TTÜ Matemaatikainstituut
http://www.staff.ttu.ee/~math/

Ivar Tammeraid
http://www.staff.ttu.ee/~itammeraid/

MATEMAATILINE ANALÜÜS I

Elektrooniline õppevahend

Tallinn, 2001

Trükitud versioon:
Ivar Tammeraid, Matemaatiline analüüs I, TTÜ Kirjastus, Tallinn 2001, 227 lk, ISBN 9985-59-289-1

Sisukord

0.1. Eessõna

Käesoleva õppevahendi aluseks on autori poolt viimastel aastatel Tallinna Tehnikaülikoolis bakalaureuseõppe üliõpilastele peetud ühe muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutuse loengud nimetuse "Matemaatiline analüüs I" all. Siiski ei ole tegu pelgalt ühel semestril esitatu kirjapanekuga. Lisatud on paljude väidete tõestused, mille esitamiseks napib loengutel aega. Samuti on tunduvalt mahukam näiteülesannete hulk. Ühtses kontekstis on lisatud ka keskkoolis-gümnaasiumis matemaatilisest analüüsist esitatu. Õppevahend pakub täiendavaid võimalusi üliõpilaste iseseisvaks tööks. Tõestuseta esitatud oluliste väidete korral on antud viide õpikule, millest huviline võib leida korrektse tõestuse.

Õppevahendi eesmärgiks on tutvustada lugejat matemaatilise analüüsi põhitõdedega ühe muutuja funktsiooni korral. Matemaatiline analüüs on matemaatika osa, milles funktsioone ja nende üldistusi uuritakse piirväärtuste meetodil. Piirväärtuse mõiste on tihedalt seotud lõpmata väikese suuruse mõistega. Võib ka väita, et matemaatiline analüüs uurib funktsioone ja nende üldistusi lõpmata väikeste meetodil. Nii tehnikas kui ka looduses uuritavate protsesside kirjeldamisel kasutatakse funktsionaalseid seoseid ja nende uurimiseks matemaatilist analüüsi. Antud õppevahendis käsitletakse klassikalist matemaatilist analüüsi, mille põhiliseks uurimisobjektiks on funktsioon. Esitatud piirväärtuste meetod on rakendatav ka tänapäeva matemaatika uurimisobjektide, nagu funktsionaal, operaator jne korral.

Põhilised viited on õpikutele [5] ja [10]. Õpikut [11] ja õppematerjali [13] on mõistlik kasutada selle kursuse põhitõdedega tutvumisel. Ingliskeelse õpikuna sobib [7]. Õpikutega [7] ja [10] töötamisel on kasulikuks abivahendiks matemaatikasõnaraamat [4] , millest leiate eestikeelsete matemaatiliste terminite tõlked inglise ja vene keelde ja ka vastupidi. Matemaatikaleksikon [3] , mis sisaldab märksõnu nii elementaar- kui ka nn kõrgema matemaatika olulisematest valdkondadest võimaldab kiiresti leida matemaatiliste terminite lühikesi määratlusi. Teoreetilise materjali omandamise hõlbustamiseks, kordamiseks ja kinnistamiseks sobivad teatmikud [2] ja [6] ning metoodiline materjal [9] . Õpik [12] on abiks lineaaralgebraga seotud probleemide lahendamisel. Õpikust [18] leiate numbrilised meetodid.

Mõlema peatüki lõpus on ülesanded, mis enamikus on varustatud vastustega, kusjuures mõningatele ülesannetele on lisatud näpunäide sobiva lahendusmeetodi valikuks. Ülesandeid esitatud teooria kohta on võimalik leida ka ülesandekogudest [1], [8], [14] ja õppevahendist [16] . Matemaatikapaketid MATLAB, MAPLE, MATHCAD, MATHEMATICA [10] jpt võimaldavad kinnistada selles kursuses omandatut. Õppevahendi koostamisel on kasutatud paketti "Scientific WorkPlace 3.0", lühendatult SWP.

Tänan dotsente A. Lõhmust ja F. Vichmanni, kes abistasid autorit paljude kasulike märkustega käsikirja vormistamisel.

Autor

0.2. Kasutatav sümboolika

Õppevahendis esitatavad väited koosnevad lausetest, millest iga kohta võib öelda, kas ta on tõene (õige) või väär. Liigitame need laused *liht-* ja *liitlauseteks.* Näiteks laused "$x \in X$" (x on hulga X element) ja "$y \in Y$" on lihtlaused ning lause "$(x \in X) \wedge (y \in Y)$" ($x$ on hulga X element ja y on hulga Y element) ehk lühidalt "$x \in X \wedge y \in Y$" on liitlause. Sümbolit $\wedge$ kasutame selles kontekstis sõna "ja" ning sümbolit $\vee$ sõna "või" asemel.

Olgu A ja B kaks lauset. Tähistus

$$A \Rightarrow B \tag{0.2.1}$$

on lühikirjapilt väitele "kui lause A on tõene, siis on tõene ka lause B". Veel öeldakse, et "eelduse A täidetusest (tõesusest) järeldub väite B tõesus" või "eeldus A on piisav väite B tõesuseks" ehk "tingimusest A järeldub (loogiliselt) väide B". Väide

$$(n \in 6\mathbf{N}) \Rightarrow (n \in 3\mathbf{N})$$

ehk lühidalt

$$n \in 6\mathbf{N} \Rightarrow n \in 3\mathbf{N}, \tag{0.2.2}$$

kus $3\mathbf{N}$ on kolmega (jäägita) jaguvate naturaalarvude hulk, st $3\mathbf{N} = \{3; 6; 9; \ldots\}$, ning $6\mathbf{N}$ on kuuega jaguvate naturaalarvude hulk, st $6\mathbf{N} = \{6; 12; 18; \ldots\}$, on (0.2.1) tüüpi. Seejuures on selle näite korral lauseks A lause "$n \in 6\mathbf{N}$" ja lauseks B vastavalt "$n \in 3\mathbf{N}$". Väidet (0.2.2) tuleb lugeda "kui arv n on kuuega jaguv naturaalarv, siis arv n jagub kolmega". Tingimus "$n \in 6\mathbf{N}$" on piisav väite "$n \in 3\mathbf{N}$" tõesuseks. Samas tingimus "$n \in 6\mathbf{N}$" ei ole tarvilik väite "$n \in 3\mathbf{N}$" tõesuseks, näiteks "$9 \notin 6\mathbf{N}$", kuid "$9 \in 3\mathbf{N}$".

Tähistus

$$A \Leftrightarrow B \tag{0.2.3}$$

on lühikirjapilt väitele "laused A ja B on *loogiliselt samaväärsed*", st kui lause A on tõene, siis ka B on tõene, ja vastupidi, kui lause B on tõene, siis on tõene ka A. Väidet (0.2.3) võib kirja panna ka kujul

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Veel öeldakse väite (0.2.3) korral, et tingimus A on *tarvilik ja piisav* väite B tõesuseks ehk väide B on tõene *parajasti siis* (*siis ja ainult siis*), kui on tõene väide A. Näiteks väide

$$((n \in 3\mathbf{N}) \wedge (n \in 2\mathbf{N})) \Leftrightarrow (n \in 6\mathbf{N})$$

ehk lühidalt

$$n \in 3\mathbf{N} \wedge n \in 2\mathbf{N} \Leftrightarrow n \in 6\mathbf{N} \tag{0.2.4}$$

on (0.2.3) tüüpi. Väidet (0.2.4) võib lugeda "naturaalarv n jagub kuuega parajasti siis, kui n jagub kolmega ja n jagub kahega" ehk "tingimused n jagub kolmega ja n jagub kahega on tarvilikud ja piisavad naturaalarvu n kuuega jaguvuseks" või "naturaalarv n jagub kuuega siis ja ainult siis, kui n jagub kolmega ja n jagub kahega".

Sümbolit $\forall$ kasutatakse sõnade "iga" või "suvaline" ehk "mis tahes" asemel. Näiteks väites

$$\forall x > 1 \Rightarrow x^2 > x,$$

st iga ühest suurema arvu x korral on x^2 suurem kui x, rõhutatakse, et see järeldus kehtib iga $x > 1$ korral.

Sümbolit $\exists$ kasutatakse sõna "eksisteerib" või sõnapaari "on olemas" asemel. Näiteks väidet "kui $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ on reaalsete kordajatega kolmandat järku polünoom, siis tal leidub reaalne nullkoht x_1" saame esitada kujul

$$a, b, c \in \mathbf{R} \wedge f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbf{R} : f(x_1) = 0.$$

Õppevahendist [17] leiate täiendavat informatsiooni eeltoodud lühikirjapiltide kasutamisvõimaluste kohta.

Sümbolit $\square$ kasutatakse tõestuse lõpu tähisena ja sümbolit $\diamondsuit$ näiteülesande lahenduse lõpu tähisena. Autori arvates sobib nimetus "teoreem" eriti kaalukate väidete jaoks ja kuna enamus antud õppevahendis esitatud väiteid on lihtsad, siis sõnastatakse nad lausetena (inglise keeles "proposition"). Kui tekstis on viidatud näiteks Lausele 2.12.3, siis see tähendab viidet teise peatüki kaheteistkümnenda punkti Lausele 3. Viite korral sama punkti piires ei lisata peatüki ja punkti numbrit. Hulga elementide loetelus või punkti koordinaatide puhul kasutatakse eraldajana tavaliselt koma, näiteks $\{a, b, c\}$ ja (x, y). Kui hulga elementideks või punkti koordinaatideks on arvud, siis väärarusaamise vältimiseks kasutatakse eraldajana semikoolonit, näiteks $\{-2; 3; 11\}$ ja $(3; 4.5)$. Kümnendmurrus kasutatakse eraldajana punkti.

Kasutusel on järgnevad arvuhulga tähistused:

$\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ – naturaalarvude hulk;

$k\,\mathbf{N} = \{n \mid n \in \mathbf{N} \wedge m \in \mathbf{N} \wedge n = k \cdot m\} = \{k; 2k; 3k; \ldots\}$ – naturaalarvuga k jaguvate naturaalarvude hulk;

$\mathbf{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$ – täisarvude hulk;

$\mathbf{Q} = \{x \mid x = m/n \wedge m \in Z \wedge n \in N\}$ – ratsionaalarvude hulk;

$\mathbf{I}$ – irratsionaalarvude hulk, s.o lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdude hulk;

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ – reaalarvude hulk;

$\mathbf{R}^+$ – positiivsete reaalarvude hulk;

$\mathbf{R}^-$ – negatiivsete reaalarvude hulk;

$\mathbf{C} = \left\{z \mid z = x + iy \wedge x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge i^2 = -1\right\}$ – kompleksarvude hulk;

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ – lõik;

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ – vahemik;

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ – poollõik;

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ – poollõik.

1. Ühe muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutus

1.1. Funktsioon

Funktsiooni mõiste on üks matemaatika põhimõisteid. Selles punktis käsitletakse funktsionaalse sõltuvusega seonduvaid mõisteid.

Definitsioon 1. Kui hulga X igale elemendile x on vastavusse seatud element y hulgast Y, siis öeldakse, et hulgal X on määratud *(ühene) funktsioon* f ja seda vastavust tähistatakse kas $y = f(x)$ $(x \in X)$ või $x \overset{f}{\longmapsto} y$. Hulka X nimetatakse funktsiooni f *määramispiirkonnaks* ja hulka

$$f(X) = \{y|\ x \in X \wedge y = f(x)\} \subset Y$$

funktsiooni f *muutumispiirkonnaks.* Elementi x nimetatakse funktsiooni f *argumendiks* ehk *sõltumatuks muutujaks* ja elementi y *sõltuvaks muutujaks.*

Kasutatakse ka tähistust $y = y(x)$ rõhutamaks fakti, et suurus y on suuruse x funktsioon. Järgnevalt piirdume juhuga $X \subset \mathbf{R}$ ja $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}$. *Muutuvaks suuruseks* nimetatakse suurust, mis võib omandada mitmesuguseid reaalarvulisi väärtusi. Nende väärtuste hulka nimetatakse muutuva suuruse *muutumispiirkonnaks.*

Definitsioon 2. Kui hulga $X \subset \mathbf{R}$ igale elemendile x on vastavusse seatud element y hulgast $Y \subset \mathbf{R}$, siis öeldakse, et hulgal X on määratud *(ühene) ühe (reaal-)muutuja (reaalsete väärtustega) funktsioon* f. Arvupaaride hulka

$$\{(x, y)|\ x \in X \wedge y = f(x)\}$$

nimetatakse funktsiooni f *graafikuks.*

Analüütiliselt esitatud funktsiooni $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$ graafiku ligikaudseks skitseerimiseks koostatakse esiteks funktsiooni tabel

x_0	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_i)$	$\ldots$	$f(x_n)$

kus $x_i = a + ih$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ ja $h = (b - a)/n$. Järgmise sammuna kantakse punktid $P_i(x_i, f(x_i))$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ xy-tasandile ja ühendatakse seejärel sujuva joonega. Analoogiliselt toimub funktsiooni $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$ graafiku skitseerimine arvuti abil, kusjuures kasutatakse mingit graafikapaketti. Ka sel korral tuleb määrata punktide arv, milles arvutatakse funktsiooni f väärtus. Saadud punktide ühendamiseks xy-tasandil kasutab pakett seejuures teatud struktuuriga funktsioone, näiteks polünoome. Järgnevalt on graafikute skitseerimiseks kasutatud põhiliselt paketti SWP, vaid mõningatel erijuhtudel on kasutatud T$_E$X-is kirjutatud programme.

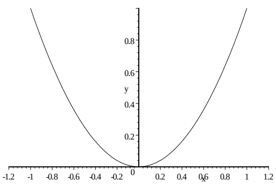
Mõiste "funktsioon" asemel kasutatakse ka mõistet *"kujutus."* Hulka $f(X)$ nimetatakse hulga X *kujutiseks* kujutamisel funktsiooniga f. Kui analüütiliselt esitatud funktsiooni $y = f(x)$ korral ei ole funktsiooni määramispiirkond fikseeritud, siis funktsiooni määramispiirkonnaks X loetakse kõigi nende argumendi x väärtuste hulka, mille korral antud eeskiri $y = f(x)$ omab mõtet. Olgu edaspidi lihtsuse mõttes $Y = f(X)$.

Funktsiooni defineerimisel kõneldakse hulga X elemendile hulga Y elemendi vastavusse seadmisest, kuid ei fikseerita vastavusse seadmise viisi, mille abil vastavus realiseeritakse. Enam levinud funktsiooni esitusviisid on:
1) analüütiline esitus valemi abil, mis näitab, milliseid tehteid millises järjekorras tuleb teostada argumendi väärtusega, et saada vastavat funktsiooni väärtust;
2) geomeetriline esitus graafiku abil;
3) numbriline esitus tabeli abil;
4) esitus arvutiprogrammi abil.

Definitsioon 3. Kui hulga X igale elemendile on vastavusse seatud vähemalt üks hulga Y element ja vähemalt ühele hulga X elemendile on vastavusse seatud mitu elementi hulgast Y, siis öeldakse, et hulgal X on määratud *mitmene funktsioon* f. Näiteks kahese funktsiooni f korral leidub vähemalt üks argumendi väärtus x funktsiooni määramispiirkonnast X, millele vastab kaks erinevat funktsiooni väärtust y_1 ja y_2, ning ei leidu argumendi väärtust, millele vastab rohkem kui kaks funktsiooni väärtust.

Tavaliselt tõlgendatakse mitmest funktsiooni üheste funktsioonide (mitmese funktsiooni *harude*) komplektina. Järgnevalt, kõneldes funktsioonist, eeldame vaikimisi, et tegemist on ühese funktsiooniga.

Näide 1. Vaatleme funktsiooni $y = x^2$, kus $X = [-1; 1]$, mille graafik on kujutatud joonisel



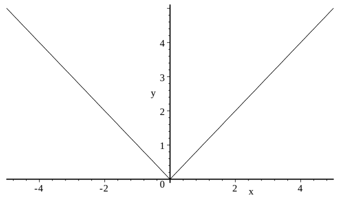
Leiame, et $Y = [0; 1]$. Funktsioon $y = x^2$ seab igale arvule lõigust $[-1; 1]$ vastavusse täpselt ühe arvu lõigust $[0; 1]$. Seega on vaadeldav funktsioon ühene. Märgime, et iga sõltuva muutuja y väärtus poollõigust $(0; 1] \subset Y$ on kahe erineva argumendi väärtuse x kujutiseks, st kui vaadelda muutujat x muutuja y funktsioonina, saame mitmese funktsiooni $x = x(y)$. Seejuures $x = -\sqrt{y}$ $(Y = [0; 1])$ ja $x = \sqrt{y}$ $(Y = [0; 1])$ on selle kahese funktsiooni kaks erinevat haru. $\diamondsuit$

Näide 2. Olgu $y = |x|$. Et

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0 \\ -x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

siis antud eeskiri omab mõtet iga $x \in \mathbf{R}$ korral. Seega $X = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ ja $Y =$

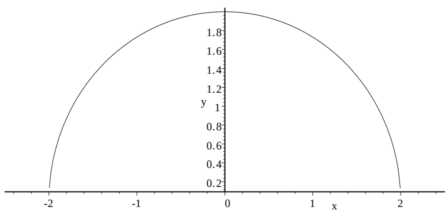
$[0;+\infty)$. Funktsiooni $y=|x|$ graafikuks on



Kuna muutuja y iga väärtus vahemikust $(0;+\infty)$ on muutuja x kahe erineva väärtuse kujutiseks, siis $x=x(y)$ on kahene funktsioon ja $x=-y$ $(Y=[0;+\infty))$ ning $x=y$ $(Y=[0;+\infty))$ on selle kahese funktsiooni erinevad harud. $\diamondsuit$

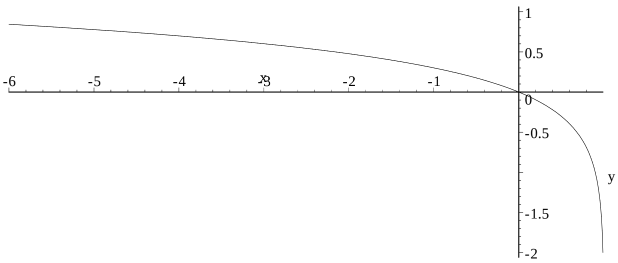
Reaalarvu absoluutväärtusel on järgmised omadused:
1° $|a|\geq 0$; 2° $|-a|=|a|$; 3° $|a|\geq a$; 4° $|a|\geq -a$;
5° $|a|-|b|\leq |a+b|\leq |a|+|b|$; 6° $|a|-|b|\leq |a-b|\leq |a|+|b|$;
7° $||a|-|b||\leq |a+b|$; 8° $||a|-|b||\leq |a-b|$;
9° $|ab|=|a|\,|b|$; 10° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$;
11° $|a|\leq b \Leftrightarrow -b\leq a\leq b \quad (b\geq 0)$;
12° $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b \quad (b>0)$.

Näide 3. Vaatleme funktsiooni $y=\sqrt{4-x^2}$. Antud eeskiri omab mõtet, kui juuritav on mittenegatiivne: $4-x^2\geq 0$. Seega $X=[-2;2]$. Leiame, et $Y=[0;2]$. Funktsiooni graafikuks on



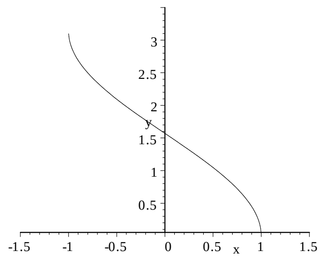
Muutuja y iga väärtus poollõigust $[0;2)\subset Y$ on kahe erineva muutuja x väärtuse kujutiseks. Vaadeldes muutujat x muutuja y funktsioonina, saame kahese funktsiooni $x=x(y)$, kusjuures $x=-\sqrt{4-y^2}$ $(Y=[0;2])$ ja $x=\sqrt{4-y^2}$ $(Y=[0;2])$ on selle kahese funktsiooni harud. $\diamondsuit$

Näide 4. Olgu $y=\log(1-x)$. Antud eeskiri omab mõtet, kui logaritmitav on positiivne: $1-x>0$, st $x<1$. Seega $X=(-\infty;1)$ ja $Y=(-\infty;\infty)$. Funktsiooni graafikuks on



Antud funktsioon on ühene. Sõltuva muutuja y iga väärtus lõpmatust vahemikust $(-\infty;\infty) = Y$ on täpselt ühe argumendi väärtuse $x \in X$ kujutiseks, st kui vaadelda muutujat x muutuja y funktsioonina $x = x\,(y)$, saame samuti ühese funktsiooni $x = 1 - 10^y$ $(Y = (-\infty, +\infty))$. $\diamondsuit$

Näide 5. Olgu $y = \arccos x$. Et koosinuse väärtused kuuluvad lõiku $[-1;1]$, siis antud eeskiri omab mõtet, kui $x \in [-1;1]$, st $X = [-1;1]$. Arkuskoosinuse väärtused kuuluvad lõiku $[0;\pi]$. Seega $Y = [0;\pi]$. Funktsiooni graafikuks on

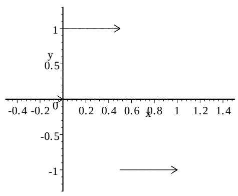


Sõltuva muutuja y iga väärtus lõigust $[0;\pi]$ on täpselt ühe argumendi väärtuse $x \in X$ kujutiseks, st kui vaadelda muutujat x muutuja y funktsioonina $x = x\,(y)$, saame samuti ühese funktsiooni $x = \cos y \quad (Y = [0;\pi])$. $\diamondsuit$

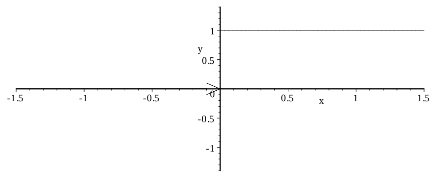
Näide 6. Vaatleme *Haar'i funktsiooni* (nn *Haar'i emalainekest*)

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui} \quad x < 0 \\ 1, & \text{kui} \quad 0 \le x < 0.5 \\ -1, & \text{kui} \quad 0.5 \le x < 1 \\ 0, & \text{kui} \quad x \ge 1 \end{cases},$$

mille graafikuks on



Haar'i funktsioon $\psi(x)$ on esitatav *Heaviside'i funktsiooni* $H(x)$ (kasutatakse ka tähistust $\mathbf{1}(x)$)



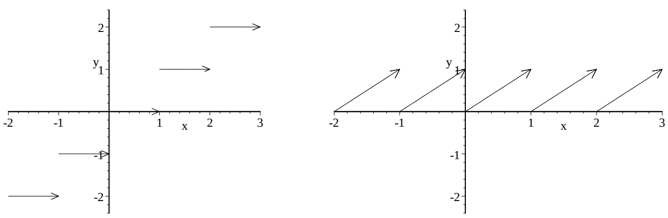
abil $\psi(x) = H(x) - 2H(x - 0.5) + H(x - 1)$, kusjuures $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0 \\ 1, & \text{kui } x \geq 0 \end{cases}$.
Märgime, et neil graafikutel esinevatel noolekestel on kindel tähendus. Näiteks funktsiooni $\psi(x)$ graafikul rõhutame punkti $(0.5; 1)$ vasakult suunduva noolekesega, et funktsiooni $\psi(x)$ väärtus $x = 0.5$ korral ei ole $+1$, vaid on -1. $\diamondsuit$

Haar'i emalainekese määramispiirkonnaks on $\mathbf{R}$ ja väärtuste hulgaks $\{-1; 0; 1\}$. *Haar'i lainekesed*

$$\psi_{j,k} = (\sqrt{2})^j \psi(2^j x - k) \quad (j, k \in \mathbf{Z})$$

leiavad kasutamist signaalide kirjeldamisel.

Näide 7. Olgu $[x]$ *arvu* x *täisosa*, st suurim täisarv, mis ei ületa arvu x. Nii funktsiooni $y = [x]$ kui ka funktsiooni $y = x - [x]$ määramispiirkond on $\mathbf{R}$ ja muutumispiirkonnad vastavalt kõigi täisarvude hulk $\mathbf{Z}$ ja poollõik $[0; 1)$. Skitseerime nende funktsioonide graafikud lõigul $[-2; 3]$:

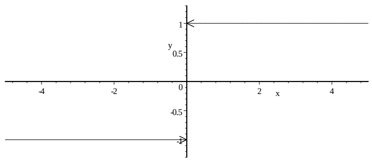


$\diamondsuit$

Näide 8. Funktsiooni $y = \mathrm{sign}(x)$, kus

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad x > 0 \\ 0, & \text{kui} \quad x = 0 \\ -1 & \text{kui} \quad x < 0 \end{cases},$$

nimetatakse *signum-funktsiooniks*. Kasutatakse ka tähistust $\mathrm{sgn}(x)$. Selle funktsiooni määramispiirkond on $\mathbf{R}$ ja muutumispiirkond $\{-1; 0; 1\}$. Skitseerime funktsiooni $y = \mathrm{sign}(x)$ graafiku



$\diamondsuit$

Definitsioon 4. Funktsioonide

$$y = f(x) \quad (x \in X)$$

ja

$$z = g(y) \quad (y \in Y \ \wedge \ f(X) \subset Y)$$

liitfunktsiooniks ehk *superpositsiooniks* nimetatakse funktsiooni $z = g(f(x))$.

Seega

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{g}{\longmapsto} z \ \Rightarrow \ x \overset{g \circ f}{\mapsto} z,$$

kus $g \circ f$ on funktsioonide f ja g liitfunktsiooni tähistuseks. Liitfunktsiooni $g \circ f$ määramispiirkond on X ja väärtuste piirkond

$$Z = g(f(X)) = \{z \mid \ x \in X \ \wedge \ y = f(x) \ \wedge \ z = g(y)\}.$$

Funktsioone f ja g nimetatakse *liitfunktsiooni* $g(f(x))$ *koostisosadeks.* Näites 3 esitatud funktsioon on liitfunktsioon

$$x \longmapsto 4 - x^2 \longmapsto \sqrt{4 - x^2},$$

samuti Näites 4 esitatud funktsioon

$$x \longmapsto 1 - x \longmapsto \log(1 - x).$$

Liitfunktsioonil võib koostisosi olla rohkem kui kaks. Näiteks funktsioonil $\cos^2 \sqrt{\sin x}$ on koostisosi neli:

$$x \mapsto \sin x \mapsto \sqrt{\sin x} \mapsto \cos \sqrt{\sin x} \mapsto \cos^2 \sqrt{\sin x}.$$

Definitsioon 5. Funktsiooni f, mille määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, nimetatakse *paarisfunktsiooniks*, kui $\forall x \in X: \ f(-x) = f(x)$.

Definitsioon 6. Funktsiooni f, mille määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, nimetatakse *paarituks funktsiooniks*, kui $\forall x \in X : f(-x) = -f(x)$.

Et Näites 1 esitatud funktsiooni $y = x^2$ määramispiirkond $X = [-1; 1]$ on sümmeetriline nullpunkti suhtes ja

$$\forall x \in X : f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

siis on see funktsioon paarisfunktsioon. Ka Näidetes 2 ja 3 esitatud funktsioonid on paarisfunktsioonid (kontrollige!). Näites 8 on esitatud paaritu funktsioon.

Näide 9. Uurime, kas funktsioon $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ on paaris- või paaritu funktsioon. Et

$$\forall x \in \mathbf{R} : x + \sqrt{x^2+1} > 0,$$

siis $X = \mathbf{R}$, st vaadeldava funktsiooni määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes (lühidalt, $-X = X$), kusjuures

$$-X \overset{def}{=} \{x \mid (-x) \in X\},$$

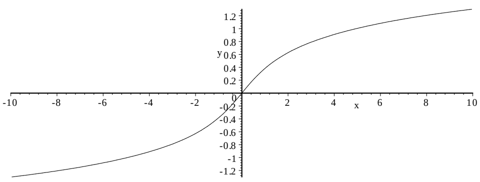
ja

$$\forall x \in \mathbf{R} : f(-x) = \log(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \log \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(-x-\sqrt{x^2+1})}{-x-\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \log \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = \log \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \log 1 - \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) =$$

$$= -\log(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x).$$

Järelikult on uuritav funktsioon paaritu funktsioon. Skitseerime selle funktsiooni graafiku lõigul $[-10; 10]$



$\diamondsuit$

Lause 1. Iga funktsioon f, mille määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, on esitatav kujul $f = f_1 + f_2$, kus f_1 on paarisfunktsioon ja f_2 on paaritu funktsioon.

Tõestus. Olgu

$$f_1(x) \overset{def}{=} (f(x) + f(-x))/2, \quad f_2(x) \overset{def}{=} (f(x) - f(-x))/2.$$

Leiame, et

$$\forall x \in X : f_1(x) + f_2(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2 = f(x)$$

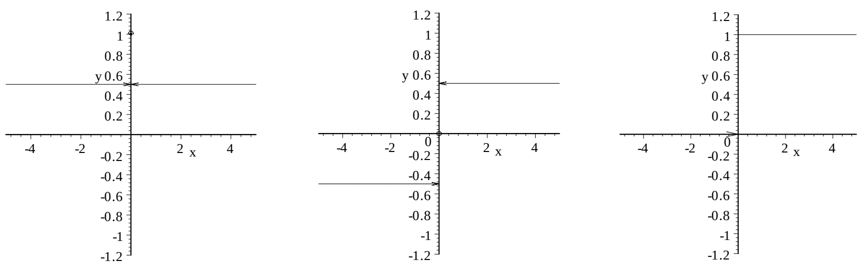
ja

$$\forall x \in X:\ f_1(-x) = (f(-x) + f(-(-x)))/2 = (f(-x) + f(x))/2 = f_1(x)$$

ning

$$\forall x \in X: f_2(x) = (f(-x) - f(-(-x)))/2 = (f(-x) - f(x))/2 = -f_2(x). \quad \square$$

Näiteks Heaviside'i funktsioon $H(x)$, mis ei ole paaris ega paaritu, on esitatav kujul $H = f_1 + f_2$, kus $f_1(x) = (H(x) + H(-x))/2, \quad f_2(x) = (H(x) - H(-x))/2$ ja funktsioonide f_1, f_2 ning H graafikud on vastavalt



Definitsioon 7. Funktsiooni f nimetatakse *perioodiliseks*, kui leidub selline arv $T \neq 0$, et iga $x \in X$ korral ka $x \pm T \in X$ ja $f(x+T) = f(x)$. Vähimat positiivset arvu T, mille korral $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in X$, nimetatakse *funktsiooni* $f(x)$ *perioodiks*.

Näidetes 1-6, 8, 9 esitatud funktsioonid on mitteperioodilised. Näite 7 funktsioon $[x]$ on mitteperioodiline ja funktsioon $x - [x]$ perioodiline perioodiga $T = 1$.

Näide 10. Uurime funktsiooni $y = \sin(cx)$ perioodilisust juhul, kui c on mingi fikseeritud positiivne reaalarv. Et $X = \mathbf{R}$, siis iga $x \in X$ korral suvalise T jaoks $x \pm T \in X$. Jääb kontrollida, kas leidub selline T, et $\sin(c(x+T)) = \sin(cx)$ iga $x \in X$ korral, st $\sin(cx + cT) = \sin(cx)$. Järelikult peab

$$cT = 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z}) \Rightarrow T = 2k\pi/c\ (k \in \mathbf{Z})$$

ja vähim positiivne arv, mis rahuldab tingimust $\sin(cx + cT) = \sin(cx)$ on $T = 2\pi/c$. Seega on funktsioon $y = \sin(cx)$ perioodiline, kusjuures perioodiks on $T = 2\pi/c$. $\diamondsuit$

Definitsioon 8. Funktsiooni f nimetatakse *kasvavaks* ehk *rangelt kasvavaks* piirkonnas X, kui iga $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad võrratust $x_1 < x_2$, kehtib võrratus $f(x_1) < f(x_2)$.

Näites 9 on esitatud kasvav funktsioon.

Definitsioon 9. Funktsiooni f nimetatakse *kahanevaks* ehk *rangelt kahanevaks* piirkonnas X, kui iga $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad võrratust $x_1 < x_2$, kehtib võrratus $f(x_1) > f(x_2)$.

Näidetes 4 ja 5 on esitatud kahanevad funktsioonid.

Definitsioon 10. *Monotoonseks funktsiooniks* nimetatakse funktsiooni, mis kogu oma määramispiirkonnas on mittekahanev *(monotoonselt kasvav funktsioon)* või mittekasvav *(monotoonselt kahanev funktsioon).*

Näidete $4, 5, 8, 9$ funktsioonid ja Näite 7 funktsioon $[x]$ on monotoonsed funktsioonid.

Definitsioon 11. *Rangelt monotoonseks funktsiooniks* nimetatakse funktsiooni, mis kogu oma määramispiirkonnas on kasvav või kahanev.

Näidetes $4, 5$ ja 9 on antud rangelt monotoonsed funktsioonid. Näites 1 esitatud funktsioon $y = x^2$ $(x \in [-1; 1])$ ei ole monotoonne, kuid on rangelt kahanev lõigul $[-1; 0]$ ja rangelt kasvav lõigul $[0; 1]$.

Definitsioon 12. Funktsiooni f nimetatakse *ülalt tõkestatud* (vastavalt *alt tõkestatud) funktsiooniks* hulgal $X_1 \subset X$, kui leidub selline reaalarv M (vastavalt m), et iga $x \in X_1$ korral kehtib võrratus $f(x) \leq M$ (vastavalt $m \leq f(x)$). Funktsiooni f, mis on nii alt kui ka ülalt tõkestatud hulgal X_1, nimetatakse *tõkestatud funktsiooniks* hulgal X_1.

Kui funktsioon f on tõkestatud hulgal X, siis tähistatakse seda lühidalt

$$f(x) = O\,(1) \quad (x \in X)\,.$$

Kui funktsioon f on ülalt (alt) tõkestatud hulgal X, siis tähistatakse seda lühidalt

$$f(x) = O_R\,(1) \quad (x \in X) \qquad (f(x) = O_L\,(1) \quad (x \in X))\,.$$

Näidetes $1, 3, 5, 8$ esitatud funktsioonid ja Näite 7 funktsioon $x - [x]$ on tõkestatud oma määramispiirkonnas ning Näidetes $2, 4,$ 9 funktsioonid ja Näites 7 esitatud funktsioon $[x]$ on tõkestamata.

Definitsioon 13. Funktsiooni $y = f(x)$ $(x \in X)$ *pöördfunktsiooniks* nimetatakse funktsiooni $x = f^{-1}\,(y)$, mis igale arvule $y \in Y = f\,(X)$ seab vastavusse arvu $x \in X$, kusjuures $y = f(x)$, st

$$y \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x \Leftrightarrow x \overset{f}{\longmapsto} y.$$

Kui hulgal X määratud funktsiooni $y = f\,(x)$ erinevatele argumendi väärtustele x vastavad funktsiooni erinevad väärtused y, siis pöördfunktsioon $x = f^{-1}\,(y)$ on ühene.

Leiame Näites 4 esitatud funktsiooni $y = \log(1 - x)$ pöördfunktsiooni:

$$y = \log(1 - x) \Leftrightarrow 10^y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - 10^y \Rightarrow f^{-1}(y) = 1 - 10^y.$$

Definitsioon 14. Öeldakse, et funktsioon $y = f(x)$ $(x \in X)$ on esitatud võrrandi $F(x, y) = 0$ abil *ilmutamata kujul,* kui

$$\forall x \in X: \; F(x, f(x)) = 0.$$

Ilmutamata kujul esitatud funktsiooni $y = f(x)$ korral kõneldakse ka võrrandi $F(x, y) = 0$ lahendina hulgal X defineeritud *ilmutamata funktsioonist.* Ilmutamata funktsioon võib olla kas ühene või mitmene. Punktihulka $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ nimetatakse võrrandiga $F(x, y) = 0$ antud *ilmutamata funktsiooni graafikuks.*

Võrrandiga $F(x,y)=0$ esitatud ilmutamata funktsiooni $y=f(x)$ $(x\in[a,b])$ graafiku skitseerimisel tuleb esiteks iga $x_i=a+ih$ $\ (i=0;1;\ldots;n\ \wedge\ h=(b-a)/n)$ korral lahendada võrrand $F(x_i,y)=0$.

Et $y=f(x)\Leftrightarrow y-f(x)=0$, siis funktsiooni $F(x,y)\overset{def}{=}y-f(x)$ korral $y=f(x)\Rightarrow F(x,y)=0$, st iga (ühest või mitmest) funktsiooni võib käsitleda ilmutamata funktsiooni erijuhuna.

Näide 11. Olgu funktsioon $y=f(x)$ esitatud ilmutamata kujul võrrandi

$$x^2/9+y^2/4-1=0, \tag{1.1.1}$$

mis esitab ellipsi, abil. Lahendame selle võrrandi suuruse y suhtes:

$$y=\pm 2\sqrt{1-x^2/9}\quad (x\in[-3;3])\,.$$

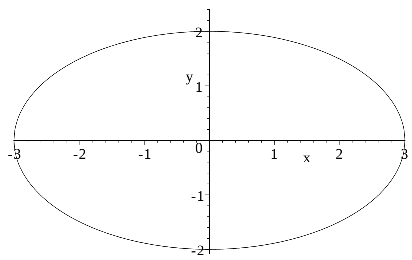
Saame kahese funktsiooni $y=f(x)$, mis on määratud lõigul $[-3;3]$. Kui tähistada

$$f_1(x)=2\sqrt{1-x^2/9}\ ,\ \ f_2(x)=-2\sqrt{1-x^2/9},$$

siis $y=f_1(x)$ $\ (x\in[-3;3])$ ja $y=f_2(x)$ $\ (x\in[-3;3])$ on kahese funktsiooni $y=f(x)$ harud, kusjuures

$$\forall x\in[-3;3]:\ x^2/9+(f_1(x))^2/4-1=0\,,\ x^2/9+(f_2(x))^2/4-1=0.$$

Tegemist on ellipsi



ülemist ja alumist poolt määravate funktsioonidega f_1 ja f_2. $\quad\diamondsuit$

Definitsioon 15. Funktsionaalse sõltuvuse $y=f(x)$ $\ (x\in X)$ esitust kujul

$$x=\varphi(t)\ \wedge\ y=\psi(t)\quad (t\in T), \tag{1.1.2}$$

kus $\varphi(T)=X$ ja

$$\forall\, t\in T:\ \ \psi(t)=f(\varphi(t)),$$

nimetatakse funktsiooni f *parameetriliseks esituseks* ning kõneldakse *parameetriliselt esitatud funktsioonist* f.

Funktsiooni f parameetrilist esitust (1.1.2) võime illustreerida diagrammi abil

$$\begin{tikzcd} t \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & x \arrow[dl, "f"] \\ & y & \end{tikzcd}$$

Esitust (1.1.2) kasutatakse sageli kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in T).$$

Abimuutujat t nimetatakse *parameetriks.* Punktihulka

$$\{(x, y) \mid \ x = \varphi(t) \ \wedge \ y = \psi(t) \ \wedge \ (t \in T)\}$$

nimetatakse *parameetriliselt esitatud funktsiooni graafikuks.*

Parameetriliselt esitatud funktsiooni

$$x = \varphi(t) \ \wedge \ y = \psi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

graafiku skitseerimisel tuleb esiteks koostada tabel

t_0	t_1	$\ldots$	t_i	$\ldots$	t_n
$\varphi(t_0)$	$\varphi(t_1)$	$\ldots$	$\varphi(t_i)$	$\ldots$	$\varphi(t_n)$
$\psi(t_0)$	$\psi(t_1)$	$\ldots$	$\psi(t_i)$	$\ldots$	$\psi(t_n)$

kus $t_i = \alpha + ih \ \ (i = 0; 1; \ldots; n)$ ja $h = (\beta - \alpha)/n$. Järgmise sammuna kantakse punktid $(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \ \ (i = 0; 1; \ldots; n)$ xy-tasandile ja ühendatakse seejärel sujuva joonega.

Võrrandeid (1.1.2) nimetatakse joone parameetrilisteks võrranditeks. Sageli kasutatakse parameetrilist esitusviisi punkti liikumise kirjeldamiseks.

Funktsiooni esitust kujul $y = f(x) \ \ (x \in X)$ võib vaadelda kui parameetrilise esituse erijuhtu, valides parameetriks x, st

$$x = x \ \wedge \ y = f(x) \quad (x \in X)$$

ehk

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad (x \in X).$$

Kui esituses (1.1.2) määrab funktsioon φ üksühese vastavuse hulkade T ja X vahel, st parameetri t erinevatele väärtustele vastavad muutuja x erinevad väärtused, siis $\exists\, \varphi^{-1}$ ja funktsiooni parameetriline esitus määrab ühese funktsiooni $y = f(x)$, kus $f(x) \overset{def}{=} \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \ \ (x \in X)$. Sel juhul

$$\begin{tikzcd} t \arrow[rr, shift left, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & x \arrow[ll, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[dl, "f = \psi \circ \varphi^{-1}"] \\ & y & \end{tikzcd}$$

Kui funktsiooni φ korral ei ole vastavus hulkade T ja X vahel üksühene, siis vähemalt üks muutuja x väärtus on mitme hulga T elemendi kujutiseks. Kui neile muutuja t väärtustele vastab vähemalt kaks erinevat funktsiooni y väärtust, siis on tegemist mitmese funktsiooni parameetrilise esitusega. Seega annab funktsiooni parameetriline esitus täiendava võimaluse mitmese funktsiooni kirjeldamiseks. Näiteks juhtu, kui vähemalt üks muutuja x väärtus on hulga T kahe erineva elemendi t_1 ja t_2 kujutiseks funktsiooniga φ ning elementidele t_1 ja t_2 vastavad erinevad funktsiooni ψ väärtused y_1 ja y_2, saame kujutada diagrammil

$$\begin{tikzcd}
& t_1 \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & t_2 \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
y_1 & & x \arrow[ll, "f_1"] \arrow[rr, "f_2"'] & & y_2
\end{tikzcd}$$

kus f_1 ja f_2 on mitmese funktsiooni f kaks erinevat haru.

