Peatükk 2

Piirväärtus ja pidevus

Käesoleva peatüki põhiteema on funktsiooni piirväärtus. Tegemist on baasmõistega, mille kaudu on defineeritud mitmed teised rakenduste seisukohalt olulised mõisted, nt tuletis ja integraal.

2.1 Ümbrused

Reaalarvu a *ümbruseks* nimetatakse suvalist vahemikku $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kus $\varepsilon > 0$ on ümbruse raadius. Arv x kuulub arvu a ümbrusesse $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arvteljel on arvust a väiksem kui ε, st $|x-a| < \varepsilon$.

Näiteks arvu 0 ümbrus on suvaline vahemik $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Arv x kuulub 0-i ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $|x| < \varepsilon$.

Reaalarvu a *vasakpoolseks ümbruseks* nimetatakse suvalist poollõiku $(a-\varepsilon, a]$, kus $\varepsilon > 0$. Arv x kuulub arvu a vasakpoolsesse ümbrusesse $(a-\varepsilon, a]$ siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arveljel on arvust a väiksem kui ε, st $|x-a| < \varepsilon$, ja x ei asetse a-st paremal, st $x \leq a$.

Reaalarvu a *parempoolseks ümbruseks* nimetatakse suvalist poollõiku $[a, a+\varepsilon)$, kus $\varepsilon > 0$. Arv x kuulub arvu a parempoolsesse ümbrusesse $[a, a+\varepsilon)$ siis ja ainult siis, kui selle arvu kaugus arveljel on arvust a väiksem kui ε, st $|x-a| < \varepsilon$, ja x ei asetse a-st vasakul, st $x \geq a$.

Suuruse *lõpmatus ümbruseks* nimetatakse suvalist vahemikku (M, ∞), kus $M > 0$. Arv x kuulub lõpmatuse ümbrusesse (M, ∞) siis ja ainult siis, kui $x > M$.

Suuruse *miinus lõpmatus ümbruseks* nimetatakse suvalist vahemikku $(-\infty, -M)$, kus $M > 0$. Arv x kuulub miinus lõpmatuse ümbrusesse $(-\infty, -M)$ siis ja ainult siis, kui $x < -M$.

Ümbrusi kasutame piirprotsesside defineerimisel järgmises paragrahvis.

2.2 Muutuva suuruse piirprotsessid.

Selleks, et saaks rääkida protsessist x "läheneb millelegi", peab vaadeldav suurus x olema järjestatud.

Muutuva suuruse x kohta öeldakse, et ta on *järjestatud*, kui tema väärtustest on moodustatud järjestatud hulk, st hulk mille iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev ja kumb järgnev.

Järjestatud muutuva suuruse erijuhuks on ajast sõltuv suurus. Sel juhul on loomulik lugeda kahest suuruse väärtusest järgnevaks seda, mis vastab suuremale ajamuutuja väärtusele. Näiteks materiaalse objekti sirgjoonelisel liikumisel läbitud teepikkus $S(t)$ on järjestatud suurus. Kui $t_2 > t_1$, siis teepikkuse väärtus $S(t_2)$ järgneb teepikkuse väärtusele $S(t_1)$.

Järjestatud muutuva suuruse erijuhuks on ka reaalarvude jada

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots.$$

Sel juhul genereerib jada indeks järjestuse. Kui $k > i$, siis jada element x_k järgneb elemendile x_i.

Meid huvitavad sellised järjestatud suurused, mis mööda järjestust edasi liikudes lähenevad teatud fikseeritud arvule. Need on nn koonduvad ehk piirväärtust omavad suurused.

Vaatleme *näidet* mehaanika alalt. Olgu vaatluse all vedru, mis on ühest otsast kinnitatud ja teine ots on lahtine. Olgu tasakaaluasendis vedru pikkus a. Kui vedrut kokku suruda või välja venitada ja seejärel vabastada, hakkab tema lahtine otspunkt tasakaaluasendi ümber võnkuma. Vedru pikkus on sel juhul ajast sõltuv (seega järjestatud) muutuv suurus x. Võnkumisprotsessi mõjutavad mitmesugused takistusjõud, mille tagajärjel võnkumine sumbub, st vedru pikkus x läheneb arvule a. Vaatame kuidas oleks võimalik sellist lähenemisprotsessi matemaatilistes mõistetes kirjeldada. Üks võimalus on järgmine. Valime mingisuguse tasakaalupunkti ümbruse, näiteks $(a - 0.1, a + 0.1)$. Kuna võnkumine sumbub, siis mingist ajahetkest (st x väärtusest) alates kõik järgnevad vedru pikkuse väärtused x jäävad vahemikku $(a-0.1, a+0.1)$, st rahuldavad võrratust $|x - a| < 0.1$. Edasi valime mingi teise, väiksema raadiusega ümbruse, nt $(a-0.01, a+0.01)$. Arvestades jällegi seda, et võnkumine sumbub, leidub mingi teine, eelnevast suurem ajahetk ja sellele vastav x väärtus nii, et kõik järgnevad x väärtused jäävad vahemikku $(a - 0.01, a + 0.01)$, st rahuldavad võrratust $|x - a| < 0.01$. Sellist arutelu võib jätkata suvalise kuitahes väikse raadiusega ümbrusega $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Järelikult, iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu a ümbrusesse $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, st rahuldavad võrratust $|x - a| < \varepsilon$.

Muutuva suuruse piirväärtuse üldine definitsioon on järgmine:

Olgu x järjestatud muutuv suurus. Arvu a nimetatakse muutuva suuruse x *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu a ümbrusesse $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, st rahuldavad võrratust $|x - a| < \varepsilon$.

Kui arv a on suuruse x piirväärtus, siis öeldakse, et suurus x läheneb arvule a ehk koondub arvuks a ja kirjutatakse

$$x \to a \qquad \text{või} \qquad \lim x = a\,.$$

Piirväärtuse üldises definitsioonis ei ole fikseeritud kuidas (vasakult, paremalt või mõlemalt poolt) muutuja x lähenemine arvule a toimub. Seega on piirprotsessi $x \to a$ erijuhtudeks sellised piirprotsessid, kus x läheneb arvule a ainult vasakult või paremalt. Ühepoolsete piirprotsesside definitsioonid saame üldisest piirväärtuse definitsioonist, kui me seal esineva ümbruse $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ kitsendame kas vasakpoolseks või parempoolseks ümbruseks $(a-\varepsilon, a]$ või $[a, a+\varepsilon)$.

