seob rõhku p, ruumalat V, moolide arvu n ja temperatuuri T. Konstandi R väärtus on $R = 0.08206\frac{\mathrm{L\,atm}}{\mathrm{K\,mol}}$. Leida gaasi moolide arv n ja hinnata selle viga, kui rõhu $p = 4\,\mathrm{atm}$ ja ruumala $V = 35\,\mathrm{L}$ juures on mõõdetud temperatuuri T. Mõõtmistulemus koos vea ülempiiriga on $T = 298.4 \pm 0.1\,\mathrm{K}$.

Tuletame moolide arvu valemi: $n = \frac{pV}{RT}$. Suuruse n arvuline väärtus on $n = \frac{4\cdot 35}{0.08206\cdot 298.4} = 5.717\,\mathrm{mol}$. Vea hindamiseks avaldame funktsiooni $n = n(T)$ tuletise argumendi T suhtes: $n' = -\frac{pV}{RT^2}$. Kuna $\Delta T^* = 0.1$, saame

$$\Delta n^* = |n'|\Delta T^* = \frac{4\cdot 35}{0.08206\cdot 298.4^2}\cdot 0.1 = 0.002.$$

Vastus on $n = 5.717 \pm 0.002\,\mathrm{mol}$.

Näide 4. Komposiitmaterjalist keha pinge σ ja deformatsioon ε (suhteline pikenemine) on seotud valemiga $\sigma = E\varepsilon - \nu\varepsilon^2$, kus $E = 200$ MPa ja $\nu = 500$ MPa on vastavalt esimest ja teist järku elastsuskordajad. Mõõtmisel saadi järgmine deformatsiooni väärtus: $\varepsilon = 0.15 \pm 0.01\%$. Leida pinge ja hinnata selle viga.

Arvutame pinge väärtuse: $\sigma = 200\cdot 0.15 - 500\cdot 0.15^2 = 18.75$ MPa. Pinge vea hindamiseks leiame funktsiooni $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ tuletise: $\sigma' = E - 2\nu\varepsilon$. Vea ülempiir on

$$\Delta\sigma^* = |\sigma'|\Delta\varepsilon^* = |200 - 2\cdot 500\cdot 0.15|\cdot 0.01 = 0.5.$$

Ülesande vastus on $\sigma = 18.75 \pm 0.5$ MPa.

3.7 Mitmemuutuja funktsiooni osatuletised.

Osatuletise definitsioon. Olgu antud n-muutuja funktsioon $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ ja olgu

$$x_1 = a_1,\ \ldots,\ x_n = a_n$$

argumentide $x_1, \ldots, x_n$ teatavad fikseeritud väärtused. Järgmist piirväärtust:

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x_i - a_i} \tag{3.14}$$

nimetatakse funktsiooni f *osatuletiseks muutuja* x_i *suhtes* argumentide väärtustel $a_1, \ldots, a_n$ tähistatakse

$$f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{või} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, \ldots, a_n)$$

või

$$u'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{või} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{või} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u(a_1, \ldots, a_n)\,.$$

Argumendi x_i järgi osatuletise võtmisel fikseeritakse funktsiooni f ülejäänud argumendid $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, st võetakse nad võrdseteks vastavalt arvudega $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Vabaks jäetud argumendi x_i suhtes arvutatakse funktsiooni muut (selleks on valemis (3.14) esineva murru lugeja), jagatakse see argumendi muuduga $x_i - a_i$ ja arvutatakse saadud jagatise piirväärtus argumendi muudu lähenemisel nullile. Järelikult, kui me defineerime ainult muutujast x_i sõltuva ühemuutuja funktsiooni g selliselt, et fikseerime ülejäänud argumendid $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ äsjakirjeldatud viisil, st

$$g(x_i) \;=\; f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$

siis langeb funktsiooni f osatuletis argumendi x_i suhtes kokku ühemuutuja funktsiooni g tavalise tuletisega, st kehtib võrdus

$$g'(a_i) = f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Kui f on ühemuutuja funktsioon, siis tema osatuletis ühtib tuletisega.

Osatuletis kui funktsioon. Eksisteerigu funktsioonil f lõplik osatuletis $f'_{x_i}(\vec{a})$ kõigi vektorite $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ korral mingis hulgas $D \subseteq \mathbb{R}^n$. See tähendab et igale vektorile $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ hulgast D saab vastavusse seada ühe kindla reaalarvu $f'_{x_i}(\vec{x})$. Siis on osatuletis f'_{x_i} hulgas D määratud n-muutuja funktsioon.