Kui $\varphi(T) = X$ ja

$$\forall\, t \in T: \ F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) = 0,$$

siis vähemalt üks võrrandi $F(x, y) = 0$ abil antud ilmutamata funktsiooni haru on esitatav parameetrilisel kujul

$$x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t) \ \ (t \in T).$$

Näites 11 seosega (1.1.1) esitatud ilmutamata funktsiooni parameetriliseks esituseks on

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad (t \in [0; 2\pi]), \tag{1.1.3}$$

st $\varphi(t) = 3\cos t$ ja $\psi(t) = 2\sin t$. Asendades muutujad x ja y seoste (1.1.3) abil, saame

$$\forall t \in [0; 2\pi]: \ \ (3\cos t)^2/9 + (2\sin t)^2/4 - 1 = 0.$$

Seostega (1.1.3) antud funktsiooni graafik langeb kokku ilmutamata funktsiooni (1.1.1) graafikuga. Parameetri väärtustele lõigust $[0; \pi]$ vastab ilmutamata funktsiooni haru

$$f_1(x) = 2\sqrt{1 - x^2/9}.$$

Tõepoolest, $\varphi([0; \pi]) = [-3; 3]$ ja

$$\forall t \in [0; \pi]: \ \ f_1(3\cos t) = 2\sqrt{1 - (3\cos t)^2/9} = 2\sqrt{\sin^2 t} = 2\sin t,$$

st

$$\forall t \in [0; \pi]: \psi(t) = f_1\left(\varphi(t)\right).$$

Et $\varphi([\pi; 2\pi]) = [-3; 3]$ ja

$$\forall t \in [\pi; 2\pi]: \ \ f_2(3\cos t) = -2\sqrt{1 - (3\cos t)^2/9} = -2\sqrt{\sin^2 t} = 2\sin t,$$

st

$$\forall t \in [\pi; 2\pi] : \psi(t) = f_2(\varphi(t)),$$

siis parameetri väärtustele lõigust $[\pi, 2\pi]$ vastab ilmutamata funktsiooni haru

$$f_2(x) = -2\sqrt{1 - x^2/9}.$$

Näide 12. Olgu ilmutamata funktsioon antud võrrandi

$$\frac{x^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{b^{2/3}} = 1$$

abil, kus $a = const > 0$ ja $b = const > 0$. Selle funktsiooni graafikut nimetatakse *astroidiks*. Funktsiooni parameetriliseks esituseks on

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad (t \in [0; 2\pi]).$$

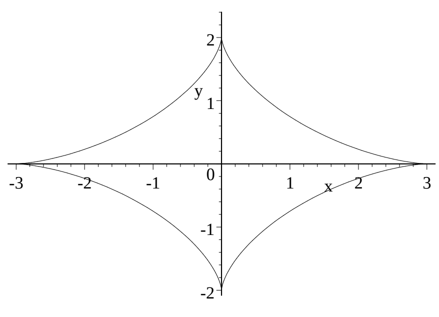
Leiame, et

$$\forall t \in [0; 2\pi] : \frac{\left(a\cos^3 t\right)^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{\left(b\sin^3 t\right)^{2/3}}{b^{2/3}} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Näidake, et ka sel korral langeb parameetriliselt esitatud funktsiooni graafik kokku ilmutamata funktsiooni graafikuga. Kasutage selleks ilmutamata funktsiooni harusid

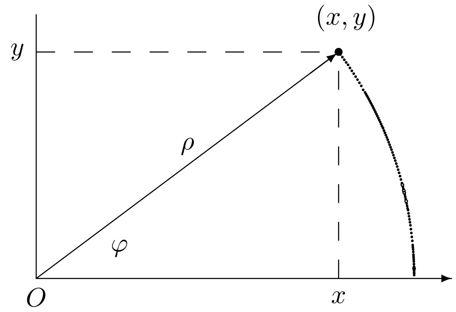
$$f_1(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3} \quad (X = [-a, a]),$$
$$f_2(x) = \frac{b}{a}\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3} \quad (X = [-a, a]).$$

Skitseerime graafiku juhul kui $a = 3$ ja $b = 2$:



◇

Punkti asukoha määramiseks tasandil on lisaks ristkoordinaatidele teisi võimalusi. Vaatleme järgnevalt *polaarkoordinaate*. Polaarkoordinaadistik on määratud punktiga O, mida nimetatakse *pooluseks*, sellest väljuva kiirega, mida nimetatakse *polaarteljeks*, ja pikkusühikuga. Järgnevalt on polaarkoordinaadistiku pooluseks valitud ristkoordinaadistiku alguspunkt ja polaarteljeks x-telg



Definitsioon 16. Punkti (x, y) kohavektori pikkust ρ nimetatakse *polaarraadiuseks.* Nurka φ, mille punkti (x, y) kohavektor moodustab x-telje positiivse suunaga, nimetatakse *polaarnurgaks,* kusjuures vastu kellaosuti liikumise suunda mõõdetud nurk loetakse positiivseks ja kellaosuti liikumise suunas mõõdetud nurk negatiivseks.

Punktile (x, y) vastav polaarnurk φ ei ole üheselt määratud. Nimelt sellele nurgale $2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ lisamisel saadud nurk määrab sama punkti (x, y). Punkti $(x, y) \neq (0; 0)$ polaarkoordinaatide üheseks määramiseks valime $0 \leq \varphi < 2\pi \wedge 0 < \rho < +\infty$. Punkt $(x, y) = (0; 0)$ määratakse polaarkoordinaatides tingimusega $\rho = 0$. Punkti rist- ja polaarkoordinaatide vahel on seosed:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Funktsiooni $y = f(x)$ $(x \in X)$ graafikut xy-tasandil käsitletakse kui punktihulka $\{(x, y) : x \in X \;\wedge\; y = f(x)\}$. Seda punktihulka saab määrata ka polaarkoordinaatide abil, lähtudes võrrandist

$$\rho \sin \varphi = f(\rho \cos \varphi),$$

mis seob kahte muutujat φ ja ρ. Olgu Φ nende φ väärtuste hulk, mille korral suurus ρ on määratav võrrandist $\rho \sin \varphi = f(\rho \cos \varphi)$. Tulemuseks saame funktsiooni

$$\rho = g(\varphi) \quad (\varphi \in \Phi),$$

joone $y = f(x)$ esituse polaarkoordinaatides. Illustreerime eelöeldut diagrammi abil juhul kui $x > 0$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr] & & \varphi = \arctan(y/x) \arrow[dd, "g"] \\
& (x, y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
y \arrow[ur] & & \rho = \sqrt{x^2 + y^2}
\end{tikzcd}$$

Teisalt saame

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr] & & x=\rho\cos\varphi \arrow[dd, "f"] \\
& (\varphi,\rho) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\rho \arrow[ur] & & y=\rho\sin\varphi
\end{tikzcd}$$

Polaarkoordinaatides esitatud joone $\rho = g(\varphi)$ $(\varphi \in [\alpha, \beta])$ skitseerimisel tuleb esiteks koostada tabel

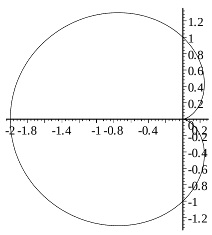
φ_0	φ_1	$\ldots$	φ_i	$\ldots$	φ_n
$\rho(\varphi_0)$	$\rho(\varphi_1)$	$\ldots$	$\rho(\varphi_i)$	$\ldots$	$\rho(\varphi_n)$

kus $\varphi_i = \alpha + ih$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ ja $h = (\beta - \alpha)/n$. Järgmise sammuna kantakse punktid $(\varphi_i, \rho(\varphi_i))$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ tasandile, kusjuures φ_i on punkti polaarnurk ja $\rho(\varphi_i)$ polaarraadius. Seejärel ühendatakse saadud punktid sujuva joonega.

Kui on teada joone $y = f(x)$ $(x \in X)$ võrrand polaarkoordinaatides $\rho = g(\varphi)$ $(\varphi \in \Phi)$, siis valides parameetriks polaarnurga φ, saame selle joone ühe võimaliku parameetrilise esituse

$$x = g(\varphi)\cos\varphi \;\wedge\; y = g(\varphi)\sin\varphi \quad (\varphi \in \Phi).$$

Näide 13. Skitseerime polaarkoordinaatides esitatud funktsiooni $\rho = 1 - \cos\varphi$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$ graafiku



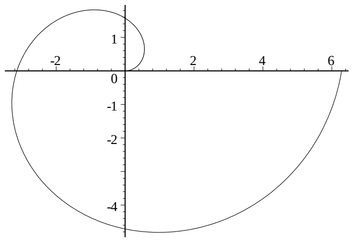
Joont $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$ nimetatakse *kardioidiks*. Selle joone üheks parameetriliseks esituseks on

$$x = a(1 - \cos\varphi)\cos\varphi \;\wedge\; y = a(1 - \cos\varphi)\sin\varphi \quad (\varphi \in [0, 2\pi)). \quad \diamondsuit$$

Näide 14. Skitseerime polaarkoordinaatides esitatud funktsiooni

$$\rho = \varphi \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

graafiku



$\diamondsuit$

Joont polaarkoordinaatides esitatud võrrandiga $\rho = a\varphi$ $(\varphi \in [0, +\infty))$ nimetatakse *Archimedese spiraaliks*. Selle joone üheks parameetriliseks esituseks on

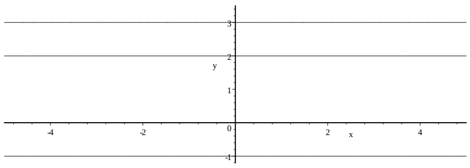
$$x = a\varphi \cos\varphi \ \wedge \ y = a\varphi \sin\varphi \quad (\varphi \in [0, +\infty)) \, .$$

1.2. Elementaarfunktsioonid

Alustame kõige lihtsamatest ja kõige rohkem uuritud ning rakendustes enim kasutatavatest funktsioonidest, st *põhilistest elementaarfunktsioonidest* .

1. *Konstantne funktsioon* $y = c$. Nendime, et $X = R \wedge Y = \{c\}$.

Näide 1. Skitseerime funktsioonide $y = -1$, $y = 2$ ja $y = 3$ graafikud



$\diamondsuit$

2. *Astmefunktsioon* $y = x^\alpha$ (üldjuhul $X = \mathbf{R}^+ \wedge Y = \mathbf{R}^+$). Juhul $\alpha = 2n$ ($n \in \mathbf{N}$) saame, et

$$y = x^{2n} \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = \mathbf{R}^+ \cup \{0\})$$

on paarisfunktsioon ja kui $\alpha = 2n + 1$ $(n \in \mathbf{N})$, siis

$$y = x^{2n+1} \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = \mathbf{R})$$

on paaritu funktsioon. Kui $\alpha = 1/(2n)$ $(n \in \mathbf{N})$, siis saame

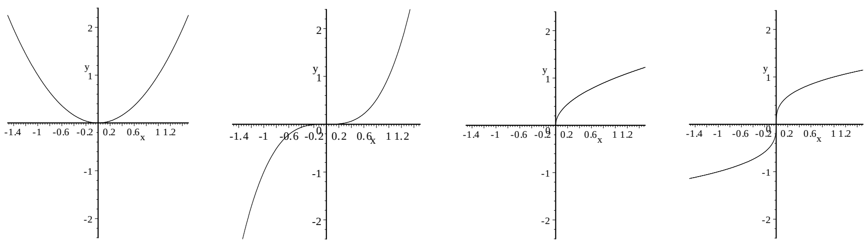
$$y = \sqrt[2n]{x} \quad (X = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \ \wedge \ Y = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}).$$

Juhul $\alpha = 1/(2n+1)$ $(n \in \mathbf{N})$ leiame, et

$$y = \sqrt[2n+1]{x} \ (X = \mathbf{R} \ \wedge \ \mathbf{Y} = \mathbf{R})$$

on paaritu funktsioon.

Näide 2. Skitseerime paketi SWP abil funktsioonide x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ graafikud



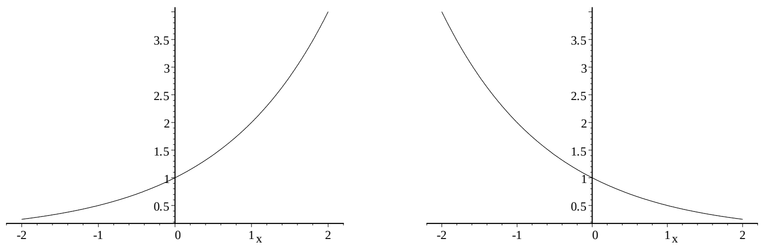
$\diamondsuit$

3. *Eksponentfunktsioon*

$$y = a^x \quad \big((0 < a < 1 \ \vee \ a > 1) \wedge \ X = \mathbf{R} \wedge Y = \mathbf{R}^+\big).$$

Eksponentfunktsioon $y = a^x$ on rangelt monotoonne hulgal $\mathbf{R}$, kusjuures juhul $a > 1$ on see funktsioon rangelt kasvav ja juhul $0 < a < 1$ rangelt kahanev.

Näide 3. Skitseerime funktsioonide 2^x ja $(\frac{1}{2})^x$ graafikud



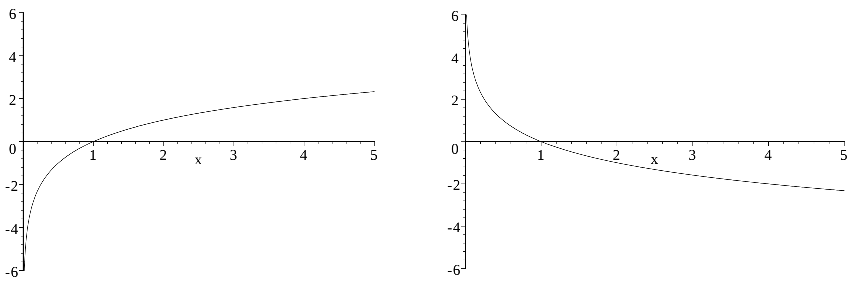
$\diamondsuit$

4. *Logaritmfunktsioon*

$$y = \log_a x \quad \big((0 < a < 1 \ \vee \ a > 1) \ \wedge \ X = \mathbf{R}^+ \wedge Y = \mathbf{R}\big).$$

Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$ on eksponentfunktsiooni $x = a^y$ pöördfunktsioon. Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$ on rangelt monotoonne hulgal $\mathbf{R}^+$, kusjuures juhul $a > 1$ on see funktsioon rangelt kasvav ja juhul $0 < a < 1$ rangelt kahanev.

Näide 4. Skitseerime funktsioonide $\log_2 x$ ja $\log_{0.5} x$ graafikud



$\diamondsuit$

5. *Trigonomeetrilised funktsioonid*

$$y = \sin x,\ y = \cos x \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = [-1;1] \ \wedge \ T = 2\pi)$$

ja

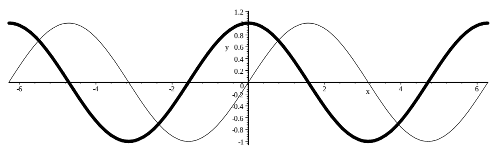
$$y = \tan x \quad (X = \underset{k\in\mathbf{Z}}{\cup}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \ \wedge \ Y = \mathbf{R} \wedge T = \pi)$$

ning

$$y = \cot x \quad (X = \underset{k\in\mathbf{Z}}{\cup}(k\pi,\ (k+1)\pi) \ \wedge \ Y = \mathbf{R} \wedge T = \pi).$$

Antud õppevahendis on trigonomeetriliste funktsioonide argumendid antud radiaanides. Tuletame meelde, et üks *radiaan* on kesknurk, millele vastava ringjoone kaare pikkus võrdub selle ringjoone raadiusega. Seega on täisnurga suurus $\pi/2$ radiaani.

Näide 5. Skitseerime funktsioonide $\sin x$ ja $\cos x$ graafikud lõigul $[-2\pi; 2\pi]$, kusjuures $\sin x$ graafiku skitseerime peene joonega

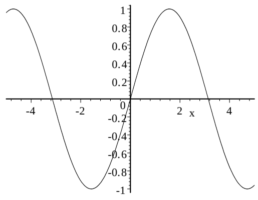
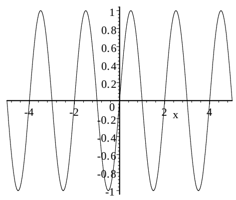
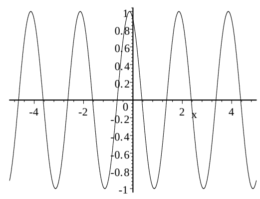


$\diamondsuit$

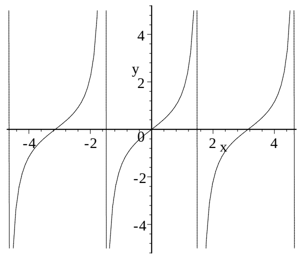
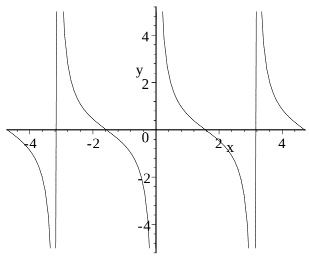
Näide 6. Kuidas skitseerida funktsiooni $y = \sin(\omega x + b)$ graafikut?

Esitame selle funktsiooni kujul $y = \sin(\omega(x - a))$, kus $a = -b/\omega$. Lähtume funktsiooni $y = \sin x$, mille periood on 2π, graafikust. Järgmisena skitseerime funktsiooni $y = \sin(\omega x)$, mille periood on $(2\pi)/\omega$, graafiku. Kui viimast graafikut nihutada $xy-$tasandil a ühiku võrra paremale (kui $a > 0$), saame funktsiooni $y = \sin(\omega(x - a))$ graafiku. Kui $a < 0$, siis nihutame graafikut $|a|$ ühiku võrra vasakule. $\diamondsuit$

Skitseerime sel viisil funktsiooni $y = \sin(\pi x + 2)$ graafiku. Siin $\omega = \pi$, $b = 2$ ja $a = -2/\pi$. Selleks esitame selle funktsiooni kujul $y = \sin(\pi(x - (-2/\pi)))$ ja skitseerime siis funktsioonide $y = \sin x$, $y = \sin(\pi x)$ ning $y = \sin(\pi(x - (-2/\pi)))$ graafikud

Näide 7. Sktitseerime funktsioonide $\tan x$ ja $\cot x$ graafikud lõigul $[-3\pi/2; 3\pi/2]$

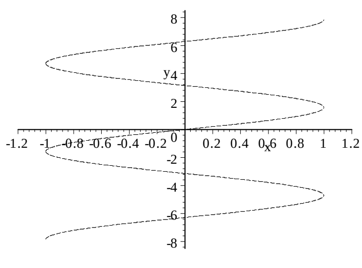
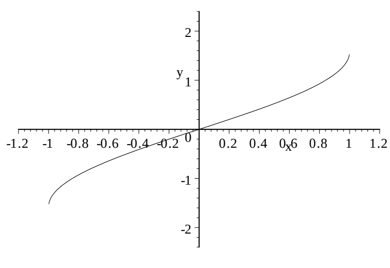
$\diamondsuit$

6. *Arkusfunktsioonid*. Funktsiooni $y = \sin x \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = [-1; 1])$ igale argumendi väärtusele x vastab täpselt üks funktsiooni väärtus $y \in [-1; 1]$. Kui fikseerida üks siinusfunktsiooni väärtus $y \in [-1; 1]$, siis see väärtus saavutatakse lõpmata paljude erinevate argumendi väärtuste x korral. Seda lõpmata mitmest funktsiooni tähistatakse $x = \mathrm{Arcsin}\, y$. Rõhutame, et funktsioonidel $y = \sin x$ ja $x = \mathrm{Arcsin}\, y$ on ühine graafik. Kui soovime üksühest vastavust, siis valime välja hulga X sellise alamhulga X_1, et vastavus muutujate x ja y vahel oleks üksühene. Tavaliselt valitakse $X_1 = [-\pi/2; \pi/2]$ ja saadakse funktsioon $x = \arcsin y$, mida nimetatakse *arkussiinuseks (*täpsemini *arkussiinuse peaväärtuseks*). Kui teostada peegeldus $x \leftrightarrow y$, siis saadakse funktsioon

$$y = \arcsin x,$$

kusjuures $X = [-1; 1] \ \wedge \ Y = [-\pi/2; \pi/2]$. Märgime, et $\pi/2 \approx 1.57$.

Näide 8. Skitseerime funktsioonide $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ ja $y = \arcsin x$ graafikud:

$\diamondsuit$

Analoogselt saadakse funktsiooni $y = \cos x \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = [-1;1])$ pööramisel lõpmata mitmene funktsioon $x = \mathrm{Arccos}\, y$ ja selle ühene haru $x = \arccos y$. Peegelduse $x \leftrightarrow y$ abil saadakse funktsioon

$$y = \arccos x \quad (X = [-1;1] \ \wedge \ Y = [0;\pi]),$$

mida nimetatakse *arkuskoosinuseks* ja mille graafik on skitseeritud Näites 1.1.5. Märgime, et funktsioonide $x = \cos y$ ja $y = \mathrm{Arccos}\, x$ graafikud ühtivad.

Funktsiooni

$$y = \tan x \ \ (X = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi) \ \wedge \ Y = \mathbf{R})$$

pööramisel saame lõpmata mitmese funktsiooni $x = \mathrm{Arctan}\, y$ ja selle ühese haru $x = \arctan y$ ning viimasest peegelduse $x \leftrightarrow y$ abil funktsiooni *arkustangens*

$$y = \arctan x \quad (X = \mathbf{R} \ \wedge \ Y = (-\pi/2; \pi/2)).$$

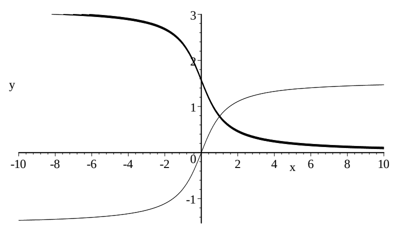
Märgime, et funktsioonide $x = \tan y$ ja $y = \mathrm{Arctan}\, x$ graafikud ühtivad. Analoogselt jõutakse funktsiooni

$$y = \cot x \quad (X = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, \, (k+1)\pi) \ \wedge \ Y = \mathbf{R})$$

pööramisel funktsioonini *arkuskootangens*

$$y = \mathrm{arccot}\, x \quad (X = \mathbf{R} \ \wedge \ Y = (0;\pi)).$$

Näide 9. Skitseerime funktsioonide $\arctan x$ ja $\mathrm{arccot}\, x$ graafikud, kusjuures $\arctan x$ graafiku skitseerime peenema joonega



♢

7. Defineerime *hüperboolsed funktsioonid*: *hüperboolne siinus*

$$\mathrm{sh}\, x \stackrel{def}{=} (e^x - e^{-x})/2 \quad (X = \mathbf{R} \ \wedge \ Y = \mathbf{R})$$

(kasutatakse samuti tähist $\sinh x$, näiteks paketis SWP), *hüperboolne koosinus*

$$\mathrm{ch}\, x \stackrel{def}{=} (e^x + e^{-x})/2 \quad (X = \mathbf{R} \ \wedge \ Y = [1;+\infty))$$

(paketis SWP $\cosh x$), *hüperboolne tangens*

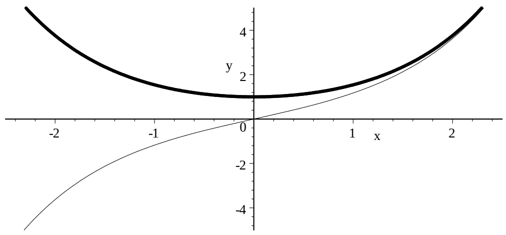
$$\operatorname{th} x \overset{def}{=} \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x \quad (X = \mathbf{R} \ \wedge \ Y = (-1; 1)$$

(paketis SWP $\tanh x$) ja *hüperboolne kootangens*

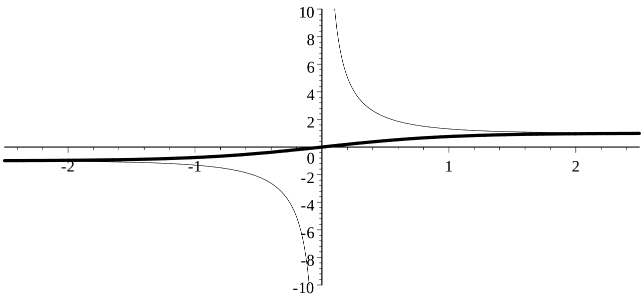
$$\operatorname{cth} x \overset{def}{=} \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x \quad (X = \mathbf{R} \backslash \{0\} \ \wedge \ Y = \mathbf{R} \backslash [-1; 1])$$

(paketis SWP $\coth x$).

Näide 10. Skitseerime SWP abil lõigul $[-2.5; 2.5]$ funktsioonide $\operatorname{sh} x$ ja $\operatorname{ch} x$ graafikud, kusjuures $\operatorname{sh} x$ graafiku esitame peenema joonega,



ning funktsioonide $\operatorname{th} x$ ja $\operatorname{cth} x$ graafikud, kusjuures $\operatorname{cth} x$ graafiku peenema joonega



$\diamondsuit$

8. Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse *areafunktsioonideks* (paketis SWP areafunktsioonid puuduvad). Funktsiooni

$$y = \operatorname{sh} x \ \ (X = \mathbf{R} \wedge Y = \mathbf{R})$$

pöördfunktsiooni nimetatakse *areasiinuseks* ja tähistatakse

$$x = \operatorname{arsh} y \quad (X = \mathbf{R} \wedge Y = \mathbf{R}).$$

Pöörame funktsiooni $y = \operatorname{sh} x$. Leiame, et

$$y = (e^x - e^{-x})/2 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Et $y < \sqrt{y^2+1}$ ja eksponentfunktsiooni väärtused on vaid positiivsed, siis

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \Leftrightarrow \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

ja

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Funktsionaalne sõltuvus $y = \operatorname{ch} x$ $\ (X = \mathbf{R} \wedge Y = [1; +\infty)\,)$ muutujate x ja y vahel ei ole üksühene (vt graafikut). Pöörame funktsiooni $y = \operatorname{ch} x$. Leiame, et

$$y = (e^x + e^{-x})/2 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 2ye^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Et

$$Y = [1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} y > \sqrt{y^2-1} \\ y \pm \sqrt{y^2-1} > 0, \end{cases}$$

siis funktsiooni $y = \operatorname{ch} x$ pööramisel saadakse kahene funktsioon $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$. Haru $\ln(y + \sqrt{y^2-1})$ nimetatakse *areakoosinuseks* ja tähistatakse $\operatorname{arch} y$. Seega

$$\operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \Leftrightarrow \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Funktsiooni $y = \operatorname{arch} x$ korral leiame, et $X = [1; +\infty)$ ja $Y = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

Funktsiooni $y = \operatorname{th} x$ $(X = \mathbf{R} \wedge Y = (-1; 1))$ pöördfunktsiooni nimetatakse *areatangensiks* ja tähistatakse $x = \operatorname{arth} y$. Pöörame funktsiooni $y = \operatorname{th} x$. Leiame, et

$$y = \operatorname{th} x \Leftrightarrow y = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow (e^x + e^{-x})y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = -y - 1 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Järelikult,

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Funktsiooni $y = \operatorname{arth} x$ korral leiame, et $X = (-1; 1)$ ja $Y = \mathbf{R}$.

Funktsiooni $y = \operatorname{cth} x$ $(X = \mathbf{R} \backslash \{0\} \wedge Y = \mathbf{R} \backslash [-1; 1])$ pööramisel saadavat funktsiooni $x = \operatorname{arcth} y$ nimetatakse *areakootangensiks*. Pöörame funktsiooni $y = \operatorname{arcth} x$. Leiame, et

$$y = \operatorname{cth} x \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Leftrightarrow (e^x - e^{-x})y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1} \overset{x \leftrightarrow y}{\Rightarrow}$$

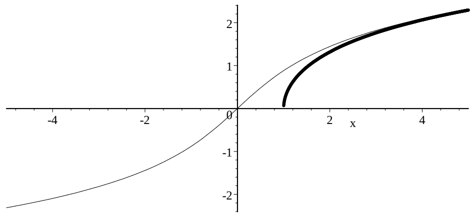
$$\overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Järelikult,

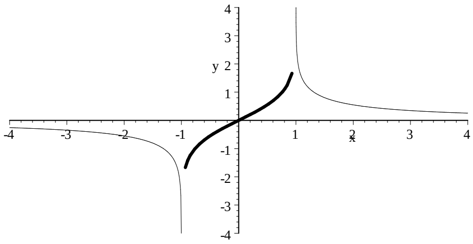
$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Funktsiooni $y = \operatorname{arcth} x$ korral leiame, et $X = \mathbf{R}\setminus[-1;1]$ ja $Y = \mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}$.

Näide 11. Skitseerime SWP abil funktsioonide $\operatorname{arsh} x$ ja $\operatorname{arch} x$ graafikud vastavalt peene ja jämeda joonega



ning funktsioonide $\operatorname{arth} x$ ja $\operatorname{arcth} x$ graafikud vastavalt jämeda ja peene joonega



♢

Definitsioon 1. *Elementaarfunktsiooniks* nimetatakse iga funktsiooni, mida on võimalik esitada põhiliste elementaarfunktsioonide kaudu, kasutades lõplik arv korda aritmeetilisi operatsioone (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine) ja liitfunktsiooni moodustamist.

Definitsioon 2. Funktsiooni

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

kus $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ on konstandid ja $n \in \mathbf{N}$ ning x on muutuja, nimetatakse n-*astme polünoomiks* ehk *täisratsionaalseks* funktsiooniks. Konstante $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nimetatakse *polünoomi kordajateks* ja arvu n *polünoomi astmeks***.**

Algebra põhiteoreem. Igal komplekssete kordajatega n-astme polünoomil $P_n(x)$ on täpselt n kompleksset nullkohta (kordsed nullkohad kaasa arvatud) $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Lause 1. Kui kompleksarv $x_1 = \alpha + i\beta$ on reaalsete kordajatega n-astme polünoomi $P_n(x)$ $(n \geq 2)$ nullkohaks, siis on selle polünoomi nullkohaks ka arvu x_1 kaaskompleksarv $\overline{x}_1 = \alpha - i\beta$. Lineaartegurite $x - (\alpha + i\beta)$ ja $x - (\alpha - i\beta)$ korrutis on reaalsete kordajatega ruutpolünoom kujul $x^2 + px + q$, kus $p = -2\alpha$ ja $q = \alpha^2 + \beta^2$.

Definitsioon 3. *Ratsionaalfunktsiooniks* ehk *murdratsionaalseks funktsiooniks* nimetatakse kahe polünoomi jagatisena esitatavat funktsiooni, st

$$f(x) = Q_m(x)/P_n(x) \quad (m, n \in \mathbf{N}),$$

kusjuures $Q_m(x)$ ja $P_n(x)$ on polünoomid.

Definitsioon 4. Ratsionaalfunktsiooni nimetatakse *lihtmurruks,* kui $m < n$, vastasel korral aga *liigmurruks.*

Definitsioon 5. *Murdlineaarseks* funktsiooniks nimetatakse funktsiooni kujul

$$\frac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1} \qquad (b_0 \neq 0)\,.$$

Definitsioon 6. *Algebraliseks funktsiooniks* nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$, mis rahuldab võrrandit

$$P(x)y^n + Q(x)y^{n-1} + \ldots + R(x)y + S(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

kus $P(x)$, $Q(x), \ldots, R(x)$ ja $S(x)$ on mingid polünoomid.

Lihtsamateks algebralisteks funktsioonideks on konstantne funktsioon, astmefunktsioon x^α $(\alpha \in \mathbf{Q}\backslash\{0\})$ ja polünoom.

Definitsioon 7. *Irratsionaalfunktsiooniks* nimetatakse algebralist funktsiooni, mis ei ole ratsionaalfunktsioon.

Kui $\alpha \in \mathbf{Z}$, siis x^α on ratsionaalfunktsioon ja kui $\alpha \in \mathbf{Q} \wedge \alpha \notin \mathbf{Z}$, siis x^α on irratsionaalfunktsioon.

Definitsioon 8. Funktsioone, mis ei ole algebralised, nimetatakse *transtsendentseteks funktsioonideks.*

Transtsendentseteks funktsioonideks on näiteks trigonomeetrilised funktsioonid, eksponentfunktsioon ja logaritmfunktsioon.

1.3. Jada piirväärtus

Funktsiooni piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi alustala, olles aluseks nii funktsiooni tuletise kui ka integraali defineerimisel. Seega on paljud funktsiooni tuletise ja integraali omadused vahetud järeldused funktsiooni piirväärtuse omadustest. Kuigi enamik neist omadustest on lihtsalt tõestatavad ka üldisemal juhul, piirdume neist paljude tõestamisega vaid jada korral. Järgnevad rakendused aitavad avada funktsiooni piirväärtuse, mis esmatutvumisel tundub olevat liiga keerukas mõiste, sügava sisu. Järelikult tuleb varuda kannatust! See matemaatiline konstruktsioon on seda väärt!

Õppevahendi kasutajale, kel esialgu puudub soov süveneda piirväärtuse mõiste nüanssidesse, võib punktidega 1.3 ja 1.5 tutvumisel soovitada võtta neis esitatud väited esialgu tõestuseta või piirduda mõne lihtsamaga neist tõestustest.

Definitsioon 1. Funktsiooni $f(x)$, mille määramispiirkonnaks on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbf{N}$, nimetatakse *jadaks*. Suurust $x_n = f(n)$ nimetatakse *jada üldliikmeks.*

Jada tähistamiseks kasutame liikmeti esitust $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ või lühemalt $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ehk $\{x_n\}$.

Näide 1. Vaatleme jada $\{(n-1)/n\}$, st

$$\{0;\ 1/2;\ 2/3;\ 3/4;\ 4/5;\ \ldots\ ;\ (n-1)/n;\ \ldots\}.$$

Suuruse n piiramatul kasvamisel täheldame, et jada liikmed lähenevad arvule 1, st erinevad kui tahes vähe arvust 1. $\diamondsuit$

Kui me üritame Näites 1 esitatud probleemi matemaatiselt korrektselt esitada, siis tekib esiteks küsimus, kuidas kirjeldada korrektselt "suuruse piiramatut kasvamist" ja "jada liikmete lähenemist mingile arvule." Teiseks tekib küsimus, kuidas korrektselt siduda neid kaht mõistet Näites 1 käsitletud probleemi kirjeldamisel.

Definitsioon 2. Kui $\varepsilon > 0$, siis arvu a *$\varepsilon-$ümbruseks* (epsilon-ümbruseks) nimetatakse vahemikku $(a-\ \varepsilon, a+\varepsilon)$ ja tähistatakse lühidalt $U_\varepsilon(a)$.

Definitsioon 3. Suuruse $+\infty$ $M-$ümbruseks nimetatakse vahemikku $(M, +\infty)$ ja tähistatakse $U_M(+\infty)$.

Definitsioon 4. Suuruse $-\infty$ $M-$ümbruseks nimetatakse vahemikku $(-\infty, M)$ ja tähistatakse $U_M(-\infty)$.

Definitsioon 5. Kui $M > 0$, siis suuruse ∞ $M-$ümbruseks nimetatakse ühendit $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ ja tähistatakse $U_M(\infty)$.

NB! Sümbolit ∞ kasutatakse tihti ka suuruse $+\infty$ lühendkirjapildina.

Definitsioon 6. Arvu a nimetatakse jada $\{x_n\}$ *(lõplikuks) piirväärtuseks*, kui suvalise positiivse arvu ε korral leidub selline naturaalarv n_0, mis üldjuhul sõltub arvust ε, st $n_0(\varepsilon)$, et iga naturaalarvu n, mis on suurem kui n_0, korral on rahuldatud võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$.

Asjaolu, et arv a on jada $\{x_n\}$ piirväärtuseks, tähistatakse

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

või

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

ehk lühidalt $x_n \to a$.

Definitsioon 7. Kui suvalise $M \in \mathbf{R}$ korral leidub selline $n_0 \in \mathbf{N}$, et iga $n \in \mathbf{N} \wedge n > n_0$ korral $x_n > M$, siis öeldakse, et jada $\{x_n\}$ piirväärtus on $+\infty$ ja tähistatakse

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

ehk lühidalt

$$x_n \to +\infty.$$

Analoogiliselt defineeritakse ka $x_n \to -\infty$ ja $x_n \to \infty$. Kui

$$x_n \to +\infty\ \vee\ x_n \to -\infty\ \vee\ x_n \to \infty,$$

siis kõneldakse *lõpmatust piirväärtusest.*

Definitsioon 8. Jada, millel on lõplik piirväärtus, nimetatakse *koonduvaks jadaks*. Jada, millel ei ole lõplikku piirväärtust, nimetatakse *hajuvaks jadaks*.

Seega ka lõpmatut piirväärtust omav jada on hajuv jada. Olgu c kõigi koonduvate jadade hulk. Asjaolu, et jada $\{x_n\}$ koondub, tähistatakse $\{x_n\} \in c$ ja asjaolu, et jada $\{x_n\}$ hajub, tähistatakse $\{x_n\} \notin c$. Definitsioonidele 6 ja 7 võib anda kompaktse kuju

$$x_n \to a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

ja vastavalt

$$x_n \to +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbf{R} \ \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M)\,.$$

Näide 2. Tõestame Definitsiooni 6 abil, et Näites 1 esitatud jada $\{(n-1)/n\}$ piirväärtus on arv 1.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Antud näite korral $x_n = (n-1)/n$ ja $a = 1$. Uurime Definitsioonis 6 esinevat tingimust $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.3.1}$$

Kui valida $n_0 = [1/\varepsilon]$, kus $[1/\varepsilon]$ on täisosa arvust $1/\varepsilon$, siis $n > n_0 \Rightarrow n > 1/\varepsilon$ ja hinnangute ahela (1.3.1) abil saame

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon,$$

st Definitsiooni 6 põhjal $(n-1)/n \to 1$. $\diamondsuit$

Kasutades ümbruse mõistet, võib Definitsioonile 6 anda kuju

$$x_n \to a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \forall n \in U_{n_0}(+\infty) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a))\,.$$

Lähtudes eelnevalt esitatud funktsiooni tõkestatuse mõistest, vt Definitsiooni 1.1.12, saame alajuhuna jada tõkestatuse mõiste.

Definitsioon 9. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ on *tõkestatud*, kui leidub selline arv $M > 0$, et

$$|x_n| \le M \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Definitsioon 10. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ on *ülalt tõkestatud*, kui leidub selline reaalarv M, et

$$x_n \le M \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Definitsioon 11. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ on *alt tõkestatud*, kui leidub selline reaalarv m, et

$$x_n \geq m \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Asjaolu, et jada $\{x_n\}$ on tõkestatud, tähistatakse $x_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ ehk lühidalt $x_n = O(1)$. Kui jada $\{x_n\}$ on ülalt (alt) tõkestatud, siis seda tähistatakse $x_n = O_R(1)$ $(x_n = O_L(1))$.

Vaatleme järgnevalt piirväärtuse omadusi.