Muutuv suurus x *läheneb vasakult* arvule a, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku $(a-\varepsilon, a]$. Sellisel juhul kirjutatakse

$$x \to a^-\,.$$

Muutuv suurus x *läheneb paremalt* arvule a, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku $[a, a+\varepsilon)$. Siis kirjutatakse

$$x \to a^+\,.$$

Saab konstrueerida ka lihtsaid mehaanilisi mudeleid, mis illustreerivad ühepoolset koondumist. Näiteks, kui vedrule on lisatud tugev võnkumist summutav seade, siis võnkumist ümber tasakaalupunkti ei teki. Vedru pikkus x läheneb a-le vasakult või paremalt sõltuvalt sellest, kas vedru oli algselt kokku surutud või välja venitatud.

Defineerime ka sellised piirprotsessid, mille käigus x läheneb pluss või miinus lõpmatusele. Idee poolest on need definitsioonid sarnased eelpooltoodud definitsioonidele, ainult reaalarvu a ümbruste asemel kasutatakse lõpmatuse või miinus lõpmatuse ümbrust.

Alustame suurusest, mis läheneb pluss lõpmatusele. Piltlikult väljendudes on tegemist sellise järjestatud suurusega, mis mööda järjestust edasi liikudes kasvavab piiramatult, st saab suuremaks kuitahes suurest positiivsest arvust M. Selgitame seda lähemalt. Olgu näiteks $M = 100$. Leidub selline x väärtus, millest alates kõik järgnevad x väärtused on 100-st suuremad. Suurendame arvu M. Olgu nt $M = 10000$. Leidub selline (eelnevast suurem) x väärtus, millest alates kõik järgnevad x väärtused on 10000-st suuremad jne. Kokkuvõttes, kuitahes suure positiivse arvu M korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused on arvust M suuremad, st rahuldavad võrratust $x > M$.

Üldine definitsioon on järgmine:

Muutuva suuruse x *piirväärtus on lõpmatus* ehk muutuv suurus x läheneb lõpmatusele, kui iga kuitahes suure positiivse arvu M korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuluvad lõpmatuse ümbrusesse (M, ∞), st rahuldavad võrratust $x > M$. Taolist piirprotsessi tähistatakse järgmiselt:

$$x \to \infty \qquad \text{või} \qquad \lim x = \infty\,.$$

Analoogiliselt saab defineerida ja selgitada ka piirprotsessi $x \to -\infty$. Definitsioon on järgmine:

Muutuva suuruse x *piirväärtus on miinus lõpmatus* ehk muutuv suurus x läheneb miinus lõpmatusele, kui iga kuitahes suure positiivse arvu M korral saab näidata sellist suuruse x väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad miinus lõpmatuse ümbrusesse $(-\infty, -M)$, st rahuldavad võrratust $x < -M$. Sellise piirprotsessi tähistusviis on

$$x \to -\infty \qquad \text{või} \qquad \lim x = -\infty\,.$$

2.3 Jada piirväärtus.

Kuna jada on järjestatud muutuva suuruse erijuht, saab muutuva suuruse piirväärtuse definitsiooni jadale otseselt üle kanda. See järgmine:

Arvu a nimetatakse *reaalarvude jada* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral saab näidata sellist jada elementi x_n, millest alates kõik järgnevad jada elemendid kuuluvad arvu a ümbrusesse $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Jada piirväärtuse kirjutusviis on järgmine:

$$x_n \to a \qquad \text{või} \qquad \lim x_n = a\,.$$

Lõplikku piirväärtust omavat jada nimetatakse *koonduvaks.* Vastasel juhul nimetatakse jada *hajuvaks.*

Näiteid. 1. Vaatleme jada elementidega $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$. Taolise jada piirväärtus on 1. Jada käitumise jälgimiseks paneme kirja jada esimeste elementide arvulised väärtused:

$$x_1 = 0.5,\ x_2 = 1.25,\ x_3 = 0.875,\ x_4 = 1.0625,\ x_5 = 0.96875,$$
$$x_6 = 1.015625,\ x_7 = 0.9921875,\ x_8 = 1.0039625, \ldots$$

Valime $\varepsilon = 0.1$. Näeme, et alates neljandast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid arvu 1 ümbrusesse $(1 - 0.1, 1 + 0.1) = (0.9, 1.1)$. Järgmiseks valime $\varepsilon = 0.05$. Alates viiendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid ümbrusesse $(1 - 0.05, 1 + 0.05) = (0.95, 1.05)$. Valime veel $\varepsilon = 0.01$. Alates seitsmendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad elemendid ümbrusesse

$(1 - 0.01, 1 + 0.01) = (0.99, 1.01)$ jne. Kuitahes väikese $\epsilon > 0$ korral saab leida jada elemendi, millest alates kõik järgnevad elemendid kuuluvad arvu 1 ümbrusesse $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$.

2. Vaatleme jada $x_n = n^3$. Valime $M = 1000$. Alates 11. elemendist $x_{11} = 11^3 = 1331$ on kõik järgnevad elemendid suuremad kui 1000. Valime veel $M = 10000$. Alates 22. elemendist $x_{22} = 22^3 = 10648$ on kõik järgnevad elemendid suuremad kui 10000. Kuitahes suure $M > 0$ korral saab leida jada elemendi, millele järgnevad elemendid on suuremad kui M. Jada piirväärtus on ∞.

2.4 Funktsiooni piirväärtus.

Olgu antud funktsioon f argumendiga x. Kui argument x on järjestatud, siis saame me järjestada ka funktsiooni väärtused $f(x)$, lugedes funktsiooni kahest väärtusest järgnevaks selle, mis vastab argumendi järgnevale väärtusele.

Näiteks olgu funktsiooni $f(x) = x^2$ argumentidest moodustatud järjestatud hulk $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Siis vastab sellele funktsiooni väärtuste järjestatud hulk $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$.

Olgu funktsiooni f argument x järjestatud selliselt, et ta koondub mingiks arvuks a. Meid huvitab küsimus: kas sellisel juhul ka funktsiooni väärtus läheneb mingile arvule b? Kui see on nii, ja peale selle arv b ei sõltu punktiks a koonduvast argumendi x järjestusest, siis on vaadeldaval funktsioonil punktis a piirväärtus.

Funktsiooni piirväärtuse definitsioon. Funktsioonil f on *piirväärtus* b kohal a, kui suvalises piirprotsessis $x \to a$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule b.

Funktsiooni piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a\,.$$

Fraasi "piirväärtus kohal a" asemel võib kasutada ka samaväärseid fraase "piirväärtus punktis a" või "piirväärtus argumendi lähenemisel väärtusele a".

Tingimus $x \neq a$ piirväärtuse definitsioonis on sisse toodud selleks, et eristada funktsiooni väärtust kohal a tema piirväärtusest kohal a. Taoline eristus on vajalik funktsiooni pidevuse käsitlemisel edaspidistes paragrahvides.