Näide. Arvutame funktsiooni

$$u = x^2 + \sin y + yz$$

osatuletised muutujate x, y ja z suhtes. Kui leitakse osatuletist teatud fikseeritud argumendi suhtes, siis kõiki teisi argumente käsitatakse konstantidena.

Arvutades osatuletist x suhtes, on y ja z konstandid ning seega on konstantne ka liidetav $\sin y + yz$ funktsiooni avaldises. Konstantse liidetava tuletis on aga null. Järelikult, kasutades astmefunktsiooni x^2 tuletise valemit, saame $u'_x = 2x$. Kui me arvutame osatuletist y suhtes, on liidetav x^2 konstantne ja ühtlasi esineb liidetavas yz konstantne kordaja z. Konstantse kordaja saab aga tuletise märgi alt välja tuua:

$$(yz)'_y = z \cdot y'_y = z \cdot 1 = z.$$

Tulemusena saame $u'_y = \cos y + z$. Lõpuks avaldame ka osatuletise argumendi z suhtes. Selle arvutamisel on x ja y konstandid. Saame $u'_z = y$.

Kõrgemat järku osatuletised. Vaatleme n-muutuja funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_n)$. Eeldame, et sellel funktsioonil eksisteerib osatuletis $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ hulgas D. Sellisel juhul on f'_{x_i} hulgas D määratud funktsioon. See funktsioon võib samuti omada osatuletisi.

Funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_n)$ osatuletise osatuletisi nimetatakse selle funktsiooni *teist järku osatuletisteks.*

Teist järku osatuletisi on kahte liiki.

1. Kui võtta funktsioonist $f(x_1, \ldots, x_n)$ kaks korda osatuletist ühe ja sama muutuja x_i suhtes, siis saab selle funktsiooni *teist järku osatuletise x_i suhtes*, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{või} \quad f''_{x_i x_i}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

2. Kui aga võtta funktsioonist $f(x_1, \ldots, x_n)$ kõigepealt osatuletis muutuja x_i suhtes ja seejärel osatuletis muutuja x_j suhtes, kus $i \neq j$, siis tekib selle funktsiooni *teist järku segatuletis x_i ja x_j suhtes*, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{või} \quad f''_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Ilmselt on viimasel juhul võimalik segatuletist võtta ka eelnevaga vastupidises järjekorras, st kõigepealt muutuja x_j suhtes ja seejärel muutuja x_i suhtes. Siis me saame segatuletise x_j ja x_i suhtes, st

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{ehk} \quad f''_{x_j x_i}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Osutub, et segatuletise väärtus ei sõltu üksikute tuletiste võtmise järjekorrast, st kehtib võrdus $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$. Seda demonstreerib ka alljärgnev näide.

Näide. Avaldame funktsiooni $z = xy^2 + x^3 \cos y$ esimest ja teist järku osatuletised:

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2 + 3x^2 \cos y \quad & z''_{xx} &= 6x \cos y \quad & z''_{xy} &= 2y - 3x^2 \sin y \\ z'_y &= 2xy - x^3 \sin y \quad & z''_{yy} &= 2x - x^3 \cos y \quad & z''_{yx} &= 2y - 3x^2 \sin y. \end{aligned}$$

Nagu näeme, kehtib võrdus $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Arvutades funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ teist järku osatuletise osatuletise, saame selle funktsiooni kolmandat järku osatuletise, viimasest osatuletise arvutamisel neljandat järku osatuletise jne.

Näiteks kui me võtame funktsioonist $f''_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ osatuletise muutuja x_i suhtes, saame kolmandat järku osatuletise, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^3}{\partial x_j x_i^2} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{või} \quad f'''_{x_j x_i x_i}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Kui me aga võtame funktsioonist $f''_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ osatuletise muutuja x_k suhtes, saame kolmandat järku osatuletise, mida tähistatakse

$$\frac{\partial^3}{\partial x_j x_i x_k} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{või} \quad f'''_{x_j x_i x_k}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_m)$ *m-järku osatuletise* avaldis on järgmine:

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Siin on arvutatud p_1 korda osatuletist x_1 järgi, p_2 korda osatuletist x_2 järgi jne. Osatuletiste koguarv on $m = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

3.8 Väljateooria mõisteid.

Skalaarväli ja vektorväli. n-muutuja funktsiooni nimetatakse ka n-mõõtmeliseks *skalaarväljaks.* Mõiste tuleneb sellest, et taoline funktsioon seab etteantud vektorile vastavusse reaalarvu ehk skalaari.