Lause 1. Konstantse jada piirväärtuseks on see konstant, st

$$x_n = c \;\Rightarrow\; x_n \to c.$$

Tõestus. Lähtume jada piirväärtuse definitsioonist. Et suvalise $\varepsilon > 0$ korral

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

siis

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - c| = 0 < \varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow\; x_n \to c. \qquad \square\end{gathered}$$

Lause 2. Jada koonduvusest järeldub selle jada tõkestatus, st

$$x_n \to a \Rightarrow x_n = O(1).$$

Tõestuseks kasutame järgmist väidete ahelat

$$\begin{gathered}x_n \to a \overset{def.}{\Rightarrow} (\varepsilon = 1\; \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{kasutame kolmnurga võrratust} \\ ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|\end{array}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow\; (\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| - |a| < 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| < 1 + |a|) \overset{M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1+|a|\}}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow |x_n| \leq M \;\; (n \in \mathbf{N}). \qquad \square\end{gathered}$$

Lause 3. Kui jada piirväärtus a on nullist erinev, siis jada teatud elemendist alates on jada liikme absoluutväärtus suurem kui $|a|/2$, st

$$(x_n \to a) \wedge a \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}.$$

Tõestuseks esitame väidete ahela

$$x_n \to a \overset{def.}{\Rightarrow} \left(\varepsilon = \frac{|a|}{2}\; \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{|a|}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{kasutame kolmnurga võrratust} \\ ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\forall n > n_0 \Rightarrow ||x_n| - |a|| < \frac{|a|}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall n > n_0 \Rightarrow -\frac{|a|}{2} < |x_n| - |a| < \frac{|a|}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall n > n_0 \Rightarrow \frac{|a|}{2} < |x_n| < \frac{3\,|a|}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2} \right). \quad \square$$

Lause 4. Kui jadad $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ on koonduvad ja nende jadade üldliikmed rahuldavad iga $n \in \mathbf{N}$ korral võrratust $x_n \leq y_n$, siis samasugust võrratust rahuldavad ka nende jadade piirväärtused, st

$$x_n \to a \ \wedge \ y_n \to b \ \wedge \ x_n \leq y_n \ \Rightarrow a \leq b.$$

Tõestame selle lause vastuväiteliselt, st oletame, et $a > b$. Valime $\varepsilon = (a-b)/2 > 0$. Tulemuseks saame

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \to a \Rightarrow (\varepsilon = (a-b)/2 > 0 \ \ \exists n_1 \in \mathbf{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < (a-b)/2) \\ y_n \to b \Rightarrow (\varepsilon = (a-b)/2 > 0 \ \ \exists n_2 \in \mathbf{N} : \forall n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < (a-b)/2) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\overset{n_0=\max\{n_1,n_2\}}{\Rightarrow} \left(\forall n > n_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x_n - a| < (a-b)/2 \\ |y_n - b| < (a-b)/2 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall n > n_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (b-a)/2 < x_n - a < (a-b)/2 \\ (b-a)/2 < y_n - b < (a-b)/2 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall n > n_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+b)/2 < x_n < (3a-b)/2 \\ (3b-a)/2 < y_n < (a+b)/2 \end{array} \right. \right) \Rightarrow$$

$$\overset{x_n \leq y_n}{\Rightarrow} (\forall n > n_0 \Rightarrow (a+b)/2 < x_n \leq y_n < (a+b)/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)/2 < (a+b)/2.$$

Oleme saanud vastuolu, mis on tingitud vastuväitelisest oletusest. Järelikult, $a \leq b$. $\square$

Lause 5. Kui jadadel $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ on sama piirväärtus a ning $x_n \leq z_n \leq y_n$, siis ka jada $\{z_n\}$ on koonduv samaks piirväärtuseks, st

$$x_n \to a \ \wedge \ y_n \to a \ \wedge \ x_n \leq z_n \leq y_n \ \Rightarrow \ z_n \to a.$$

Tõestus. Kui $\varepsilon > 0$, siis

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \to a \Rightarrow (\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \\ y_n \to a \Rightarrow (\exists n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbf{N} : \forall n > n_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon) \end{array} \right. \overset{n_0=\max\{n_1,n_2\}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \ \wedge \ |y_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall n > n_0 \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \ \wedge \ -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \ \wedge \ a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon) \overset{x_n \le z_n \le y_n}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\forall n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ z_n \to a. \qquad \square$$

Lause 6. Kui jada $\{x_n\}$ koondub ja selle jada piirväärtuseks on arv a, siis koondub ka jada $\{|x_n|\}$, kusjuures selle jada piirväärtuseks on $|a|$, st

$$x_n \to a \ \Rightarrow \ |x_n| \to |a| \, .$$

Tõestus järeldub jada piirväärtuse definitsioonist ja kolmnurga võrratusest:

$$x_n \to a \ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\overset{||x_n| - |a|| \le |x_n - a|}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow ||x_n| - |a|| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ |x_n| \to |a| \, . \quad \square$$

Lause 7. Kui jada $\{x_n\}$ koondub ja selle jada piirväärtuseks on arv a ning jada $\{y_n\}$ koondub ja selle jada piirväärtuseks on arv b, siis koonduvad ka jadad $\{cx_n\}$ ($c =$konst), $\{x_n + y_n\}$ ja $\{x_n y_n\}$ ning lisaeeldusel $y_n \neq 0 \wedge b \neq 0$ ka $\{x_n / y_n\}$, kusjuures nende jadade piirväärtusteks on vastavalt ca, $a + b$, ab ja a/b.

Tõestus. Kasutades vastavat eeldust ja jada piirväärtuse definitsiooni, saame:

$$x_n \to a \ \wedge \ (c = \text{konstant}) \overset{c \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon / |c| > 0) \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon / |c|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |cx_n - ca| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ cx_n \to ca$$

ja

$$(x_n \to a) \wedge (\, y_n \to b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon/2) \wedge (|y_n - b| < \varepsilon/2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\overset{|x_n + y_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b|}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x_n + y_n \to a + b.$$

Et

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \le |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \le$$

$$\le |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b| \overset{y_n \to b \Rightarrow (\exists M>0\ |y_n| \le M)}{\le} M\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|\,,$$

siis

$$(x_n \to a) \wedge (\,y_n \to b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}:\ \forall n > n_0 \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon/(2M)) \wedge (|y_n - b| < \varepsilon/(2\,|a| + 1))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - ab| < M\varepsilon/(2M) + |a|\,\varepsilon/(2\,|a| + 1) < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x_n y_n \to ab.$$

Et

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b x_n - a y_n}{b y_n}\right| = \frac{|(b x_n - ba) - (a y_n - ab)|}{|b y_n|} \le$$

$$\le \frac{|b x_n - ba| + |a y_n - ab|}{|b|\,|y_n|} \overset{n > n_1 \Rightarrow |y_n| \ge |b|/2}{\le}$$

$$\le 2\frac{|b|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|}{|b|^2} = \frac{2}{|b|}\,|x_n - a| + \frac{2\,|a|}{b^2}\,|y_n - b|\,,$$

siis

$$(x_n \to a) \wedge (\,y_n \to b) \wedge b \ne 0 \Rightarrow$$

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbf{N}:\ \forall n > n_2 \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon\,|b|/4)) \wedge \big(|y_n - b| < \varepsilon b^2/(4\,|a| + 1)\big)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big[n_0 \overset{def}{=} \max\{n_1, n_2\}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}:\ \forall n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|}\frac{\varepsilon\,|b|}{4} + \frac{2\,|a|}{b^2}\frac{\varepsilon b^2}{4\,|a| + 1} < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}. \quad \square$$

Lause 8. Kui jada $\{x_n\}$ koondub ja selle jada piirväärtuseks on arv a, siis selle jada üldliige x_n on esitatav kujul $x_n = a + y_n$, kus $y_n \to 0$.

Tõestus. Valiku $y_n = x_n - a$ korral saame, et $a + y_n = a + (x_n - a) = x_n$, kusjuures

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to \infty} (x_n - a) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} a = a - a = 0. \quad \square$$

Lause 9. Iga ülalt (alt) tõkestatud monotoonselt kasvav (kahanev) jada on koonduv, st

$$x_n = O_R(1) \wedge x_n \nearrow \Rightarrow \{x_n\} \in c$$

või

$$x_n = O_L(1)\ \wedge\ x_n \searrow \Rightarrow \{x_n\} \in c.$$

Tõestust vt [5], lk 102–103. $\square$

Definitsioon 11. Iga jada, mis saadakse jadast mingi lõpliku või lõpmatu hulga jada elementide väljajätmisel, nimetatakse selle jada *osajadaks.*

Näide 3. Eraldame jadast $\{(-1)^n(n-1)/n\}$ kaks osajada

$$\{(-1)^{2n}(2n-1)/(2n)\} = \{(2n-1)/(2n)\}$$

(võetakse lähtejadast vaid paarisarvulise indeksiga liikmed) ja

$$\{(-1)^{2n+1}(2n)/(2n+1)\} = \{(-2n)/(2n+1)\}$$

(võetakse vaid paarituarvulise indeksiga liikmed). $\diamondsuit$

Lause 10 (*Bolzano-Weierstrassi teoreem*). Igast tõkestatud jadast saab eraldada koonduva osajada, st

$$x_n = O(1) \Rightarrow \exists \{n_k\} : \{x_{n_k}\} \in c.$$

Tõestust vt [5], lk 113. $\square$

Näites 2 esitatud tõkestatud jada $\{(-1)^n(n-1)/n\}$ on hajuv, kuid mõlemad esitatud osajadad $\{(2n-1)/(2n)\}$ ja $\{(-2n)/(2n+1)\}$ on koonduvad, kusjuures

$$(2n-1)/(2n) \ \rightarrow \ 1$$

ja

$$(-2n)/(2n+1) \ \rightarrow \ -1.$$

Lause 11 (*Cauchy kriteerium*). Jadal $\{x_n\}$ on lõplik piirväärtus parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub niisugune naturaalarv n_0, et iga naturaalarvu p puhul

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

kui $n > n_0$.

Tõestust vt [5], lk 108–110. $\square$

Näide 4. Jada $\left\{(n+1)^2/2n^2\right\}$ piirväärtuse arvutamisel tõdeme, et nii murru lugeja kui ka nimetaja lähenevad lõpmatusele. Kõneleme, et on tegemist *määramatusega tüüpi* "lõpmatus jagatud lõpmatusega" ja tähistame $\frac{\infty}{\infty}$ või $\frac{\infty}{\infty}$. Selle määramatuse avamiseks teeme kindlaks selle murru lugejas ja nimetajas oleva polünoomi astme. Mõlema polünoomi aste on n^2 ning maksimaalne neist astmetest on samuti n^2. Jagame murru lugejat ja nimetajat maksimaalse astmega n^2 (murru väärtus ei muutu!). Peale murru läbijagamist läheneb lugeja ühele ja nimetaja kahele. Seda asjaolu tähistame lühidalt $\frac{1}{2}$. Seega on määramatus avatud ning jada piirväärtuseks on 1/2 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{2}\overset{1}{\underset{2}{=}}\left[\begin{array}{c}\text{rakendame}\\ \text{Lauset 7}\end{array}\right]=$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}2}=\frac{1}{2}.\qquad\diamondsuit$$

Näide 5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}\left[\left(\max\left\{\frac{2}{3};1\right\}=1\right)\Rightarrow:n^1\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1/n+1/n^2}}{1+1/n}\overset{0}{\underset{1}{=}}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1/n+1/n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)}=0.\qquad\diamondsuit$$

Näide 6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!}\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\,\cdots\,(n+1)(n+2)+1\cdot2\cdot3\,\cdots\,(n+1)}{1\cdot2\cdot3\,\cdots\,(n+1)(n+2)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\,\cdots\,(n+1)((n+2)+1)}{1\cdot2\cdot3\,\cdots\,(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}\overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n}{1+2/n}\overset{1}{\underset{1}{=}}1.\qquad\diamondsuit$$

Näide 7.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}\overset{?}{\underset{?}{=}}\left[\sum_{k=0}^{n}q^k\overset{q\neq1}{=}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}=\frac{4}{3}.\qquad\diamondsuit$$

Näide 8.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\overset{?}{=}\left[\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 9.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} [: 3^n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 1/3^n}{1 + 1/3^n} \overset{1}{\underset{1}{=}} 1. \qquad \diamondsuit$$

1.4. Arv e

Arv e defineeritakse kui piirväärtus

$$e \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vaatleme jada $\{x_n\}$, kus

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Leiame, et

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = C_n^0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \ldots + C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + C_n^n \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left[C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\ C_n^0 = 1\right] =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \ldots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} + \ldots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le \left[\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}} \ \ (k \in \mathbf{N})\right] \le$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \le 3.$$

Seega on jada $\{x_n\}$ ülalt tõkestatud. Võrdleme liikmeid x_n ja x_{n+1}, st suurusi

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \ \text{ ja } \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k 1^{n+1-k}.$$

Nende summade kaks esimest vastavat liidetavat on võrdsed. Võrdleme järgmisi vastavaid liidetavaid

$$C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k \quad \text{ja} \quad C_{n+1}^k\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \quad (k=2,\ \dots\ ,n).$$

Et $1/n > 1/(n+1)$, siis

$$1-\frac{i-1}{n} < 1-\frac{i-1}{n+1} \quad (i=2,\ \dots\ ,k)$$

ja

$$\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

mis on samaväärne võrratusega

$$C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k \quad < \quad C_{n+1}^k\left(\frac{1}{n+1}\right)^k.$$

Järelikult, $x_n \le x_{n+1}$, st jada $\{x_n\}$ on monotoonselt kasvav. Monotoonselt kasvav ülalt tõkestatud jada $\{x_n\}$ on Lause 1.3.9 põhjal koonduv, st $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Kasutatakse tähistust

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Arv $e = 2.7182818246\ldots$ on irratsionaalarv. Logaritmi alusel e, st logaritmi $\log_e x$ nimetatakse *naturaallogaritmiks* ja tähistatakse $\ln x$. Eksponentfunktsiooni e^x jaoks kasutatakse ka tähistust $\exp(x)$.

1.5. Funktsiooni piirväärtus

Punktides 1.3 ja 1.4 vaatlesime jada piirväärtust, kusjuures oli tegemist kahe protsessiga: naturaalarvulise argumendi n lähenemisega suurusele $+\infty$ ja jada üldliikme x_n lähenemisega suurusele a. Käsitleme järgnevalt üldisemat juhtu.

Definitsioon 1. Suurust a nimetatakse *funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks punktis x_0*, kui suuruse a suvalise ε-ümbruse $U_\varepsilon(a)$ korral leidub selline arvu x_0 $\delta-$ümbrus $U_\delta(x_0)$, et $f(U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}) \subset U_\varepsilon(a)$.

Asjaolu, et suurus a on funktsiooni $f(x)$ piirväärtus punktis x_0, tähistatakse

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

või

$$f(x) \overset{x\to x_0}{\to} a.$$

Kui suurus a on arv, siis kõneldakse, et eksisteerib *lõplik piirväärtus*. Tavaliselt kõneldes, et funktsiooni piirväärtus eksisteerib, loetakse, et tegemist on lõpliku piirväärtusega. Kui suurus a on kas $+\infty$ või $-\infty$ või ∞ (st, et suuruse absoluutväärtus on $+\infty$), siis kõneldakse *lõpmatust piirväärtusest*.

Jada piirväärtuse mõiste on erijuht funktsiooni piirväärtuse mõistest (kui valida $x_0 = +\infty$ ja kasutada lähenemiseks vaid argumendi naturaalarvulisi väärtusi). Lõplike suuruste a ja x_0 korral kehtib järgnev väide.

Lause 1. Arv a on funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks kohal x_0 parajasti siis, kui suvalise arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv $\delta = \delta(\varepsilon)$, et

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tõestus. Lause tõesus järeldub Definitsioonist 1 ja arvu a $\varepsilon-$ümbruse definitsioonist, vt Definitsiooni 1.3.2, kusjuures

$$x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\} \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$$

ja

$$f(U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}) \subset U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ |f(x) - a| < \varepsilon) . \quad \square$$

Lause 1 väide on lühidalt kirja pandav kujul

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) .$$

Näide 1. Näitame, lähtudes vahetult Lausest 1, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3 + 2x}{x} = 2. \tag{1.5.1}$$

Kui kasutada Lause 1 tähistust, siis $f(x) = \left(4x^3 + 2x\right)/x$, $x_0 = 0$ ja $a = 2$. Olgu ε suvaline positiivne arv. Näitame, et leidub selline $\delta = \delta(\varepsilon)$, mille korral

$$0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\frac{4x^3 + 2x}{x} - 2\right| < \varepsilon. \tag{1.5.2}$$

Et

$$\left|\frac{4x^3 + 2x}{x} - 2\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \left|\frac{4x^3 + 2x - 2x}{x}\right| < \varepsilon \ \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \ 0 < \left|4x^2\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ 0 < |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

siis valiku $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$ korral

$$0 < |x - 0| < \delta \ \Leftrightarrow \ 0 < |x - 0| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \ \Leftrightarrow \ 0 < \left|4x^2\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < \left|\frac{4x^3}{x}\right| < \varepsilon \ \Rightarrow \left|\frac{4x^3 + 2x}{x} - 2\right| < \varepsilon,$$

st kehtib väide (1.5.2), millest järeldub Lause 1 põhjal ka väide (1.5.1). $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime Heaviside'i funktsiooni (vt Näidet 1.1.6) $H(x)$ piirväärtust punktis $x_0 = 0$. Olgu $\forall\varepsilon > 0$. Et punkti 0 suvalises ümbruses leidub nii punkte, milles funktsiooni väärtus on 0, kui ka punkte, milles funktsiooni väärtus on 1, siis $0 < \varepsilon < 1/2$ korral ei leidu selliseid suurusi a ja $\delta(\varepsilon) > 0$, mille korral

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |H(x) - a| < \varepsilon.$$

Järelikult,

$$\overline{\exists} \lim_{x\to 0} H(x).$$

Vaadates funktsiooni $H(x)$ graafikut, võib väita, et lähenedes punktile 0 vasakult, saame tulemuseks 0, ja lähenedes punktile 0 paremalt, saame tulemuseks 1. Defineerime punkti x_0 *ühepoolsed* $\varepsilon-$*ümbrused* ja funktsiooni $f(x)$ *ühepoolsed piirväärtused.*

Definitsioon 2. Kui $\varepsilon > 0$, siis *punkti* x_0 *vasakpoolseks* $\varepsilon-$*ümbruseks* nimetatakse vahemikku $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ ja tähistatakse lühidalt $U_\varepsilon(x_0-)$.

Definitsioon 3. Kui $\varepsilon > 0$, siis *arvu* x_0 *parempoolseks* $\varepsilon-$*ümbruseks* nimetatakse vahemikku $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ ja tähistatakse lühidalt $U_\varepsilon(x_0+)$.

Definitsioon 4. Suurust a nimetatakse *funktsiooni* $f(x)$ *vasakpoolseks piirväärtuseks punktis* x_0, kui suuruse a suvalise ε-ümbruse $U_\varepsilon(a)$ korral leidub selline punkti x_0 vasakpoolne $\delta-$ümbrus $U_\delta(x_0-)$, et $f(U_\delta(x_0-)) \subset U_\varepsilon(a)$.

Asjaolu, et suurus a on funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus punktis x_0, tähistatakse

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a$$

või

$$f(x) \overset{x\to x_0-}{\to} a.$$

Analoogiliselt Lausega 1 saab näidata, et

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\,.$$

Definitsioon 5. Suurust a nimetatakse *funktsiooni* $f(x)$ *parempoolseks piirväärtuseks punktis* x_0, kui suuruse a suvalise ε-ümbruse $U_\varepsilon(a)$ korral leidub selline suuruse x_0 parempoolne $\delta-$ümbrus $U_\delta(x_0+)$, et $f(U_\delta(x_0+)) \subset U_\varepsilon(a)$.

Asjaolu, et suurus a on funktsiooni $f(x)$ parempoolne piirväärtus punktis x_0, tähistatakse

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a$$

või

$$f(x) \overset{x\to x_0+}{\to} a.$$

Analoogiliselt Lausega 1 saab näidata, et

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)\,.$$

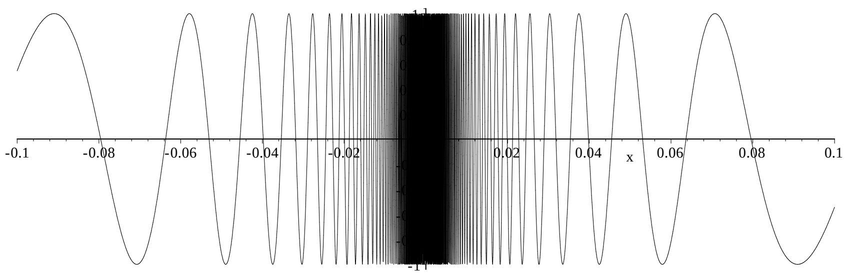
Näites 2 esitatud Heaviside'i funktsiooni $H(x)$ korral leiame, et

$$\lim_{x\to 0-} H(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to 0+} H(x) = 1.$$

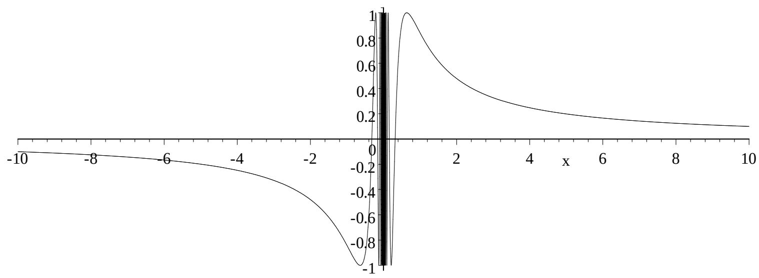
Näide 3. Vaatleme piirväärtust

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Skitseerime funktsiooni $\sin(1/x)$ graafiku hulgal $(-0.1; 0) \cup (0; 0.1)$



Graafikult on näha, et piirprotsessis $x \to 0$ funktsiooni väärtused ei lähene ühelegi suurusele, vaid võnguvad arvude -1 ja $+1$ vahel. Analoogiliselt Näitega 2 võib rangelt tõestada, valides $0 < \varepsilon < 0.5$, et antud piirväärtus ei eksisteeri. Näidake! Skitseerime funktsiooni $\sin(1/x)$ graafiku ka hulgal $(-10; 0) \cup (0; 10)$



$\diamondsuit$

Näidake, et

$$\lim_{x\to\infty} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Enamik funktsiooni piirväärtuse omadusi on sarnased jada piirväärtuse omadustega, sest tõene on järgnev väide.

Lause 2 (vt [5], lk 89–90). Suurus a (mis võib olla ka $+\infty$ või $-\infty$ või ∞) on funktsiooni $f(x)$ (parempoolne, vasakpoolne) piirväärtus punktis x_0, mis võib olla ka $+\infty$ või $-\infty$ või ∞, parajasti siis, kui funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnas iga (paremalt, vasakult) punktile x_0 läheneva jada $\{x_n\}$ puhul, kus $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$, kehtib seos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Sõnastame esiteks mõningad funktsiooni piirväärtuse omadused. Nende omaduste tõestused on sarnased jada piirväärtuse vastavate omaduste tõestustega.

Lause 3. Konstantse funktsiooni piirväärtuseks on see konstant, st

$$f(x) = c \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = c.$$

Lause 4. Kui eksisiteerib funktsiooni $f(x)$ piirväärtus punktis x_0, siis leidub punkti x_0 selline ümbrus $U(x_0)$, et funktsioon $f(x)$ on tõkestatud hulgal $U(x_0)\backslash\{x_0\}$, st

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow \exists U(x_0) : f(x) = O(1) \quad (x \in U(x_0)\backslash\{x_0\})\,.$$

Tõestus. Lähtume funktsiooni piirväärtuse definitsioonist. Olgu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Valime $\varepsilon = 1$. Lause 1 põhjal leidub selline suurus $\delta > 0$, mis määrab punkti x_0 korral sellise ümbruse $U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$, et

$$x \in U_\delta(x_0)\backslash\,\{x_0\} \Rightarrow\; |f(x) - a| < 1 \Rightarrow ||f(x)| - |a|| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |a| \Rightarrow f(x) = O(1) \quad (x \in U_\delta(x_0)\backslash\,\{x_0\})\,. \quad \square$$

Lause 5. Kui funktsiooni piirväärtus punktis x_0 on nullist erinev, siis leidub punkti x_0 selline ümbrus $U(x_0)$, et hulgal $U(x_0)\backslash\{x_0\}$ on funktsiooni $f(x)$ absoluutväärtus suurem kui pool funktsiooni piirväärtuse absoluutväärtusest, st

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0)\colon x \in U(x_0)\backslash\{x_0\} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|a|}{2}.$$

Lause 6. Kui eksisteerivad funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ piirväärtused punktis x_0 ja leidub punkti x_0 selline ümbrus $U(x_0)$, et hulga $U(x_0)\backslash\{x_0\}$ igas punktis kehtib võrratus $f(x) \leq g(x)$, siis samasugust võrratust rahuldavad ka nende funktsioonide piirväärtused, st

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \;\wedge\; \lim_{x\to x_0} g(x) = b \;\wedge\; (\exists U(x_0)\colon f(x) \leq g(x) \quad (\, x \in U(x_0)\backslash\{x_0\})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \leq b.$$

Lause 7. Kui funktsioonidel $f(x)$ ja $g(x)$ on punktis x_0 sama piirväärtus a ja leidub punkti x_0 selline ümbrus $U(x_0)$, et hulga $U(x_0)\backslash\{x_0\}$ igas punktis kehtib võrratuste

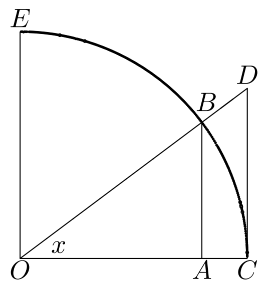
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ahel, siis funktsiooni $h(x)$ piirväärtus punktis x_0 on samuti a, st

$$\left(\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \wedge \\ \wedge\ (\exists U(x_0)\colon x \in U(x_0)\backslash\{x_0\} \Rightarrow\ f(x) \leq h(x) \leq g(x)\,) \end{array} \right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = a.$$

Märkus 1. Lause 7 väitega sarnane väide kehtib ka ühepoolsete piirväärtuste korral.
Näide 4. Tõestame, et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Kuna meid huvitab selle funktsiooni käitumine nullpunkti ümbruses ja $(\sin x)/x$ on paarisfunktsioon, siis piisab uurida vastavat parempoolset piirväärtust ning piirduda juhuga $0 < x < \pi/2$. Kui OCE on ühikringi esimene veerand



siis kolmnurga OAB pindala S_{OAB}, ringi sektori OCB pindala S_{OCB} ja kolmnurga OCD pindala S_{OCD} rahuldavad võrratuste ahelat

$$S_{OAB} \leq S_{OCB} \leq S_{OCD}. \tag{1.5.3}$$

Olgu x nurga AOB suurus radiaanides. Et ühikringi esimese veerandi korral

$$S_{OAB} = \frac{(\cos x)\cdot(\sin x)}{2}, \quad S_{OCB} = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi}, \quad S_{OCD} = \frac{1\cdot \tan x}{2},$$

siis võrratuste ahel (1.5.3) omandab kuju

$$\frac{(\cos x)\,(\sin x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2},$$

millest saame

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

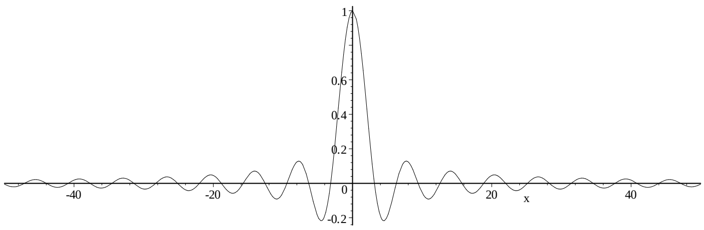
Kuna $\lim_{x\to 0+} \cos x = 1$ ja $\lim_{x\to 0+} 1/(\cos x) = 1$, siis viimasest ahelast järeldub Märkuse 1 põhjal $\lim_{x\to 0+} x/(\sin x) = 1$. Märgime, et

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Seega $\lim_{x\to 0+} (\sin x)/x = 1$. Arvestades, et $(\sin x)/x$ on paarisfunktsioon, saame $\lim_{x\to 0-} (\sin x)/x = 1$. Järelikult,

$$\left(\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1\right) \wedge \left(\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \diamondsuit$$

Skitseerime funktsiooni $(\sin x)/x$ graafiku hulgal $[-50; 0) \cup (0; 50]$



Lause 8. Kui funktsiooni $f(x)$ piirväärtus punktis x_0 on a, siis funktsiooni $|f(x)|$ piirväärtus punktis x_0 on $|a|$, st

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|.$$

Lause 9. Kui punktis x_0 on funktsiooni $f(x\}$ piirväärtus a ja funktsiooni $g(x\}$ piirväärtus b ning c on konstant, siis punktis x_0 eksisteerivad ka funktsioonide $cf(x)$, $f(x)+g(x)$ ja $f(x)g(x)$ piirväärtused, kusjuures nende funktsioonide piirväärtusteks on vastavalt ca, $a+b$ ja ab. Kui lisaks leidub selline arvu x_0 ümbrus $U(x_0)$, et hulga $U(x_0)\backslash\{x_0\}$ igas punktis on funktsiooni $g(x)$ väärtus nullist erinev ja $b \neq 0$, siis punktis x_0 eksisteerib ka funktsiooni $f(x)/g(x)$ piirväärtus, kusjuures selleks piirväärtuseks on a/b, st

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = a\right) \wedge \left(\lim_{x\to x_0} g(x) = b\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} (c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\cdot a, \\ \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a+b, \\ \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right) = a\cdot b, \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

Tõestame neist väidetest teise. Et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon/2)$$

ja

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = b \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon/2)$$

ning

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \le |f(x) - a| + |g(x) - b|\,,$$

siis $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ korral

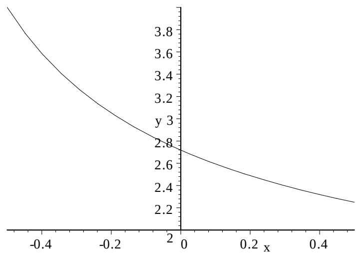
$$\left(\begin{array}{c} (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow (|(f(x) + g(x)) - (a + b)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon) \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b. \quad \square$$

Lause 10. Kehtivad valemid (vt [5], lk 105–106)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \ \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Skitseerime funktsiooni $(1 + x)^{1/x}$ graafiku hulgal $(-0.5; 0) \cup (0; 0.5)$



Tihti tuleb avada $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ ja 1^∞ tüüpi määramatusi. Nende avamiste tulemused sõltuvad konkreetse ülesande korral uuritava avaldise komponentide nullile või lõpmatusele lähenemise kiirusest.

Toome mõningad näited piirväärtuse arvutamise kohta.

Näide 5. Uurime piirväärtust

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{1 - x}.$$

Selle näite korral läheneb murru lugeja ühele ja nimetaja nullile. Kui muutuja x läheneb ühele vasakult (paremalt), siis murd läheneb pluss (miinus) lõpmatusele, st

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x}{1 - x} \overset{\frac{1}{0}}{=} +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1+} \frac{x}{1 - x} \overset{\frac{1}{0}}{=} -\infty.$$

Järelikult funktsiooni $x/(1-x)$ absoluutväärtus läheneb pluss lõpmatusele. Antud asjaolu tähistame

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}\overset{\frac{1}{0}}{=}\infty.$$

ja ütleme, et selle murru piirväärtus on ∞. $\diamondsuit$

Näide 6. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+2)}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{muutuja } x \text{ läheneb arvule } -2, \text{ st } x \text{ ei võrdu arvuga } -2,\\ \text{st teguriga } x+2 \text{ võib lugejat ja nimetajat läbi jagada}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{x-3}\overset{\frac{2}{-5}}{=}-\frac{2}{5}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 7. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\overset{\infty-\infty}{=}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{nii esimene kui ka teine murd lähenevad suurusele } \infty,\\ \text{st tegemist on } \infty-\infty \text{ tüüpi määramatusega}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{1+x+x^2}\overset{\frac{-3}{3}}{=}-1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 8. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}\overset{\frac{\infty+\infty}{\infty-\infty}}{=}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{muutuja } x \text{ maksimaalne aste nii lugejas kui ka nimetajas on } x,\\ \text{järelikult on muutuja } x \text{ maksimaalne aste murru jaoks } x \text{ ja}\\ \text{jagame nii murru lugeja kui ka nimetaja läbi suurusega } x,\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{x\geq 0}{=}\sqrt{1+1/x^2} \text{ ja } \dfrac{\sqrt[4]{x^3+x}}{x}\overset{x\geq 0}{=}\sqrt[4]{1/x+1/x^3}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1/x}}{\sqrt[4]{1/x+1/x^3}-1}\overset{\frac{1}{-1}}{=}-1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 9. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \overset{1}{\underset{2}{=}} \frac{1}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 10. Olgu $m, n \in \mathbf{N}$. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \overset{0}{\underset{0}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[m]{x}-1)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+1\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+1\right)}{(\sqrt[n]{x}-1)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+1\right)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+1\right)} \overset{0}{\underset{0}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+1}{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+1} \overset{n}{\underset{m}{=}} \frac{n}{m}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 11. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) \overset{\infty(\infty-\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^3}\left(x^3+1-x^3+1\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Jagame lugejat ja nimetajat}\\ \text{suurusega } \sqrt{x^3}\end{array}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/x^3}+\sqrt{1-1/x^3}} \overset{2}{\underset{2}{=}} 1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 12. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \left[\begin{array}{l}\text{trigonomeetrilisi funktsioone sisaldava määramatuse } \frac{0}{0}\\ \text{avamiseks on meil esialgu vaid üks seos, } \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}\cdot\frac{2}{5\cos 2x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right) \Rightarrow \left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1\right) \wedge \left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1\right),\\ \text{lisaks kasutame Lauset 9}\end{array}\right] = \frac{2}{5}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 13. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{2\,(x/2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}.\quad\diamondsuit$$

Näide 14. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}[\ (y=\pi/2-x\Leftrightarrow x=\pi/2-y)\Rightarrow\ (x\to\pi/2\Leftrightarrow y\to 0)\ ]=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin(\pi/2-y)}{y^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\left[\begin{array}{c}\text{vaadake}\\ \text{Näidet 13}\end{array}\right]=\frac{1}{2}.\quad\diamondsuit$$

Näide 15. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1+x)-1}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{teeme muutujate vahetuse } y=-\dfrac{1}{1+x}\Leftrightarrow x=-1-\dfrac{1}{y},\\ \text{kusjuures } x\to\infty\Leftrightarrow y\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-1-1/y}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-1}(1+y)^{-1/y}=\frac{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-1}}{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{e}.\quad\diamondsuit$$

1.6. Lõpmata väikesed ja lõpmata suured suurused

Definitsioon 1. Muutuvat suurust (funktsiooni) $\alpha(x)$ nimetatakse *lõpmata väikeseks suuruseks* piirprotsessis $x\to x_0$, kui

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Lõpmata väikest suurust nimetatakse ka *hääbuvaks suuruseks.* Asjaolu, et $\alpha(x)$ on lõpmata väike suurus piirprotsessis $x\to x_0$, tähistatakse ka kujul

$$\alpha(x)=o(1)\quad(x\to x_0)\,.$$

Näide 1. Funktsioonid $x,\ x^3,\ \sin x,\ 1-\cos x,\ e^x-1$ ja $\ln(1-x)$ on piirprotsessis $x\to 0$ lõpmata väikesed suurused, sest

$$\lim_{x\to 0}x=0,\ \lim_{x\to 0}x^3=0,\ \lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0,\ \lim_{x\to 0}\ln(1-x)=0.\quad\diamondsuit$$

Definitsioon 2. Muutuvat suurust $\alpha(x)$ nimetatakse *lõpmata suureks suuruseks* piirprotsessis $x \to x_0$, kui $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$.

Lõpmata suurt suurust nimetatakse ka *vohavaks suuruseks*.

Näide 2. Suurused $1/x$, $1/x^3$, $1/\sin x$, $1/(1-\cos x)$, $1/(e^x-1)$ ja $1/\ln(1-x)$ on piirprotsessis $x \to 0$ lõpmata suured, sest

$$\lim_{x \to 0} 1/x = \infty, \ \lim_{x \to 0} 1/x^3 = \infty, \ \lim_{x \to 0} 1/\sin x = \infty, \ \lim_{x \to 0} 1/(1-\cos x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to 0} 1/(e^x - 1) = \infty, \ \lim_{x \to 0} 1/\ln(1-x) = \infty. \qquad \diamondsuit$$

Märkus 1. Muutuvate suuruste juures on väga oluline vaadeldav piirprotsess. Nimelt, ühes piirprotsessis võib vaadeldav suurus olla lõpmata väike ja teises piirprotsessis võib sama suurus olla lõpmata suur ning enamikes piirprotsessides ei üks ega teine. Näiteks on suurus x^2 piirprotsessis $x \to 0$ lõpmata väike ja piirprotsessis $x \to \infty$ lõpmata suur ning kõigis ülejäänud piirprotsessides ei ole üks ega teine.

Definitsioonidest 1 ja 2 järelduvad Laused 1 ja 2.

Lause 1. Mingis piirprotsessis lõpmata väikese suuruse pöördväärtus on samas piirprotsessis lõpmata suur suurus.

Lause 2. Mingis piirprotsessis lõpmata suure suuruse pöördväärtus on samas piirprotsessis lõpmata väike suurus.

Lause 3. Kahe samas piirprotsessis lõpmata väikese suuruse summa, vahe ja korrutis on samuti lõpmata väike suurus selles piirprotsessis.

Tõestus. Kui komponentide piirväärtused eksisteerivad, siis summa, vahe ja korrutise piirväärtus on vastavalt piirväärtuste summa, piirväärtuste vahe ja piirväärtuste korrutis. Seega lause väited kehtivad. $\square$

Lause 4. Lõpmata väikese suuruse korrutis tõkestatud suurusega on lõpmata väike suurus.

Tõestus. Olgu $\alpha(x)$ lõpmata väike suurus piirprotsessis $x \to x_0$ ja $f(x)$ tõkestatud funktsioon suuruse x_0 mingis ümbruses $U_\gamma(x_0)$, st

$$\exists M > 0 : |f(x)| \le M \quad (x \in U_\gamma(x_0)).$$

Kui $\varepsilon > 0$, siis lõpmata väikese suuruse definitsiooni põhjal leidub selline $U_\delta(x_0)$, et $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon/M \quad (x \in U_\delta(x_0) \backslash \{x_0\})$ ja seega

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mu > 0 : |\alpha(x) f(x)| < (\varepsilon/M) \cdot M = \varepsilon \quad (x \in U_\mu(x_0) \backslash \{x_0\}),$$

kusjuures $\mu = \min\{\gamma, \delta\}$, kui suurus x_0 on lõplik, ja $\mu = \max\{\gamma, \delta\}$, kui x_0 on lõpmatu. Järelikult on suurus $\alpha(x) f(x)$ lõpmata väike piirprotsessis $x \to x_0$. $\square$

Lause 5. Kahe samas piirprotsessis lõpmata suure suuruse korrutis on samuti lõpmata suur suurus selles piirprotsessis.

Tõestus. Olgu $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ lõpmata suured suurused piirprotsessis $x \to x_0$, st kui tahes suure $\varepsilon > 0$ korral leiduvad sellised suuruse x_0 ümbrused $U_\gamma(x_0)$ ja $U_\delta(x_0)$, et

$$\big(x \in U_\gamma(x_0)\backslash\{x_0\} \Rightarrow \alpha(x) \in U_{\sqrt{\varepsilon}}(\infty)\big) \wedge \big(x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\} \Rightarrow \beta(x) \in U_{\sqrt{\varepsilon}}(\infty)\big)\,.$$

Järelikult on suurus $\alpha(x)\beta(x)$ lõpmata suur suurus piirprotsessis $x \to x_0$, sest

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \mu > 0 : (x \in U_\mu(x_0)\backslash\{x_0\} \Rightarrow \alpha(x)\beta(x) \in U_\varepsilon(\infty))\,,$$

kusjuures $\mu = \min\{\gamma, \delta\}$, kui suurus x_0 on lõplik, ja $\mu = \max\{\gamma, \delta\}$, kui x_0 on lõpmatu.
$\square$

Definitsioon 3. Kui $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ on lõpmata väikesed suurused piirprotsessis $x \to x_0$ ja $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 0$, siis öeldakse, et suurus $\alpha(x)$ on võrreldes suurusega $\beta(x)$ *kõrgemat järku lõpmata väike suurus* selles piirprotsessis.

Näide 3. Piirprotsessis $x \to 0$ on suurused x ja $1-\cos x$ lõpmata väikesed. Näitame, et suurus $1-\cos x$ on võrreldes suurusega x kõrgemat järku lõpmata väike suurus selles piirprotsessis

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x/2}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \cdot \sin x/2\right) \overset{1\cdot 0}{=} 0. \qquad \diamondsuit$$

Definitsioon 4. Kui $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ on *l*õpmata suured suurused piirprotsessis $x \to x_0$ ja $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = \infty$, siis öeldakse, et suurus $\alpha(x)$ on võrreldes suurusega $\beta(x)$ *kõrgemat järku lõpmata suur suurus* selles piirprotsessis.

Näide 4. Piirprotsessis $x \to 0$ on suurused $1/x$ ja $1/\left(1-\cos x\right)$ lõpmata suured. Näitame, et suurus $1/\left(1-\cos x\right)$ on võrreldes suurusega $1/x$ kõrgemat järku lõpmata suur suurus selles piirprotsessis

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/\left(1-\cos x\right)}{1/x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sin^2 x/2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x/2}{\sin x/2} \cdot \frac{1}{\sin x/2}\right) \overset{1\cdot\infty}{=} \infty. \quad \diamondsuit$$

Lause 6. Kui suurus $\alpha(x)$ on võrreldes suurusega $\beta(x)$ kõrgemat järku lõpmata väike piirprotsessis $x \to x_0$, siis suurus $1/\alpha(x)$ on võrreldes suurusega $1/\beta(x)$ kõrgemat järku lõpmata suur selles piirprotsessis.
Tõestage!

Definitsioon 5. Lõpmata väikeseid (suuri) suurusi $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ nimetatakse piirprotsessis $x \to x_0$ *ekvivalentseteks lõpmata väikesteks (suurteks) suurusteks,* kui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Seda fakti tähistatakse

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (x \to x_0)$$

ehk

$$\alpha(x) \overset{x \to x_0}{\sim} \beta(x).$$

Näide 5. Et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

siis

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)\,. \qquad \diamondsuit$$

Näide 6. Et

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x/2}{x^2/2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = 1,$$

siis

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)\,. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 1. Näidake, et

$$\tan x \sim x \quad (x \to 0)\,, \quad \ln(1 + x) \sim x \quad (x \to 0)\,, \quad e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)\,.$$

Märkus 2. Enamik suuruste ekvivalentsusseoseid on esitatud piirprotsessi $x \to 0$ korral. Juhul kui $x_0 \neq 0$, on piirprotsessi $x \to x_0$ korral otstarbekas kasutada muutujate vahetust $y = x - x_0$. Näiteks

$$\sin(x - \pi) \sim x - \pi \ (x \to \pi),$$

sest

$$\sin y \sim y \quad (y \to 0)\,,$$

kusjuures $y = x - \pi$.