Näide. Uurime funktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

käitumist protsessis $x \to 1$. Vaadeldav funktsioon on määratud kõikjal välja arvatud punkt $x = 1$. Kui $x \neq 1$, siis taandades murru $\frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ lugejast ja nimetajast teguri $x - 1$, saame sellele funktsioonile lihtsama valemi

$$f(x) = 2x + 4\,, \quad x \neq 1.$$

Valime mõned punktiks 1 koonduvad argumendi jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

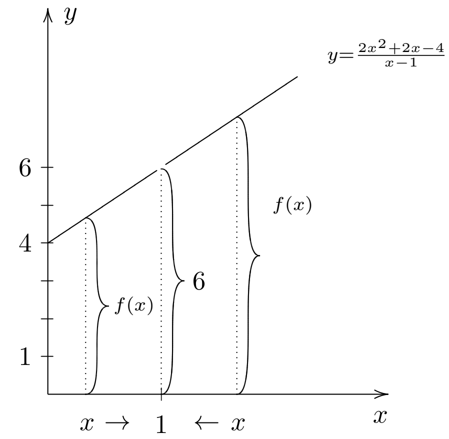
$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 0 & x_2 = 0.5 & x_3 = 0.9 & x_4 = 0.95 & x_5 = 0.99\ldots \\ f(x_1) = 4 & f(x_2) = 5 & f(x_3) = 5.8 & f(x_4) = 5.9 & f(x_5) = 5.98\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 2 & x_2 = 1.5 & x_3 = 1.1 & x_4 = 1.05 & x_5 = 1.01\ldots \\ f(x_1) = 8 & f(x_2) = 7 & f(x_3) = 6.2 & f(x_4) = 6.1 & f(x_5) = 6.02\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 3 & x_2 = 0 & x_3 = 1.1 & x_4 = 0.99 & x_5 = 1.001\ldots \\ f(x_1) = 10 & f(x_2) = 4 & f(x_3) = 6.2 & f(x_4) = 5.98 & f(x_5) = 6.002\ldots \end{array}$$

Esimeses jadas koondub x vasakult, teises koondub paremalt ja kolmandas koondub võnkudes. Kõigil toodud juhtudel koondub funktsiooni väärtus $f(x)$ arvuks 6. Saab näidata, et suvalises piirprotsessis $x \to 1$ koondub vaadeldava funktsiooni väärtus arvuks 6. Seega

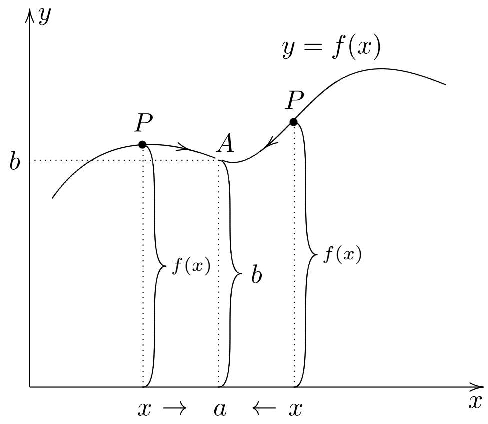
$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = 6.$$



Joonis 2.1

Selle funktsiooni piirväärtust saab jälgida ka joonisel 2.1. Teatavasti näitab suurus $f(x)$ funktsiooni graafiku "kõrgust" punktis x. Kui $x \to 1^-$, siis funktsiooni graafiku kõrgus suureneb ja läheneb arvule 6. Kui $x \to 1^+$, siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb samuti arvule 6. Suvalises piirprotsessis $x \to 1$, kus $x \neq 1$, läheneb funktsiooni graafiku kõrgus ühele ja samale arvule 6.

Funktsiooni piirväärtuse geomeetriline tõlgendus. Kui funktsioonil $f(x)$ on piirväärtus b punktis a, siis suvalises piirprotsessis $x \to a$, kus $x \neq a$, läheneb funktsiooni graafiku kõrgus $f(x)$ ühele ja samale arvule b. Teiste sõnadega: suvalises piirprotsessis $x \to a$, kus $x \neq a$, läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt $P(x, f(x))$ ühele ja samale punktile $A(a, b)$. Seda on kujutatud joonisel 2.2.



Joonis 2.2

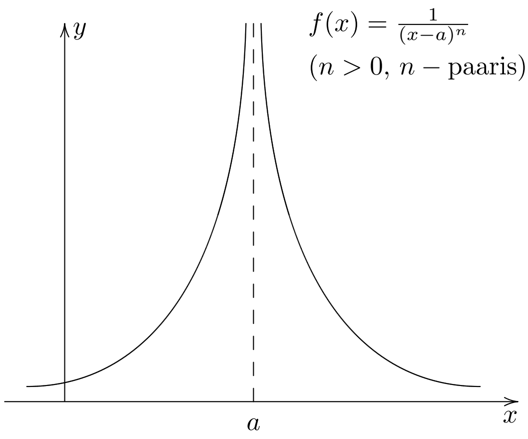
Lõpmatusi sisaldavad piirväärtused. Analoogiliselt saab käsitleda ka piirväärtusi, milles lõplike arvude a ja b asemel esinevad suurused $-\infty$ või ∞. Selleks tuleb ülaltoodud definitsioonis lihtsalt arv a või b asendada kas suurusega ∞ või $-\infty$.

Näiteks piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

definitsioon on järgmine:
Funktsioonil f on *piirväärtus* ∞ kohal a, kui suvalises piirprotsessis $x \to a$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb lõpmatusele.

Vaatleme mõningaid *näiteid* lõpmatusi sisaldavate piirväärtuste kohta. Neis näidetes kasutame piirväärtuste leidmiseks funktsioonide graafikuid.
1. Leiame $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n}$, kus n on positiivne paarisarv. Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ graafik on kujutatud joonisel 2.3.



Joonis 2.3

Graafikult näeme, et kui $x \to a$, siis funktsiooni graafiku kõrgus $f(x)$ kasvab piiramatult ja läheneb lõpmatusele. Seega

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty.$$

2. Leiame $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$. Funktsiooni $y = \arctan x$ graafik on kujutatud joonisel 1.14 (Ptk 1). Kui $x \to \infty$, siis funktsiooni graafiku kõrgus kasvab ja läheneb arvule $\frac{\pi}{2}$. Kui $x \to -\infty$, siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule $-\frac{\pi}{2}$. Seega

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Leiame $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arccot} x$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x$. Funktsiooni $y = \operatorname{arccot} x$ graafik on kujutatud joonisel 1.15 (Ptk 1). Kui $x \to \infty$, siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule 0. Kui $x \to -\infty$, siis funktsiooni graafiku kõrgus suureneb ja läheneb arvule π. Seega

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arccot} x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi.$$

4. Leiame $\lim\limits_{x \to \infty} a^x$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x$. Eksponentfunktsioon käitub erijuhtudel $a > 1$ ja $0 < a < 1$ kvalitatiivselt erinevalt (Ptk 1 joonised 1.4 ja 1.5). Esimeselt jooniselt näeme, et

$$\text{juhul } a > 1 \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

ning teiselt jooniselt leiame, et

$$\text{juhul } 0 < a < 1 \quad \lim_{x \to \infty} a^x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty.$$

2.5 Funktsiooni ühepoolsed piirväärtused.

Funktsioonil f on *vasakpoolne piirväärtus* b kohal a, kui suvalises piirprotsessis $x \to a^-$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule b.

Vasakpoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a^- .$$

Funktsioonil f on *parempoolne piirväärtus* b kohal a, kui suvalises piirprotsessis $x \to a^+$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule b.

Parempoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a^+ .$$

Toodud definitsioonides võib lõpliku arvu b asendada kas $-\infty$-ga või ∞-ga.

Näide. Olgu antud järgmine funktsioon:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kui } x < 1, \\ x+3, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$$

Arvutame selle funktsiooni ühepoolsed piirväärtused punktis 1. Valime punktiks 1 koonduvad vasak- ja parempoolsed jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

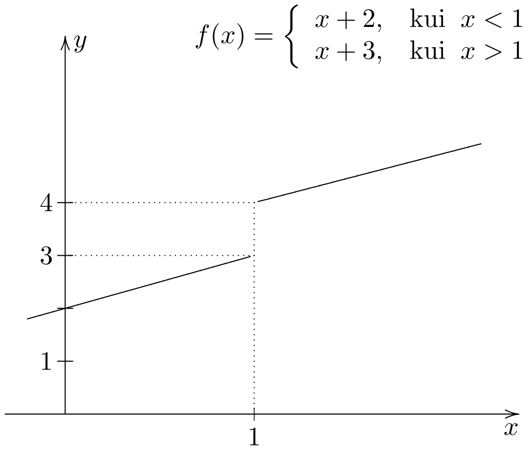
$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 0 & x_2 = 0.5 & x_3 = 0.9 & x_4 = 0.95 & x_5 = 0.99\ldots \\ f(x_1) = 2 & f(x_2) = 2.5 & f(x_3) = 2.9 & f(x_4) = 2.95 & f(x_5) = 2.99\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 2 & x_2 = 1.5 & x_3 = 1.1 & x_4 = 1.05 & x_5 = 1.01\ldots \\ f(x_1) = 5 & f(x_2) = 4.5 & f(x_3) = 4.1 & f(x_4) = 4.04 & f(x_5) = 4.01\ldots \end{array}$$

Näeme, et vasakult arvuks 1 koonduva jada korral läheneb $f(x)$ arvule 3 ja paremalt arvuks 1 koonduva jada korral läheneb $f(x)$ arvule 4. Saab tõestada, et suvaliste piirprotsesside $x \to 1^-$ ja $x \to 1^+$ korral läheneb $f(x)$ vastavalt arvudele 3 ja 4. Seega

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4.$$

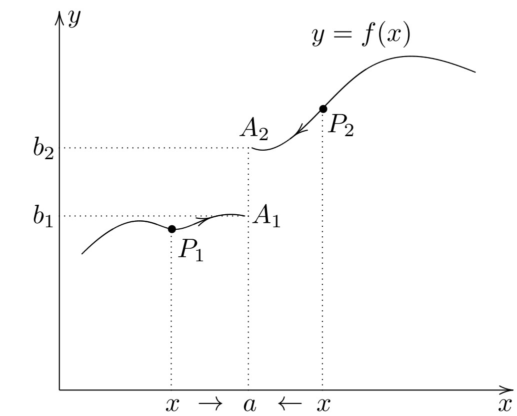
Illustreerime seda tulemust graafiliselt joonisel 2.4.



Joonis 2.4

Kui $x \to 1^-$, siis funktsiooni graafiku kõrgus tõuseb ja läheneb arvule 3. Kui $x \to 1^+$, siis funktsiooni graafiku kõrgus väheneb ja läheneb arvule 4.

Antud näites on funktsiooni ühepoolsed piirväärtused punktis 1 erinevad. Seetõttu puudub funktsioonil piirväärtus punktis 1. See on nii, sest eelmises paragrahvis toodud piirväärtuse definitsioon ei ole täidetud. Ei leidu arvu b, millele $f(x)$ läheneks kõigis piirprotsessides $x \to 1$, kus $x \neq 1$. Vasakpoolses piirprotsessis $x \to 1^-$ ja parempoolses piirprotsessis $x \to 1^+$ läheneb $f(x)$ erinevatele arvudele.



Joonis 2.5

Funktsiooni ühepoolsete piirväärtuste geomeetriline tõlgendus. Kui funktsioonil $f(x)$ on vasakpoolne piirväärtus b_1 ja parempoolne piirväärtus b_2 punktis a, siis suvalises piirprotsessis $x \to a^-$, kus $x \neq a$, läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt $P_1(x, f(x))$ punktile $A_1(a, b_1)$ ja suvalises piirprotsessis $x \to a^+$, kus $x \neq a$, läheneb funktsiooni graafiku jooksev punkt $P_2(x, f(x))$ punktile $A_2(a, b_2)$ (joonis 2.5).

Kui $b_1 \neq b_2$, siis funktsioonil puudub piirväärtus punktis a, sest $f(x)$ ei lähene ühele ja samale arvule suvalises piirprotsessis $x \to a$, $x \neq a$. Piirprotsessi $x \to a$ erijuhtudel $x \to a^-$ ja $x \to a^+$ läheneb $f(x)$ erinevatele arvudele.

Kehtib järgmine väide:

Teoreem 2.1. Piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ eksisteerib siis ja ainult siis, kui eksisteerivad <u>võrdsed</u> ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Peale selle, piirväärtuse $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ olemasolu korral kehtib valem

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\,.$$

Eespooltoodud näites olid funktsioonil olemas mõlemad ühepoolsed piirväärtused, kuid piirväärtus puudus. Saab tuua *näiteid* sellistest funktsioonidest, millel puuduvad ka ühepoolsed piirväärtused. Analüüsime funktsiooni

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

käitumist protsessis $x \to 0^+$. Selleks valime järgmise paremalt nulliks koonduva jada: $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ (ehk $x_1 = \frac{2}{3\pi}$, $x_1 = \frac{2}{5\pi}, \ldots$). Vastavad funktsiooni väärtused on siis

$$f(x_n) = \sin(n + 1/2)\pi = \begin{cases} 1 & \text{kui } n \text{ on paaris,} \\ -1 & \text{kui } n \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Funktsioon omandab vaheldumisi väärtusi -1 ja 1 ning seega ei lähene ühelegi arvule. Järelikult parempoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ puudub. Analoogiliselt saab näidata, et puudub ka vasakpoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\frac{1}{x}$.