Näiteks ruumipunktist koordinaatidega (x, y, z) sõltuv temperatuur T on skalaarväli.

Olgu antud $2n$ muutuvat suurust $x_1, \ldots, x_n$ ja $u_1, \ldots u_n$. Kujutist, mis seab igale vektorile $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ teatud hulgast $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vastavusse ühe kindla vektori $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ nimetatakse *n- mõõtmeliseks vektorväljaks.*

Olgu antud n-mõõtmeline vektorväli $\vec{f}$. Vektorit, milleks $\vec{f}$ kujutab etteantud vektori $\vec{x}$ tähistame sümboliga $\vec{f}(\vec{x})$. seega kehtib järgmine seos: $\vec{u} = \vec{f}(\vec{x})$.

n-mõõtmeline vektorväli $\vec{f}$ koosneb n skalaarsest komponendist $f_1, \ldots, f_n$. Konkreetne komponent f_i on skalaarväli, mis seab vektorile $\vec{x}$ vastavusse skalaari u_i, st $u_i = f_i(\vec{x}_i)$.

Näiteks vedeliku voolamist teatud ruumipiirkonnas iseloomustab voolukiirus. Tegemist on kolmekomponendilise vektoriga $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Voolukiirus võib erinevates ruumi punktides olla erinev. Sel juhul on $\vec{v}$ kolmemõõtmeline vektorväli, mis sõltub ruumivektorist $\vec{x} = (x, y, z)$.

Skalaarvälja gradient. Vektorvälja potentsiaal. Olgu antud skalaarväli $u = F(\vec{x})$. Skalaarvälja F *gradiendiks* kohal $\vec{x}$ nimetatakse järgmist vektorit:

$$\operatorname{grad} F(\vec{x}) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} F(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} F(\vec{x})\Big).$$

Seega on grad F vektorväli, mis on moodustatud skalaarvälja F osatuletistest.

Gradiendi tähistamiseks kasutatakse ka sümbolit $\vec{\nabla}$ (või ∇), mis kannab nime *nabla*. Tegemist on osatuletiste sümbolitest moodustatud vektoriga:

$$\vec{\nabla} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big).$$

Seega grad F asemel võime kirjutada $\vec{\nabla} F$.

Vektorvälja $\vec{f}$ nimetatakse *potentsiaalseks* ehk *konservatiivseks*, kui leidub skalaarväli F nii, et $\vec{f} = \operatorname{grad} F$. Seejuures nimetatakse skaalarvälja F vektorvälja $\vec{f}$ *potentsiaaliks*.

Konservatiivsed on *näiteks* gravitatsiooniväli ja elektriväli. Konservatiivne on ka vedeliku kiirusväli, kui puuduvad keerised ja hõõrdejõud on tühised.

Vektorvälja divergents ja rootor. Alustame mõnede täiendavate vektoritega seotud mõistete sissetoomisega. Vektorite $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *skalaarkorrutiseks* nimetatakse järgmist arvu:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Kolmemõõtmeliste vektorite $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ *vektorkorrutiseks* nimetatakse järgmist vektorit:

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Olgu antud vektorväli $\vec{u} = \vec{f}(\vec{x})$. Vektorvälja $\vec{f}$ *divergentsiks* kohal $\vec{x}$ nimetatakse järgmist skalaari:

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\vec{x}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(\vec{x}).$$

Füüsikaliselt väljendab divergents vektorväljas sisalduvate allikate tihedust. Kui väli $\vec{f}$ on allikavaba, siis $\operatorname{div} \vec{f} = 0$. Näiteks vedeliku vaba voolamise korral on kiirusvälja divergents null, st $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Olgu antud kolmemõõtmeline vektorväli $\vec{u} = \vec{f}(\vec{x})$. Vektorvälja $\vec{f}$ *rootoriks* kohal $\vec{x}$ nimetatakse järgmist vektorit:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_3(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(\vec{x})\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\vec{x})\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\vec{x})\right). \end{aligned}$$

Rootori abil saab kirjeldada vektorväljas sisalduvaid keeriseid. Kui väli $\vec{f}$ on keerisevaba, siis $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$, kus $\vec{0} = (0, 0, 0)$ on nullvektor.