Lause 7. Kui lõpmata väike suurus $\alpha(x)$ on ekvivalentne suurusega $\alpha_1(x)$ piirprotsessis $x \to x_0$ ja lõpmata väike suurus $\beta(x)$ on ekvivalentne suurusega $\beta_1(x)$ samas piirprotsessis, siis

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

st

$$\alpha(x) \overset{x \to x_0}{\sim} \alpha_1(x) \ \wedge \ \beta(x) \overset{x \to x_0}{\sim} \beta_1(x) \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Tõestus. Et eelduse põhjal $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x)/\alpha_1(x)) = 1$ ja $\lim\limits_{x \to x_0} (\beta(x)/\beta_1(x)) = 1$, siis lause väide järeldub järgmisest võrduste ahelast

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)/\alpha_1(x)}{\beta(x)/\beta_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha(x)/\alpha_1(x))}{\lim\limits_{x\to x_0} (\beta(x)/\beta_1(x))} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \quad \square$$

Analoogiline väide peab paika ka lõpmata suurte suuruste korral.

Näide 8. Kasutades Lause 7 väidet, leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 12x} = \begin{bmatrix} (\sin x \sim x \ \ (x \to 0)) \Leftrightarrow (\sin 7x \sim 7x \ \ (x \to 0)) \\ (\sin x \sim x \ \ (x \to 0)) \Leftrightarrow (\sin 12x \sim 12x \ \ (x \to 0)) \end{bmatrix} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{7x}{12x} = \frac{7}{12}. \qquad \diamondsuit$$

Märkus 3. Ekvivalentsete lõpmata väikeste suuruste vahe on kõrgemat järku lõpmata väike. Näiteks

$$x - \sin x \sim x^3/6 \ \ (x \to 0)\,,$$

kuigi

$$\sin x \sim x \ \ (x \to 0)\,.$$

Lause 8. Iga piirprotsessis $x \to x_0$ piirväärtust omav suurus $f(x)$ on esitatav kujul

$$f(x) = a + \alpha(x) \quad (x \in U(x_0) \setminus \{x_0\})\,,$$

kus $U(x_0)$ on suuruse x_0 mingi ümbrus, $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ja suurus $\alpha(x)$ on lõpmata väike piirprotsessis $x \to x_0$.

Tõestus. Olgu $\alpha(x) \overset{def}{=} f(x) - a$. Et

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - a) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} a = a - a = 0,$$

siis suurus $\alpha(x)$ on lõpmata väike piirprotsessis $x \to x_0$. $\square$

Lause 8 annab meile võimaluse tõestada lihtsamal viisil funktsiooni piirväärtuse tehetega seotud omadusi. Tõestame näiteks eelmise punkti lause 9 kolmanda väite, et funktsioonide korrutise piirväärtus on tegurite piirväärtuste korrutis

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x)\right) \wedge \left(\lim_{x\to x_0} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = b + \beta(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = (a + \alpha(x))\,(b + \beta(x)) = ab + (a\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)) = ab + \gamma(x).$$

Et suurused $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ on lõpmata väikesed piirprotsessis $x \to x_0$, siis Lausete 3 ja 4 põhjal on ka suurus $\gamma(x) = a\beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ lõpmata väike selles piirprotsessis. Seega

$$f(x)g(x) = ab + \gamma(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

1.7. Funktsiooni pidevus

Esialgne kujutelm *pidevast funktsioonist* seostub omadusega, et teatud piirkonnas saab selle funktsiooni graafikut joonestada ilma kirjutusvahendit paberilt tõstmata. Üritame järgnevalt anda funktsiooni pidevusele range matemaatilise kirjelduse.

Definitsioon 1. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *pidevaks punktis* x_0, kui on täidetud kolm tingimust:

$$\begin{aligned}&1)\ \exists f(x_0);\\ &2)\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x);\\ &3)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).\end{aligned}$$

Fakti, et funktsioon $f(x)$ on pidev punktis x_0, tähistame lühidalt $f(x)\in C(x_0)$.

Märkus 1. Tihti esitatakse funktsiooni $f(x)$ pidevuse tingimusena punktis x_0 vaid tingimus 3, mille korral eeldatakse vaikimisi tingimuste 1 ja 2 täidetust, st kui vaadeldakse suurusi $f(x_0)$ ja $\lim_{x\to x_0} f(x)$, siis eeldatakse nende olemasolu. Et $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, siis

$$(f(x)\in C(x_0)) \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)\right).$$

Näide 1. Uurime funktsiooni $f(x)=|x|$ pidevust punktis $x_0=0$.
Esiteks,

$$\exists f(0)=|0|=0.$$

Teiseks,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

Et ka Definitsiooni 1 kolmas tingimus on täidetud, siis funktsioon $y=|x|$ on pidev punktis 0. $\diamondsuit$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(x)$, mis ei ole pidev punktis x_0, nimetatakse *katkevaks funktsiooniks* punktis x_0, kusjuures punkti x_0 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *katkevuspunktiks*.

Näide 2. Uurime funktsiooni $f(x)=(\sin x)/x$ pidevust punktis 0. Kuigi

$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},$$

võime väita, et funktsioon $(\sin x)/x$ on katkev punktis 0, sest $\overline{\exists} f(0)$ (ei ole täidetud esimene tingimus) ja seega ei saa olla täidetud ka kolmas tingimus. $\diamondsuit$

Näide 3. Funktsioon

$$f(x)=\begin{cases}(\sin x)/x, & \text{kui } x\neq 0;\\ 1, & \text{kui } x=0\end{cases}$$

on pidev punktis 0, sest täidetud on kõik kolm esitatud tingimust. $\diamondsuit$

Definitsioon 3. Punkti x_0 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *esimest liiki katkevuspunktiks,* kui punktis x_0 eksisteerivad funktsiooni $f(x)$ ühepoolsed lõplikud piirväärtused, st

$$\exists \lim_{x\to x_0-} f(x) \ \wedge \ \exists \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Näide 4. Et Heaviside'i funktsiooni $H(x)$ korral

$$\overline{\exists} \lim_{x\to 0} H(x) \ \wedge \ \lim_{x\to 0-} H(x) = 0 \ \wedge \ \lim_{x\to 0+} H(x) = 1,$$

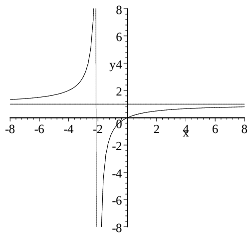
siis punkt 0 on funktsiooni $H(x)$ esimest liiki katkevuspunkt. Nendime, et $H(0) = 1$. Seega võime rääkida funktsiooni $H(x)$ *parempoolsest pidevusest* punktis 0. $\diamondsuit$

Definitsioon 4. Funktsiooni $f(x)$ iga katkevuspunkti, mis ei ole esimest liiki, nimetatakse selle funktsiooni *teist liiki katkevuspunktiks***.**

Näide 5. Funktsiooni $x/\left(x+2\right)$ katkevuspunkt $x = -2$ on teist liiki katkevuspunkt, sest

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x}{x+2} = +\infty \ \wedge \ \lim_{x\to -2+} \frac{x}{x+2} = -\infty.$$

Skitseerime funktsiooni $y = x/\left(x+2\right)$ graafiku ja sirged võrranditega $y = 1$ ning $x = -2$



$\diamondsuit$

Definitsioon 5. Suurust $\Delta x = x - x_0$ nimetatakse *argumendi muuduks* ehk *argumendi kasvuks* ja suurust

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nimetatakse argumendi muudule Δx vastavaks *funktsiooni* $y = f(x)$ *muuduks* ehk *kasvuks punktis* x_0.

Lause 1. Funktsioon $f(x)$ on pidev punktis x_0 parajasti siis, kui

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0,$$

st

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Tõestus. Funktsiooni pidevuse definitsioonis esinevale kolmandale tingimusele on antav kuju

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$$

ehk

$$\lim_{x-x_0\to 0} \left(f\left(x_0+(x-x_0)\right)-f(x_0)\right)=0$$

või

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \quad \Box$$

Näide 6. Uurime funktsiooni $y = x^2$ pidevust punktis x_0. Kasutame selleks Lauses 1 esitatud tingimust. Et

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\,,$$

siis

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \left(2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0,$$

st funktsioon x^2 on pidev punktis x_0. Et punkt x_0 on suvaline reaalarv, siis funktsioon x^2 on pidev reaaltelje igas punktis. $\diamondsuit$

Lause 2. Funktsioon $f(x)$ on pidev punktis x_0 parajasti siis, kui see funktsioon on punkti x_0 ümbruses esitatav kujul

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x),$$

kus $\alpha(x)$ on lõpmata väike suurus piirprotsessis $x \to x_0$.

Tõestus järeldub Lausest 1.6.8, arvestades funktsiooni pidevuse definitsiooni. $\Box$

Lause 3. Kui funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on pidevad punktis x_0 ning $c_1,\, c_2 \in \mathbf{R}$, siis punktis x_0 on pidevad ka funktsioonid $c_1f_1(x)+\ c_2f_2(x)$ ja $f_1(x)f_2(x)$ ning täiendaval tingimusel $f_2(x_0) \neq 0$ ka funktsioon $f_1(x)/f_2(x)$.

Tõestus. Lause 2 põhjal on funktsioonid $f_1(x)$ *ja* $f_2(x)$ punkti x_0 ümbruses esitatavad kujul

$$f_1(x) = f_1(x_0) + \alpha_1(x),\ f_2(x) = f_2(x_0) + \alpha_2(x),$$

kus $\alpha_1(x)$ ja $\alpha_2(x)$ on lõpmata väikesed suurused piirprotsessis $x \to x_0$. Et

$$c_1f_1(x) +\ c_2f_2(x) = c_1\left(f_1(x_0)+\alpha_1(x)\right) + c_2\left(f_2(x_0)+\alpha_2(x)\right) =$$

$$= c_1f_1(x_0) + c_2f_2(x_0) + c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x) = c_1f_1(x_0) + c_2f_2(x_0) + \beta(x),$$

milles suurus $\beta(x) = c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x)$ on Lausete 1.6.3 ja 1.6.4 põhjal lõpmata väike piirprotsessis $x \to x_0$, siis $c_1f_1(x) +\ c_2f_2(x) \in C(x_0)$.

Suuruse $f_1(x)/f_2(x)$ jaoks saame esituse

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)+\alpha_1(x)}{f_2(x_0)+\alpha_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} + \beta(x),$$

kusjuures suurus

$$\beta(x) = \frac{\alpha_1(x)f_2(x_0) - \alpha_2(x)f_1(x_0)}{\left(f_2(x_0)+\alpha_2(x)\right)f_2(x_0)}$$

kui lõpmata väikese suuruse ja tõkestatud suuruse korrutis on lõpmata väike suurus piirprotsessis $x \to x_0$. $\square$

Definitsioon 6. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *pidevaks paremalt* punktis x_0, kui

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \Delta y = 0,$$

ja *pidevaks vasakult* punktis x_0, kui

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \Delta y = 0.$$

Lause 4. Funktsioon $y = f(x)$ on pidev punktis x_0 parajasti siis, kui ta on selles punktis pidev nii vasakult kui ka paremalt.

Tõestage! $\square$

Heaviside'i funktsioon $H(x)$ on pidev paremalt punktis 0, kuid katkev selles punktis vasakult. Lause 4 põhjal võib väita, et funktsioon $H(x)$ on katkev punktis 0.

Definitsioon 7. Öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on *pidev hulgal* $X \subset \mathbf{R}$, kui $f(x)$ on pidev hulga X igas punktis. Fakti, et funktsioon $f(x)$ on pidev hulgal X, tähistatakse lühidalt $f(x) \in C(X)$.

Lause 5. Kui funktsioon $g(x)$ on pidev punktis a ja funktsioon $f(u)$ on pidev punktis $g(a)$, siis liitfunktsioon $f\,[g(x)]$ on pidev punktis a.

Tõestage! $\square$

Peab paika järgmine väide.

Lause 6. Elementaarfunktsioon on pidev määramispiirkonna sisepunktides.

Näide 7. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \ln(1+kx)^{1/x} = \left[\begin{array}{c} y = kx \overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} x = y/k \\ x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{y\to 0} \ln(1+y)^{k/y} = \lim_{y\to 0} \ln\left[(1+y)^{1/y}\right]^k = \left[\begin{array}{c} \text{kasutame Lauset 6 logaritm-} \\ \text{funktsiooni korral} \end{array} \right] =$$

$$= \ln \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{1/y}\right]^k = \left[\begin{array}{c} \text{kasutame Lauset 6} \\ \text{astmefunktsiooni korral} \end{array} \right] =$$

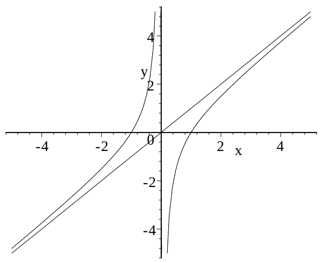
$$= \ln\left[\lim_{y\to 0} (1+y)^{1/y}\right]^k = \ln e^k = k. \qquad \diamondsuit$$

1.8. Joone asümptoodid

Vaatleme funktsiooni piirväärtuse mõiste üht rakendust geomeetrias.

Definitsioon 1. Kui funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punkti tõkestamatul eemaldumisel selle punkti kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis nimetatakse seda sirget antud *joone asümptoodiks*.

Näide 1. Skitseerime funktsiooni $y = \left(x^2 - 1\right)/x$ graafiku ja võrranditega $y = x$ ning $x = 0$ esitatud sirged



Näeme jooniselt, et kui funktsiooni $y = \left(x^2 - 1\right)/x$ graafiku punkt eemaldub tõkestamatult, siis

$$(x \to -\infty) \ \vee \ (x \to 0-) \ \vee \ (x \to 0+) \ \vee \ (x \to +\infty).$$

Juhtudel $x \to -\infty$ ja $x \to +\infty$ läheneb punkt sirgele $y = x$ ning juhtudel $x \to 0-$ ja $x \to 0+$ läheneb punkt sirgele $x = 0$. Järelikult võib joonise põhjal arvata, et funktsiooni $y = \left(x^2 - 1\right)/x$ graafikul on kaks asümptooti, võrranditega $y = x$ ja $x = 0$. $\diamondsuit$

Joonel $y = f(x)$ võib olla: 1) *püstasümptoot* võrrandiga $x = a$ selle joone teist liiki katkevuspunkti $x = a$ korral; 2) *kaldasümptoot* võrrandiga $y = kx+b$ protsessis $x \to -\infty$ või $x \to +\infty$, kusjuures kaugenemisi $x \to -\infty$ ja $x \to +\infty$ tuleb uurida eraldi. Joone $y = f(x)$ püstasümptootide leidmiseks tuleb leida joone kõik teist liiki katkevuspunktid ja leida neis funktsiooni ühepoolsed piirväärtused, kusjuures püstasümptoodiga kaasneb selles punktis vähemalt üks ühepoolne lõpmatu piirväärtus. Joone $y = f(x)$ kaldasümptootide leidmiseks tuleb suurused a ja b määrata:
juhul $x \to -\infty$ seosest

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

millest saame, et

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \ \wedge \ b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx);$$

juhul $x \to +\infty$ seosest

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

millest saame, et

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \ \wedge \ b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Kui uuritaval juhul vaadeldavad piirväärtused suuruste k ja b leidmiseks eksisteerivad, siis eksisteerib kaldasümptoot, kui ei, siis mitte.

Näide 2. Leiame joone

$$y = \frac{\sqrt{x^6 + x^2 + 6}}{x^2 - 1}$$

asümptoodid. See funktsioon on määratud kogu reaalteljel, välja arvatud $x = \pm 1$, mis on funktsioonile teist liiki katkevuspunktid. Leiame ühepoolsed piirväärtused neis punktides:

$$\lim_{x\to -1-} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x^2-1} \overset{\frac{8}{+0}}{=} +\infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x^2-1} \overset{\frac{8}{-0}}{=} -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x^2-1} \overset{\frac{8}{-0}}{=} -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x^2-1} \overset{\frac{8}{+0}}{=} +\infty.$$

Seega on uuritava joone püstasümptootide võrrandeiks $x = -1$ ja $x = 1$. Uurime esiteks kaldasümptoodi olemasolu protsessis $x \to -\infty$. Saame, et

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x\left(x^2-1\right)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \left[\begin{array}{c}\text{jagame selle murru lugejat ja nimetajat} \\ \text{(negatiivse!) suurusega } x^3\end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1+x^{-4}+6x^{-6}}}{1-x^{-2}} \overset{\frac{-1}{1}}{=} -1$$

ja

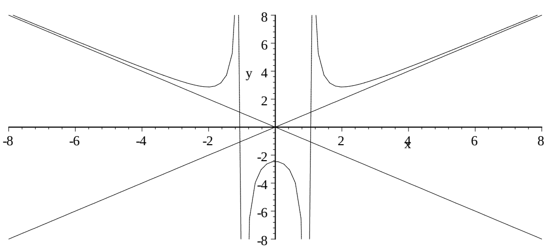
$$b = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6+x^2+6}}{x^2-1} + x \right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^2+6}+x^3-x}{x^2-1} \overset{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^6+x^2+6-\left(x^3-x\right)^2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^6+x^2+6}-x^3+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^4+6}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^6+x^2+6}-x^3+x\right)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^{-1}+6x^{-5}}{\left(1-x^{-2}\right)\left(-\sqrt{1+x^{-4}+6x^{-6}}-1+x^{-2}\right)} \overset{\frac{0}{-2}}{=} 0.$$

Järelikult on juhul $x \to -\infty$ kaldasümptoodi võrrandiks $y = -x$. Analoogiliselt saab näidata, et juhul $x \to +\infty$ on kaldasümptoodi võrrandiks $y = x$. Skitseerime lõigul $[-8; 8]$ funktsiooni $y = \sqrt{x^6+x^2+6}/\left(x^2-1\right)$ ja tema asümptootide graafikud:



◊

1.9. Lõigul pidevate funktsioonide omadused

Vaatleme järgnevalt lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ omadusi. Öeldakse, et funktsioon on pidev lõigul $[a, b]$, kui ta on pidev vahemikus (a, b) ja punktis a on pidev paremalt ja punktis b pidev vasakult.

Lause 1. Lõigul pidev funktsioon on tõkestatud sellel lõigul.

Tõestus. Olgu $f(x) \in C[a, b]$. Eeldame väitevastaselt, et funktsioon $f(x)$ on tõkestamata sellel lõigul, st suvalise $n \in \mathbf{N}$ korral leidub selline $x_n \in [a, b]$, et $|f(x_n)| \geq n$. Moodustame sel viisil jada $\{x_n\}$, kusjuures $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Et $x_n \in [a, b]$, siis jada $\{x_n\}$ on tõkestatud. Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal võib tõkestatud jadast $\{x_n\}$ eraldada koonduva osajada $\{x_{n_k}\}$. Seega, $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$. Kasutades funktsiooni pidevust lõigul $[a, b]$, leiame, et $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$, kusjuures suurus $f(c)$ on lõplik. Teisalt järeldub tingimusest $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ tingimus $f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} \infty$. Oleme saanud vastuolu, mis oli tingitud väitevastasest eeldusest. Seega on lõigul pidev funktsioon tõkestatud sellel lõigul. $\square$

Märkus 1. Lõplikus vahemikus pidev funktsioon ei ole üldjuhul tõkestatud selles vahemikus. Näiteks funktsioon $f(x) = 1/x$ on pidev vahemikus $(0; 1)$, kuid ei ole tõkestatud selles vahemikus. Tõesti, $\forall M > 1$ korral on vahemiku $(0; 1/M)$ igas punktis funktsiooni $f(x)$ väärtus suurem kui M.

Definitsioon 1. Hulga $X \subset \mathbf{R}$ vähimat ülemist tõket nimetatakse hulga X *ülemiseks rajaks* ehk *supreemumiks*. Hulga X ülemist raja tähistatakse $\sup X$ ehk $\sup_{x\in X} x$.

Definitsioon 2. Hulga $X \subset \mathbf{R}$ suurimat alumist tõket nimetatakse hulga X *alumiseks rajaks* ehk *infiimumiks*. Hulga X alumist raja tähistatakse $\inf X$ ehk $\inf_{x\in X} x$.

Näide 1. Olgu $X = \{1/n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots, 1/n, \ldots\}$. Leiame $\sup X$ ja $\inf X$.

Hulga X ülemiseks tõkkeks on suvaline $M \in \mathbf{R}$, mis rahuldab seost $M \geq 1$. Selliste tõkete hulgas on tõke 1 vähim. Seega

$$\sup\{1/n\}_{n\in\mathbf{N}} = 1.$$

Hulga X alumiseks tõkkeks on suvaline $m \in \mathbf{R}$, mis rahuldab seost $m \leq 0$. Selliste tõkete hulgas on tõke 0 suurim. Seega

$$\inf\{1/n\}_{n\in\mathbf{N}} = 0.$$

Nendime, et selle näite korral

$$\sup X \in X \ \wedge \ \inf X \notin X. \quad \diamondsuit$$

Hulga $X \subset \mathbf{R}$ ülemise raja mõiste (alumise raja mõiste) on hulga X maksimaalse elemendi $\max X$ mõiste (minimaalse elemendi $\min X$ mõiste) üldistus, nimelt

$$\sup X \in X \ \Leftrightarrow \sup X = \max X \qquad (\inf X \in X \Leftrightarrow \inf X = \min X)$$

ja

$$\sup X \notin X \Leftrightarrow \overline{\exists} \max X \quad \left(\inf X \notin X \Leftrightarrow \overline{\exists} \min X\right).$$

Kehtib "*pidevuse aksioomiks*" nimetatav väide.

Lause 2 (vt [5], lk 16–18). Igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas ülemine raja ja igal alt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas alumine raja.

Definitsioon 3. Funktsiooni maksimaalset ja minimaalset väärtust hulgal nimetatakse ühe nimega *ekstremaalseteks väärtusteks* sel hulgal.

Lause 3. Lõigul pideval funktsioonil on olemas ekstremaalsed väärtused sellel lõigul.

Tõestus. Olgu $f(x) \in C[a,b]$. Lause 1 põhjal on funktsioon $f(x)$ tõkestatud sel lõigul, st funktsiooni väärtuste hulk $\{f(x)\}_{x\in[a,b]}$ on tõkestatud. Lause 2 põhjal on olemas ülemine raja

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Oletame väitevastaselt, et iga $x \in [a,b]$ korral $f(x) \neq M$. Vaatleme funktsiooni

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Nendime, et $g(x) > 0$ $(x \in [a,b])$ ja $g(x) \in C[a,b]$, sest

$$1 \in C[a,b] \ \wedge \ M - f(x) \in C[a,b] \ \wedge \ M - f(x) \neq 0 \ (x \in [a,b]).$$

Et $g(x) > 0$ $(x \in [a,b])$ ja Lause 1 põhjal on funktsioon $g(x)$ tõkestatud sel lõigul, siis leidub selline konstant $K > 0$, et lõigu $[a,b]$ iga punkti x korral

$$\frac{1}{M - f(x)} \le K \Leftrightarrow M - f(x) \ge \frac{1}{K} \Leftrightarrow f(x) \le M - \frac{1}{K},$$

st, et oleme saanud funktsiooni väärtuste hulgale $\{f(x)\}_{x\in[a,b]}$ väiksema ülemise tõkke $M - 1/K$, kui on seda ülemine raja $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. See on vastuolu, mis on tingitud väitevastasest oletusest. Analoogiliselt tõestatakse lause väite teine pool, kasutades abifunktsiooni

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - m},$$

kusjuures $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Tõestage! $\square$

Esitame lühidalt mõningad tulemused, mis leiavad edaspidi kasutamist.

Lause 4 (vt [5], lk 129–130). Lõigul pidev funktsioon omab iga väärtust, mis paikneb ekstremaalsete väärtuste vahel.

Lause 5 (vt [5], lk 132–133). Lõigul $[a,b]$ pideva ja rangelt monotoonse funktsiooni $f(x)$ pöördfunktsioon on pidev lõigul otspunktidega $f(a)$ ja $f(b)$.

Definitsioon 4. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *ühtlaselt pidevaks hulgal* $X \subset \mathbf{R}$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ x_1, \, x_2 \in X \wedge |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Lause 6 (vt [5], lk 136–137). Lõigul pidev funktsioon on ühtlaselt pidev sel lõigul.

1.10. Funktsiooni tuletis

Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ muutu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

mis vastab argumendi muudule Δx kohal x. Et $y = f(x)$, siis $\Delta f \stackrel{def}{=} \Delta y$.

Definitsioon 1. Funktsiooni $y = f(x)$ *tuletiseks* kohal x nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ muudu Δy ja argumendi muudu Δx suhte piirväärtust, kui argumendi muut läheneb nullile.

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletist kohal x tähistatakse $f'(x)$, st

$$f'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kasutatakse ka tähistusi

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Geomeetriliselt võib funktsiooni $f(x)$ tuletist punktis x interpreteerida kui selle funktsiooni graafikule punktis $(x,\ f(x))$ konstrueeritud puutuja (lõikaja piirseisu) tõusunurga tangensit. Kui funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus on lõpmatu, siis kõneldakse *lõpmatust tuletisest*. Kui funktsioonil $f(x)$ on lõpmatu tuletis punktis x, siis funktsiooni graafikule punktis $(x,\ f(x))$ tõmmatav puutuja on paralleelne y-teljega.

Definitsioon 2. Kui funktsioonil $f(x)$ on tuletis punktis x, siis öeldakse, et funktsioon on *diferentseeruv* punktis x.

Fakti, et funktsioonil $f(x)$ eksisteerib tuletis punktis x_0, tähistame lühidalt $f(x) \in D(x_0)$, st

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) \in D(x_0).$$

Fakti, et funktsioonil $f(x)$ eksisteerib tuletis hulga $X \subset \mathbf{R}$ igas punktis, tähistame $f(x) \in D(X)$. Näiteks, funktsiooni $f(x)$ diferentseeruvust vahemikus (a, b) tähistame $f(x) \in D((a, b))$ ehk lühidalt $f(x) \in D(a, b)$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = x^n \ \ (n \in \mathbf{N})$ tuletise

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^k - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + C_n^n (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + C_n^n (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} (\Delta x) + \ldots + C_n^{n-1} x (\Delta x)^{n-2} + C_n^n (\Delta x)^{n-1} \right) = n x^{n-1}.$$

Seega

$$(x^n)' = n x^{n-1} \ \ (n \in \mathbf{N}),$$

kusjuures $x^n \in D(\mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$. Näidake, et saadud tuletise leidmise eeskiri peab paika juhul $-n \in \mathbf{N}$. $\diamondsuit$

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbf{N})$ tuletise punktis $x \neq 0$. Saame

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+\Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[n]{x+\Delta x} - \sqrt[n]{x}\right)\left(\sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-2}\,x} + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-2}\,x} + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+\Delta x)^{n-2}\,x} + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Seega

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

kusjuures $x^{\frac{1}{n}} \in D(\mathbf{R}^+)$ $(n \in \mathbf{N})$. $\diamondsuit$

Näide 3. Leiame funktsiooni $y = \sin x$ tuletise

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin((\Delta x)/2)\cos(x + (\Delta x)/2)}{\Delta x} \overset{\sin((\Delta x)/2) \sim (\Delta x)/2}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2((\Delta x)/2)\cos(x+(\Delta x)/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + (\Delta x)/2) = \cos x.$$

Seega $(\sin x)' = \cos x$, kusjuures $\sin x \in D(\mathbf{R})$. $\diamondsuit$

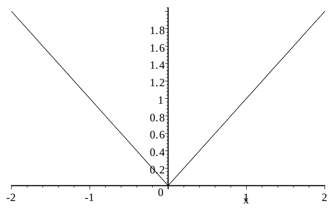
Näide 4. Uurime funktsiooni $y = |x|$ tuletise olemasolu punktis 0. Et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

siis funktsiooni $y = |x|$ tuletist punktis 0 ei eksisteeri, sest

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1 \;\wedge\; \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

Vaadeldes funktsiooni $y = |x|$ graafikut



näeme, et graafikul puudub puutuja punktis $(0;0)$, st puudub punktist $(0;0)$ lähtuvate lõikajate piirseis. $\diamondsuit$

Näide 4 viitab funktsiooni *ühepoolse tuletise* mõiste otstarbekusele.

Definitsioon 3. Funktsiooni $y = f(x)$ *vasakpoolseks tuletiseks kohal* x nimetatakse suurust

$$f'(x-) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Definitsioon 4. Funktsiooni $y = f(x)$ *parempoolseks tuletiseks* kohal x nimetatakse suurust

$$f'(x+) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Näites 4 esitatud funktsiooni korral võime väita, et

$$f'(x) = |x|' = \operatorname{sign} x = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0),$$

$$f'(0-) = -1, \quad f'(0+) = 1.$$

Näide 5. Leiame funktsiooni $\sqrt[3]{x}$ tuletise punktis 0. Et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty,$$

siis funktsioonil $\sqrt[3]{x}$ on punktis 0 lõpmatu tuletis, st punktis $(0;0)$ on selle funktsiooni graafiku puutuja paralleelne y-teljega. $\diamondsuit$

Lause 1. Funktsiooni $f(x)$ diferentseeruvusest punktis x järeldub selle funktsiooni pidevus punktis x, st

$$f(x) \in D(x) \ \Rightarrow \ f(x) \in C(x).$$

Tõestus. Funktsiooni diferentseeruvus punktis x tähendab, et

$$\exists\, f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Et Lause 1.6.8 põhjal on iga mingis punktis piirväärtust omav suurus selle punkti teatud ümbruses esitatav piirväärtuse ja (vaadeldavas piirprotsessis) lõpmata väikese suuruse summana, siis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0), \tag{1.10.1}$$

kusjuures

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Seos (1.10.1) on esitatav kujul

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0), \tag{1.10.2}$$

kusjuures suurus $\beta(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\,\Delta x$ on piirprotsessis $\Delta x \to 0$ kõrgemat järku lõpmata väike võrreldes suurusega Δx, sest

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Seosest (1.10.2) järeldub, et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

st $f(x) \in C(x)$. □

Vaatleme tehetega seotud tuletise omadusi.

Lause 2. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on diferentseeruvad punktis x ja $c \in \mathbf{R}$ on konstant, siis selles punktis on diferentseeruvad ka funktsioonid $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ ja täiendaval eeldusel $g(x) \neq 0$ ka $f(x)/g(x)$, kusjuures

$$(cf(x))' = cf'(x), \quad (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Tõestame neist väidetest viimase:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)/g(x+\Delta x) - f(x)/g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)) - (f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))\,g(x) - f(x)\,(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((f(x+\Delta x) - f(x))\,/\Delta x)\,g(x) - f(x)\,(g(x+\Delta x) - g(x))\,/\Delta x}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \frac{g(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)/\Delta x\right)-f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)/\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Tõestage ülejäänud väited iseseisvalt! □

1.11. Liitfunktsiooni tuletis. Pöördfunktsiooni tuletis. Parameetriliselt esitatud funktsiooni tuletis. Ilmutamata funktsiooni tuletis. Logaritmiline diferentseerimine

Olgu antud liitfunktsioon $y = g(f(x))$. Kui tähistada $u = f(x)$, siis saame ahela $x \xrightarrow{f} u \xrightarrow{g} y$. Argumendi x muudule Δx vastab suuruse u muut

$$\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Olgu $\Delta u \neq 0$. Suuruse u muudule Δu vastab suuruse y muut

$$\Delta y = g(u+\Delta u) - g(u).$$

Leiame liitfunktsiooni $y = g(f(x))$ tuletise

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \left[\begin{array}{c}\text{kui mõlemast tegurist eraldi}\\ \text{piirväärtus eksisteerib}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{funktsiooni } u=f(x) \text{ tuletise olemasolust punktis } x \text{ järeldub}\\ \text{funktsiooni } u=f(x) \text{ pidevus selles punktis ja } \Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta u\to 0\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x).$$

Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 1. Kui funktsioonidel $f(x)$ ja $g(u)$ eksisteerivad lõplikud tuletised vastavalt kohtadel x ja $f(x)$, siis liitfunktsioonil $g(f(x))$ on lõplik tuletis kohal x, kusjuures

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(f(x))}{df(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx} = g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x).$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = \sin^2 x$ tuletise. Olgu $u = \sin x$ ja $y = u^2$. Seega

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2u\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x. \quad \diamondsuit$$

Näidake, et teatud eeldustel peab paika seos

$$\frac{df_n(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots))}{dx} =$$

$$= \frac{df_n(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots))}{df_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots)} \frac{df_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots)}{df_{n-2}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots)} \cdots \frac{df_2(f_1(x))}{df_1(x)} \frac{df_1(x)}{dx} =$$

$$= f_n'(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots))f_{n-1}'(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots) \cdots f_2'(f_1(x))f_1'(x).$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \sqrt{\sin x^2}$ tuletise:

$$\left(\sqrt{\sin x^2}\right)' = \frac{d\sqrt{\sin x^2}}{dx} = \frac{d\sqrt{\sin x^2}}{d\sin x^2} \cdot \frac{d\sin x^2}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dx} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Leiame funktsiooni $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$ tuletise:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}\right)' = \frac{d\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}\right)^{1/2}}{d\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}\right)} \cdot \frac{d\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}\right)^{-1/2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{d\,(x + \sqrt[4]{x})^{1/3}}{d\,(x + \sqrt[4]{x})} \cdot \frac{d\,(x + \sqrt[4]{x})}{dx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{(x + \sqrt[4]{x})^{-2/3}}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + \sqrt[4]{x})^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)\right). \quad \diamondsuit$$

Lause 2. Kui lõigul $[a, b]$ pideval ja rangelt monotoonsel funktsioonil $y = f(x)$ on kohal x nullist erinev tuletis, siis pöördfunktsioonil $x = f^{-1}(y)$ leidub tuletis kohal $f(x)$, kusjuures

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

ehk

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Tõestus. Leiame funktsiooni $f^{-1}(y)$ tuletise kohal $f(x)$:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Lause 1.9.5 põhjal leidub funktsioonil } y=f(x) \text{ pöördfunktsioon}\\ x=f^{-1}(y), \text{ mis on pidev lõigul otspunktidega } f(a) \text{ ja } f(b),\\ \text{kusjuures } \Delta y\to 0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \square$$

Näide 4. Leiame funktsiooni $y = \arcsin x$ tuletise.
Et funktsiooni $y = \arcsin x$ pöördfunktsioon on $x = \sin y$, siis

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{funktsiooni } y=\arcsin x \text{ väärtused kuuluvad lõiku } [-\pi/2, \pi/2],\\ \text{ja } \cos y>0, \text{ kui } y\in(-\pi/2,\pi/2)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x\in(-1;1)).$$

Funktsiooni $y = \arcsin x$ määramispiirkonna $[-1; 1]$ otspunktides -1 ja 1 leiduvad sel funktsioonil ühepoolsed lõpmatud tuletised. $\diamondsuit$

Lause 3. Kui funktsioon $y = f(x)$ on esitatud parameetrilisel kujul

$$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right. \quad (\alpha\le t\le\beta),$$

kusjuures funktsioonid $\varphi(t)$ ja $\psi(t)$ on diferentseeruvad vahemikus (α, β) *ja* $\varphi(t)$ on lõigul $[\alpha, \beta]$ rangelt monotoonne ning $\dot\varphi(t) \neq 0$ $(t \in (\alpha, \beta))$*,* siis

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \quad (\alpha<t<\beta),$$

kus täpiga tähistatakse tuletist parameetri järgi.

Tõestus. Leiame tuletise

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \overset{\Delta x\to 0\Leftrightarrow\Delta t\to 0}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\dot y}{\dot x}. \quad \square$$

Näide 5. Leiame parameetriliselt esitatud funktsiooni (graafikuks ellips)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

tuletise. Rakendame Lauset 3 vahemikes $(0, \pi)$ ja $(\pi, 2\pi)$. Saame tulemuseks, et

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t \quad (\, t \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi))\,.$$

Parameetri väärtustel $t = 0$ ja $t = \pi$ saame lõpmatu tuletise, st neile parameetri väärtustele vastavais ellipsi punktides on ellipsi puutuja paralleelne y-teljega. $\diamondsuit$

Olgu funktsioon $y = y(x) \ \ (x \in X)$ esitatud ilmutamata kujul $F(x, y) = 0$, st

$$\forall x \in X: \ \ F(x,\, y(x)) = 0.$$

Kui hulgal X muutuja x diferentseeruv funktsioon $F(x, y(x))$ on samaselt null, siis on samaselt null sel hulgal ka selle funktsiooni tuletis muutuja x järgi, st

$$\forall x \in X: \ \ \frac{d}{dx}F(x,\, y(x)) = 0.$$

Viimasest seosest õnnestub konkreetse ülesande korral avaldada $y'(x)$.

Näide 6. Leiame ilmutamata funktsiooni y tuletise muutuja x järgi, kui

$$xy = \sin(xy).$$

Et tegemist on ühe seosega, mis sisaldab kaht tundmatut, siis võime ühe neist ette anda. Kui anname ette muutuja x, siis muutuja y on sellest seosest määratav muutuja x funktsioonina $y = y(x) \ \ (x \in X)$. Paigutades saadud tulemuse ilmutamata funktsiooni avaldisse, saame samasuse:

$$\forall x \in X: \ \ xy(x) - \sin(xy(x)) = 0.$$

Diferentseerides selle samasuse mõlemaid pooli muutuja x järgi, saame tulemuseks seose

$$\forall x \in X: \ \ y(x) + xy'(x) - \cos(xy(x))\,(y(x) + xy'(x)) = 0,$$

millest avaldame $y'(x)$. Seega,

$$\forall x \in X: \ \ y'(x) = \frac{y(x)\cos(xy(x)) - y(x)}{x - x\cos(xy(x))}$$

ehk

$$y' = \frac{y\cos(xy) - y}{x - x\cos(xy)}. \qquad \diamondsuit$$

Vaatleme järgnevalt logaritmilist diferentseerimist.

Lause 4. Kui $f(x) \in D(X)$ ja $f(x) > 0 \ \ (x \in X)$, siis

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(\ln f(x)) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Lause eeldustel saame

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (x \in X),$$

millest järeldub Lause 4 väide. $\square$

Lauset 4 on otstarbekas kasutada funktsiooni tuletise leidmisel, kui funktsiooni logaritmi $\ln f(x)$ on lihtsam diferentseerida kui funktsiooni $f(x)$ ennast. Näiteks juhul kui

$$f(x) = \frac{f_1^{\alpha_1}(x) \cdots f_n^{\alpha_n}(x)}{g_1^{\beta_1}(x) \cdots g_m^{\beta_m}(x)} \quad \vee \quad f(x) = (g(x))^{h(x)}.$$

Näide 7. Leiame funktsiooni

$$y = \frac{\sqrt[3]{2x-1}\,\sqrt[5]{3x^2-2}}{\sqrt[7]{(6x-4)^3}}$$

tuletise.

Olgu

$$2x - 1 > 0 \ \wedge \ 3x^2 - 2 > 0 \ \wedge \ 6x - 4 > 0.$$

Logaritmides funktsiooni avaldise mõlemaid pooli ja arvestades logaritmi omadusi, saame seose

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(2x-1) + \frac{1}{5}\ln\left(3x^2-2\right) - \frac{3}{7}\ln(6x-4).$$

Diferentseerides selle seose mõlemaid pooli muutuja x järgi (miks on see lubatud?), saame tulemuseks, et

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3x^2-2} \cdot 6x - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6x-4} \cdot 6$$

ehk

$$y' = \left(\frac{2}{3(2x-1)} + \frac{6x}{5(3x^2-2)} - \frac{18}{7(6x-4)}\right)\frac{\sqrt[3]{2x-1}\,\sqrt[5]{3x^2-2}}{\sqrt[7]{(6x-4)^3}}. \quad \diamondsuit$$

Näide 8. Leiame ilmutamata funktsiooni y tuletise muutuja x järgi, kui

$$y^x = (\cos x)^y.$$

Olgu $y^x > 0$ ja $(\cos x)^y > 0$. Logaritmides funktsiooni avaldise mõlemat poolt, saame

$$\ln y^x = \ln(\cos x)^y$$

ehk

$$x \ln y = y \ln \cos x.$$

Diferentseerides selle seose mõlemaid pooli muutuja x järgi, leiame, et

$$\ln y + x\frac{y'}{y} = y' \ln \cos x - y\frac{\sin x}{\cos x}$$

ehk

$$y' = \frac{\ln y + (y \sin x) / \cos x}{\ln \cos x - x/y}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 9. Leiame funktsiooni $y = x^{(\sin x)^x}$ tuletise.