Vaatleme veel mõningaid *näiteid* lõpmatusi sisaldavate ühepoolsete piirväärtuste kohta.

1. Leiame $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ ja $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$. Ptk 1 joniselt 1.10 näeme, et vasakpoolses piirprotsessis $x \to \frac{\pi}{2}^-$ funktsiooni $\tan x$ graafiku kõrgus kasvab piiramatult ja parempoolses piirprotsessis $x \to \frac{\pi}{2}^+$ funktsiooni $\tan x$ graafiku kõrgus väheneb piiramatult. Seega

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

2. Analoogiliselt, kasutades Ptk 1 joonist 1.11, leiame

$$\lim_{x\to 0^-} \cot x = -\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty.$$

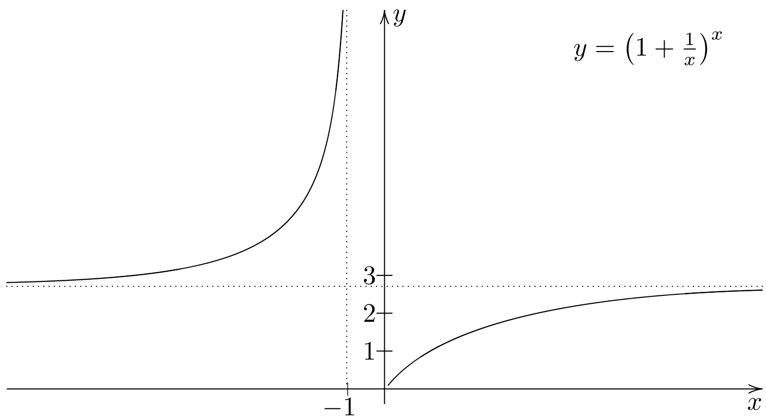
3. Leiame $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x$. Funktsiooni $y = \log_a x$ graafik on juhtudel $a > 1$ ja $0 < a < 1$ kvalitatiivselt erinev (Ptk 1 joonised 1.6 ja 1.7). Neilt joonistel näeme, et

$$\begin{array}{ll} \text{juhul } a > 1 & \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{ja} \\ \text{juhul } 0 < a < 1 & \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \infty. \end{array}$$

Arv e ja sellega seotud funktsioon. Vaatleme järgmist funktsiooni:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on $X = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Graafik on kujutatud joonisel 2.6.



Joonis 2.6

Jooniselt näeme, et $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 0$. Peale selle, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, läheneb funktsioon $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ teatud arvule, mis asub 2 ja 3 vahel. Tegemist on irratsionaalarvuga e:

$$e \approx 2.71828...$$

Seega

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x . \tag{2.1}$$

Logaritmi alusel e nimetatakse naturaallogaritmiks ja tähistatakse sümboliga ln. Seega $\log_e x = \ln x$.

Toome ühe *näite* piirväärtuse (2.1) kohta. Olgu hoiustatud rahasumma P. Aastane intressimäär olgu r. Kui intressi arvestatakse k korda aastas, siis on ühe perioodi intressimäär $\frac{r}{k}$. Esimese perioodi lõpus on balanss $B = P(1+\frac{r}{k})$. Aasta (so k-nda) perioodi lõpus on balanss

$$B = P\Big(1+\frac{r}{k}\Big)^k.$$

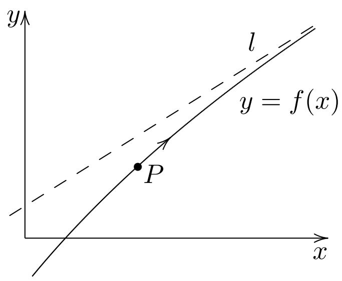
Näiteks kui intressi arvestatakse kord kvartalis, on vastav valem $B = P(1+\frac{r}{4})^4$, kui arvestatakse kord kuus, siis $B = P(1+\frac{r}{12})^{12}$, kord päevas, siis $B = P(1+\frac{r}{365})^{365}$ jne. Vaatleme juhtu, kui intressi arvestatakse pidevalt. Aastase balansi leidmiseks tuleb meil arvutada piirväärtus $B = \lim\limits_{k\to\infty} P(1+\frac{r}{k})^k$. Tehes muutuja vahetuse $x = \frac{k}{r}$ leiame:

$$B = \lim_{k\to\infty} P\left(1+\frac{r}{k}\right)^k = \lim_{x\to\infty} P\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xr} = P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^r = Pe^r.$$

Funktsiooni graafiku asümptoodid. Vaatleme tasandil xy - teljestikus joont $y = f(x)$. Sirget l nimetatakse joone $y = f(x)$ *asümptoodiks*, kui joone $y = f(x)$ punkti eemaldumisel lõpmatusse selle punkti kaugus sirgest l läheneb nullile.

Punkt eemaldub lõpmatusse, kui selle punkti kaugus koordinaatide alguspunktist läheneb lõpmatusele.

Mõistet on illustreeritud joonisel 2.7. Joon $y = f(x)$ on kujutatud pidevalt ja asümptoot l on toodud katkendlikuna. Kui joone $y = f(x)$ punkt P eemaldub lõpmatusse, siis tema kaugus sirgest l läheneb nullile.



Joonis 2.7

Detailsemalt vaatleme vertikaal- ja horisontaalasümptoote.

Sirge $x = a$ on joone $y = f(x)$ *vertikaalasümptoot*, kui piirprotsessis $x \to a^-$ või $x \to a^+$ funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb kas pluss või miinus lõpmatusele.

Näiteks sirged $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on joone $y = \tan x$ vertikaalasümptoodid (vt Ptk 1 joonis 1.10). Sirged $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on on joone $y = \cot x$ vertikaalasümptoodid (Ptk 1 joonis 1.11). Sirge $x = -1$ on joone $y = (1+\frac{1}{x})^x$ vertikaalasümptoodiks (joonis 2.6).

Sirge $y = b$ on joone $y = f(x)$ *horisontaalasümptoot*, kui piirprotsessis $x \to -\infty$ või $x \to \infty$ funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule b.

Näiteks sirged $y = \frac{\pi}{2}$ ja $y = -\frac{\pi}{2}$ on joone $y = \arctan x$ horisontaalasümptoodid (vt Ptk 1 joonis 1.14). Sirged $y = 0$ ja $y = \pi$ on joone $y = \operatorname{arccot} x$ horisontaalasümptoodid (vt Ptk 1 joonis 1.15).