Oletame, et $\exists \ln \ln y$. Logaritmime seose $y = x^{(\sin x)^x}$ mõlemat poolt kaks korda. Saame, et

$$\ln y = (\sin x)^x \ln x$$

ja

$$\ln \ln y = \ln \left((\sin x)^x \ln x\right) \Rightarrow \ln \ln y = x \ln \sin x + \ln \ln x.$$

Diferentseerides viimase seose mõlemat poolt muutuja x järgi, kusjuures arvestades, et

$$\frac{d \ln \ln y}{dx} = \frac{d \ln \ln y}{d \ln y} \cdot \frac{d \ln y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y',$$

saame

$$\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \ln \sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

ehk

$$y' = y \ln y \left(\ln \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x} + \frac{1}{x \ln x} \right).$$

Asendades y ja $\ln y$, leiame, et

$$y' = x^{(\sin x)^x} (\sin x)^x (\ln x) \left(\ln \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x} + \frac{1}{x \ln x} \right). \qquad \diamondsuit$$

1.12. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

1. Konstantse funktsiooni $y = c$ tuletis on null, st

$$c' = 0.$$

2. Leiame eksponentfunktsiooni a^x $(a > 0)$ tuletise:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} a^{\Delta x} - 1 = z, \ a^{\Delta x} = z + 1, \ \Delta x \ln a = \ln (z+1), \\ \Delta x = \ln (z+1) / \ln a, \ \ \Delta x \to 0 \Leftrightarrow z \to 0 \end{array} \right] =$$

$$= a^x \lim_{z\to 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} = a^x \lim_{z\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z}\ln(z+1)} = \frac{a^x \ln a}{\lim\limits_{z\to 0} \ln(z+1)^{1/z}} =$$

$$= \frac{a^x \ln a}{\ln \lim\limits_{z\to 0} (z+1)^{1/z}} = \frac{a^x \ln a}{\ln e} = a^x \ln a.$$

Seega

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

ja

$$(e^x)' = e^x.$$

3. Leiame logaritmfunktsiooni $\log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ tuletise. Et funktsioon $y = \log_a x$ on funktsiooni $x = a^y$ pöördfunktsioon, siis kasutame meid huvitava tuletise leidmiseks pöördfunktsiooni diferentseerimise eeskirja

$$(\log_a x)' = \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{da^y}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Seega

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

ja

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4. Eelnevalt on leitud astmefunktsioonide

$$x^n,\ \sqrt[m]{x} = x^{1/m}\ (n \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{N})$$

tuletised. Kasutades liitfunktsiooni tuletist, leiame astmefunktsiooni tuletise ratsionaalarvulise astendaja n/m korral:

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{dx^{\frac{n}{m}}}{dx} = \frac{d\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n}{d\left(x^{\frac{1}{m}}\right)} \cdot \frac{d\left(x^{\frac{1}{m}}\right)}{dx} = n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} =$$

$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n-1+1-m}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} \quad (x > 0).$$

Kui arv m on paaritu, siis saadud tulemus peab paika ka juhul $x < 0$.

Astmefunktsiooni $x^\alpha \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R})$ tuletise leidmisel lähtume seosest

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}).$$

Saame, et

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \frac{d\, e^{\alpha \ln x}}{dx} = \frac{d\, e^{\alpha \ln x}}{d(\alpha \ln x)} \cdot \frac{d(\alpha \ln x)}{dx} = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} =$$

$$= x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Seega

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

5. Leiame trigonomeetriliste funktsioonide tuletised. Eelnevalt on näidatud, et

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Et $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, siis

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = \frac{d \sin(\pi/2 - x)}{dx} =$$

$$= \frac{d \sin(\pi/2 - x)}{d(\pi/2 - x)} \cdot \frac{d(\pi/2 - x)}{dx} = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Seega

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Jagatise tuletise eeskirja abil leiame, et

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Seega

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. Vaatleme arkusfunktsioonide tuletisi. Eelnevalt on tõestatud seos

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Et

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

siis

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Seega

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Et arkusfunktsioon $y = \arctan x$ on trigonomeetrilise funktsiooni $x = \tan y$ pöördfunktsioon, siis

$$(\arctan x)' = \frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\tan y}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Seega

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Seosest

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

järeldub, et

$$(\operatorname{arccot} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Seega

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

7. Leiame järgnevalt hüperboolsete funktsioonide tuletised

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \left[\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\right] = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

ja

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Seega

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

ja

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

8. Et areafunktsioonid $y = \operatorname{arsh} x$, $y = \operatorname{arch} x$, $y = \operatorname{arth} x$ ja $y = \operatorname{arcth} x$ on vastavalt hüperboolsete funktsioonide $x = \operatorname{sh} y$, $x = \operatorname{ch} y$, $x = \operatorname{th} y$ ja $x = \operatorname{cth} y$ pöördfunktsioonid, siis

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{d\operatorname{arsh} x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{sh} y}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{d \operatorname{arch} x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{ch} y}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = [y = \operatorname{arch} x > 0] = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{d \operatorname{arth} x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{th} y}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

ja

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{d \operatorname{arcth} x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{cth} y}{dy}} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{ch}^2 y} = \frac{1}{1-x^2},$$

st

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ja

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad (\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

1.13. Kõrgemat järku tuletised. Leibnizi valem

Kui funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv hulgal X, st iga $x \in X$ korral leidub $f'(x)$, siis võime uurida hulgal X määratud funktsiooni $f'(x)$ diferentseeruvust.

Definitsioon 1. Kui funktsioonil $f'(x)$ eksisteerib tuletis, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *teiseks tuletiseks* ehk *teist järku tuletiseks* ja tähistatakse y'' ehk $f''(x)$ ehk $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ehk $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ või $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$.

Seega

$$f''(x) \overset{def}{=} [f'(x)]'.$$

Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni *kolmas tuletis (kolmandat järku tuletis)*

$$f'''(x) \overset{def}{=} [f''(x)]'$$

jne.

Definitsioon 2. Funktsiooni $y = f(x)$ *n-järku* ehk *n-ndaks tuletiseks* nimetatakse tuletist $(n-1)$-järku tuletisest, s.o

$$f^{(n)}(x) \overset{def}{=} [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ n-järku tuletise korral kasutatakse ka tähistust $y^{(n)}$ ja $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.
Seega

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}y.$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = e^x \cos x$ kolmanda tuletise. Leiame, et

$$y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x),$$

$$y'' = (e^x (\cos x - \sin x))' = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$$

ja

$$y''' = (-2e^x \sin x)' = -2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -2e^x (\sin x + \cos x). \quad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame funktsiooni

$$y = \ln(ax + b) \quad (a, b \text{ konstandid})$$

n-järku tuletise.

Leiame kolm esimest tuletist:

$$y' = \frac{a}{ax+b}, \quad y'' = \frac{(-1) \cdot a^2}{(ax+b)^2}, \quad y''' = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot a^3}{(ax+b)^3}.$$

Püstitame hüpoteesi

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \cdot a^n}{(ax+b)^n} \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{1.13.1}$$

mille tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Et juhul $n = 1$ seos (1.13.1) kehtib, siis induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Oletades, et väide (1.13.1) on tõene juhul $n = k$, st

$$y^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)! \cdot a^k}{(ax+b)^k},$$

näitame, et seos (1.13.1) on tõene ka juhul $n = k + 1$, s.o

$$y^{(k+1)} = (-1)^{(k+1)-1} \frac{((k+1)-1)! \cdot a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}}.$$

Tõesti,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)} \right)' = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)! \cdot a^k}{(ax+b)^k} \right)' =$$

$$= (-1)^k \frac{k! \cdot a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}} = (-1)^{(k+1)-1} \frac{((k+1)-1)! \cdot a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}}.$$

Et induktsioonibaas on olemas ja induktsioonisamm on lubatav, siis oleme induktsioonimeetodil tõestanud väite (1.13.1). $\diamondsuit$

Näide 3. Leiame funktsiooni $y = \cos x$ n-ndat järku tuletise. Leiame tuletised kolmanda järguni:

$$y' = (\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \pi/2),$$

$$y'' = (\cos x)'' = (\cos(x+\pi/2))' = -\sin(x+\pi/2) = \cos(x+\pi)$$

ja

$$y''' = (\cos x)''' = (\cos(x+\pi))' = -\sin(x+\pi) = \cos(x+3\pi/2)\,.$$

Püstitame hüpoteesi

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\pi/2) \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}), \tag{1.13.2}$$

mille tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Olgu funktsiooni nullindat järku tuletis see funktsioon ise. Et juhul $n=1$ seos (1.13.2) peab paika, siis induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Oletades, et väide (1.13.2) on tõene juhul $n=k$, st

$$y^{(k)} = \cos(x+k\pi/2),$$

näitame, et väide (1.13.2) on tõene ka juhul $n=k+1$, s.o

$$y^{(k+1)} = \cos(x+(k+1)\pi/2)\,.$$

Tõesti,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = (\cos(x+k\pi/2))' =$$

$$= -\sin(x+k\pi/2) = \cos(x+k\pi/2+\pi/2) = \cos(x+(k+1)\pi/2)\,.$$

Et induktsioonibaas on olemas ja induktsioonisamm on lubatav, siis oleme induktsioonimeetodil näidanud väite (1.13.2) tõesuse. Seosest (1.13.2) järeldub, et

$$(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}).$$

Kehtib seos

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\pi/2) \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}),$$

millest järeldub, et

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x,$$
$$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x \quad (n \in \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\}). \quad \diamondsuit$$

Leiame parameetriliselt esitatud funktsiooni

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

teist järku tuletise. Punkti 1.10 lause 3 põhjal on teatud tigimustel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}.$$

Järelikult

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{dt}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Analoogiliselt leitakse parameetriliselt esitatud funktsiooni kõrgemat järku tuletised.

Näide 4. Näites 1.11.5 leidsime parameetriliselt esitatud funktsiooni

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

tuletise:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

Leiame selle funktsiooni teist järku tuletise:

$$y'' = \frac{d\left(-\dfrac{b}{a}\cot t\right)}{dx} = \frac{\dfrac{d\left(-\dfrac{b}{a}\cot t\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Leiame ilmutamata funktsiooni teise tuletise muutuja x järgi, kui

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Diferentseerides selle seose mõlemat poolt muutuja x järgi, kusjuures arvestame, et $y = y(x)$, saame

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

ja

$$y' = -\frac{x}{y},$$

millest leiame teise tuletise

$$y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}. \qquad \diamondsuit$$

Lause 1 (Leibnizi valem). Funktsioonide korrutise $f(x)g(x)$ n-järku tuletis on leitav valemi

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{\,(i)}(x) g^{(n-i)}(x) \tag{1.13.3}$$

abil.

Tõestus. Leiame valemi n-ndat järku tuletise leidmiseks funktsioonide korrutisest $f(x)g(x)$. Esiteks, leiame tuletised teise järguni:

$$(f(x)g(x))' = f\,'(x)g(x) + f(x)g\,'(x) =$$

$$= C_1^1 f\,'(x)g(x) + C_1^0 f(x)g\,'(x) = \sum_{i=0}^{1} C_1^i f^{\,(i)}(x) g^{(1-i)}(x)$$

ja

$$(f(x)g(x))'' = f\,''(x)g(x) + f\,'(x)g'(x) + f'(x)g\,'(x) + f(x)g\,''(x) =$$

$$= C_2^2 f\,''(x)g(x) + C_2^1 f\,'(x)g'(x) + C_2^0 f(x)g\,''(x) = \sum_{i=0}^{2} C_2^i f^{\,(i)}(x) g^{(2-i)}(x).$$

Püstitame hüpoteesi (1.13.3), mille tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Et juhul $n = 1$ väide (1.13.3) kehtib, siis induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Oletades, et väide (1.13.3) on tõene juhul $n = k$, st

$$(f(x)g(x))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{\,(i)}(x) g^{(k-i)}(x),$$

näitame, et väide (1.13.3) on tõene ka juhul $n = k+1$, s.o

$$(f(x)g(x))^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f^{\,(i)}(x) g^{(k+1-i)}(x).$$

Leiame, et

$$(f(x)g(x))^{(k+1)} = \left((f(x)g(x))^{(k)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{\,(i)}(x) g^{(k-i)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{\,(i+1)}(x) g^{(k-i)}(x) + \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{\,(i)}(x) g^{(k+1-i)}(x) =$$

$$= C_k^0 f^{\,(1)}(x)g^{(k)}(x) + C_k^1 f^{\,(2)}(x)g^{(k-1)}(x) + \ldots + C_k^{k-1} f^{\,(k)}(x)g^{(1)}(x) +$$

$$+ C_k^k f^{\,(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + C_k^0 f^{\,(0)}(x)g^{(k+1)}(x) + C_k^1 f^{\,(1)}(x)g^{(k)}(x) +$$

$$\ldots + C_k^{k-1} f^{\,(k-1)}(x)g^{(2)}(x) + C_k^k f^{\,(k)}(x)g^{(1)}(x) =$$

$$= C_k^0 f^{\,(0)}(x)g^{(k+1)}(x) + \left(C_k^0 + C_k^1\right) f^{\,(1)}(x)g^{(k)}(x) + \left(C_k^1 + C_k^2\right) f^{\,(2)}(x)g^{(k-1)}(x) +$$

$$+\ldots+\left(C_k^{k-2}+C_k^{k-1}\right)f^{\,(k-1)}(x)g^{(2)}(x)+\left(C_k^{k-1}+C_k^{k}\right)f^{\,(k)}(x)g^{(1)}(x)+$$
$$+C_k^k f^{\,(k+1)}(x)g^{(0)}(x)=$$
$$=\left[\begin{array}{c} C_k^0=C_{k+1}^0,\quad C_k^{i-1}+C_k^i=\dfrac{k!}{(i-1)!\,(k-i+1)!}+\dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}= \\ =\dfrac{k!}{(i-1)!\,(k-i)!}\left(\dfrac{1}{k-i+1}+\dfrac{1}{i}\right)=\dfrac{(k+1)!}{i!\,(k+1-i)!}=C_{k+1}^i,\quad C_k^k=C_{k+1}^{k+1}\end{array}\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i f^{\,(i)}(x)g^{(k+1-i)}(x).$$

Kuna induktsioonil on baas olemas ja induktsioonisamm on lubatav, siis oleme matemaatilise induktsiooni meetodil näidanud väite (1.13.3) tõesuse. □

Näide 6. Leiame funktsiooni $y=x^3e^{2x}$ kahekümnenda tuletise Leibnizi valemi abil:

$$\left(x^3e^{2x}\right)^{(20)}=\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i\left(x^3\right)^{(i)}\left(e^{2x}\right)^{(20-i)}=\left[\left(x^3\right)^{(i)}\overset{i\geq 3}{=}0\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{3}C_{20}^i\left(x^3\right)^{(i)}\left(e^{2x}\right)^{(20-i)}=C_{20}^0\left(x^3\right)^{(0)}\left(e^{2x}\right)^{(20)}+$$
$$+C_{20}^1\left(x^3\right)^{(1)}\left(e^{2x}\right)^{(19)}+C_{20}^2\left(x^3\right)^{(2)}\left(e^{2x}\right)^{(18)}+C_{20}^3\left(x^3\right)^{(3)}\left(e^{2x}\right)^{(17)}=$$
$$=2^{20}x^3e^{2x}+60\cdot 2^{19}x^2e^{2x}+1140\cdot 2^{18}xe^{2x}+6840\cdot 2^{17}e^{2x}=$$
$$=2^{20}\left(x^3+30x^2+285x+855\right)e^{2x}.$$

Pakett SWP annab vastuse kujul

$$\frac{d^{20}}{dx^{20}}\left(x^3e^{2x}\right)=896\,532\,480e^{2x}+298\,844\,160xe^{2x}+$$
$$+31\,457\,280x^2e^{2x}+1048\,576x^3e^{2x}.\quad\diamondsuit$$

1.14. Funktsiooni diferentsiaalid

Argumendi muudule Δx vastav funktsiooni $y=f(x)$ muut Δy kohal x on esitatav kujul (vt seost (1.10.2))

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\beta(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)\,,\tag{1.14.1}$$

kus suurus $\beta(\Delta x)$ on piirprotsessis $\Delta x\to 0$, võrreldes suurusega Δx, kõrgemat järku lõpmata väike.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y=x^4$ muudu Δy, mis vastab argumendi muudule Δx kohal $x:$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^4-x^4=4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4\,.$$

Suurus Δy on esitatud kujul (1.14.1), kusjuures

$$f'(x)\Delta x = 4x^3\Delta x$$

ja

$$\beta(\Delta x) = 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$$

on kõrgemat järku lõpmata väike, võrreldes suurusega Δx. $\diamondsuit$

Definitsioon 1. Avaldist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *diferentsiaaliks* ehk *esimest järku diferentsiaaliks kohal* x ja tähistatakse dy või df, st

$$dy \overset{def}{=} f'(x)\Delta x.$$

Lause 1. Funktsiooni diferentsiaal on võrdeline argumendi muuduga ja nullist erineva tuletise korral on funktsiooni muut ja funktsiooni diferentsiaal ekvivalentsed suurused piirprotsessis $\Delta x \to 0$.

Et juhul $y = x$ saame $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$, siis on tavaks argumendi x muutu Δx nimetada *argumendi diferentsiaaliks* ja tähistada sümboliga dx. Seega

$$dy = f'(x)dx,$$

st funktsiooni diferentsiaal kohal x võrdub funktsiooni tuletise $f'(x)$ ja argumendi diferentsiaali dx korrutisega.

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \cos e^x$ diferentsiaali kohal x. Et

$$f'(x) = (-\sin e^x) \cdot e^x = -e^x \sin e^x,$$

siis

$$dy = -e^x \sin e^x dx. \qquad \diamondsuit$$

Lause 2. Funktsiooni tuletis $f'(x)$ avaldub funktsiooni diferentsiaali dy ja argumendi diferentsiaali dx jagatisena, st

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Kui funktsioonid $u = \varphi(x)$ ja $y = \psi(u)$ on diferentseeruvad, siis liitfunktsiooni $f(x) = \psi(\varphi(x))$ tuletis avaldub kujul

$$f'(x) = \psi'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Korrutades selle seose mõlemat poolt suurusega dx, leiame, et

$$f'(x)dx = \psi'(u) \cdot \varphi'(x)dx$$

ehk

$$f'(x)dx = \psi'(u)du \tag{1.14.2}$$

või

$$df = d\psi.$$

Seosest (1.14.2) järeldub, et funktsiooni diferentsiaali kuju on *invariantne* muutujate vahetuse suhtes.

Lause 3. Kehtivad seosed:

$$d(cf) = cdf \quad (c = \text{konstant}), \qquad d(f+g) = df + dg,$$

$$d(fg) = g \cdot df + f \cdot dg, \quad d\frac{f}{g} = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}.$$

Tõestame neist viimase:

$$d\frac{f}{g} = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{f'g - fg'}{g^2} dx = \frac{gf'dx - fg'dx}{g^2} = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}. \quad \square$$

Et Lause 1 põhjal on nullist erineva tuletise korral funktsiooni muut ja funktsiooni diferentsiaal ekvivalentsed suurused piirprotsessis $\Delta x \to 0$, siis "küllalt väikese" argumendi muudu Δx korral

$$\Delta y \approx dy,$$

st

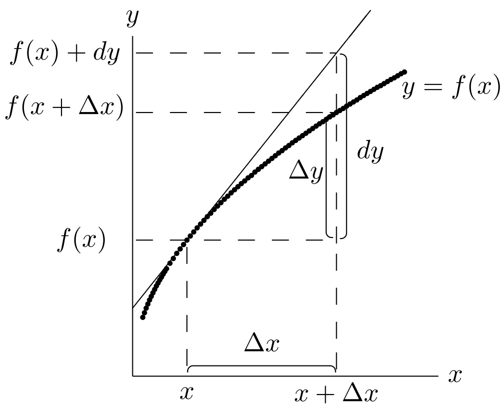
$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \;\Leftrightarrow\; f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 4. Kui funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv punktis x, siis

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1.14.3}$$

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni diferentsiaal $f'(x)\Delta x$ punktis $(x, f(x))$ funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja punkti ordinaadi muutu, mis vastab argumendi muudule Δx



Valemit (1.14.3) kasutatakse funktsiooni ligikaudsete väärtuste arvutamiseks punktis $x + \Delta x$, eeldusel, et on lihtne leida funktsiooni ja selle tuletise väärtust punktis x. Tihti kasutatakse valemit (1.14.3) kujul

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a)\,. \tag{1.14.4}$$

Näide 3. Leiame valemi (1.14.3) abil ligikaudselt $\sqrt{1.06}$. Arvutame funktsiooni $y = \sqrt{x}$ väärtuse kohal $x = 1$, s.o $\sqrt{1} = 1$. Lisaks, $\Delta x = 1.06 - 1 = 0.06$, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ ja $f'(1) = 1/2$. Seega

$$\sqrt{1.06} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2} \cdot 0.06 = 1.03. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame valemi (1.14.3) abil ligikaudselt $\sqrt[10]{1000}$. Teame, et $\sqrt[10]{1024} = 2$. Valik $f(x) = \sqrt[10]{x}$, $x = 1024$ ja $\Delta x = -24$ ei sobi, sest sel korral ei ole argumendi muut Δx piisavalt väike. Teisendame esiteks meid huvitavat suurust

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024 - 24} = 2\sqrt[10]{1 - \frac{24}{1024}} = 2\sqrt[10]{1 - \frac{3}{128}}$$

ja leiame ligikaudselt suuruse $\sqrt[10]{1 - 3/128}$. Leiame valemi (1.14.3) abil, et

$$\sqrt[10]{1 - \frac{3}{128}} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{c} f(x) = \sqrt[10]{x},\ x = 1,\ \Delta x = \left(1 - \dfrac{3}{128}\right) - 1 = -\dfrac{3}{128} \\ f'(x) = \dfrac{1}{10\sqrt[10]{x^9}},\ f(1) = \sqrt[10]{1} = 1,\ f'(1) = \dfrac{1}{10\sqrt[10]{1^9}} = \dfrac{1}{10}, \end{array}\right] \approx$$

$$\approx 1 + \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right) = \frac{1277}{1280}.$$

Tulemuseks saame

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2 \cdot \frac{1277}{1280} = \frac{1277}{640} \approx 1.9953. \qquad \diamondsuit$$

Kuidas hinnata Näidete 3 ja 4 ligikaudsetes arvutustes tehtud vigu, selgub edaspidi, nimelt Taylori valemi rakendamisel.

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal $dy = f'(x)dx$ on tegelikult kahe muutuja x ja dx funktsioon. Kui fikseerida argumendi diferentsiaal dx, siis sel lisatingimusel on suurus dy vaid muutuja x funktsioon ja võime vaadelda selle funktsiooni diferentsiaali, mida nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *teist järku diferentsiaaliks* ehk *teiseks diferentsiaaliks* kohal x ja tähistatakse sümboliga d^2y. Saame ahela

$$d^2y \overset{def}{=} d(dy) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)\,(dx)^2 = f''(x)dx^2,$$

kus sümboliga dx^2 tähistatakse suurust $(dx)^2$. Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni *kolmandat järku diferentsiaal*

$$d^3y \stackrel{def}{=} d(d^2y) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = f'''(x)\,(dx)^3 = f'''(x)dx^3,$$

kus $dx^3 \stackrel{def}{=} (dx)^3$.

Definitsioon 2. Funktsiooni $y = f(x)$ *n-järku* ehk *n-ndaks diferentsiaaliks* nimetatakse diferentsiaali selle funktsiooni $(n-1)$-järku diferentsiaalist, st

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right).$$

Matemaatilise induktsiooni meetodil võib näidata, et

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

kus $dx^n \stackrel{def}{=} (dx)^n$. Seega

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

st funktsiooni $y = f(x)$ n-järku tuletis $f^{(n)}(x)$ avaldub selle funktsiooni n-järku diferentsiaali d^ny ja argumendi diferentsiaali dx n-nda astme $(dx)^n$ suhtena.

Näide 5. Leiame funktsiooni $y = \cos x$ n-järku diferentsiaali:

$$d^ny = (\cos x)^{(n)}\,dx^n = \cos(x + n\frac{\pi}{2})dx^n. \qquad \diamondsuit$$

1.15. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. Lokaalne ekstreemum

Definitsioon 1. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *rangelt kasvavaks punktis* x, kui leidub selline positiivne arv δ, et suvaliste $x_1 \in (x-\delta, x)$ ja $x_2 \in (x, x+\delta)$ korral $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$.

Kui $\Delta x = x_2 - x$ ja $\Delta y = f(x_2) - f(x)$, siis $\Delta x > 0$ ja $\Delta y > 0$ ning seega $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Analoogiliselt, kui $\Delta x = x_1 - x$ ja $\Delta y = f(x_1) - f(x)$, siis $\Delta x < 0$ ja $\Delta y < 0$ ning seega $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Järelikult kehtib väide.

Lause 1. Kui funktsioon $y = f(x)$ on rangelt kasvav punktis x, siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$0 < |\Delta x| < \delta \ \Rightarrow\ \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse punktis x *rangelt kahanevaks*, kui leidub selline $\delta > 0$, et suvaliste $x_1 \in (x-\delta, x)$ ja $x_2 \in (x, x+\delta)$ korral $f(x_1) > f(x) > f(x_2)$.

Kui $\Delta x = x_2 - x$ ja $\Delta y = f(x_2) - f(x)$, siis $\Delta x > 0$ ja $\Delta y < 0$ ning seega $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Analoogiliselt, kui $\Delta x = x_1 - x$ ja $\Delta y = f(x_1) - f(x)$, siis $\Delta x < 0$ ja $\Delta y > 0$ ning seega $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Järelikult kehtib väide.

Lause 2. Kui funktsioon $y = f(x)$ on rangelt kahanev punktis x, siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$0 < |\Delta x| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ ja Δy olgu argumendi muudule Δx vastav funktsiooni muut. Kui funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $f'(x)$ on positiivne punktis x, st

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0,$$

siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$0 < |\Delta x| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Järelikult, kui $\Delta x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, siis suurused Δx ja Δy on samamärgilised, st funktsioon $y = f(x)$ on rangelt kasvav punktis x. Analoogiliselt saame, et kui

$$f'(x) < 0,$$

siis funktsioon $y = f(x)$ on rangelt kahanev punktis x. Seega oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 3. Kui funktsiooni $f(x)$ tuletis punktis x on positiivne (negatiivne), siis funktsioon $f(x)$ kasvab (kahaneb) rangelt punktis x.

Näide 1. Tõestame, et

$$e^x > 1 + x \quad (x \neq 0). \tag{1.15.1}$$

Moodustame abifunktsiooni

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Väide (1.15.1) on tõene parajasti siis, kui

$$f(x) > f(0) \quad (x \neq 0).$$

Et $f'(x) = e^x - 1$, siis

$$\begin{aligned}
&x < 0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) \text{ on rangelt kahanev, kui } x < 0,\\
&x > 0 \Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) \text{ on rangelt kasvav, kui } x > 0.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$x \neq 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0,$$

st väide (1.15.1) on tõene. $\diamondsuit$

Märkus 1. Lause 1 ei ole pööratav, nimelt funktsiooni $f(x)$ rangelt monotoonsusest punktis x ei järeldu, et $f'(x) \neq 0$. Näiteks, funktsioon $y = x^3$ on rangelt kasvav punktis $x = 0$, kuigi $f'(0) = 0$.

Definitsioon 3. Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on punktis x *lokaalne maksimum,* kui leidub selline positiivne arv δ, et

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \Delta y \leq 0.$$

Definitsioon 4. Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on punktis x *lokaalne miinimum,* kui leidub selline arv $\delta > 0$, et

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \Delta y \geq 0.$$

Kui Definitsioonis 3 asendada tingimus $\Delta y \leq 0$ tingimusega $\Delta y < 0$, siis saame *range lokaalse maksimumi* mõiste. Kui Definitsioonis 4 asendada tingimus $\Delta y \geq 0$ tingimusega $\Delta y > 0$, siis saame *range lokaalse miinimumi* mõiste.

Definitsioon 5. Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on punktis x *lokaalne ekstreemum,* kui funktsioonil $f(x)$ on punktis x kas lokaalne miinimum või lokaalne maksimum.

Definitsioon 6. Öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on punktis x *range lokaalne ekstreemum,* kui funktsioonil $f(x)$ on punktis x kas range lokaalne miinimum või range lokaalne maksimum.

Lause 4 (Fermat' teoreem). Kui funktsioonil $f(x)$ on punktis x lokaalne ekstreemum ja funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv punktis x, siis funktsiooni tuletis selles punktis on null, st $f'(x) = 0$.

Tõestus. Olgu selles punktis x väitevastaselt $f'(x) \neq 0$. Seega $f'(x) > 0$ või $f'(x) < 0$ ja Lause 3 põhjal on funktsioon $f(x)$ selles punktis x vastavalt kas rangelt kasvav või rangelt kahanev ning järelikult ei ole sel funktsioonil selles punktis x lokaalset ekstreemumit. See vastuolu on tingitud väitevastasest eeldusest. Järelikult $f'(x) = 0$. $\square$

Märkus 2. Lause 4 ei ole pööratav. Nimelt, tingimusest $f'(x) = 0$ ei järeldu, et punktis x on lokaalne ekstreemum. Näiteks funktsiooni $f(x) = x^3$ korral $f'(0) = 0$, kuid punktis $x = 0$ ei ole sel funktsioonil lokaalset ekstreemumit (funktsioon on selles punktis rangelt kasvav).

1.16. Keskväärtusteoreemid

Vaatleme järgnevalt teoreeme, mida matemaatilises analüüsis nimetatakse *keskväärtusteoreemideks*. Need teoreemid annavad aluse paljudele tuletise rakendustele.

Lause 1 (Rolle'i teoreem). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) ning $f(a) = f(b)$, siis vahemikus (a, b) leidub selline punkt c, et $f'(c) = 0$, st

$$f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b) \wedge f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0.$$

Tõestame esiteks selle väite lisatingimusel $f(a) = f(b) = 0$. Et lõigul pidev funktsioon omandab sel lõigul ekstremaalsed väärtused (vt Lauset 1.9.3), siis leiduvad sellised punktid c_1, $c_2 \in [a, b]$, et

$$f(c_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Kui nii c_1 kui ka c_2 on lõigu otspunktid, siis $f(x)$ on konstantne lõigul ja punktiks c sobib suvaline vahemiku (a, b) punkt. Kui vähemalt üks punktidest c_1 või c_2 ei ole lõigu $[a, b]$ otspunkt, siis selles punktis (valime selle punkti tähistuseks c) on Fermat' teoreemi põhjal $f'(c) = 0$.

Teiseks vaatleme järgnevalt juhtu $f(a) = f(b) \neq 0$. Moodustame abifunktsiooni $F(x) = f(x) - f(a)$. Funktsioon $F(x)$ rahuldab lisatingimust $F(a) = F(b) = 0$. Et ka $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b) \wedge F(a) = F(b)$, siis tõestuse esimese osa põhjal leidub selline punkt $c \in (a, b)$, et $F'(c) = 0$. Arvestades tingimust $f'(x) = F'(x)$, saame $f'(c) = 0$. Arv $c \in (a, b)$ on esitatav ka kujul $c = a + \theta(b - a)$, kus $0 < \theta < 1$. □

Lause 2 (Cauchy keskväärtusteoreem). Kui funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on pidevad lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruvad vahemikus (a, b), kusjuures

$$\varphi'^{\,2}(x) + \psi'^{\,2}(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$$

ning $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, siis leidub vahemikus (a, b) selline punkt c, et

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)},$$

st

$$\varphi(x),\ \psi(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)\ \wedge \varphi'^{\,2}(x) + \psi'^{\,2}(x) \neq 0\ \ (x \in (a, b)) \wedge \varphi(b) \neq \varphi(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) :\ \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Tõestus. Moodustame abifunktsiooni

$$F(x) = (\psi(b) - \psi(a))\, \varphi(x) - (\varphi(b) - \varphi(a))\, \psi(x).$$

Et $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ ja

$$F(a) = (\psi(b) - \psi(a))\, \varphi(a) - (\varphi(b) - \varphi(a))\, \psi(a) = \psi(b)\varphi(a) - \varphi(b)\psi(a)$$

ning

$$F(b) = (\psi(b) - \psi(a))\, \varphi(b) - (\varphi(b) - \varphi(a))\, \psi(b) = \psi(b)\varphi(a) - \varphi(b)\psi(a),$$

siis funktsioon $F(x)$ rahuldab Rolle'i teoreemi tingimusi ja seega leidub selline $c \in (a, b)$, et $F'(c) = 0$, st

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow (\psi(b) - \psi(a))\, \varphi'(c) - (\varphi(b) - \varphi(a))\, \psi'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\psi(b)-\psi(a))\,\varphi'(c) = (\varphi(b)-\varphi(a))\,\psi'(c) \Leftrightarrow [\varphi(b)\neq\varphi(a)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = \psi'(c) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \varphi'(c)\neq 0,\ \text{sest tingimusest } \varphi'(c)=0 \\ \text{ja viimasest võrdusest järelduks, et} \\ \psi'(c)=0,\ \text{mis on vastuolus} \\ \text{tingimusega } \varphi'^{\,2}(x)+\psi'^{\,2}(x)\neq 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Nendime, et arv c on esitatav kujul $c = a + \theta(b-a)$, kus $0 < \theta < 1$. □

Lause 3 (Lagrange'i keskväärtusteoreem). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a,b), siis leidub selline punkt $c \in (a,b)$, et

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \tag{1.16.1}$$

st

$$f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b) \ \Rightarrow\ \exists c \in (a,b):\ f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Tõestus. Valiku $\psi(x) = f(x)$ ja $\varphi(x) = x$ korral on täidetud Cauchy teoreemi tingimused ja järelikult kehtib seos

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1},$$

mis on samaväärne Lause 3 väitega. Nendime, et seos (1.16.1) on esitatav kujul

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

ehk

$$f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b-a))(b-a), \tag{1.16.2}$$

kusjuures $\theta \in (0;1)$. □

Märkus 1. Geomeetriliselt võib Lagrange'i teoreemi tõlgendada nii, et Lagrange'i teoreemi eeldustel leidub vahemikus (a,b) selline punkt c, et funktsiooni $y = f(x)$ graafikule punktis $(c, f(c))$ tõmmatud puutuja on paralleelne graafiku punkte $(a,\ f(a))$ ja $(b,\ f(b))$ ühendava kõõluga.

Võrrelge seost (1.16.2) seosega (1.14.4).

1.17. L'Hospitali reegel

Tutvume ühe väga levinud piirväärtuste arvutamise võttega, L'Hospitali reegliga, mida kasutatakse määramatuste $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 ja 1^∞ puhul.

Lause 1 (L'Hospitali reegel). Kui

$$\lim_{x\to a+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \tag{1.17.1}$$

ja eksisteerib

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.17.2}$$

ning

$$\exists\delta_1 : x \in (a, a+\delta_1] \Rightarrow g(x) \neq 0, \tag{1.17.3}$$

siis eksisteerib ka

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{1.17.4}$$

kusjuures

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{1.17.5}$$

st

$$\lim_{x\to a+} f(x) = 0 \ \wedge \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \ \ \wedge \exists \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \ \ \wedge \ \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analoogiline väide peab paika ka vasakpoolse piirväärtuse ja samuti (kahepoolse) piirväärtuse korral.

Tõestus. Eelduses (1.17.2) sisaldub vaikimisi, et

$$\exists\delta_2 > 0 : (\ f(x), g(x) \in D(a, a+\delta_2) \cap C(a, a+\delta_2]) \wedge (x \in (a, a+\delta_2) \Rightarrow g'(x) \neq 0)\,. \tag{1.17.6}$$

Olgu suurus δ selline, et $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vaatleme abifunktsioone

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } \ x \in (a, a+\delta], \\ 0, & \text{kui } \ x = a \end{cases} \tag{1.17.7}$$

ja

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kui } x \in (a, a+\delta], \\ 0, & \text{kui } x = a. \end{cases} \ . \tag{1.17.8}$$

Seostest (1.17.6)–(1.17.8) järeldub, et

$$F(x), G(x) \in C[a, a+\delta] \cap D(a, a+\delta),$$

kusjuures

$$x \in (a, a+\delta) \Rightarrow F'(x) = f\,'(x) \wedge G'(x) = g'(x) \wedge G'(x) \neq 0.$$

Et seostest (1.17.3) ja (1.17.8) järeldub, et

$$G(a) \neq G(a+\delta),$$

siis funktsioonid $F(x)$ ja $G(x)$ rahuldavad Cauchy teoreemi eeldusi. Seega kehtib Cauchy teoreemi põhjal väide

$$\frac{F(a+\delta) - F(a)}{G(a+\delta) - G(a)} = \frac{F'(a+\theta\delta)}{G'(a+\theta\delta)},$$

kus $(0 < \theta < 1)$. Et uurida suhte $f(x)/g(x)$ käitumist piirprotsessis $x \to a+$, piisab seda teha vaid arvule a küllalt lähedaste muutuja x väärtuste korral.

Olgu $x - a < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tulemuseks saame, et

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \left[\begin{array}{c} x = a+\delta \\ x \to a+ \Leftrightarrow \delta \to 0+ \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+} \frac{F(a+\delta)-F(a)}{G(a+\delta)-G(a)} = \lim_{\delta\to 0+} \frac{F'(a+\theta\delta)}{G'(a+\theta\delta)} = \lim_{\delta\to 0+} \frac{f'(a+\theta\delta)}{g'(a+\theta\delta)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = a+\theta\delta \\ \delta \to 0+ \Leftrightarrow x \to a+ \end{array} \right] = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

st väited (1.17.4) ja (1.17.5) on tõesed. Analoogiliselt saab näidata, et

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tõene on väide

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\exists \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \wedge \left(\exists \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right),$$

kusjuures eelneva põhjal

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \wedge \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Seega

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ja

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ning

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \square$$

Analoogiline tulemus kehtib määramatuse $\frac{\infty}{\infty}$ puhul, samuti piirprotsesside $x \to -\infty$ ja $x \to +\infty$ korral.

Näide 1. Leiame L'Hospitali reegli abil piirväärtuse:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \overset{\frac{1}{1}}{=} 1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Näitame, et eksponentfunktsioon a^x $(a>1)$ on piirprotsessis $x \to +\infty$ kõrgemat järku lõpmata suur suurus võrreldes astmefunktsiooniga x^β $(\beta > 0)$. Tõesti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^x)'}{(x^\beta)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln a}{\beta x^{\beta-1}} = [\beta - 1 > 0] \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(\beta x^{\beta-1})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}} = [\beta - 2 > 0] \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln^k a}{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)x^{\beta-k}} =$$

$$= [-1 < \beta - k \le 0] = \infty. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Piirväärtuse

$$\lim_{x\to0+} (\cot x)^{\sin x} \overset{\infty^0}{=}$$

leidmiseks uurime esmalt piirväärtust meid huvitava suuruse naturaallogaritmist:

$$\lim_{x\to0+} \ln(\cot x)^{\sin x} = \lim_{x\to0+} (\sin x)\ln(\cot x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to0+} \frac{\ln(\cot x)}{\dfrac{1}{\sin x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{(\ln(\cot x))'}{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'} = \lim_{x\to0+} \frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = \lim_{x\to0+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \overset{\frac{0}{1}}{=} 0.$$

Et selles piirprotsessis $x \to 0+$ meid huvitava suuruse naturaallogaritm läheneb nullile, siis läheneb suurus ise suurusele $e^0 = 1$, st $\lim\limits_{x\to0+} (\cot x)^{\sin x} = 1$. $\diamondsuit$

Näide 4. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{(x\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to1} \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{(x\ln x)'}{(x\ln x + x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} \overset{\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Märkus 1. Rõhutame, et kui tingimustel (1.17.1) ja (1.17.3) eksisteerib $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, siis eksisteerib ka $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Kui $\bar{\exists} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, siis see informatsioon ei võimalda langetada otsust, kas $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ eksisteerib või mitte.

Näide 5. On lihtne vahetult veenduda, et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = 1.$$

Tõesti,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}} \overset{\frac{1}{1}}{=} 1.$$

Kui aga üritada seda piirväärtust leida L'Hospitali reegli abil, saame

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \cot^2 \frac{x}{2}.$$

Et piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \cot^2 \frac{x}{2}$$

ei eksisteeri, siis selle ülesande korral ei ole L'Hospitali reegel rakendatav. $\diamondsuit$

1.18. Taylori valem polünoomi korral

Olgu $y = P_n(x)$, kus

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n$$

ja suurused b_k $(0 \le k \le n)$ on konstandid. Et ülimalt n-järku polünoomide vektorruumis on baasiks ka $\left\{1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ \ldots\ ,\ (x-a)^n\right\}$, siis funktsioon $P_n(x)$ on esitatav samuti kujul

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k. \tag{1.18.1}$$

Leiame kordajad c_k. Kui seoses (1.18.1) võtta $x = a$, saame $c_0 = P_n(a)$ ehk $c_0 = P_n(a)/0!$, sest $0! \overset{def}{=} 1$. Diferentseerides seose (1.18.1) mõlemaid pooli muutuja x järgi, saame seose

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k (x-a)^{k-1}, \tag{1.18.2}$$

millest järeldub, et $c_1 = P_n'(a)/1!$. Diferentseerides seose (1.18.2) mõlemat poolt muutuja x järgi, saame seose

$$P_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) c_k (x-a)^{k-2},$$

millest järeldub, et $c_2 = P_n''(a)/2!$. Analoogilist mõttekäiku jätkates jõuame tulemuseni

$$c_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ n)$$

(tõestada, kasutades matemaatilise induktsiooni meetodit). Järelikult,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^n . \tag{1.18.3}$$

Seost (1.18.3) nimetatakse *Taylori valemiks polünoomi* $P_n(x)$ *jaoks* ja summat

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^n$$

funktsiooni $P_n(x)$ *Taylori polünoomiks* punktis a.