2.6 Funktsiooni piirväärtuste omadused.

Loetleme ilma tõestuseta aritmeetiliste tehetega seotud omadused:

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)\,,$
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)\,,$
3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{kui} \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\,.$

Otseste järeldustena omadustest 1 ja 2 saame tuletada veel kaks omadust:

4. $\lim\limits_{x \to a} [C f(x)] = \lim\limits_{x \to a} C \lim\limits_{x \to a} f(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)\,, \quad C\ -\ \text{konstant}\,,$
5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} [f(x) + (-1) g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} [(-1) g(x)]$
   $= \lim\limits_{x \to a} f(x) + (-1) \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)\,.$

Omadused 1 - 5 jäävad kehtima ka siis, kui neis esinev piirprotsess $x \to a$ asendada ühega järgmistest piirprotsessidest:

$$x \to a^-\,,\ x \to a^+\,,\ x \to -\infty\,,\ x \to \infty\,.$$

2.7 Lõpmatult kahanevad ja kasvavad suurused ning nende võrdlemine.

Lõpmatult kahanev ja lõpmatult kasvav suurus ning nendevaheline seos.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *lõpmatult kahanevaks* ehk *lõpmatult väikeseks* suuruseks protsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *lõpmatult kasvavaks* suuruseks protsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

Teoreem 2.2. Funktsioon $f(x)$ on lõpmatult kahanev suurus protsessis $x \to a$ siis ja ainult siis, kui $\frac{1}{f(x)}$ on lõpmatult kasvav suurus samas protsessis.

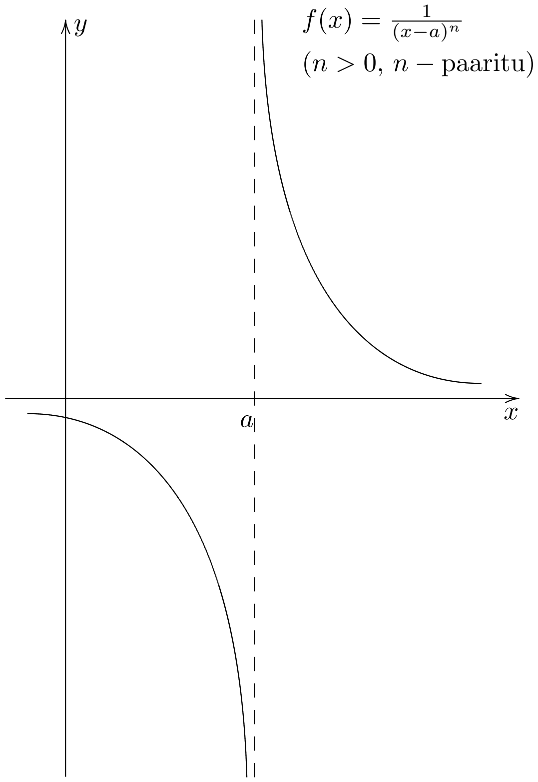
Illustreerime selle teoreemi sisu *näitega*. Vaatleme funktsiooni $(x-a)^n$, kus n on positiivne täisarv. See funktsioon on lõpmatult kahanev protsessis $x \to a$, st

$$\lim_{x\to a}(x-a)^n = 0.$$

Seega $\frac{1}{(x-a)^n}$ on lõpmatult kasvav samas protsessis, st

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right| = \infty.$$

Siin võib eristada kaks erijuhtu:
1. Kui n on paarisarv, siis $\frac{1}{(x-a)^n} > 0$ iga $x \neq a$ korral. Seega $\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right| = \frac{1}{(x-a)^n}$ ning $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^n} = \infty$. Seda juhtu on kujutatud joonisel 2.3 eespool.
2. Kui n on paaritu arv, siis $\frac{1}{(x-a)^n} < 0$, kui $x < a$ ja $\frac{1}{(x-a)^n} > 0$, kui $x > a$. Seega läheneb funktsioon $\frac{1}{(x-a)^n}$ ühepoolsetes piirprotsessides erineva märgiga lõpmatustele. Täpsemalt: $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ ja $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^n} = \infty$ (vt joonis 2.8). Kuna ühepoolsed piirväärtused on erinevad, puudub piirväärtus $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^n}$. Küll aga eksisteerib $\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right| = \infty$.



Joonis 2.8

Lõpmatult kahanevate ja kasvavate suuruste võrdlemine. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ lõpmatult kahanevad suurused protsessis $x \to a$. See tähendab, et mõlemad need suurused lähenevad nullile, kui $x \to a$. Meid huvitab järgmine küsimus: kuidas võrrelda nende suuruste kahanemise kiirusi? Loomulik on seda teha suhet $\frac{f(x)}{g(x)}$ kasutades. Kui selline suhe koondub nulliks, siis lugejas olev $f(x)$ kahaneb kiiremini, kui nimetajas olev $g(x)$. Kui aga sellisel suhtel on nullist erinev piirväärtus, siis on $f(x)$ ja $g(x)$ kahanemiskiirused samas suurusjärgus.

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, siis nimetatakse suurusi $f(x)$ ja $g(x)$ *sama järku* lõpmatult kahanevateks suurusteks.

2. Kui $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, siis nimetatakse suurusi $f(x)$ ja $g(x)$ *ekvivalentseteks* lõpmatult kahanevateks suurusteks märkides seda kujul $f(x) \sim g(x)$.

3. Kui $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, siis nimetatakse suurust $f(x)$ *kõrgemat järku* lõpmatult kahanevaks suuruseks $g(x)$ suhtes.

Näited. 1. Vaatleme funktsioone $f(x) = ax^{n+m}$ ja $g(x) = bx^n$, kus n ja m on positiivsed täisarvud ning $a \neq 0$, $b \neq 0$. Tegemist on lõpmatult kahanevate suurustega piirprotsessis $x \to 0$. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^{n+m}}{bx^n} = \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} x^m = 0.$$

Järelikult on funktsioon ax^{n+m} kõrgemat järku lõpmatult väike suurus funktsiooni bx^n suhtes protsessis $x \to 0$.
2. On võimalik tõestada, et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Järelikult $\sin x \sim x$ piirprotsessis $x \to 0$.

Lõpmatult kahanevate suuruste võrdluslauseid saab rakendada ligikaudsetes arvutustes. Kuna $\sin x \sim x$ piirprotsessis $x \to 0$, siis on väikese nurga x korral selle nurga siinus võrdne nurga endaga, st $\sin x \approx x$, kui $x \approx 0$.

Madalamat järku lõpmatult kahaneva liidetava võib ligikaudsetes arvutustes arvestamata jätta. Näiteks vaatleme funktsiooni $z(x) = x^2 + 4x^3$ juhul, kui $x \approx 0$. Liidetav $4x^3$ on kõrgemat järku lõpmatult kahanev x^2 suhtes protsessis $x \to 0$. Seega võib liidetava $4x^3$ funktsiooni $z(x)$ avaldisest välja jätta, kuna ta on suhteliselt väiksem kui x^2. Saame $z(x) = x^2 + 4x^3 \approx x^2$, kui $x \approx 0$.