Näide 1. Esitame funktsiooni $y = x^3$ suuruse $(x+2)$ astmete abil. Valime $a = -2$ ja rakendame valemit (1.18.3):

$$\begin{array}{ccc} P_3(x) = x^3 & \Rightarrow & P_3(-2) = -8 \\ \Downarrow & & \\ P_3'(x) = 3x^2 & \Rightarrow & P_3'(-2) = 12 \\ \Downarrow & & \\ P_3''(x) = 6x & \Rightarrow & P_3''(-2) = -12 \\ \Downarrow & & \\ P_3'''(x) = 6 & \Rightarrow & P_3'''(-2) = 6. \end{array}.$$

Valemi (1.18.3) abil leiame, et

$$x^3 = -8 + \frac{12}{1!}(x+2) + \frac{-12}{2!}(x+2)^2 + \frac{6}{3!}(x+2)^3 =$$

$$= -8 + 12(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3. \qquad \diamondsuit$$

Märkus 1. Nendime, et esituse

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

võib leida ka kasutades summas $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ asendust $x = a + (x-a)$, st

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (a + (x-a))^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} (x-a)^i =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{muudame selles kahekordses summas summeerimise järjekorda,} \\ (k = 0; 1; \ldots; n \ \wedge\ i = 0; 1; \ldots; k) \ \Leftrightarrow\ (i = 0; 1; \ldots; n \ \wedge\ k = i, i+1, \ldots, n) \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} b_k C_k^i a^{k-i} \right) (x-a)^i = \sum_{i=0}^{n} c_i \, (x-a)^i \, ,$$

kus

$$c_i = \sum_{k=i}^{n} C_k^i b_k a^{k-i} \quad (0 \le i \le n). \tag{1.18.4}$$

Näites 1 esitatud funktsiooni x^3 korral on $a = -2$ ja $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = 1$ ning valemi (1.18.4) abil leiame, et

$$\begin{aligned} c_0 &= \textstyle\sum_{k=0}^{3} C_k^0 b_k a^{k-0} = 0 + 0 + 0 + C_3^0 \cdot 1 \cdot (-2)^3 = -8, \\ c_1 &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} C_k^1 b_k a^{k-1} = 0 + 0 + C_3^1 \cdot 1 \cdot (-2)^2 = 12, \\ c_2 &= \textstyle\sum_{k=2}^{3} C_k^2 b_k a^{k-2} = 0 + C_3^2 \cdot 1 \cdot (-2) = -6, \\ c_3 &= \textstyle\sum_{k=3}^{3} C_k^3 b_k a^{k-3} = C_3^3 \cdot 1 \cdot (-2)^0 = 1. \end{aligned}$$

Märkus 2. Kordajaid c_k $(k = 0; 1; 2; \ldots ; n)$ võib leida ka Horneri skeemi abil. Horneri skeem (polünoomi lineaarteguriga jagamise algoritm) põhineb seosel

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = (x-a) \left(\beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \right) + r,$$

kus $\beta_{n-1} = b_n$, $\beta_{n-2} = b_{n-1} + a\beta_{n-1}$, $\beta_{n-3} = b_{n-2} + a\beta_{n-2}$, $\blacksquare$, $\beta_1 = b_2 + a\beta_2$, $\beta_0 = b_1 + a\beta_1$, $r = b_0 + a\beta_0$. Saame Horneri skeemi

	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_1	b_0
a	β_{n-1}	β_{n-2}	β_{n-3}	$\ldots$	β_0	r

Kasutame Horneri skeemi Näites 1 esitatud funktsiooni x^3 korral, astmete $(x+2)^k$ järgi arenduse kordajate leidmiseks

	1	0	0	0
-2	1	-2	4	$-\mathbf{8}$
-2	1	-4	**12**	
-2	1	$-\mathbf{6}$		
-2	**1**			

1.19. Taylori valem

Kui funktsioon $f(x)$ on kohal a diferentseeruv n korda, siis on võimalik funktsioonile $f(x)$ seada vastavusse selle funktsiooni n-järku Taylori polünoom punktis a

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \, .$$

Et üldjuhul

$$f(x) \ne \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \, ,$$

siis kehtib seos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_n(x), \tag{1.19.1}$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *n-järku Taylori valemiks punktis a*, kusjuures polünoomi

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *n-järku Taylori polünoomiks punktis a* ja suurust

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

funktsiooni $f(x)$ *n-järku Taylori valemi jääkliikmeks punktis a*. Kui $f(x)$ on polünoom, mille järguks on m ja $m \leq n$, siis $R_n(x) \equiv 0$. Funktsiooni $f(x)$ Taylori valemit (1.19.1) $a = 0$ korral nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *n-järku Maclaurini valemiks*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \tag{1.19.2}$$

ja polünoomi

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

funktsiooni $f(x)$ *n-järku Maclaurini polünoomiks* ning suurust

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *n-järku Maclaurini valemi jääkliikmeks.*

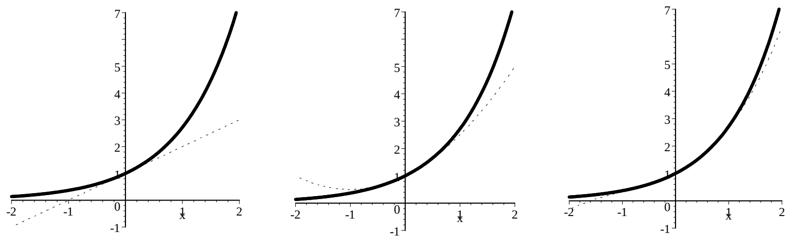
Näide 1. Leiame funktsiooni e^x jaoks n-järku Maclaurini valemi. Kuna

$$\begin{array}{rr} f(x) = e^x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & f'(0) = 1, \\ f''(x) = e^x, & f''(0) = 1, \\ \cdots & \cdots \\ f^{(k)}(x) = e^x, & f^{(k)}(0) = 1, \end{array}$$

siis valemi 1.19.2 abil saame

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x). \qquad \diamondsuit \tag{1.19.3}$$

Skitseerime funktsiooni e^x ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_n(x)$ $(n = 1; 2; 3)$ graafikuid lõigul $[-2; 2]$, kusjuures e^x graafik on esitatud jämeda joonega



n=1 n=2 n=3

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \cos x$ jaoks $(2\,n + 1)$-järku Maclaurini valemi.

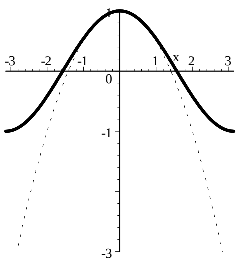
Et

$$\begin{array}{rr} f(x) = \cos x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = -\sin x, & f'(0) = 0, \\ f''(x) = -\cos x, & f''(0) = -1, \\ \cdots & \cdots \\ f^{(2k)}(x) = \cos\left(x + 2k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \ (k \in \mathbf{N} \cup \{0\})\,, & f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \\ f^{(2k+1)}(x) = \cos\left(x + (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \ (k \in \mathbf{N} \cup \{0\})\,, & f^{(2k+1)}(0) = 0, \end{array}$$

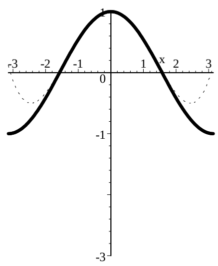
siis valemi 1.19.2 abil saame

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x). \qquad \diamondsuit \tag{1.19.4}$$

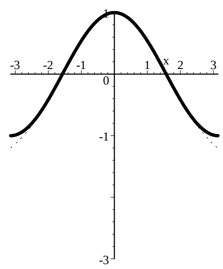
Skitseerime lõigul $[-\pi; \pi]$ funktsiooni $\cos x$ ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_{2n+1}(x)$ $(n = 1; 2; 3)$ graafikud, kusjuures $\cos x$ graafik on esitatud jämeda joonega ja $M_{2n+1}(x) = M_{2n}(x)$



n=1



n=2



n=3

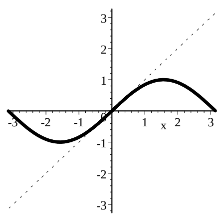
Näide 3. Leiame funktsiooni $y = \sin x$ jaoks $(2\,n + 2)$-järku Maclaurini valemi. Et

$$\begin{array}{rr}
f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\
f'(x) = \cos x, & f'(0) = 1, \\
f''(x) = -\sin x, & f''(0) = 0, \\
\cdots & \cdots \\
f^{(2k)}(x) = \sin\left(x + 2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \ (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k)}(0) = 0, \\
f^{(2k+1)}(x) = \sin\left(x + (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) \ (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,
\end{array}$$

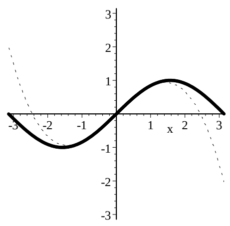
siis valemi 1.19.2 abil saame

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x). \qquad \diamondsuit \tag{1.19.5}$$

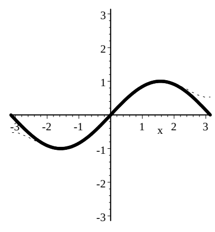
Skitseerime lõigul $[-\pi; \pi]$ funktsiooni $\sin x$ ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_{2n+2}(x)$ $(n = 0; 1; 2)$ graafikud, kusjuures $\sin x$ graafik on esitatud jämeda joonega ja $M_{2n+2}(x) = M_{2n+1}(x)$



n=0



n=1



n=2

Näide 4. Leiame funktsiooni $y = \operatorname{ch} x$ jaoks $(2\,n+1)$-järku Maclaurini valemi.
Et

$$\begin{array}{rr} f(x) = \operatorname{ch} x, & f(0) = 1, \\ f'(x) = \operatorname{sh} x, & f'(0) = 0, \\ f''(x) = \operatorname{ch} x, & f''(0) = 1, \\ \cdots & \cdots \\ f^{(2k)}(x) = \operatorname{ch} x \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k)}(0) = 1, \\ f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{sh} x \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k+1)}(0) = 0, \end{array}$$

siis valemi 1.19.2 abil saame:

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x). \qquad \diamondsuit \tag{1.19.6}$$

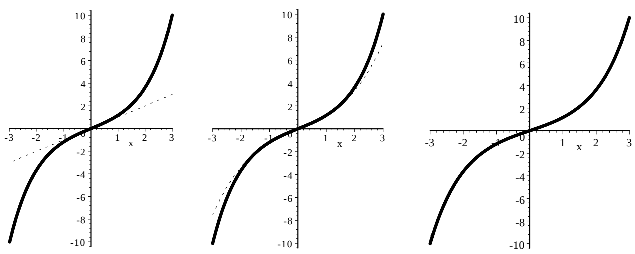
Näide 5. Leiame funktsiooni $y = \operatorname{sh} x$ jaoks $(2\,n+2)$-järku Maclaurini valemi.

$$\begin{array}{rr} f(x) = \operatorname{sh} x, & f(0) = 0, \\ f'(x) = \operatorname{ch} x, & f'(0) = 1, \\ f''(x) = \operatorname{sh} x, & f''(0) = 0, \\ \cdots & \cdots \\ f^{(2k)}(x) = \operatorname{sh} x \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k)}(0) = 0, \\ f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{ch} x \quad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\}), & f^{(2k+1)}(0) = 1. \end{array}$$

Valemi 1.19.2 abil saame, et

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x). \qquad \diamondsuit \tag{1.19.7}$$

Skitseerime lõigul $[-3; 3]$ funktsiooni $\operatorname{sh} x$ ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_{2n+2}(x)$ $(n = 0; 1; 2)$ graafikud, kusjuures $\operatorname{sh} x$ graafik on esitatud jämeda joonega ja $M_{2n+2}(x) = M_{2n+1}(x)$



n=0 n=1 n=2

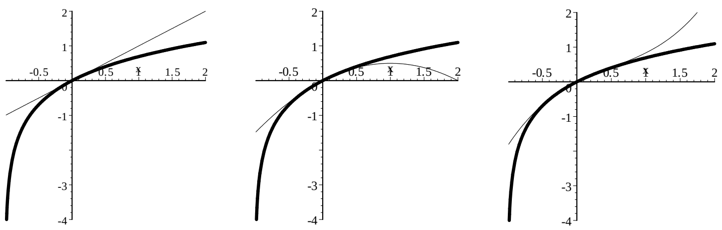
Näide 6. Leiame funktsiooni $y = \ln(1+x)$ jaoks n-järku Maclaurini valemi. Et

$$\begin{array}{rr} f(x) = \ln(1+x), & f(0) = 0, \\ f'(x) = (1+x)^{-1}, & f'(0) = 1 = (-1)^2 \cdot 0!, \\ f''(x) = (-1)\,(1+x)^{-2}, & f''(0) = -1 = (-1)^3 \cdot 1!, \\ \cdots & \cdots \\ f^{(k)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-k+1)\,(1+x)^{-k}, & f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\,(k-1)!, \end{array}$$

siis valemi 1.19.2 abil saame:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n(x). \quad \diamondsuit \tag{1.19.8}$$

Skitseerime funktsiooni $\ln(1+x)$ ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_n(x)$ $(n = 1; 2; 3)$ graafikud lõigul $[-.99; 2]$, kusjuures $\ln(1+x)$ graafik on esitatud jämeda joonega



n=1 n=2 n=3

Näide 7. Leiame funktsiooni $y = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0\})$ jaoks n-järku Maclaurini valemi.

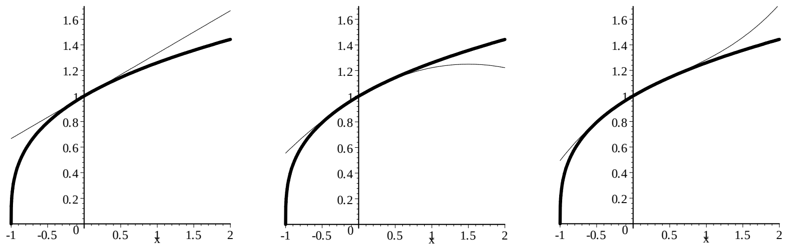
Et

$$\begin{array}{rr} f(x) = (1+x)^\alpha, & f(0) = 1, \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) = \alpha, \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) = \alpha(\alpha-1), \\ \cdots & \cdots \\ f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, & f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), \end{array}$$

siis valemi 1.19.2 abil saame:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_n(x). \quad \diamondsuit \tag{1.19.9}$$

Skitseerime funktsiooni $\sqrt[3]{1+x}$ ja selle funktsiooni Maclaurini polünoomide $M_n(x)$ $(n = 1; 2; 3)$ graafikud lõigul $[-1; 2]$, kusjuures $\sqrt[3]{1+x}$ graafik on esitatud jämeda joonega



n=1 n=2 n=3

Juhul kui $\alpha \in \mathbf{N}$ ja $\alpha \leq n$, siis indeksi k väärtustel, mis rahuldavad seost $k > \alpha$, saame, et

$$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = 0$$

ja

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\alpha} C_\alpha^k x^k = \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k x^k. \quad \diamondsuit$$

Selles punktis saadud graafikute põhjal võib väita, et argumendi x väärtustel, mis on nullile "piisavalt lähedased", võib funktsiooni $f(x)$ ligikaudseid väärtusi leida selle funktsiooni Maclaurini polünoomi $M_n(x)$ abil. Seejuures on ligikaudne väärtus seda täpsem, mida suurem on n.

1.20. Taylori valemi jääkliige

Meid huvitavad punktis 1.19 leitud funktsiooni $y = f(x)$ n-järku Taylori valemi (1.19.1) ja n-järku Maclaurini valemi (1.19.2) jääkliikmete $R_n(x)$ kujud ja vastus küsimusele, millistel argumendi x väärtustel

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

Olgu järgnevalt argumendi x väärtus fikseeritud. Otsime Taylori valemi (1.19.1) jääkliiget $R_n(x)$ kujul

$$R_n(x) = H(x-a)^p,$$

kus H on konstant. Uurime abifunktsiooni

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + H(x-t)^p.$$

Et $F(a) = f(x)$ ja $F(x) = f(x)$, siis punkti a mingis δ-ümbruses $n+1$ korda diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ korral on lõigul otspunktidega a ja x (punkt x

kuulub mainitud δ-ümbrusse) funktsiooni jaoks rakendatav Rolle'i teoreem, st vahemikus (a, x), kui $x > a$, või vahemikus (x, a), kui $x < a$, peab leiduma selline punkt c, et $F'(c) = 0$. Arvestades, et

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k\,(x-t)^{k-1} - Hp(x-t)^{p-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - Hp(x-t)^{p-1} =$$

$$= f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n -$$

$$- f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - Hp(x-t)^{p-1} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - Hp(x-t)^{p-1},$$

jõuame tulemuseni

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n - Hp(x-c)^{p-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}.$$

Kui valida $p = n + 1$, siis saame

$$H = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

ja

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ehk

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.1}$$

Jääkliikme $R_n(x)$ kuju (1.20.1) nimetatakse n-järku Taylori valemi (1.19.1) *jääkliikme $R_n(x)$ Lagrange'i kujuks.* Juhul $a = 0$ saame valemist (1.20.1) n-järku Maclaurini valemi (1.19.2) *jääkliikme $R_n(x)$ Lagrange'i kuju*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.2}$$

Nendime, et n-järku Taylori valemi (1.19.1) jääkliige $R_n(x)$ on esitatav ka *Cauchy kujul* (vt [5], lk 234):

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.3}$$

Juhul $a = 0$ saame valemist (1.20.3) n-järku Maclaurini valemi (1.19.2) *jääkliikme* $R_n(x)$ *Cauchy kuju*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} (1-\theta)^n \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.4}$$

Sõnastame saadud tulemused.

Lause 1. Kui funktsioon $f(x)$ on $n+1$ korda diferentseeruv punkti a δ-ümbruses $(a-\delta, a+\delta)$, siis iga $x \in (a-\delta, a+\delta)$ korral on see funktsioon esitatav n-järku Taylori valemi abil kujul (1.19.1), kusjuures jääkliige $R_n(x)$ on esitatav nii Lagrange'i kujul (1.20.1) kui ka Cauchy kujul (1.20.3).

Lause 2. Kui funktsioon $f(x)$ on $n+1$ korda diferentseeruv punkti 0 δ-ümbruses $(-\delta, \delta)$, siis iga $x \in (-\delta, \delta)$ korral on see funktsioon esitatav n-järku Maclaurini valemi abil kujul (1.19.2), kusjuures jääkliige $R_n(x)$ on esitatav nii Lagrange'i kujul (1.20.2) kui ka Cauchy kujul (1.20.4).

Järeldus 1. Kasutades jääkliiget Lagrange'i kujul, saame esimest järku Taylori valemile kohal a kuju

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2 \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.5}$$

Esimest järku Taylori valemi jääkliige annab vea, mille teeme ligikaudsel arvutamisel valemi (1.14.4) abil funktsiooni muudu asendamisel diferentsiaaliga.

Kõrvutage seost (1.20.5) seostega (1.14.4) ja (1.16.2).

Näide 1. Hindame viga Näites 1.14.3 leitud ligikaudses seoses

$$\sqrt{1.06} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2} \cdot 0.06 = 1.03.$$

Et

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

siis

$$f''(1+\theta(1.06-1)) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+0.06 \cdot \theta)^3}} \quad (0 < \theta < 1)$$

ja jääkliikme absoluutväärtuse

$$\left| \frac{f''(1+0.06 \cdot \theta)}{2!} (0.06)^2 \right| = \frac{(0.06)^2}{8\sqrt{(1+0.06 \cdot \theta)^3}}$$

hinnanguks saame ahela $1 \le 1 + 0.06 \cdot \theta \le 2$ $(0 < \theta < 1)$ abil

$$0.00015 \le \frac{(0.06)^2}{3 \cdot 8} \overset{0<\theta<1}{\le} \frac{(0.06)^2}{8\sqrt{(1+0.06 \cdot \theta)^3}} \overset{0<\theta<1}{\le} \frac{(0.06)^2}{8} \le 0.0005.$$

Jääkliikme negatiivsusest järeldub, et punkti 1.13 näites 3 leitud ligikaudse seose viga kuulub vahemikku $(-0.0005; -0.00015)$. Pakett SWP annab tulemuseks $\sqrt{1.06} \approx 1.0296$. $\diamondsuit$

Näide 2. Näites 1.19.1 leidsime funktsiooni e^x n-järku Maclaurini valemi (1.19.3). Uurime selle valemi jääkliiget $R_n(x)$. Et $(e^x)^{(n+1)} = e^x$, siis valemi (1.20.2) põhjal saame

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \tag{1.20.6}$$

Uurime fikseeritud x korral piirväärtust

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = \left[\begin{array}{c} \text{Kasutame Stirlingi valemit} \\ n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \ (n \to \infty) \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\theta x}}{\sqrt{2\pi\,(n+1)}\,(n+1)^{n+1}\, e^{-n-1}} x^{n+1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e^{\theta x}}{\sqrt{2\pi\,(n+1)}} \cdot \left(\frac{ex}{n+1} \right)^{n+1} \right) = \left[\begin{array}{c} \text{fikseeritud } x \text{ korral lähenevad} \\ \text{mõlemad tegurid nullile} \end{array} \right] = 0.$$

Seega piirprotsessis $n \to +\infty$ läheneb valemi (1.19.3) jääkliige $R_n(x)$ nullile iga fikseeritud x korral. $\diamondsuit$

Leiame seoste (1.19.3) ja (1.20.6) abil arvu e ligikaudse väärtuse täpsusega 10^{-3}. Uurime, millisest arvu n väärtusest alates

$$|R_n(1)| \le 10^{-3},$$

st

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} \le 10^{-3}.$$

Kuna

$$0 < \theta < 1 \Rightarrow e^{\theta} < 3,$$

siis valime naturaalarvu n tingimuse

$$3 \cdot 10^3 \le (n+1)!$$

põhjal. Et $3 \cdot 10^3 \le (6+1)! = 5040$, siis arvu e ligikaudseks väärtuseks täpsusega 10^{-3} on

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} =$$

$$= \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} = \frac{1957}{720} \approx 2.718.$$

Näide 3. Näites 1.19.2 leidsime funktsiooni $\cos x$ korral $(2n+1)$-järku Maclaurini valemi (1.19.4). Et $(\cos x)^{(2n+2)} = (-1)^{n+1}\cos x$, siis valemi (1.20.2) põhjal leiame, et

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (0 < \theta < 1).$$

Fikseerides x, saame, et

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{\sqrt{2\pi\,(2n+2)}\,(2n+2)^{2n+2}\,e^{-2n-2}}x^{2n+2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{\sqrt{2\pi\,(2n+2)}} \cdot \left(\frac{ex}{2n+2}\right)^{2n+2}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{fikseeritud } x \text{ korral lähenevad}\\ \text{mõlemad tegurid nullile}\end{array}\right] = 0.$$

Et funktsiooni $y = \cos x$ korral $f^{(2n+1)}(0) = 0$, siis selle funktsiooni $2n$-järku Maclaurini polünoom ühtib selle funktsiooni $(2n+1)$-järku Maclaurini polünoomiga ja funktsiooni $\cos x$ korral $2n$-järku ja $(2n+1)$-järku Maclaurini valemite paremad pooled erinevad teineteisest vaid jääkliikme kuju poolest, s.o

$$R_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\sin(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

ja

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (0 < \theta < 1).$$

Juhul kui on vaja hinnata jääkliiget, eelistatakse $\cos x$ korral $(2n+1)$-järku Maclaurini valemit. Miks? $\diamondsuit$

Näide 4. Näites 1.19.3 leidsime funktsiooni $\sin x$ korral $(2n+2)$-järku Maclaurini valemi (1.19.5). Et $(\sin x)^{(2n+3)} = (-1)^{n+1}\cos x$, siis valemi (1.20.2) abil saame, et

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} \quad (0 < \theta < 1),$$

kusjuures fikseeritud x korral

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n+2}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} = 0.$$

Nendime, et funktsiooni $\sin x$ $(2n+1)$-järku Maclaurini polünoom ühtib selle funktsiooni $(2n+2)$-järku Maclaurini polünoomiga, st funktsiooni $\sin x$ korral $(2n+1)$-järku ja $(2n+2)$-järku Maclaurini valemite paremad pooled erinevad teineteisest vaid jääkliikme kuju poolest, kusjuures

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\sin(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (0 < \theta < 1). \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Näites 1.19.4 leidsime funktsiooni $\mathrm{ch}\, x$ korral $(2n+1)$-järku Maclaurini valemi (1.19.6). Et $(\mathrm{ch}\, x)^{2n+2} = \mathrm{ch}\, x$, siis valemi (1.20.2) abil saame, et

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\mathrm{ch}\ (\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \ \ (0 < \theta < 1),$$

kusjuures fikseeritud x korral

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}\ (\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = 0.$$

Nendime, et $\mathrm{ch}\, x$ $(2n+1)$-järku Maclaurini polünoom ühtib selle funktsiooni $2n$-järku Maclaurini polünoomiga, st funktsiooni $\mathrm{ch}\, x$ korral $2n$-järku ja $(2n+1)$-järku Maclaurini valemite paremad pooled erinevad teineteisest vaid jääkliikme kuju poolest, kusjuures

$$R_{2n}(x) = \frac{\mathrm{sh}\ (\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (0 < \theta < 1). \qquad \diamondsuit$$

Näide 6. Näites 1.19.5 leidsime funktsiooni $\mathrm{sh}\, x$ korral $(2n+1)$-järku Maclaurini valemi (1.19.7). Et $(\mathrm{sh}\, x)^{2n+3} = \mathrm{ch}\, x$, siis valemi (1.20.2) abil saame, et

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\mathrm{ch}\ (\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} \ \ (0 < \theta < 1),$$

kusjuures fikseeritud x korral

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n+2}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}\ (\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} = 0.$$

Nendime, et $\mathrm{sh}\, x$ $(2n+1)$-järku Maclaurini polünoom ühtib selle funktsiooni $(2n+2)$-järku Maclaurini polünoomiga, st funktsiooni $\mathrm{sh}\, x$ korral $(2n+1)$-järku ja $(2n+2)$-järku Maclaurini valemite paremad pooled erinevad teineteisest vaid jääkliikme kuju poolest, kusjuures

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (0 < \theta < 1). \qquad \diamondsuit$$

Näide 7. Näites 1.19.6 leidsime funktsiooni $\ln(1+x)$ jaoks n-järku Maclaurini valemi (1.19.8). Et

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

siis valemi (1.20.2) põhjal

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1)$$

või valemi (1.20.4) põhjal

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} x^{n+1}(1-\theta)^n =$$

$$= \frac{(-1)^n (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1} \quad (0<\theta<1),$$

kusjuures (vt [10] , lk 152–153)

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) \overset{-1<x\le 1}{=} 0. \qquad \diamondsuit$$

Näide 8. Näites 1.19.7 leidsime funktsiooni $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{\mathbf{0}\})$ jaoks n-järku Maclaurini valemi (1.19.9). Et

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\,(1+x)^{\alpha-n-1},$$

siis valemi (1.20.2) põhjal

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

või valemi (1.20.4) põhjal

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\, x^{n+1}(1-\theta)^n \quad (0<\theta<1),$$

kusjuures (vt [10], lk 154)

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) \overset{|x|<1}{=} 0.$$

Kui $\alpha \in \mathbf{N}$ ja $\alpha \le n$, siis $f^{(n+1)}(x) = 0$ ja $R_n(x) = 0$. $\diamondsuit$

1.21. Joone puutuja ja normaal

Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv punktis a ja $|\Delta x| < \delta$. Kui (x, y) on funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punkte $(a, f(a))$ ja $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ läbiva lõikaja suvaline punkt, siis lõikaja võrrand on

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{a+\Delta x-a}$$

ehk

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a), \tag{1.21.1}$$

kus $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$. Puutuja funktsiooni $y = f(x)$ graafikule punktis $(a, f(a))$ on lõikaja piirseis piirprotsessis $\Delta x \to 0$. Minnes seoses (1.21.1) piirile $\Delta x \to 0$, saame *puutuja võrrandiks*

$$y = f(a) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - a)$$

ehk

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Et juhul

$$0 < |f'(a)| < +\infty \tag{1.21.2}$$

on joone puutuja tõusunurga tangensi ja normaali tõusunurga tangensi korrutis -1, siis normaali tõusunurga tangensiks on $-1/f'(a)$ ja funktsiooni $y = f(x)$ graafikule punktis $(a, f(a))$ tõmmatud *normaali võrrandiks* on

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Sõnastame saadud tulemused.

Lause 1. Kui eksisteerib $f'(a)$, siis

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.21.3}$$

on funktsiooni $y = f(x)$ graafikule punktis $(a, f(a))$ tõmmatud puutuja võrrand ja lisatingimusel (1.21.2) on

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \tag{1.21.4}$$

normaali võrrand.

Uurige, millised on joone puutuja ja normaali võrrandid, kui: 1) $f'(a) = 0$; 2) $f'(a) = \infty$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = 2^x$ graafikule puutuja ja normaali punktis, mille abstsiss on üks.

Et $f'(x) = 2^x \ln 2$, siis $f'(1) = 2\ln 2$ ja valemite (1.21.3) ning (1.21.4) abil leiame funktsiooni $y = 2^x$ graafikule punktis $(1; 2)$ tõmmatud puutuja võrrandi

$$y = 2 + 2\,(\ln 2)\,(x - 1)$$

ja normaali võrrandi

$$y = 2 - \frac{1}{2\ln 2}(x - 1). \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Näitame, et ellipsile

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.21.5}$$

selle ellipsi punktis (x_0, y_0) tõmmatud puutuja võrrandiks on

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{1.21.6}$$

Et (x_0, y_0) on ellipsi punkt, siis rahuldab see punkt ellipsi võrrandit (1.21.5), st kehtib seos

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

millest järeldub, et

$$b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2. \tag{1.21.7}$$

Diferentseerides seose (1.21.5) mõlemaid pooli muutuja x järgi, leiame, et

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Järelikult,

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

ja
$$f'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$
Valemi (1.21.3) abil leiame puutuja võrrandi
$$y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$
ehk
$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2,$$
millest saame seost (1.21.7) kasutades võrrandi
$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2,$$
mis on samaväärne võrrandiga (1.21.6). $\diamondsuit$

Näide 3. Näitame, et joone $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ puutuja lõikab koordinaattelgedel lõigud, mille pikkuste summa on a.

Joon paikneb xy-tasandi esimeses veerandis. Olgu (x, y) selle joone punkt ja (ξ, η) punktis $(x; y)$ joonele tõmmatud puutuja punkt. Siis võrrand (1.21.3) on esitatav kujul
$$\eta = y + y'(\xi - x).$$
Et
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$
siis joone $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ puutuja võrrand on
$$\eta = y - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(\xi - x).$$
Leiame puutuja lõikepunktid koordinaattelgedega. Kui puutuja lõikab $y-$telge, siis $\xi = 0$ ja
$$\eta = y - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(0 - x) = y + \sqrt{xy} \geq 0.$$
Kui puutuja lõikab $x-$telge, siis $\eta = 0$ ja
$$0 = y - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(\xi - x) \Rightarrow \xi = x + \sqrt{xy} \geq 0.$$
Seega on lõikude pikkuste summaks
$$(y + \sqrt{xy}) + (x + \sqrt{xy}) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Näitame, et hüperboolid
$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ja} \quad xy = b$$

lõikuvad täisnurga all.

Avaldame mõlema ilmutamata funktsiooni tuletise (puutuja tõusu):

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

ja

$$y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}.$$

Joonte lõikepunktis leiame, et

$$\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) = -1,$$

st puutuja tõusude korrutis on -1. Seega joonte lõikepunktides on nende puutujad risti, st jooned lõikuvad täisnurga all. $\diamondsuit$

1.22. Funktsiooni lokaalne ekstreemum

Fermat' teoreem (vt Lause 1.15.4) väidab, et kui funktsioonil $f(x)$ on punktis a lokaalne ekstreemum ja see funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv selles punktis, siis funktsiooni tuletis punktis a on null, st $f'(a) = 0$. Seega Fermat' teoreem annab diferentseeruva funktsiooni lokaalse ekstreemumi tarviliku tingimuse, mis ei osutu piisavaks.

Definitsioon 1. Punkti a nimetatakse diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ *statsionaarseks punktiks,* kui $f'(a) = 0$.

Definitsioon 2. Punkti a nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *kriitiliseks punktiks,* kui a on statsionaarne punkt või punktis a ei ole sel funktsioonil tuletist.

Järgnevalt leiame Taylori valemi rakendusena mõningad lokaalse ekstreemumi piisavad tingimused. Kasutame esiteks seost (1.20.5) lokaalse ekstreemumi lihtsamate piisavate tingimuste formuleerimisel. Kehtib järgmine väide.

Lause 1. Kui punkt a on funktsiooni $f(x)$ statsionaarne punkt ja $f''(x)$ on pidev punktis a ning $f''(a) \neq 0$, siis funktsioonil $f(x)$ on punktis a range lokaalne ekstreemum, kusjuures $f''(a) < 0$ korral on punktis a range lokaalne maksimum ja $f''(a) > 0$ korral on punktis a range lokaalne miinimum.

Lühidalt on Lause 1 esitatav kujul

$$f'(a) = 0 \wedge f''(x) \in C(a) \wedge \begin{cases} f''(a) \neq 0 \Rightarrow \text{punktis } a \text{ on range lokaalne ekstreemum;} \\ f''(a) < 0 \Rightarrow \text{punktis } a \text{ on range lokaalne maksimum;} \\ f''(a) > 0 \Rightarrow \text{punktis } a \text{ on range lokaalne miinimum.} \end{cases}$$

Tõestus. Kui a on statsionaarne punkt, siis seosele (1.20.5) saame kuju

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a + \theta(x - a))}{2!}(x - a)^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

Järelikult, kui punkti a mingis ümbruses jääkliige

$$\frac{f''(a + \theta(x - a))}{2!}(x - a)^2$$

säilitab märki, siis kohal a on lokaalne ekstreemum, kusjuures selles ümbruses jääkliikme mittepositiivsuse korral on punktis a lokaalne maksimum ja mittenegatiivsuse korral lokaalne miinimum. Jääkliikme tegur $(x-a)^2/2!$ ei muuda märki. Et $f''(a) \neq 0$ ja $f''(x) \in C(a)$, siis leidub punkti a selline ümbrus, et $f''(a+\theta(x-a))$ ei muuda selles ümruses märki. Seega, mingi punkti a ümbruse korral jääkliige

$$\frac{f''(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2$$

säilitab märki, st punktis a on range lokaalne ekstreemum. Kui $f''(a) < 0$, siis selles ümbruses on jääkliige mittepositiivne ja tegemist on range lokaalse maksimumiga. Kui $f''(a) > 0$, siis selles ümbruses on jääkliige mittenegatiivne ja tegemist on range lokaalse miinimumiga. $\square$

Näide 1. Vaatleme funktsiooni x^2 punktis $x = 0$.

Et $f'(x) = 2x$ ja $f''(x) = 2$, siis $f'(0) = 0$ ja $f''(x) \in C(0)$ ning $f''(0) > 0$. Lause 1 põhjal võime väita, et funktsioonil $y = x^2$ on punktis $x = 0$ range lokaalne miinimum. $\diamondsuit$

Lause 1 ei ole rakendatav funktsiooni x^3 jaoks punktis $x = 0$, sest kuigi $f'(0) = 0$ ja $f''(x) \in C(0)$, on $f''(0) = 0$. Vaatleme järgnevalt Lause 1 üldistust.

Lause 2. Kui funktsiooni $f(x)$ korral $f'(a) = \ldots = f^{(m)}(a) = 0$ ja $f^{(m+1)}(a) \neq 0$ ning $f^{(m+1)}(x) \in C(a)$, siis

1) juhul kui m on paaritu arv, on funktsioonil $f(x)$ punktis a range lokaalne ekstreemum, kusjuures $f^{(m+1)}(a) < 0$ korral on punktis a range lokaalne maksimum ja $f^{(m+1)}(a) > 0$ korral range lokaalne miinimum,

2) juhul kui m on paarisarv, ei ole funktsioonil $f(x)$ punktis a lokaalset ekstreemumit.

Tõestus. Kirjutame, arvestades eeldusi $f'(a) = \ldots = f^{(m)}(a) = 0$, punktis a välja funktsiooni $f(x)$ m-järku Taylori valemi

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(m+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Vastuse küsimusele, kas punktis a on funktsioonil $f(x)$ lokaalne ekstreemum või ei, annab jääkliikme

$$\frac{f^{(m+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{m+1}$$

uurimine.

1) Juhul, kui arv m on paaritu, siis jääkliikme teine tegur $(x-a)^{m+1}$ ei muuda märki ja Lause eeldustel leidub selline punkti a ümbrus, milles ka esimene tegur säilitab märki. Seega on punktis a range lokaalne ekstreemum. Kui $f^{(m+1)}(a) < 0$, siis selles ümbruses on parandusliige mittepositiivne, st kohal a on range lokaalne maksimum, ja kui $f^{(m+1)}(a) > 0$, siis selles ümbruses on parandusliige mittenegatiivne, st kohal a on range lokaalne miinimum.

2) Juhul, kui m on paarisarv, siis jääkliikme teine tegur $(x-a)^{m+1}$ muudab märki punkti x läbiminekul punktist a ja Lause eeldustel leidub selline punkti a ümbrus, milles

esimene tegur säilitab märki. Seega muudab parandusliige märki punkti x läbiminekul punktist a. Järelikult ei ole punktis a lokaalset ekstreemumit. □

Näide 2. Uurime funktsiooni x^3 punktis $x = 0$.

Et $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ ja $f'''(x) = 6$, siis $f'(0) = f''(0) = 0$ ja $f'''(x) \in C(0)$ ning $f'''(0) = 6 \neq 0$. Nendime, et antud näite korral on rahuldatud Lause 2 teise osa tingimused, kusjuures $a = 0$ ja $m = 2$, st m on paarisarv. Järelikult ei ole funktsioonil x^3 lokaalset ekstreemumit punktis 0. ♢

1.23. Joone kumerus ja nõgusus. Käänupunktid

Meid huvitab järgnevalt funktsiooni graafiku asend puutuja suhtes puutepunkti vahetus ümbruses.

Definitsioon 1. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ graafik on *kumer* punktis a (täpsemini punktis $(a, f(a))$), kui leidub punkti a selline δ-ümbrus, et funktsiooni $f(x)$ graafik on argumendi x väärtustel ümbrusest $(a-\delta, a+\delta)$ allpool (täpsemini, mitte ülalpool) puutujat, mis on tõmmatud punktis $(a,\ f(a))$ funktsiooni graafikule.

Definitsioon 2. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ graafik on *kumer* hulgal X, kui selle funktsiooni graafik on kumer hulga X igas punktis.

Definitsioon 3. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ graafik on *nõgus* punktis a (täpsemini punktis $(a, f(a))$), kui leidub punkti a selline δ-ümbrus, et funktsiooni $f(x)$ graafik on argumendi x väärtustel ümbrusest $(a-\delta, a+\delta)$ ülalpool (täpsemini, mitte allpool) puutujat, mis on tõmmatud punktis $(a,\ f(a))$ funktsiooni graafikule.

Definitsioon 4. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ graafik on *nõgus* hulgal X, kui selle funktsiooni graafik on nõgus hulga X igas punktis.

Definitsioon 5. Öeldakse, et punkt a (täpsemini punkt $(a,\ f(a))$) on funktsiooni $f(x)$ graafiku *käänupunkt*, kui leidub selline $\delta > 0$, et funktsiooni $f(x)$ graafik on kumer hulgal $(a-\delta, a)$ ja nõgus hulgal $(a, a+\delta)$ või nõgus hulgal $(a-\delta, a)$ ja kumer hulgal $(a, a+\delta)$.

Märkus 1. Joone kumeruse ja nõgususe defineerimiseks saab puutuja asemel kasutada ka kõõlu. Näiteks, joont nimetatakse kumeraks, kui selle joone suvalise kaare ükski punkt ei paikne kaare otspunkte ühendavast kõõlust allpool.

Lause 1. Kui $f''(x)$ on pidev punktis a, siis

$$\begin{array}{l} f''(a) < 0 \ \Rightarrow\ \textit{funktsiooni}\ \ f(x)\ \textit{graafik on kumer punktis}\ a, \\ f''(a) > 0 \ \Rightarrow\ \textit{funktsiooni}\ \ f(x)\ \textit{graafik on nõgus punktis}\ a. \end{array}$$

Tõestus. Kirjutame punktis a funktsiooni $y = f(x)$ jaoks välja esimest järku Taylori valemi

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

Võrreldes seda seost funktsiooni $y = f(x)$ graafikule punktis $(a, f(a))$ tõmmatud puutuja võrrandiga

$$y = f(a) + f'(a)(x-a), \tag{1.23.1}$$

leiame, et selle Taylori valemi jääkliige

$$\frac{f''(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2 \quad (0<\theta<1)$$

näitab, kas funktsiooni graafik on punktis x ülal- või allpool punktis $(a, f(a))$ funktsiooni graafikule tõmmatud puutujat. Kui $f''(a) < 0$ ja $f''(x) \in C(a)$, siis leidub selline punkti a δ-ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, et

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{f''(a+\theta(x-a))}{2!}(x-a)^2 \leq 0,$$

st funktsiooni $f(x)$ graafik on vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ allpool punktis $(a, f(a))$ funktsiooni graafikule tõmmatud puutujat, st funktsiooni $f(x)$ graafik on kumer punktis a. Analoogiliselt näidatakse, et tingimusest $f''(a) > 0$ järeldub funktsiooni $f(x)$ graafiku nõgusus punktis a. $\square$

Lause 2. Kui $f(x) \in C[a,b]$ ja $\exists\, f''(x)\ \ (x \in\ (a,b))$, siis funktsiooni $f(x)$ graafiku kumerusest (nõgususest) vahemikus (a,b) järeldub, et

$$x \in (a,b) \Rightarrow f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0).$$

Tõestust vt [10], lk 160–161. $\square$

Järeldus *1* (käänupunkti tarvilik tingimus). Kui $f''(x) \in C(a-\delta, a+\delta)$ ja punkt a on funktsiooni $f(x)$ käänupunkt, siis $f''(a) = 0$.