Sarnased võrdluslaused saab sõnastada ka lõpmatult kasvavate suuruste jaoks. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ lõpmatult kasvavad suurused protsessis $x \to a$. See tähendab, et $|f(x)| \to \infty$ ja $|g(x)| \to \infty$, kui $x \to a$.

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, siis nimetatakse suurusi $f(x)$ ja $g(x)$ *sama järku* lõpmatult kasvavateks suurusteks.

2. Kui $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, siis nimetatakse suurusi $f(x)$ ja $g(x)$ *ekvivalentseteks* lõpmatult kasvavateks suurusteks märkides seda kujul $f(x) \sim g(x)$.

3. Kui $\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$, siis nimetatakse suurust $f(x)$ *kõrgemat järku* lõpmatult kasvavaks suuruseks $g(x)$ suhtes.

Näiteid. 1. Vaatleme uuesti funktsioone $f(x) = ax^{n+m}$ ja $g(x) = bx^n$, kus n ja m on positiivsed täisarvud ning $a \neq 0$, $b \neq 0$. Seekord olgu vaatluse all piirprotsess $x \to \infty$. Arvutame

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{|a|x^{n+m}}{|b|x^n} = \frac{|a|}{|b|}\lim_{x\to\infty} x^m = \infty.$$

Järelikult on funktsioon ax^{n+m} kõrgemat järku lõpmatult kasvav suurus funktsiooni bx^n suhtes protsessis $x \to \infty$.
2. On võimalik tõestada, et $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n} = \infty$, kui $a > 1$ ja $n > 0$. Eksponentfunktsioon a^x on kõrgemat järku lõpmatult kasvav funktsioon suvalise astmefunktsiooni x^n suhtes (eksponetsiaalne kasv on kiirem astmelisest kasvust).

Madalamat järku lõpmatult kasvava liidetava võib ligikaudsetes arvutustes arvestamata jätta. Näiteks vaatleme funktsiooni $r(x) = x^3 + 5x^2$ juhul, kui x on suur arv. Liidetav x^3 on kõrgemat järku lõpmatult kasvav $5x^2$ suhtes protsessis $x \to \infty$. Seega võib liidetava $5x^2$ funktsiooni $r(x)$ avaldisest välja jätta, kuna ta on suhteliselt väiksem kui x^3. Saame $r(x) = x^3 + 5x^2 \approx x^3$.

Lõpuks vaatleme veel ühte näidet. Naaseme van der Waalsi võrrandi juurde (Ptk 1 valem (1.7)): $\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$. Lihtsustame seda võrrandit suure molaarruumala V_m korral. Sel juhul $\frac{1}{V_m} \approx 0$ (rakendasime Teoreemi 2.2). Esimeses teguris domineerib liidetav P, st $P + \frac{a}{V_m^2} \approx P$. Teises teguris domineerib aga liidetav V_m, st $V_m - b \approx V_m$. Kokkuvõttes saame van der Waalsi võrrandist ideaalse gaasi olekuvõrrandi $PV_m = RT$.

2.8 Funktsiooni pidevus. Katkevuspunktid.

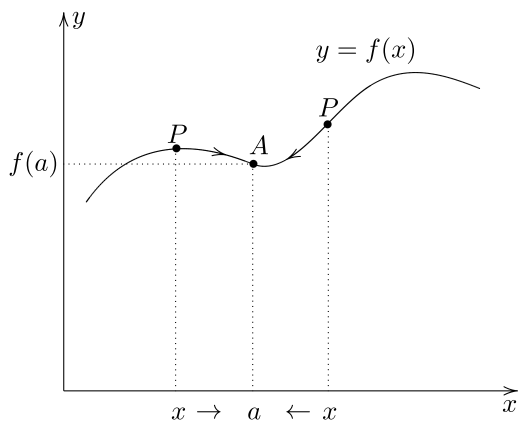
Pideva funktsiooni mõiste. Funktsiooni f nimetatakse *pidevaks punktis* a, kui

1. f on määratud argumendi väärtusel a, st $a \in X$,
2. eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Väljendi "pidev punktis a" asemel võib kasutada ka sünonüüme "pidev kohal a" või "pidev argumendi väärtusel a".

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni pidevus joone pidevust. Täpsemalt: argumendi väärtusel $x = a$ pideva funktsiooni graafik on punktis $A(a, f(a))$ pidev joon (joonis 2.9).

Selgitame seda täpsemalt. Vastavalt pidevuse definitsioonis toodud 1. tingimusele on funktsioonil $f(x)$ olemas väärtus punktis a, st $f(a)$ eksisteerib. Peale selle, 2. tingimuse põhjal on olemas ka piirväärtus $b = \lim_{x \to a} f(x)$. Viimane tähendab seda, et suvalises piirprotsessis $x \to a$, kus $x \neq a$, läheneb graafiku jooksev punkt $P(x, f(x))$ ühele ja samale punktile $A(a, b)$. Lõpuks, 3. tingimuse põhjal kehtib $b = f(a)$, mis tähendab, et graafiku piirpunkt A asub samuti funktsiooni graafikul, st graafik on punktis A pidev joon.



Joonis 2.9

Pideva funktsiooni definitsioonis esineva 3. tingimuse võib kirja panna ka pisut teistsugusel kujul. Selleks kasutame alljärgnevalt defineeritud argumendi muudu ja funktsiooni muudu mõisteid:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a \quad - \quad \textit{argumendi muut kohal } a\,, \\ \Delta y &= f(x) - f(a) \quad - \quad \textit{funktsiooni muut kohal } a\,. \end{aligned}$$

Kehtib järgmine samaväärsete valemite ahel:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to a} \Delta y = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0\,. \end{aligned}$$

Järelikult on pideva funktsiooni definitsioonis esinev 3. tingimus samaväärne võrdusega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y \,=\, 0\,.$$

Pideva funktsiooni muut läheneb nullile, kui selle funktsiooni argumendi muut läheneb nullile. Teiste sõnadega: pidev funktsioon muutub vähe, kui tema argument muutub vähe.

Katkevuspunkti mõiste. Punkti, kus funktsioon ei ole pidev, nimetatakse selle funktsiooni *katkevuspunktiks.*

Katkevuspunktis funktsiooni graafik katkeb. Katkevuspunkt võib paikneda näiteks väljaspool funktsiooni määramispiirkonda. Sellisel juhul on rikutud pideva funktsiooni definitsioonis toodud 1. tingimus Juhul, kui katkevuspunkt paikneb funktsiooni määramispiirkonnas, siis on rikutud kas pidevuse 2. või 3. tingimus.