Tõestus. Et punkt a on käänupunkt, siis leiduvad sellised vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ sisalduvad punkti a vasak- ja parempoolsed ümbrused, millest ühes on funktsiooni $f(x)$ graafik kumer ja teises nõgus, kusjuures Lause 2 põhjal on kumeruse piirkonnas $f''(x) \leq 0$ ja nõgususe piirkonnas $f''(x) \geq 0$ ning funktsiooni $f''(x)$ pidevusest punktis a järeldub, et $f''(a) = 0$. $\square$

Lause 3. Kui $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$ ja $f'''(x)$ on pidev punktis a, siis punkt a on funktsiooni $f(x)$ graafiku käänupunkt.

Tõestus. Lause tingimustel on funktsiooni $f(x)$ teist järku Taylori valemil punktis a kuju

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f'''(a+\theta(x-a))}{3!}(x-a)^3 \quad (0<\theta<1).$$

Et $f'''(a) \neq 0$ ja $f'''(x) \in C\,(a)$, siis punktile a piisavalt lähedaste argumendi x väärtuste korral suurus $f'''(a+\theta(x-a))$ säilitab märki. Järelikult, argumendi x läbiminekul punktist a jääkliige

$$\frac{f'''(a+\theta(x-a))}{3!}(x-a)^3 \quad (0<\theta<1)$$

muudab märki, sest esimene tegur $f'''(a+\theta(x-a))/3!$ ei muuda märki, kuid teine tegur $(x-a)^3$ muudab. Seega on ühel pool punkti a jääkliige positiivne ja teisel pool negatiivne, st ühel pool punkti a on punktis a konstrueeritud puutuja allpool funktsiooni graafikut ja teisel pool punkti a on puutuja ülalpool funktsiooni graafikut ning punkt a on käänupunkt. $\square$

Näide 1. Leiame funktsiooni x^3 graafiku käänupunktid ja kumerus- ning nõgususpiirkonnad.

Leiame, et $f''(x) = 6x$ ja $f'''(x) = 6$. Kuna $f''(x) \in C(\mathbf{R})$, siis on rakendatav Järeldus 1, st funktsiooni $f(x)$ käänupunktides on $f''(x) = 0$. Saame, et $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Kasutame Lauset 3 kontrollimaks, kas punkt $x = 0$ on funktsiooni x^3 graafiku käänupunkt või mitte. Tingimustest $f'''(x) = 6 \neq 0$ ja $f'''(x) \in C(0)$ järeldame, et punkt $x = 0$ on funktsiooni x^3 graafiku käänupunkt. Kasutades Lauset 1, saame

$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{ funktsiooni } x^3 \text{ graafik on kumer hulgal } (-\infty, 0)$$

ja

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{ funktsiooni } x^3 \text{ graafik on nõgus hulgal } (0, +\infty). \quad \diamondsuit$$

Lause 4. Kui $f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(m)}(a) = 0$ ja $f^{(m+1)}(a) \neq 0$ ja $f^{(m+1)}(x)$ on pidev punktis a, siis

1) paarisarvulise m korral on funktsiooni $f(x)$ graafikul punktis a käänupunkt,

2) paarituarvulise m korral ei ole funktsiooni $f(x)$ graafikul punktis a käänupunkti.

Tõestus. Arvestades eeldusi, kirjutame funktsiooni $f(x)$ jaoks punktis a välja m-järku Taylori valemi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f^{(m+1)}(a + \theta(x-a))}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Funktsiooni $y = f(x)$ graafikul on punktis a käänupunkt parajasti siis, kui punkti x läbiminekul punktist a jääkliige

$$\frac{f^{(m+1)}(a + \theta(x-a))}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

muudab märki. Kuna $f^{(m+1)}(a) \neq 0$ *ja* $f^{(m+1)}(x) \in C(a)$, siis leidub selline punkti a ümbrus, milles jääkliikme esimene tegur $f^{(m+1)}(a+\theta(x-a))/\,(m+1)!$ ei muuda märki. Kas jääkliikme teine tegur $(x-a)^{m+1}$ muudab märki ja koos sellega kogu jääkliige suuruse x läbiminekul punktist a, sõltub sellest, kas m on paaris- või paaritu arv. $\square$

Näide 2. Leiame funktsiooni $(x-1)^{88}$ graafiku käänupunktid ja kumerus- ning nõgususpiirkonnad.

Leiame, et

$$f^{(k)}(x) \in C(\mathbf{R}) \quad (k = 0;\, 1;\, 2;\, \ldots;\, 88),$$

kusjuures

$$f''(x) = 88 \cdot 87 \cdot (x-1)^{86}, \ldots,\ f^{(87)}(x) = 88 \cdot 87 \cdots 2(x-1),\ \ f^{(88)}(x) = 88!$$

Kuna $f''(x) = 0 \Rightarrow a = 1$, siis tuleb kontrollida, kas $a = 1$ on käänupunkt. Kasutame Lauset 4. Et

$$f''(1) = \ldots = f^{(87)}(1) = 0,\ \ f^{(88)}(1) = 88! \neq 0,\ \ f^{(88)}(x) \in C(1),$$

siis Lausest 4 järeldub, et punkt $a = 1$ ei ole käänupunkt. Funktsiooni $(x-1)^{88}$ graafik on Lause 1 põhjal nõgus hulgal $\mathbf{R}\backslash\{1\}$. Kontrollige, et selle funktsiooni graafik on nõgus punktis 1. Kasutage selleks Definitsiooni 3. $\diamondsuit$

1.24. Funktsiooni uurimine

Käsitleme funktsiooni graafiku skitseerimist selle käitumist iseloomustavate andmete põhjal. Selleks uuritava funktsiooni korral:
1) leiame määramispiirkonna;
2) uurime graafiku sümmeetriat;
3) uurime perioodilisust;
4) leiame katkevuspunktid ja pidevuspiirkonnad;
5) leiame nullkohad ja positiivsus- ning negatiivsuspiirkonnad;
6) leiame lokaalsed ekstreemumid ja range monotoonsuse piirkonnad;
7) leiame graafiku käänupunktid ja kumerus- ning nõgususpiirkonnad;
8) leiame graafiku püstasümptoodid;
9) leiame graafiku kaldasümptoodid;
10) skitseerime graafiku.

Näide 1. Uurime funktsiooni $\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right)$ käitumist ja skitseerime graafiku.

1) Funktsioon on määratud kogu reaalteljel, välja arvatud punktid $x=-1$ ja $x=1$. Seega $X=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Et $f(-x)=\left(1+(-x)^2\right)/\left(1-(-x)^2\right)=\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right)=f(x)$, siis $f(x)$ on paarisfunktsioon, st funktsiooni graafik on sümmeetriline $y-$telje suhtes ja piisab, kui uurida funktsiooni käitumist vaid $x\geq 0$ korral.

3) Uuritav funktsioon ei ole perioodiline.

4) Piirkonnas $[0;+\infty)$ on funktsioonil $f(x)$ vaid üks katkevuspunkt, $x=1$. Hulgal $[0;1)\cup(1;+\infty)$ on funktsioon pidev.

5) Võrrandil $\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right)=0$ puuduvad reaalsed lahendid. Et $f(0.5)=5/3>0$ ja $f(1.5)=-13/5>0$, siis funktsiooni pidevuse tõttu piirkondades $[0;1)$ ja $(1;+\infty)$ saame tulemuseks

piirkond	$[0;1)$	$(1;+\infty)$
märk	$+$	$-$

6) Et $f'(x)=4x/\left(x^2-1\right)^2$, siis $4x/\left(x^2-1\right)^2=0 \Rightarrow x_1=0$ on statsionaarne punkt ja

$f''(x)=-4\left(3x^2+1\right)/\left(x^2-1\right)^3 \Rightarrow f''(0)=4>0$ ning kohal $x_1=0$ on funktsioonil lokaalne miinimum, kusjuures $f(0)=1$. Seega on funktsioon rangelt kasvav vahemikus $(0;1)$. Et funktsiooni tuletis ei muuda märki vahemikus $(1;+\infty)$ ja $f'(2)>0$, siis on funktsioon rangelt kasvav ka vahemikus $(1;+\infty)$.

7) Võrrandil $-4\left(3x^2+1\right)/\left(x^2-1\right)^3=0$ puuduvad reaalsed lahendid. Käänupunkti definitsiooni põhjal võib käänupunktiks olla ka määramispiirkonna rajapunkt. Et

$$f''(0.5)=-4\left(3\,(0.5)^2+1\right)/\left((0.5)^2-1\right)^3>0$$

ja

$$f''(1.5) = -4\left(3\,(1.5)^2 + 1\right) / \left((1.5)^2 - 1\right)^3 < 0,$$

siis piirkonnas $[0;1)$ on graafik nõgus ja piirkonnas $(1;+\infty)$ kumer, st katkevuspunkt $x=1$ on käänupunkt, täpsemini käänukoht, sest $\nexists f(1)$, st $1 \notin X$. Saame

piirkond	$[0;1)$	$(1;+\infty)$
graafik	nõgus	kumer

8) Püstasümptootide leidmiseks tuleb uurida funktsiooni ühepoolseid piirväärtusi määramispiirkonna lõplikes rajapunktides. Et

$$\lim_{x\to 1-}\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+}\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right) = -\infty,$$

siis sirge võrrandiga $x=1$ on funktsiooni graafiku püstasümptoot.

9) Kaldasümptoodi probleemi lahendamiseks piirkonnas $[0;+\infty)$ tuleb esiteks leida piirväärtus

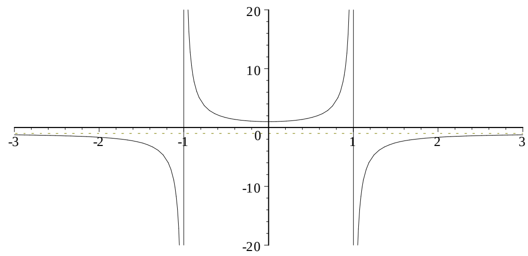
$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)x} = 0$$

ja siis

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 0x\right) = -1.$$

Seega on piirkonnas $[0;+\infty)$ kaldasümptoot olemas ja selle võrrandiks on $y=-1$.

10) Skitseerime leitud informatsiooni põhjal funktsiooni graafiku ja selle asümptoodid lõigul $[0;3]$. Jätkame graafiku skitseerimist poollõigul $[-3;0)$, arvestades graafiku sümmeetriat $y-$telje suhtes



$\diamondsuit$

1.25. Iteratsioonimeetod

Uurime võrrandi

$$f(x) = 0 \tag{1.24.1}$$

ligikaudset lahendamist. Esitame võrrandi (1.24.1) kujul

$$x = g\,(x)\,. \tag{1.24.2}$$

Selleks on palju võimalusi, kusjuures üks lihtsamaid on valik $g(x) = x + cf(x)$, kus $c \neq 0$ on mingi reaalne konstant. Olgu arv x_0 võrrandi (1.24.1), seega ka võrrandi (1.24.2), täpse lahendi x^* mingi alglähend. Selle alglähendi (nn lähislahendi) x_0 võime näiteks saada skitseerides funktsiooni $f(x)$ graafiku. Olgu

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (n \in N \cup \{0\}). \tag{1.24.3}$$

Algoritmiga (1.24.3) oleme määranud võrrandi (1.24.1) lahendi x^* lähendite jada $\{x_n\}$. Teatud eeldustel funktsiooni $g(x)$ kohta jada $\{x_n\}$ koondub täpseks lahendiks x^*, st

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*.$$

Kui x^* on võrrandi (1.24.1) täpne lahend, siis

$$x^* = g(x^*). \tag{1.24.4}$$

Seostest (1.24.3) ja (1.24.4) järeldub, et iga $n \in N \cup \{0\}$ korral

$$x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*)$$

ehk

$$x_{n+1} - x^* = g'(\xi_n)(x_n - x^*), \tag{1.24.5}$$

kus $\xi_n = x^* + \theta_n (x_n - x^*)$ $(0 < \theta_n < 1)$. Kui $\xi_n \in [a, b]$ $\forall n \in N \cup \{0\}$ korral ja

$$\max_{x \in [a,b]} |g'(x)| \leq q, \tag{1.24.6}$$

siis seoste (1.24.5) ja (1.24.6) põhjal saame

$$|x_{n+1} - x^*| \leq q |x_n - x^*|.$$

Seega

$$|x_n - x^*| \leq q |x_{n-1} - x^*| \leq q^2 |x_n - x^*| \leq \ldots \leq q^n |x_0 - x^*|,$$

st kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|. \tag{1.24.7}$$

Kui $q < 1$, siis hinnangust (1.24.7) järeldub, et

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*.$$

Algoritmil (1.24.3) põhinevat võrrandi (1.24.2) lahendamise meetodit nimetatakse *harilikuks iteratsioonimeetodiks.* Sõnastame saadud tulemuse.

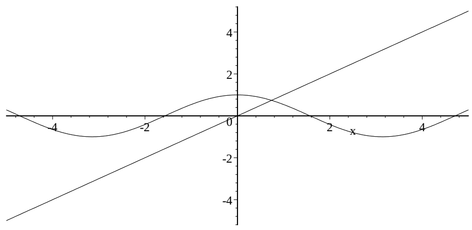
Lause 1. Kui võrrandi (1.24.2) lahendamiseks kasutada algoritmiga (1.24.3) määratud harilikku iteratsioonimeetodit, kusjuures x_0 on selle võrrandi otsitava täpse lahendi x^* jaoks alglähend ja leidub selline arv $q < 1$, et $|g'(x)| < q$ igal lõigul otspunktidega x^* ja x_n $(n \in N \cup \{0\})$, siis alglähendiga x_0 ja algoritmiga (1.24.3) määratud jada $\{x_n\}$ koondub otsitavaks lahendiks x^*. Seejuures koondub iteratsioonimeetod geomeetrilise progressiooni, mille teguriks on q, kiirusega ja kehtib hinnang (1.24.7).

Näide 1. Lahendame võrrandi

$$x - \cos x = 0 \tag{1.24.8}$$

täpsusega 10^{-5}, kasutades harilikku iteratsioonimeetodit.

Alglähendi x_0 saamiseks võiks skitseerida funktsiooni $y = x - \cos x$ graafiku ja leida graafikult ligikaudu selle lõikepunktid $x-$teljega. Sama tulemuseni jõuame funktsioonide $y = x$ ja $y = \cos x$ graafikute ühiste punktide uurimisel:



Jooniselt on näha, et võrrandil (1.24.8) on vaid üks lahend ja alglähendiks sobib $x_0 = 0.8$. Võrrand (1.24.8) on esitatav kujul

$$x = \cos x,$$

st $g(x) = \cos x$ ja $g'(x) = -\sin x$. Veenduge, et antud ülesande korral leidub selline lõik $[a, b]$, et x^*, $x_n \in [a, b]$ $(n \in N \cup \{0\})$ ja tingimus (1.24.6) on rahuldatud, st

$$\max_{x\in[a,b]} |g'(x)| = \max_{x\in[a,b]} |-\sin x| \le q < 1.$$

Lause 1 põhjal saame rakendada algoritmi (1.24.3). Leiame

$$\begin{aligned}
&x_1 = \cos 0.8 = 0.696\,71, && x_2 = \cos 0.696\,71 = 0.766\,96,\\
&x_3 = \cos 0.766\,96 = 0.720\,02, && x_4 = \cos 0.720\,02 = 0.751\,79,\\
&x_5 = \cos 0.751\,79 = 0.730\,47, && x_6 = \cos 0.730\,47 = 0.744\,86,\\
&x_7 = \cos 0.744\,86 = 0.735\,18, && x_8 = \cos 0.744\,86 = 0.735\,18,\\
&x_9 = \cos 0.735\,18 = 0.741\,71, && x_{10} = \cos 0.741\,71 = 0.737\,31,\\
&x_{11} = \cos 0.737\,31 = 0.740\,28, && x_{12} = \cos 0.740\,28 = 0.738\,28,\\
&x_{13} = \cos 0.738\,28 = 0.739\,63, && x_{14} = \cos 0.739\,63 = 0.738\,72,\\
&x_{15} = \cos 0.738\,72 = 0.739\,33, && x_{16} = \cos 0.739\,33 = 0.738\,92,\\
&x_{17} = \cos 0.738\,92 = 0.739\,2, && x_{18} = \cos 0.739\,2 = 0.739\,01,\\
&x_{19} = \cos 0.739\,01 = 0.739\,14, && x_{20} = \cos 0.739\,14 = 0.739\,05,\\
&x_{21} = \cos 0.739\,05 = .739\,11, && x_{22} = \cos 0.739\,11 = 0.739\,07,\\
&x_{23} = \cos 0.739\,07 = 0.739\,1, && x_{24} = \cos 0.739\,1 = 0.739\,08,\\
&x_{25} = \cos 0.739\,08 = 0.739\,09, && x_{26} = \cos 0.739\,09 = 0.739\,08. \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Uurime veel teist võimalust iteratsioonialgoritmi tuletamiseks. Olgu x_0 võrrandi (1.24.1) täpse lahendi x^* alglähend. Kirjutame punktis x_0 välja funktsiooni $f(x)$ jaoks esimest järku Taylori valemi ja arvutame selle abil $f(x^*)$:

$$f(x^*) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x^* - x_0) + R_1(x^*).$$

Et $f(x^*) = 0$, siis kehtib ligikaudne seos

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x^* - x_0) \approx 0.$$

Määrame järgmise lähendi x_1 võrrandist

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) = 0.$$

Seega

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

mis on aluseks *Newtoni iteratsioonimeetodi* algoritmile

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in N \cup \{0\}). \tag{1.24.9}$$

Kirjutame punktis x_n välja funktsiooni $f(x)$ jaoks esimest järku Taylori valemi ja arvutame selle abil $f(x^*)$:

$$f(x^*) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(x^* - x_n)^2.$$

Sellest seosest leiame, et

$$-x^* = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2. \tag{1.24.10}$$

Liites seoste (1.24.9) ja (1.24.10) vastavad pooled, jõuame tulemuseni

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(x_n - x^*)^2 \quad (n \in N \cup \{0\}).$$

Kui

$$|f''(\xi_n)/f'(x_n)| \le K \quad (n \in N \cup \{0\}),$$

siis

$$|x_{n+1} - x^*| \le K\,|x_n - x^*|^2, \tag{1.24.11}$$

st Newtoni meetod on ruutkoonduvusega. Tõmbame funktsiooni $f(x)$ graafikule punktis $(x_n,\ f(x_n))$ puutuja. Selle võrrandiks on

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Leiame puutuja lõikepunkti $x-$teljega. Selles punktis $y=0$ ja $x=x_n-f(x_n)/f\,'(x_n)$, st lõikepunkti abstsiss on leitav algoritmi (1.24.9) abil. Seepärast nimetatakse Newtoni iteratsioonimeetodit ka *puutujate meetodiks*. Puutuja konstrueerimisel selgub, et Newtoni iteratsioonimeetodi korral on otstarbekas valida selline alglähend, milles $f(x)$ ja $f\,''(x)$ on samamärgilised. Miks? Algoritm (1.24.9) on algoritmi (1.24.3) erijuht, valiku $g(x)=x-f(x)/f\,'(x)$ korral. Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 2. Kui võrrandi (1.24.1) lahendamiseks kasutada algoritmiga (1.24.9) määratud Newtoni iteratsioonimeetodit, kusjuures x_0 on selle võrrandi otsitava täpse lahendi x^* jaoks alglähend ja leidub selline lõik $[a,b]$, millesse kuuluvad nii x^* kui ka x_n $(n\in N\cup\{0\})$ ning leidub selline arv K, et

$$|f\,''(\xi)/f\,'(x)|\le K \quad (\xi,x\in[a,b]), \tag{1.24.12}$$

siis alglähendiga x_0 ja algoritmiga (1.24.9) määratud lähendite jada $\{x_n\}$ koondub otsitavaks lahendiks x^*. Seejuures Newtoni meetod on ruutkoonduvusega ja kehtib hinnang (1.24.11).

Lahendame Näites 1 esitatud võrrandi ka Newtoni iteratsioonimeetodil, valides alglähendiks samuti $x_0=0.8$. Siin $f(x)=x-\cos x$. Kontrollige, et sellise küllalt täpse alglähendi korral leidub lõik $[a,b]$, et tingimus (1.24.12) on rahuldatud. Kas $f(x_0)$ ja $f''(x_0)$ on samamärgilised? Lause 2 põhjal on Newtoni iteratsioonimeetod rakendatav. Leiame, et

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.8-\frac{0.8-\cos 0.8}{1+\sin 0.8}=0.739\,85,\\
x_2 &= 0.739\,85-\frac{0.739\,85-\cos 0.739\,85}{1+\sin 0.739\,85}=0.739\,09,\\
x_3 &= 0.739\,09-\frac{0.739\,09-\cos 0.739\,09}{1+\sin 0.739\,09}=0.739\,09.
\end{aligned}$$

Märgime, et selle näite korral $f\,''(\xi)/f\,'(x)=(\cos\xi)\,/\,(1+\sin x)$ ja $|f\,''(\xi)/f\,'(x)|$ on ξx-tasandi mõningates osades tõkestamata, st Newtoni iteratsioonimeetod ei koondu sugugi iga alglähendi korral.

Huvitavat materjali iteratsioonimeetodite kohta leiate raamatust [18].

1.26. Harjutusülesanded

Ülesannetes 1–6 kasutada võrduste tõestamiseks matemaatilise induktsiooni meetodit.

1. $1+2+3+\ldots+n=n\,(n+1)\,/2.$
2. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n\,(n+1)\,(2n+1)\,/6.$
3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\,.$
4. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$
5. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n\geq 2)\,.$
6. $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n\quad(n\geq 2)\,.$

Ülesannetes 7–11 lahendada võrratus.

7. $|x+3|-|x+1|>1.$ V: $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right).$
8. $||x|-|x-2||<2.$ V: $(0;2)\,.$
9. $|x+4|-|x-1|\leq|x|\,.$ V: $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)\,.$
10. $x^2+6x+11<|6x+1|\,.$ V: $\left(-6-2\sqrt{6};-6+2\sqrt{6}\right).$
11. $\dfrac{\left(x^4-1\right)\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-9\right)\left(x^3-27\right)}>0.$ V: $(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)\,.$

Ülesannetes 12–17 leida funktsiooni määramispiirkond.

12. $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{3+x}}.$ V: $X=(-3;1]\,.$
13. $y=\sqrt{\log\sin(3\pi x)}.$ V: $X=\left\{\dfrac{1}{6}+\dfrac{2k}{3}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}.$
14. $y=\arccos\left(\ln\dfrac{x+1}{10}\right).$ V: $X=\left[10e^{-1}-1;10e-1\right].$
15. $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}.$ V: $X=\left[0;\dfrac{\pi^2}{4}\right]\cup\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}}\left[\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)^2,\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right]\right).$
16. $y=\sqrt{\sin x^2}.$

V: $X=\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}\cup\{0\}}\left[-\sqrt{(2k+1)\,\pi},-\sqrt{2k\pi},\right]\right)\cup\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}\cup\{0\}}\left[\sqrt{2k\pi},\sqrt{(2k+1)\,\pi}\right]\right).$

17. $y=\sqrt[6]{\log\cot x}.$ V: $X=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right].$

Ülesannetes 18–20 leida funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.

18. $y=\sqrt{4x-x^2-3}.$ V: $X=[1;3]\,,\ Y=[0;1]\,.$
19. $y=\arcsin 2^x.$ V: $X=(-\infty;0]\,.\ Y=\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right].$
20. $y=\log(1-2\sin x)\,.$ V: $X=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(2k\pi-\dfrac{7\pi}{6};2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right).$

$Y=(-\infty;\log 3]\,.$

21. Leida $f(g(x))\,,\ f(f(x))\,,\ g(f(x))$ ja $g(g(x))\,,$ kui $f(x)=x^3$ ning $g(x)=3^x.$ V: $3^{3x},\ x^9,\ 3^{x^3},\ 3^{3^x}.$
22. Leida $f(f(f(f(f(f(f(x)))))))\,,$ kui $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$ V: $\dfrac{x}{\sqrt{1-7x^2}}.$
23. Leida $f(x)$, kui $f(x-1)=x^2-4x+3.$ V: $f(x)=x^2-2x.$

24. Leida $f(x)$, kui $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. V: $f(x)=x^2-2$.

25. Leida $f(x)$, kui $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x^3$. V: $f(x)=x^3/\left(x-1\right)^3$.

Ülesannetes 26−29 leida funktsiooni pöördfunktsioon.

26. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. V: $x=\dfrac{e^y-1}{e^y+1}$.

27. $y=\sqrt{4-x^2}$. V: $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=-\sqrt{4-y^2}$.

28. $y=x^2-4x-5$. V: $x=2+\sqrt{(9+y)}$, $x=2-\sqrt{(9+y)}$.

29. $y=2-\arcsin\left(2x+1\right)$. V: $x=\dfrac{1}{2}\sin\left(2-y\right)-\dfrac{1}{2}$.

Millised ülesannetes 30−33 esitatud funktsioonidest on paaris- ja millised paaritud funktsioonid?

30. $f(x)=x-x^3\cos x$. V: paaritu.

31. $f(x)=\sqrt[5]{(1-x)^4}+\sqrt[5]{(1+x)^4}$. V: paaris.

32. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. V: paaritu. 33. $f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. V: paaritu.

Millised ülesannetes 34−40 esitatud funktsioonidest on perioodilised. Leida periood.

34. $f(x)=a\cos\left(\omega x\right)+b\sin\left(\omega x\right)$. V: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

35. $f(x)=\cos x+\cos 2x+3\cos 3x$. V: $T=2\pi$.

36. $f(x)=2\cot\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{3}$. V: $T=6\pi$.

37. $f(x)=\sqrt{\sin 2x}$. V: $T=\pi$.

38. $f(x)=\cos x^2$. V: mitteperioodiline.

39. $f(x)=\sin\left(x\sqrt{2}\right)$. V: $T=\pi\sqrt{2}$.

40. $f(x)=\cos\sqrt{x}$. V: mitteperioodiline.

Skitseerige ülesannetes 41−58 esitatud funktsioonide graafikud.

41. $y=|x|-|x-2|-2$. 42. $y=|2x+1|+|x-1|-|x+1|$.

43. $y=\sin x+0.5\sin 2x$.

44. $y=\begin{cases} 2-|x|, & \text{kui } |x|\le 2,\\ 0, & \text{kui } |x|>2.\end{cases}$

45. $|x|^p+|y|^p=1$, kui $p=0.01;\ 0.5;\ 1;\ 2;\ 100$.

46. $y=\arcsin\left(\sin x\right)$, $y=\arccos\left(\cos x\right)$.

47. $x=3\cos^2 t$, $y=2\sin^2 t$ $\quad(t\in[0;\pi/2])$.

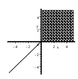
48. $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$.

49. $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$ $\quad(t\in[0;2\pi])$.

50. $\rho=3\varphi$. 51. $\rho=3\left(1-\cos\varphi\right)$. 52. $\rho=1+\cos 4\varphi$.

53. $\rho=4\sin 4\varphi$. 54. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

55. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$. 56. $\min\limits_{x,\,y\in\mathbf{R}}(x,y)=1$.

57. $\max\limits_{x,\,y\in\mathbf{R}}\left(|x|,|y|\right)=1$. 58. $x-|x|=y-|y|$. V: 

Ülesannetes 59 – 94 leida piirväärtus.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+7}$. V: $\dfrac{2}{3}$. 60. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3}{4n^3}$. V: $\dfrac{1}{4}$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^3-(n+3)^3}{(n-2)^2+(n+3)^2}$. V: $-\dfrac{15}{2}$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^4-4n^3+6n^2-4n+2}}{3-4n}$. V: $-\dfrac{1}{4}$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+5n}-\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt[4]{n^5+4n+1}+\sqrt[4]{4n^6+5n-1}}$. V: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{(n+2)!-(n+1)!}$. V: 1.

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$. V: $\dfrac{9}{8}$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n+3}\right)$. V: 1.

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k\,(2k+2)}$. V: $\dfrac{1}{4}$. 68. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x-1}$. V: 2.

69. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. V: $\dfrac{1}{4}$. 70. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{12}{8-x^3}\right)$. V: $\dfrac{1}{2}$.

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$. V: 1. 72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$. V: $\dfrac{1}{4}$.

73. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. V: 3. 74. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$. V: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[5]{x^3+7x}-3x}$. V: $-\dfrac{1}{3}$. 76. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$. V: 2.

77. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m,n\in\mathbf{N})$. V: $\dfrac{m}{n}$. 78. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m,n\in\mathbf{N})$. V: $\dfrac{n}{m}$.

79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$. V: 0.

80. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$. V: 2, kui $x\to+\infty$; $-\infty$, kui $x\to-\infty$.

81. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3-3}\right)$. V: 3. 82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$. V: $\dfrac{3}{7}$.

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\beta x}{\tan\alpha x}$. V: $\dfrac{\beta}{\alpha}$. 84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$. V: $\dfrac{9}{8}$.

85. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. V: 0. 86. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2}$. V: $\dfrac{1}{2}$.

87. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cot x$. V: -1. 88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$. V: e^{-1}.

89. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$. V: $e^{\alpha\beta}$. 90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$. V: e^{-1}.

91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-7}\right)^{5x^2}$. V: e^{50}. 92. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{\sqrt[3]{x}}}$. V: e^3.

93. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$. V: $\frac{\alpha}{\beta}$. 94. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}3x}{\sin 4x}$. V: $\frac{3}{4}$.

95. Näidata, et $2x^3+4x^4\sim 2x^3$ $(x\to 0)$ ja $2x^3+4x^4\sim 4x^4$ $(x\to\infty)$.

Ülesannets 96–104 valida arvud p ja q selliselt, et suurused $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ on ekvivalentsed, kusjuures $\beta(x)=px^q$.

96. $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(x\to 0)$. V: $p=1,\ q=1/8$.

97. $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(x\to +\infty)$. V: $p=1,\ q=1/2$.

98. $\alpha(x)=\sqrt{1-3x}-\sqrt[3]{1-2x}$ $(x\to 0)$. V: $p=-\frac{5}{6},\ q=1$.

99. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}$ $(x\to 0)$. V: $p=2,\ q=1$.

100. $\alpha(x)=\tan x-\sin x$ $(x\to 0)$. V: $p=1/2,\ q=3$.

101. $\alpha(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ $(x\to +\infty)$. V: $p=1,\ q=-1/2$.

102. $\alpha(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ $(x\to +\infty)$. V: $p=-1/4,\ q=-3/2$.

103. $\alpha(x)=e^{\sqrt{x}}-1$ $(x\to 0)$. V: $p=1,\ q=1/2$.

104. $\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ $(x\to 0)$. V: $p=1/2,\ q=1$.

Ülesannetes 105–108 uurida funktsiooni pidevust ja joonistada graafik.

105. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & \text{kui } x\neq 3;\\ 7, & \text{kui } x=3.\end{cases}$ V: katkev punktis $x=3$.

106. $f(x)=[\sin x]$, kus $[\sin x]$ on funktsiooni $\sin x$ täisosa. V: katkev punktides $x=k\pi$ ja $x=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

107. $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x)$. V: katkev punktides $z=\pi/2+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

108. $f(x)=\frac{[x]}{x}$. V: katkev punktides $z=k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Ülesannetes 109–112 uurida funktsiooni pidevust. Katkevuse korral leida katkevuspunkti liik.

109. $f(x)=\begin{cases}\cot(\pi x), & \text{kui } x\notin\mathbf{Z};\\ 0, & \text{kui } x\in\mathbf{Z}.\end{cases}$ V: teist liiki katkevuspunktid $x\in\mathbf{Z}$.

110. $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{kui } |x|\leq 1,\\ 1, & \text{kui } |x|>1.\end{cases}$ V: pidev kõikjal.

111. $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$. V: esimest liiki katkevuspunktid $x=1/k$ $(k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\})$ ja teist liiki katkevuspunkt $x=0$.

112. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$. V: teist liiki katkevuspunktid $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\})$ ja esimest liiki katkevuspunkt $x=0$.

Ülesannetes 113−114 valida arvud a ja b selliselt, et funktsioon oleks pidev kogu oma määramispiirkonnas. Skitseerige graafik.

113. $f(x)=\begin{cases} a\sin x+b, & \text{kui } |x|\le\pi/2;\\ 3+x, & \text{kui } |x|>\pi/2.\end{cases}$ V: $a=\frac{1}{2}\pi,\ b=3.$

114. $f(x)=\begin{cases} ae^x+b, & \text{kui } |x|\le 1;\\ \sin\dfrac{\pi x}{2}, & \text{kui } |x|>1.\end{cases}$ V: $a=1/\mathrm{sh}1,\ b=-\mathrm{cth}1.$

115. Leidke $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, kui $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$ ja $\Delta x=\dfrac{1}{10^k}$ $(k=1;2;3)$. Uurige, millele läheneb suurus $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ piirprotsessis $\Delta x\to 0$.

V: $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=1,\,\Delta x=1/10}=-\dfrac{10}{11},\ \left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=1,\,\Delta x=1/100}=-\dfrac{100}{101},$

$\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=1,\,\Delta x=1/1000}=-\dfrac{1000}{1001},\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{1\cdot(1+\Delta x)}\right)=-1.$

116. Olgu $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Leidke lähtudes tuletise definitsioonist $f'(1),\ f'(2)$ ja $f'(-1)$.
V: $-1;\ -1/4;\ -1.$

117. Olgu $f(x)=\sqrt{x}$. Leidke lähtudes tuletise definitsioonist $f'(1),\ f'(4)$ ja $f'(9)$.
V: $1/2;\ 1/4;\ 1/6.$

Lähtudes tuletise definitsioonist, leidke ülesannetes 118−120 funktsiooni tuletis.

118. $y=\dfrac{1}{x}.$ V: $-1/x^2.$

119. $y=\sqrt{x}.$ V: $1/\left(2\sqrt{x}\right).$

120. $y=\sqrt[3]{x}.$ V: $1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right).$

121. Olgu $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+1$. Millistel muutuja x väärtustel: 1) $f'(x)=-1$; 2) $f'(x)=0$; 3) $f'(x)=1$? V: 1) $0,\ -2$; 2) $\sqrt{2}-1,\ -1-\sqrt{2}$; 3) $-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3}$.

122. Näidake, et $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\dfrac{1}{(\gamma x+\delta)^2}\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}.$

123. Näidake, et

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x)\\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x)\end{vmatrix}.$$

Leidke ülesannetes 124−159 funktsiooni tuletis.

124. $y=3x^4+7x^3+6x^2-8x-11.$ V: $12x^3+21x^2+12x-8.$

125. $y=\left(1-x^2\right)/\left(x^2+x^3\right).$ V: $(x-2)/x^3.$

126. $y=3/\sqrt[3]{x}-4/\sqrt[4]{x^3}+7/\sqrt[7]{x^5}+9/\sqrt[9]{x^7}.$ V: $-1/\sqrt[3]{x^4}+3/\sqrt[4]{x^7}-5/\sqrt[7]{x^{12}}-7/\sqrt[9]{x^{16}}.$

127. $y=2\cos(3x+1)-3\sin(2x-1).$ V: $-6\sin(3x+1)-6\cos(2x-1).$

128. $y=\sqrt{\cos 2x}-\sqrt[3]{\sin 3x}.$ V: $\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}-\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x}}.$

129. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$ V: $\dfrac{a^2}{\left(\sqrt{(a^2+x^2)}\right)^3}.$

130. $y=\sin\left(\cos^3 x\right)\left(\cos\left(\sin^3 x\right)\right).$

V: $-3\cos^2 x \sin x \cos\left(\sin^3 x\right)\cos\left(\cos^3 x\right) - 3\sin^2 x \cos x \sin\left(\cos^3 x\right)\sin\left(\sin^3 x\right)$.

131. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$. V: $-\dfrac{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

132. $y = \cos^3 \sin^2 \sqrt{x}$. V: $-3\left(\cos^2 \sin^2 \sqrt{x}\right)\left(\sin \sin^2 \sqrt{x}\right)\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

133. $y = \dfrac{\cos^3 x}{\sin x^3}$. V: $\dfrac{-3\cos^2 x \sin x \sin x^3 - 3x^2 \cos^3 x \cos x^3}{\sin^2 x^3}$.

134. $y = \cos \sin^2 \cot^3 \sqrt[3]{x}$.

V: $2\left(\sin \sin^2 \cot^3 \sqrt[3]{x}\right)\left(\sin \cot^3 \sqrt[3]{x}\right)\left(\cos \cot^3 \sqrt[3]{x}\right)\left(\cot^2 \sqrt[3]{x}\right)\dfrac{1}{\sin^2 \sqrt[3]{x}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

135. $y = \dfrac{\sqrt[4]{\cot^3 3x}}{\sqrt[3]{\cot^2 2x}}$. V: $\left(-\dfrac{9}{4}\dfrac{1}{\cos 3x}\dfrac{1}{\sin 3x} + \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\cos 2x}\dfrac{1}{\sin 2x}\right)\dfrac{\sqrt[4]{\cot^3 3x}}{\sqrt[3]{\cot^2 2x}}$.

136. $y = 3^{\sin x} - \sin^3 3^x + \cos 3^x$.

V: $3^{\sin x}(\cos x)\ln 3 - 3\left(\sin^2 3^x\right)\left(\cos 3^x\right)3^x \ln 3 - \left(\sin 3^x\right)3^x \ln 3$.

137. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,\, b>0)$.

V: $\left(\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) - \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$.

138. $y = \ln^2 \ln^3 \ln^4 x$. V: $\dfrac{24\left(\ln \ln^3 \ln^4 x\right)}{x\left(\ln \ln^4 x\right)\ln x}$.

139. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{\cos x}} - \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$. V: $-\dfrac{1}{6}\dfrac{\cos^2 x + 4}{\cos^3 x}$.

140. $y = x(\sin \ln x + \cos \ln x)$. V: $2\cos(\ln x)$.

141. $y = \ln \tan \dfrac{x}{2} - \cos \ln \tan x$. V: $\dfrac{\cos x + \sin(\ln \tan x)}{\sin x \cos x}$.

142. $y = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{arccot}\,\sqrt[3]{x}$. V: $\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{arccot}\,\sqrt[3]{x} + \left(\mathrm{arccot}\,\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

143. $y = \sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x$. V: $2 - \dfrac{4x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

144. $y = \arctan\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$. V: 1.

145. $y = \ln\left(\arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. V: $-\dfrac{1}{3x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}-1}\arcsin \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$.

146. $y = \ln \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b}\arctan \dfrac{x}{b}$. V: $\dfrac{b^2+a^2}{(x+a)\left(x^2+b^2\right)}$.

147. $y = \left(\mathrm{ch}\sqrt{x^2-1}\right)\left(\mathrm{sh}\sqrt{x^2-1}\right)$. V: $x\dfrac{2\mathrm{ch}^2\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

148. $y = \arctan\sqrt{x^2-1} + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$. V: $\dfrac{2x^2-2-x^2\ln x}{x\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$.

149. $y = \mathrm{arccot}\,\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. V: $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

150. $y=\arctan \mathrm{th}^3 x$. V: $3\left(\mathrm{th}^2 x\right)\dfrac{1-\mathrm{th}^2 x}{1+\mathrm{th}^6 x}$.
151. $y=\arcsin\left(\mathrm{sh}x^2-\mathrm{ch}x^2\right)$. V: $\sqrt{2}x\sqrt{\mathrm{cth}x^2-1}$.
152. $y=\sqrt{\cos\sqrt{\mathrm{th}\dfrac{1}{x^3}}}$. V: $\dfrac{3\sin\sqrt{\mathrm{th}\dfrac{1}{x^3}}}{4x^4\sqrt{\cos\sqrt{\mathrm{th}\dfrac{1}{x^3}}}\sqrt{\mathrm{th}\dfrac{1}{x^3}}\mathrm{ch}^2\dfrac{1}{x^3}}$.
153. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.
V: $x^{x^a+a-1}a\ln x+x^{x^a+a-1}+x^{a^x}a^x\ln a\ln x+x^{a^x-1}a^x+a^{x^x}x^x\ln a\ln x+a^{x^x}x^x\ln a$.
154. $y=(1+\mathrm{sh}x)^{(1/\mathrm{ch}x)}$.
V: $(1+\mathrm{sh}x)^{(1-\mathrm{ch}x)/\mathrm{ch}x}\left(1-\ln(1+\mathrm{sh}x)-\dfrac{(\mathrm{sh}x-1)\ln(1+\mathrm{sh}x)}{\mathrm{ch}^2 x}\right)$.
155. $y=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$. V: $\dfrac{(\ln(\ln x))\,x\ln x+x-2\ln^2 x}{x\ln x}\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.
156. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}x}}$. V: $\dfrac{2(\mathrm{th}\,x-1)}{3(\mathrm{th}x+1)}\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{th}\,x}\right)^2}$.
157. $y=\arctan\mathrm{th}x$. V: $\dfrac{1-\mathrm{th}^2 x}{1+\mathrm{th}^2 x}$.
158. $y=\sqrt[5]{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}\,x)+\mathrm{ch}(\mathrm{sh}\,x)}$. V: $\dfrac{(\mathrm{sh}\,x)\,\mathrm{ch}\,(\mathrm{ch}\,x)+(\mathrm{ch}x)\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{sh}\,x)}{5\sqrt[5]{(\mathrm{sh}\,(\mathrm{ch}\,x)+\mathrm{ch}\,(\mathrm{sh}\,x))^4}}$.
159. $y=\mathrm{sh}^2\mathrm{ch}^3\mathrm{sh}\,x^3$.
V: $18x^2\left(\mathrm{sh}\left(\mathrm{ch}^3\left(\mathrm{sh}\,x^3\right)\right)\mathrm{ch}\left(\mathrm{ch}^3\left(\mathrm{sh}\,x^3\right)\right)\mathrm{ch}^2\left(\mathrm{sh}\,x^3\right)\mathrm{sh}\left(\mathrm{sh}\,x^3\right)\mathrm{ch}\,x^3\right)$.