Näiteid. 1. §2.4 vaadeldud funktsioon

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

ei ole määratud punktis $x = 1$. Seega ei ole pidevuse definitsioonis toodud tingimus 1 täidetud ja tegemist on katkevuspunktiga. Märgime veel, et antud punktis on olemas piirväärtus $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 6$, mistõttu pidevuse tingimus 2 on siiski täidetud. Vaadeldava funktsiooni graafik on sirge, millest on eemaldatud punkt koordinaatidega 1 ja 6 (joonis 2.1). Graafik katkeb argumendi väärtuse $x = 1$ kohal.

2. §2.5 vaadeldud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kui } x < 1 \\ x + 3, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

katkeb punktis $x = 1$. Ühepoolsed piirväärtused eksisteerivad, kuid nad on erinevad. Nimelt $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ja $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$. Seega piirväärtus $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ puudub. Rikutud on pidevuse tingimus 2. Funktsiooni graafikul esineb "hüpe" argumendi väärtuse $x = 1$ kohal (joonis 2.4).

3. Funktsioonil $f(x) = \tan x$ on katkevuspunkt $x = \frac{\pi}{2}$, sest funktsioon ei ole selles punktis määratud. Rikutud on pidevuse tingimus 1.

2.9 Pidevus hulkadel. Funktsiooni absoluutsed ekstreemumid. Lõigul pidevate funktsioonide omadusi.

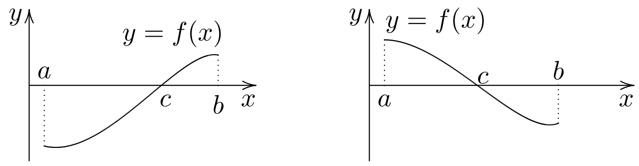
Hulgal pidevad funktsioonid. Olgu $\mathcal{A}$ vahemik, lõik või poollõik. Kui funktsioon f on pidev hulga $\mathcal{A}$ kõigis punktides, siis öeldakse, et see funktsioon on *pidev hulgal* $\mathcal{A}$.

Hulgal $\mathcal{A}$ pideva funktsiooni graafik on selle hulga kohal pidev joon.

Lõigul pidevate funktsioonide omadusi. Alljärgnevalt vaatleme kahte lõigul pidevate funktsioonide omadust. Esimene neist on seotud funktsiooni f nullkoha, st võrrandi $f(x) = 0$ lahendi olemasoluga.

Teoreem 2.3. Kui funktsioon f on pidev lõigul $[a, b]$ ja omandab selle lõigu otspunktides erineva märgiga väärtusi, siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt c, kus $f(c) = 0$.

Teoreemi on intuitiivselt lihtne põhjendada. Eelduse kohaselt on f pidev lõigul $[a, b]$, seega on joon $y = f(x)$ selle lõigu kohal pidev. Peale selle, kuna f omandab lõigu otspunktides erineva märgiga väärtusi, siis asub antud joone üks otspunkt allpool x-telge ja ja teine otspunkt pealpool x-telge. Pidev joon peab kuskil x- telge lõikama (vt joonis 2.10). Lõikepunktis kehtibki võrdus $f(c) = 0$.



Joonis 2.10

Lõigul pideva funktsiooni 2. omaduse sõnastamiseks on vaja eelnevalt defineerida funktsiooni absoluutsed ekstreemumid.

Olgu $\mathcal{A}$ mingi reaalarvudest koosnev hulk.

Kui leidub punkt $x_1 \in \mathcal{A}$ nii, et iga teise punkti x korral hulgast $\mathcal{A}$ kehtib võrratus $f(x_1) \geq f(x)$, siis nimetatakse arvu $f(x_1)$ funktsiooni f *suurimaks väärtuseks* (*absoluutseks maksimumiks*) hulgal $\mathcal{A}$.

Kui leidub punkt $x_2 \in \mathcal{A}$ nii, et iga teise punkti x korral hulgast $\mathcal{A}$ kehtib võrratus $f(x_2) \leq f(x)$, siis nimetatakse arvu $f(x_2)$ funktsiooni f *vähimaks väärtuseks* (*absoluutseks miinimumiks*) hulgal $\mathcal{A}$.

Funktsiooni suurima väärtuse kohal on funktsiooni graafikul kõrgeim punkt ja funktsiooni vähima väärtuse kohal on funktsiooni graafikul madalaim punkt.

Funktsiooni absoluutseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *absoluutseteks ekstreemumiteks.*

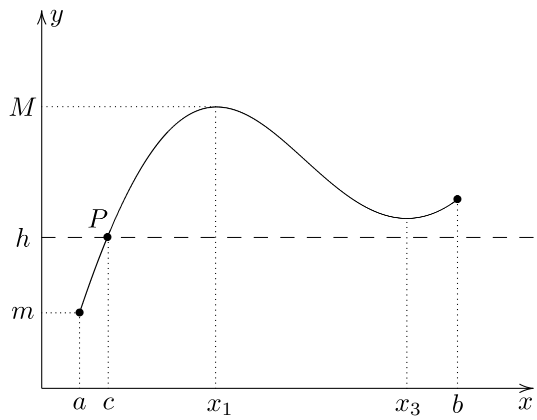
Antud mõistete illustreerimiseks sobib joonis 2.11. Sealne funktsioon on defineeritud lõigul $\mathcal{A} = [a, b]$. Graafiku kõrgeima punkti kõrgus on M ja madalaima punkti kõrgus on m. Funktsiooni suurim väärtus on M ja vähim väärtus on m. Suurim väärtus saavutatakse vahemikus (a, b) sisalduval argumendi väärtusel x_1 ja vähim väärtus saavutatakse lõigu vasakpoolses otspunktis a.

Märgime, et suurim ja vähim väärtus võivad esineda ka mitmes punktis. Näiteks vaatleme funktsiooni $y = \sin x$ kogu reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Suurim väärtus on 1 ja vähim väärtus on -1. Need väärtused esinevad lõpmata paljude erinevate argumendi väärtuste korral: funktsioon $\sin x$ saavutab suurima väärtuse $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, korral ja vähima väärtuse $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, korral. Konstantne funktsioon (Ptk 1 joonis 1.2) saavutab koguni kõigis punktides oma suurima ja vähima väärtuse.

Formuleerime nüüd lõigul pideva funktsiooni teise omaduse. Tegemist on 1. omaduse (Teoreem 2.3) otsese üldistusega.

Teoreem 2.4. Lõigul pidev funktsioon saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel.

Teoreemi mõistmiseks vaatleme taas joonist 2.11. Valime mingi väärtuse h funktsiooni suurima ja vähima väärtuse vahel ja tõmbame horisontaalsirge $y = h$ (joonisel kujutatud katkendliku joonega). Funktsiooni graafiku kõrgeima ja madalaima punkti vahele jääv osa on pidev joon, mis peab sirget $y = h$ kuskil lõikama. Joonisel kujutatud lõikepunkti P koordinaadid on c ja h. Argumendi väärtusel $x = c$ saavutabki funktsioon väärtuse h.



Joonis 2.11