Leidke ülesannetes 160 – 167 ilmutamata funktsiooni tuletis $\dfrac{dy}{dx}$.

160. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. V: $\dfrac{b^2x}{a^2y}$.
161. $x^3+y^3=3xy$. V: $\left(y-x^2\right)/\left(y^2-x\right)$.
162. $x^{100}-y^{100}=x^2y^2$. V: $\left(50x^{99}-xy^2\right)/\left(50y^{99}+x^2y\right)$.
163. $\mathrm{sh}\,(xy)+\mathrm{ch}\,(xy)=\mathrm{th}\,(x+y)$. V: $\dfrac{y\mathrm{ch}\,(xy)+y\mathrm{sh}\,(xy)-1+\mathrm{th}^2(x+y)}{1-\mathrm{th}^2(x+y)-x\mathrm{ch}\,(xy)-x\mathrm{sh}\,(xy)}$.
164. $x^y=y^x$. V: $\left(x^yy^2-y^{x+1}x\ln y\right)/\left(y^xx^2-x^{y+1}y\ln x\right)$.
165. $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. V: $\dfrac{x+y}{x-y}$.
166. $3^x+4^y=\sqrt{xy}$. V: $\left(2\sqrt{xy}3^x\ln 3-y\right)/\left(x-2\sqrt{xy}4^y\ln 4\right)$.
167. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=1+\cos\arctan\dfrac{y}{x}$.
V: $\left(x^2y^2+y^4-x\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)/\left(y\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}+x^3y+xy^3\right)$.

Leidke ülesannetes 168 – 173 parameetriliselt esitatud funktsiooni tuletis $\dfrac{dy}{dx}$.

168. $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t,\\ y=a\,\mathrm{sh}\,t.\end{cases}$ V: $\mathrm{cth}\,t$. 169. $\begin{cases} x=\cos^2 t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$ V: -1.

170. $\begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$ V: $-\tan \varphi$. 171. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ V: $\dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$.

172. $\begin{cases} x = (1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \\ y = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi. \end{cases}$ V: $\dfrac{(1 + \cos \varphi)(1 - 2\cos \varphi)}{(2\cos \varphi + 1) \sin \varphi}$.

173. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt[4]{t}}, \\ y = \sqrt[4]{1 - \sqrt[3]{t}}. \end{cases}$ V: $\dfrac{\sqrt[3]{\left(1 - \sqrt[4]{t}\right)^2} \sqrt[12]{t}}{\sqrt[4]{\left(1 - \sqrt[3]{t}\right)^3}}$.

174. Näidake, et funktsioon $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ rahuldab seost $\left(1 - x^2\right) y' - xy = 1$.

Ülesannetes 175–192 leidke soovitud tuletis.

175. $y = (2x + 1) 3^x$. $y''' =?$ V: $\left(2\left(\ln^3 3\right) x + 6 \ln^2 3 + \ln^3 3\right) 3^x$.

176. $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$. $y'' =?$ V: $\left(9x^2 - 2 - 6x^4\right) / \left(\left(x^2 - 1\right) \sqrt{1 - x^2}\right)$.

177. $y = e^{(x+1)^2}$. $y''' =?$ V: $\left(36x + 20 + 8x^3 + 24x^2\right) e^{(x+1)^2}$.

178. $y = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arccot} x$. $y'' =?$ V: $\dfrac{2\left(\operatorname{arccot} x + (\operatorname{arccot} x) x^2 - x\right)}{1 + x^2}$.

179. $y = x (\sin \ln x + \cos \ln x)$. $y'' =?$ V: $-2\dfrac{\sin (\ln x)}{x}$.

180. $y = f\left(x^3\right)$. $y''' =?$ V: $27x^6 f'''\left(x^3\right) + 54x^3 f''\left(x^3\right) + 6f'(x^3)$.

181. $y = f(g(x))$. $y''' =?$

V: $f'''(g(x)) (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) g'(x) g''(x) + f'(g(x)) g'''(x)$.

182. $x^3 + y^3 - 4xy = 0$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ V: $(6x + 6yy'y' - 8y') / \left(4x - 3y^2\right)$.

183. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \dfrac{y}{x}$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ V: $2\left(x^2 + y^2\right) / (x - y)^3$.

184. $y = \sin (x + y)$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$

V: $(\sin (x + y)) / \left(-1 + 3\cos (x + y) - 3\cos^2 (x + y) + \cos^3 (x + y)\right)$.

185. $y = \sqrt[3]{2x + 7}$. $y^{(n)} =?$

V: $(-1)^{n-1} (3n - 4)!!! \, (2/3)^n (2x + 7)^{(1-3n)/3} =$

$= (-1)^{n-1} 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n - 4) (2/3)^n (2x + 7)^{(1-3n)/3} \quad (n \geq 2)$.

186. $y = \sin^2 (3x)$. $y^{(2n)} =?$ $y^{(2n+1)} =?$

V: $0.5 (-1)^{n+1} 6^{2n} \cos (6x)$ $(n \geq 1)$. $0.5 (-1)^n 6^{2n+1} \sin (6x)$ $(n \geq 0)$.

187. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. $y^{(n)} =?$ V: $(-1)^{n+1} n! c^{n-1} (ad - cb) (cx + d)^{-n-1}$.

188. $y = (x - 1)^2 e^x$. $y^{(n)} =?$ V: $\left((x - 1)^2 + 2n (x - 1) + n (n - 1)\right) e^x$.

189. $y = x^3 \sin x$. $y^{(100)} =?$

V: $-x^3 \sin x + 100 \cdot 3x^2 \cos x + 100 \cdot 99 \cdot 3x \sin x + 100 \cdot 99 \cdot 98 (-\cos x)$.

190. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ V: $-\dfrac{b}{a^2 \sin^3 t}$.

191. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 2t. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ V: $\dfrac{3t^2 + 2}{4t^3}$.

192. $\begin{cases} x = e^{\varphi} \cos \varphi, \\ y = e^{\varphi} \sin \varphi. \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} =?$ V: $\dfrac{2e^{-\varphi}}{(1 - 2\cos \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi)}$.

Ülesannetes 193 − 198 tõestage võrratus.

193. $e^x > 1 + x \quad (x > 0)$. 194. $x > \ln(1+x) \quad (x > 0)$.

195. $\sin x < x \quad (x > 0)$. 196. $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6} \quad (x > 0)$.

197. $\operatorname{ch} x \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$. 198. $2x \arctan x \geq \ln\left(1 + x^2\right) \quad \left(\dfrac{\pi}{2} > x > 0\right)$.

Ülesannetes 199 − 204 leidke näidatud järku direntsiaal.

199. $y = \sqrt[3]{x}$. $dy = ?$ V: $1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right) dx$.

200. $y = x \cos x^2$. $dy = ?$ V: $\left(\cos x^2 - 2x^2 \sin x^2\right) dx$.

201. $y = \sin x^3$. $d^2y = ?$ V: $\left(-9\left(\sin x^3\right) x^4 + 6\left(\cos x^3\right) x\right)(dx)^2$.

202. $y = x \ln x$. $d^4y = ?$ V: $\dfrac{2}{x^3}(dx)^4$.

203. $y = \sqrt{1 - 3x}$. $d^ny = ?$ V: $-\dfrac{(2n-3)!!3^n}{2^n\sqrt{(1-3x)^{2n-1}}}(dx)^n \quad (n \geq 2)$.

204. $y = \ln(ax + b)$. $d^ny = ?$ V: $(-1)^{n-1}\dfrac{a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}(dx)^n$.

Ülesannetes 205 − 211 leidke ligikaudu, kasutades diferentsiaali.

205. $\sqrt[5]{0.97}$. V: 0.994. 206. $\ln 3$. V: $1 + \dfrac{3-e}{e} \approx 1.1036$.

207. $\sqrt[10]{1100}$. V: $2\sqrt[10]{1 + \dfrac{76}{1024}} \approx 2 + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{76}{1024} \approx 2.0148$.

208. $\cos 29°$. V: $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0.87475$.

209. $\arctan 1.03$. V: 0.8004. 210. $\arcsin 0.54$. V: 0.5698.

211. $\sqrt{\dfrac{3.97^2 + 9}{3.97^2 - 7}}$. V: 1.6809.

Ülesannetes 212 − 213 leidke punktis A joonele tõmmatud puutuja ja normaali võrrandid.

212. $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $A\left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. V: $\begin{array}{l} y = x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{12}, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{12} - x \end{array}$.

213. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ $A\left(2\sqrt{2}; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. V: $\begin{array}{l} y = 3\sqrt{2} - \dfrac{3}{4}x, \\ y = -\dfrac{7}{6}\sqrt{2} + \dfrac{4}{3}x \end{array}$.

214. Millise nurga all lõikuvad jooned $y = \sin x$ ja $y = \cos x$? V: $\arctan 2\sqrt{2}$.

215. Leida joone $y = x \ln x$ normaali, mis on paralleelne sirgega $y = x - 7$, võrrand. V: $y + 2e^{-2} = x - e^{-2}$.

216. Leida tsükloidile $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ parameetri väärtusele $t = \pi/3$ vastavas punktis tõmmatud puutuja võrrand. V: $y - \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}\left(x - a\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

217. Näidake, et võrranditega $y = f(x)$ ja $y = f(x)\sin ax$ esitatud jooned, kus $f(x) > 0$

on diferentseeruv funktsioon, puudutavad teineteist nende joonte ühistes punktides .
218. Näidake, et astroidi $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ puutujalõik koordinaattelgede vahel on pikkusega a.
219. Näidake, et paraboolid

$$y^2 = 4a\,(a - x) \quad (a > 0) \quad \text{ja} \quad y^2 = 4b\,(b + x) \quad (b > 0)$$

lõikuvad täisnurga all.
220. Näidake, et joone $y = a^x$ $(a > 0)$ puutujaalune lõik on konstantse pikkusega. V: $1/\ln a$.
221. Näidake, et võrrandiga

$$y = \begin{cases} |x|^x, \text{ kui } x \neq 0 \\ 1, \text{ kui } x = 0 \end{cases}$$

antud joon puudutab y-telge punktis $A(0;1)$.
222. Näidake, et logaritmilise spiraali $\rho = a\exp(m\varphi)$ $(a > 0,\ m$ −konstandid) puutuja moodustab puutepunkti raadiusvektoriga konstantse nurga. V: $\arctan(1/m)$.
223. Leidke funktsiooni $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ jaoks $a = 1$ korral teist järku Taylori valem. Leitud Taylori polünoomi abil arvutage ligikaudu $f(1.12)$. Hinnake leitud valemi jääkliikme abil absoluutset viga. V: $6(x-1) + 7(x-1)^2 + 4(1 + \theta(x-1))(x-1)^3$. $.820\,8$. $.0078$.

Ülesannetes 224−228 leida antud funktsiooni korral nõutud järku Maclaurini valem. Arvutada saadud Maclaurini polünoomi abil funktsiooni ligikaudne väärtus. Hinnake vastava jääkliikme abil viga.
224. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $n = 0; 1; 2$. $f(0.05)$.
V: $f(x) = 1 + \dfrac{3(\theta_0 x)^2 - 2(\theta_0 x)}{1!}x \quad (0 < \theta_0 < 1)$, 1,
$0 \leq \dfrac{3(0.05\theta_0)^2 - 2(0.05\theta_0)}{1!}0.05 \leq 5. \times 10^{-3}$;
$f(x) = 1 + \dfrac{6\theta_1 x - 2}{2!}x^2 \quad (0 < \theta_1 < 1)$, 1,
$-2.5 \times 10^{-3} \leq \dfrac{6\theta_1 0.05 - 2}{2!}0.05^2 \leq -2.125 \times 10^{-3}$;
$f(x) = 1 - x^2 + x^3$, $.997\,63$, 0.
225. $f(x) = \sin x$, $n = 1; 2; 3$. $\sin 0.2$. V: $\sin x = x - \dfrac{\sin(\theta x)}{2!}x^2$, 0.2, 0.02;
$\sin x = x - \dfrac{\cos(\theta x)}{3!}x^3$, 0.2, 1.4×10^{-3};
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{\sin(\theta x)}{4!}x^4$, $0.198\,67$, $7. \times 10^{-5}$.
226. $f(x) = \cos x$, $n = 1; 2; 3$. $\cos 0.1$.
V: $\cos x = 1 - \dfrac{\cos(\theta x)}{2!}x^2$, 1, $5. \times 10^{-3}$;
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{\sin(\theta x)}{3!}x^3$, 0.995, 1.7×10^{-4};

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cos(\theta x)}{4!}x^4, \quad 0.995, \quad 4.17 \times 10^{-6}.$

227. $f(x) = \sqrt[4]{1+x}, \quad n = 1; 2. \quad \sqrt[4]{0.96}.$

V: $\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{3}{32}\frac{x^2}{\sqrt[4]{(1+\theta x)^7}}, \quad 0.99, \quad 1.7 \times 10^{-4};$

$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + \frac{7}{128}\frac{x^3}{\left(\sqrt[4]{(1+\theta x)}\right)^{11}}, \quad 0.98985, \quad 4.0 \times 10^{-6};$

228. $f(x) = \ln(1+x), \quad n = 1; 2. \quad \ln 1.11.$

V: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{(1+\theta x)^2}, \quad 0.11, \quad 6.1 \times 10^{-3};$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \quad 0.10395, \quad 4.5 \times 10^{-4}.$

229. Leidke funktsiooni $y = \tan x$ korral neljandat järku Maclaurini valem. Hinnake seose $\tan x \approx x + x^3/3$ viga $|x| \le 0.2$ korral.

V: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\left(16 + 136\tan^2(\theta x) + 240\tan^4(\theta x) + 120\tan^6(\theta x)\right)x^5.$

$|\tan(\theta x)| \overset{|x|\le 0.2}{\le} \frac{\sin 0.2}{\cos 0.2} \le \frac{0.2}{1 - 0.2^2/2} \le 0.21 \Rightarrow$

$R_4(x) \overset{|x|\le 0.2}{\le} \frac{16 + 136 \times 0.21^2 + 240 \times 0.21^4 + 120 \times 0.21^6}{5!} 0.21^5 \le 7.7 \times 10^{-5}.$

Ülesannetes 230–232 leidke funktsiooni range monotoonsuse piirkonnad.

230. $y = 3 - x - x^2$. V: $(-\infty; -1/2), \ (-1/2; +\infty)$.

231. $y = x + \sin x$. V: rangelt kasvav hulgal $(-\infty, +\infty)$.

232. $y = x^2 - \ln x$. V: $\left(0; 1/\sqrt{2}\right), \ \left(1/\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Ülesannetes 233–237 leidke funktsiooni lokaalsed ekstreemumid.

233. $y = x^4 - 2x^2$. V: $x_{lok.\ \max} = 0, \ x_{1.lok.\ \min} = -1, \ x_{2.lok.\ \min} = 1$.

234. $y = x^5/5 - 6x^3 + 81x$. V: Ei ole.

235. $y = x^4 e^x$. V: $x_{lok.\ \min} = 0, \ x_{lok.\ \max} = -4$.

236. $y = e^{-x}\sin x$.

V: $x_{lok.\ \max} = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \ x_{lok.\ \min} = \frac{1}{4}\pi + (2k+1)\pi \ (k \in \mathbf{Z})$.

237. $y = \sqrt{x}\ln x$. V: $x_{lok.\ \min} = e^{-2}$.

Ülesannetes 238–242 leidke funktsiooni vähim ja suurim väärtus lõigul.

238. $y = x^4 - 2x^2 \ [-2; 1]$. V: $y_{\min} = y(-1) = y(1) = -1, \ y_{\max} = y(-2) = 8$.

239. $y = x + 2\cos x \ [-2; 3]$. V: $y_{\min} = y(-2) \approx -2.8323, \ y_{\max} = y(\pi/6) \approx 2.2556$.

240. $y = x - \ln\cos x \ [-1.5; 1.5]$.

V: $y_{\min} = y(-\pi/4) = -\pi/4 - \ln\cos(-\pi/4) \approx -.43882,$

$y_{\max} = y(1.5) = 1.5 - \ln\cos 1.5 = 4.1488.$

241. $y = e^{-x}\sin x \ [2; 7]$.

V: $y_{\min} = y(5\pi/4) = -e^{-5\pi/4}/\sqrt{2} \approx -1.3932 \times 10^{-2},$

$y_{\max} = y(2) = e^{-2}\sin 2 \approx 0.12306.$

242. $y = e^x \cos 5x \ [0; 3]$. V: $y_{\min} = y(3) = e^3\cos 15 \approx -15.259,$

$y_{\max} = y(\frac{4\pi}{5} + \frac{1}{5}\arctan\frac{1}{5}) \approx 12.593.$

Ülesannetes 243−246 leida funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

243. $y = x^4/6 - x^2$. V: $X_\cap = (-1;1)$, $X_\cup = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$, $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

244. $y = x^2/4 + \cos x \quad X = [-2;2]$. V: $X_\cap : (-\pi/3;\pi/3)$, $X_\cup : (-2;-\pi/3) \cup (\pi/3;2)$, $x_1 = -\pi/3,\ x_2 = \pi/3$.

245. $y = \sqrt{1+x^2}$. V: $X_\cup = \mathbf{R}$, käänupunkte ei ole.

246. $y = x\ln\left(x^2+2\right)$. V: $X_\cap = (-\infty;0)$, $X_\cup = (0;+\infty)$, $x_1 = 0$.

Ülesannetes 247−251 uurige funktsiooni. Saadud andmete põhjal joonestage funktsiooni graafik.

247. $y = x^3 - 3x$. 248. $y = \dfrac{\left|x^3\right|}{4-x^2}$. 249. $y = xe^{-x}$.

250. $y = x - \ln\left(x^2+1\right)$. 1.251. $y = x - 2\arctan x$.

Ülesannetes 252−261 leidke piirväärtus, kasutades L'Hospitali reeglit.

252. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\tan x)^{\pi-2x}$. V: 1. 253. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x^3}$. V: $-\dfrac{1}{3}$.

254. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \mathrm{ch} x}{x}$. V: 0. 255. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\beta x}$. V: $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

256. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\tan x}$. V: 1. 257. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1-x}{\ln x}\right)$. V: −1.

258. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$. V: $\dfrac{1}{3}$. 259. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x}{\ln x - x + 1}$. V: −2.

260. $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$. V: $\dfrac{1}{e}$. 261. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. V: $e^{-1/6}$.

262. Näidake, et astmefunktsioon x^α $(\alpha > 0)$ on piirprotsessis $x \to +\infty$ kõrgemat järku lõpmata suur suurus võrreldes logaritmfunktsiooniga $\ln x$.

Ülesannetes 263−267 leidke iteratsioonimeetodil antud lõigus paiknev võrrandi lahend nelja õige tüvekohaga.

263. $x + \ln x = 2, \quad [1;2]$. V: 1.557.

264. $1 + x + e^x = 0, \quad [-2;-1]$. V: −1.279.

265. $x\cos x = 1, \quad [-2.1;-2]$. V: −2.074.

266. $\sin x + \ln x = 0, \quad [0.5;0.6]$. V: 0.5787.

267. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0. \quad [0;1]$. V: 0.3820.

2. Ühe muutuja funktsiooni integraalarvutus

2.1. Määramata integraal

Järgnevalt uurime probleemi leida funktsioon, kui on teada selle funktsiooni tuletis.

Definitsioon 1. Öeldakse, et funktsioon $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ *algfunktsioon* hulgal X, kui iga $x \in X$ korral

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Näide 1. Funktsioon $(\sin 2x)/2$ on funktsiooni $\cos 2x$ algfunktsioon reaalarvude hulgal $\mathbf{R}$, sest

$$((\sin 2x)/2)' = \cos 2x$$

iga $x \in \mathbf{R}$ korral. $\diamondsuit$

Näide 2. Funktsioon $\sqrt[3]{x}$ on funktsiooni $1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$ algfunktsioon nullist erinevate reaalarvude hulgal $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, sest

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = 1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$$

iga nullist erineva $x \in \mathbf{R}$ korral. $\diamondsuit$

Kui $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid hulgal X, siis

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

hulgal X. Tingimusest

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \quad (x \in X)$$

järeldub, et

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad (x \in X),$$

st funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid erinevad üksteisest hulgal X ülimalt konstantse liidetava C võrra. Seega, teades funktsiooni $f(x)$ üht algfunktsiooni $F(x)$, võime funktsiooni $f(x)$ iga algfunktsiooni avaldada kujul $F(x) + C$.

Definitsioon 2. Avaldist kujul $F(x) + C$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon ja C on suvaline konstant *(integreerimiskonstant)*, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *määramata integraaliks* ja tähistatakse

$$\int f(x)\,dx,$$

st

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2.1.1}$$

Kui funktsioonil $f(x)$ leidub hulgal X algfunktsioon, siis öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ eksisteerib määramata integraal (hulgal X).

Leiame funktsiooni $f(x)$ määramata integraalist $\int f(x)dx$ diferentsiaali:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = (F(x) + C)'\,dx = f(x)dx.$$

Kui määramata integraali all olev avaldis on mingi funktsiooni $F(x)$ diferentsiaal, st

$$dF(x) = f(x)dx,$$

siis asendades seoses (2.1.1) $f(x) = F'(x)$, võime kirjutada

$$\int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Formuleerime saadud tulemused.

Lause 1. Peavad paika seosed

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

ja

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Määramata integraalil on lineaarsuse omadus.

Lause 2. Kui eksisteerivad määramata integraalid $\int f(x)\,dx$ ja $\int g(x)\,dx$, siis suvaliste konstantide α ja β korral eksisteerib ka integraal $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$, kusjuures

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Tõestus. Olgu $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ ja $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$. Seejuures $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = g(x)$. Näitame, et funktsiooni $\alpha f(x) + \beta g(x)$ üheks algfunktsiooniks on $\alpha F(x) + \beta G(x)$. Tõesti,

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \left[\begin{array}{c}\text{kasutame tuletise}\\ \text{lineaarsuse omadust}\end{array}\right] = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

st eksisteerib määramata integraal funktsioonist $\alpha f(x) + \beta g(x)$, ja

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C_3 =$$

$$= \alpha(\int f(x)\,dx - C_1) + \beta(\int g(x)\,dx - C_2) + C_3 =$$

$$= \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C_3 - \alpha C_1 - \beta C_2 =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{suvaliste konstantide lineaar-}\\ \text{kombinatsioon on suvaline konstant}\end{array}\right] = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx. \quad \square$$

Näide 3. Kasutades määramata integraali lineaarsust, leiame, et

$$\int \frac{3x^3\sqrt[5]{x} - 7x + 2x^2e^x - 5}{x^2}\,dx = \int \left(3x\sqrt[5]{x} - \frac{7}{x} + 2e^x - \frac{5}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^{6/5}dx - 7\int \frac{dx}{x} + 2\int e^x dx - 5\int x^{-2}dx =$$

$$= 3\frac{x^{11/5}}{11/5} - 7\ln|x| + 2e^x - 5\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{15}{11}x^2\sqrt[5]{x} - 7\ln|x| + 2e^x + \frac{5}{x} + C. \qquad \diamondsuit$$

2.2. Määramata integraalide tabel

Punktis 1.12 leidsime põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised. Kasutame seal saadud tulemusi määramata integraalide põhitabeli koostamiseks. Valemi 5 korral näitame täiendavalt, et

$$(\ln|x|)' = \frac{d\ln|x|}{d|x|}\frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{|x|}\cdot \operatorname{sign} x = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}.$$

1. $\int 0\, dx = C$
2. $\int 1\, dx = x + C$
3. $\int e^x\, dx = e^x + C$
4. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$
5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
6. $\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{kui } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + C, & \text{kui } \alpha = -1. \end{cases}$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x + C$
15. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
16. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
18. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + C$
20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + C$
21. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x + C$ $(x \in (-1;1))$
22. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcth} x + C$ $(x \in \mathbf{R}\setminus[-1;1])$

2.3. Muutujate vahetus määramata integraalis

Eksisteerigu määramata integraal funktsioonist $f(x)$, kusjuures funktsiooni $f(x)$ üheks algfunktsiooniks on $F(x)$, st

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in X)$$

ja

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Olgu funktsioon $x = \varphi(t)$ rangelt monotoonne hulgal T, kusjuures $\varphi(T) = X$ ja $\varphi(t) \in D(T)$. Antud tingimustel eksisteerib hulgal X funktsiooni $x = \varphi(t)$ pöördfunktsioon $t = \varphi^{-1}(x)$. Et

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

siis funktsioon $F(\varphi(t))$ on funktsiooni $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ algfunktsioon ja

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\,dx.$$

Seega kehtib järgmine väide.

Lause 1 *(muutujate vahetus määramata integraalis).* Kui funktsioon $x = \varphi(t)$ on rangelt monotoonne hulgal T, kusjuures $\varphi(T) = X$ ja $\varphi(t) \in D(T)$, siis

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{2.3.1}$$

Järeldus 1. Lause 1 eeldustel peab paika algoritm

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C, \tag{2.3.2}$$

mis kannab *diferentsiaali märgi alla viimise võtte* nime.

Tõestuseks piisab seoses

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

muutuja t asendamisest muutujaga x. $\square$

Tavaliselt kasutatakse diferentsiaali märgi alla viimise võtet lihtsa muutujate vahetuse lühemaks kirjapanekuks määramata integraali leidmisel. Näidete 1−3 korral on ülesanne lahendatud kahel viisil, esiteks, kasutades muutujate vahetust (Lauset 1) ja teiseks, kasutades diferentsiaali märgi alla viimise võtet (Järeldust 1).

Näide 1. Leiame määramata integraali, kasutades Lauset 1

$$\int (ax+b)^{\gamma}\,dx \overset{\gamma\neq-1}{\underset{a\neq0}{=}} \left[\begin{array}{c} ax+b = t = \varphi^{-1}(x) \\ x = (t-b)/a = \varphi(t) \\ \varphi'(t) = 1/a \end{array}\right] = \int t^{\gamma}\,(1/a)\;dt =$$

$$= \frac{1}{a(\gamma+1)}t^{\gamma+1} + C = \left[\begin{array}{c} \text{teostame muutujate} \\ \text{tagasivahetuse } t = ax+b \end{array}\right] = \frac{(ax+b)^{\gamma+1}}{a(\gamma+1)} + C$$

Järelduse 1 abil saame

$$\int x^{\gamma}\,dx \overset{\gamma\neq-1}{=} \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C \Rightarrow \int (ax+b)^{\gamma}\,d\,(ax+b) \overset{\gamma\neq-1}{=} \frac{(ax+b)^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C$$

ja et $dx = (1/a)\, d\,(ax+b)$, siis

$$\int (ax+b)^\gamma\, dx \overset{\gamma\neq -1}{\underset{a\neq 0}{=}} \frac{1}{a}\int (ax+b)^\gamma\, d\,(ax+b) = \frac{(ax+b)^{\gamma+1}}{a(\gamma+1)} + C_1.$$

Kontrollime:

$$\left(\frac{(ax+b)^{\gamma+1}}{a(\gamma+1)} + C_1\right)' = \frac{\gamma+1}{a(\gamma+1)}\,(ax+b)^\gamma\cdot a = (ax+b)^\gamma\,. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame integraali

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}.$$

Et kolmanda juure all oleva avaldise tuletis on $4x^3$ ja murru lugeja on x^3, siis valime muutujate vahetuse seosega $t = \sqrt[3]{x^4+1}$:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x^4+1} = \varphi^{-1}(x), \\ x^4 = t^3-1,\ 4x^3dx = 3t^2dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{3t^2dt}{4t} = \int \frac{3t}{4}\,dt = \frac{3t^2}{8} + C = \frac{3\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}}{8} + C.$$

Teisalt,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{1}{4}\int \left(x^4+1\right)^{-1/3} d\left(x^4+1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(x^4+1\right)^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2} + C.$$

Kontrollime:

$$\left(\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2} + C\right)' = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(x^4+1\right)^{-1/3}\cdot 4x^3 = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Leiame integraali

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[7]{\sin^6 x}}.$$

Et $(\sin x)' = \cos x$ ja lugejas on vaba tegur $\cos x$, siis muutujate vahetus $\sin x = t$ peaks muutma integreeritava avaldise lihtsamaks:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[7]{\sin^6 x}} = \left[\begin{array}{c} \sin x = t = \varphi^{-1}(x), \\ \cos x\, dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\sqrt[7]{t^6}} =$$

$$= \int t^{-6/7}dt = \frac{t^{1/7}}{1/7} + C = 7\sqrt[7]{\sin x} + C.$$

Teisalt,

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[7]{\sin^6 x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[7]{\sin^6 x}} = \int (\sin x)^{-6/7}\, d \sin x = 7\sqrt[7]{\sin x} + C. \qquad \diamondsuit$$

Näidete 4 −7 korral kasutame diferentsiaali märgi alla viimise võtet.

Näide 4. Leiame integraali

$$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx = \left[d\,(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2} \right] = \int (\arctan x)^3\, d\,(\arctan x) =$$

$$= \frac{(\arctan x)^4}{4} + C. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Leiame integraali

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} = \left[d\,(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] =$$

$$= \int \frac{d\,(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln|\arcsin x| + C. \qquad \diamondsuit$$

Näide 6. Leiame integraali

$$\int \frac{dx}{x\,(\ln x)\,(\ln\ln x)} = \left[d\,(\ln\ln x) = (\ln\ln x)'\, dx = \frac{dx}{(\ln x)\, x} \right] =$$

$$= \int \frac{d\,(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C. \qquad \diamondsuit$$

Näide 7. Leiame integraali

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \left[d\,(1+\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] =$$

$$= \int (1+\tan x)^{-1/2}\, d\,(1+\tan x) = 2\sqrt{1+\tan x} + C. \qquad \diamondsuit$$

2.4. Ositi integreerimine määramata integraalis

Olgu $u(x)$ ja $v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid hulgal X. Kuna

$$(uv)' = u'v + uv',$$

siis

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

Eeldusel, et eksisteerib $\int uv'dx$, on võimalik võtta viimase seose mõlemast poolest määramata integraal. Et

$$\int (uv)'\, dx = uv + C,$$

siis eksisteerib ka $\int u'vdx$ ja saame tulemuseks

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'vdx, \tag{2.4.1}$$

kusjuures suvalise konstandi C võtame kokku teise liidetavaga, st kahe suvalise konstandi summa on suvaline konstant. Kuna $dv = v'\, dx$ ja $du = u'\, dx$, siis seos (2.4.1) on esitatav kujul

$$\int udv \quad = uv - \int v\, du. \tag{2.4.2}$$

Lause 1 (*ositi integreerimise valem*). Kui $u(x)$ ja $v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid hulgal X ja eksisteerib määramata integraal $\int uv'dx$, siis eksisteerib ka määramata integraal $\int u'vdx$, kusjuures paika peab seos *(*2.4.2*)*.

Määramata integraali $\int f(x)\, dx$ leidmisel ositi integreerimise abil üritatakse suurust $f(x)\, dx$ lahutada korrutiseks $uv'\, dx$ ehk udv nii, et ositi integreerimisel saadav integraal $\int u'vdx$ ehk $\int v\, du$ oleks võimalikult lihtne. Seega tuleb ositi integreerimise valemi (2.4.2) rakendamisel valida tegurid u ja dv nii, et

1^o funktsiooni u tuletis u' oleks lihtsam kui funktsioon u ise;

2^o funktsioon v oleks diferentsiaali dv põhjal lihtsalt leitav.

Näide 1. Leiame ositi integreerimise valemi (2.4.2) abil integraali $\int xe^x dx$.

Et $x' = 1$ ja $(e^x)' = e^x$, siis tingimuse 1^o põhjal oleks otstarbekas valida $u = x$ ja $dv = e^x dx$ ning sellise valiku korral on ka tingimust 2^o arvestatud, sest

$$dv = e^x dx \;\Rightarrow\; v = e^x.$$

NB! Seose (2.4.2) parema poole leidmisel arvestame, et kahe suvalise konstandi summa on jälle suvaline konstant, ja lisame suvalise konstandi C alles integraali $\int v\, du$ leidmisel. Seega

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & \vdots & du = dx \\ dv = e^x dx & \vdots & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C. \quad \diamondsuit$$

Kui me oleks Näites 1 valinud tegurid teisiti, siis oleks peale ositi integreerimise esimest sammu saanud esialgsest keerukama integraali, nimelt

$$\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ccc} u = e^x & \vdots & du = e^x dx \\ dv = xdx & \vdots & v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{x^2 e^x}{2} - \int \frac{x^2 e^x}{2} dx.$$

Näide 2. Leiame ositi integreerides integraali $\int x^3 \ln x \, dx$.

Et $\left(x^3\right)' = 3x^2$ ja $(\ln x)' = 1/x$, siis funktsiooni $\ln x$ tuletis on lihtsam kui funktsioon ise ning tingimuse 1^o põhjal oleks otstarbekas valida $u = \ln x$ ja $dv = x^3 dx$ ning sellise valiku korral on ka tingimust 2^o arvestatud, sest

$$dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}.$$

Seega

$$\int x^3 \ln x \, dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \ln x & \vdots & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx & \vdots & v = x^4/4 \end{array} \right] = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3 dx}{4} =$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C. \quad \diamondsuit$$

Näide 3. Leiame ositi integreerides integraali $\int \arctan x \, dx$.

Et

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad 1' = 0,$$

siis funktsiooni $\arctan x$ tuletis on lihtsam kui funktsioon ise ning tingimuse 1^o põhjal oleks otstarbekas valida $u = \arctan x$ ja $dv = dx$ ning sellise valiku korral on ka tingimust 2^o arvestatud, sest

$$dv = dx \Rightarrow v = x.$$

Järelikult,

$$\int \arctan x \, dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \arctan x & \vdots & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{array} \right] = x \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + C =$$

$$= x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C. \quad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame ositi integreerides integraali $\int \arcsin x \, dx$.

Et

$$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2},$$

siis funktsiooni $\arcsin x$ tuletis on lihtsam kui funktsioon ise ning tingimuse 1^o põhjal on otstarbekas valida $u = \arcsin x$ ja $dv = dx$ ning sellise valiku korral on ka tingimust 2^o arvestatud, sest

$$dv = dx \ \Rightarrow \ v = x.$$

Seega

$$\int \arcsin x\, dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & \vdots & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{bmatrix} = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad \diamondsuit$$

Näide 5. Leiame ositi integreerides integraali $\int e^x \sin x\, dx$. Et $(e^x)' = e^x$ ja $(\sin x)' = \cos x$, siis kummagi funktsiooni tuletis ei ole lihtsam kui funktsioon ise. Mõlema funktsiooni algfunktsioon on lihtsalt leitav. Saame

$$\int e^x \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^x & \vdots & du = e^x dx \\ dv = \sin x\, dx & \vdots & v = -\cos x \end{bmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{saadud integraal ei ole lihtsam kui lähteintegraal,} \\ \text{rakendame veel kord ositi integreerimist} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^x & \vdots & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & \vdots & v = \sin x \end{bmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx.$$

Võttes sellest võrduste ahelast esimese ja viimase lüli, saame seose

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx,$$

millest leiame, et

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C. \quad \diamondsuit$$

Lause 2 (*üldistatud ositi integreerimise valem*). Kui $u(x)$ ja $v(x)$ on n korda diferentseeruvad hulgal X ja eksisteerib määramata integraal $\int uv^{(n)} dx$, siis eksisteerib ka määramata integraal $\int vu^{(n)} dx$, kusjuures kehtib seos

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx. \tag{2.4.3}$$

Tõestus. Antud väide järeldub seoste ahelast

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - \int u'\,v^{(n-1)}dx,$$
$$\int u'v^{(n-1)}\,dx = u'v^{(n-2)} - \int u''v^{(n-2)}\,dx,$$
$$\int u''v^{(n-2)}\,dx = u''v^{(n-3)} - \int u'''v^{(n-3)}\,dx,$$
$$\ldots$$
$$\int u^{(n-2)}v''\,dx = u^{(n-2)}v' - \int u^{(n-1)}v'\,dx,$$
$$\int u^{(n-1)}v'\,dx = u^{(n-1)}v - \int u^{(n)}v\,dx. \qquad \square$$

Näide 6. Leiame üldistatud ositi integreerimise valemi abil integraali $\int e^x \sin x\,dx$. Juhul $n = 2$ saame valemile (2.4.3) kuju

$$\int uv''dx = uv' - u'v + \int u''vdx. \tag{2.4.4}$$

Et $(e^x)'' = e^x$, siis valiku $u = \sin x$ ja $v = e^x$ korral

$$\int e^x \sin xdx = \int (\sin x)\,(\,e^x)''\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{rakendame}\\ \text{valemit (2.4.4)}\end{array}\right] =$$
$$= (\sin x)\,(e^x)' - (\sin x)'\,(e^x) + \int (\sin x)''\,(e^x)\,dx =$$
$$= (\sin x)\,(e^x) - (\cos x)\,(e^x) + \int (-\sin x)\,(e^x)\,dx =$$
$$= (\sin x - \cos x)\,e^x - \int e^x \sin xdx.$$

Avaldame meid huvitava tulemuse

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\,(\sin x - \cos x) + C. \qquad \diamondsuit$$

Näide 7. Leiame üldistatud ositi integreerimise valemi abil integraali $\int x^8 \cos x\,dx$.

Et $x^8\,(\cos x)^{(8)} = x^8 \cos x$, siis valime selles valemis $n = 8,\ u = x^8$ ja $v = \cos x$. Selle tulemusena saame

$$\int x^8 \cos x\,dx = \int \left(x^8\right)^{(0)}(\cos x)^{(8)}\,dx = x^8\,(\cos x)^{(7)} - \left(x^8\right)'(\cos x)^{(6)} +$$
$$+ \left(x^8\right)''(\cos x)^{(5)} - \left(x^8\right)'''(\cos x)^{(4)} + \left(x^8\right)^{(4)}(\cos x)''' - \left(x^8\right)^{(5)}(\cos x)'' +$$
$$+ \left(x^8\right)^{(6)}(\cos x)' - \left(x^8\right)^{(7)}(\cos x)^{(0)} + \int \left(x^8\right)^{(8)}(\cos x)^{(0)}\,dx =$$
$$= x^8 \sin x + 8x^7 \cos x - 56x^6 \sin x - 336x^5 \cos x + 1680x^4 \sin x +$$
$$+ 6720x^3 \cos x - 20160x^2 \sin x - 40320x \cos x + 40320 \sin x + C. \qquad \diamondsuit$$

2.5. Polünoomi teguriteks lahutamine

Olgu

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

n-astme polünoom, kusjuures suurused a_k $(0 \leq k \leq n)$ on konstandid ja $a_0 \neq 0$. Vastavalt algebra põhiteoreemile on polünoomil $P_n(x)$ kompleksarvude hulgal täpselt n nullkohta, arvestades nullkohtade kordsust. Kui neiks nullkohtadeks on $x_1, x_2, \ldots, x_r$, vastavalt kordsustega $k_1, k_2, \ldots, k_r$, siis polünoom $P_n(x)$ avaldub kujul

$$P_n(x) = a_0\left(x - x_1\right)^{k_1}\left(x - x_2\right)^{k_2} \cdots \left(x - x_r\right)^{k_r}, \tag{2.5.1}$$

kusjuures $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Näide 1. Esitame polünoomi $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ kujul (2.5.1).

Et selle polünoomi kordajad on täisarvud ja maksimaalse astme kordaja on üks, siis juhul, kui sel polünoomil on täisarvulisi nullkohti, on need polünoomi vabaliikme tegureiks. Seega selle polünoomi täisarvuliste nullkohtadena tulevad kõne alla ± 1 ja ± 2. Leiame, et $P_4(1) = 0$, st võime valida $x_1 = 1$. Leiame Horneri skeemi abil polünoomi $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ jagatise polünoomiga $x - 1$:

	1	−3	1	3	−2
1	1	−2	−1	2	**0**

,

st

$$\left(x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2\right) : (x - 1) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Jagatisena saadud polünoomi väärtus kohal 1 on samuti null. Kasutame veel kord Horneri skeemi:

	1	−2	−1	2
1	1	−1	−2	**0**

,

st 1 on vähemalt kahekordne polünoomi $P_4(x)$ nullkoht ja

$$\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) : (x - 1) = x^2 - x - 2.$$

Ülejäänud nullkohtade leidmiseks lahendame ruutvõrrandi

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

saades, et $x_2 = -1$ ja $x_3 = 2$. Seega $k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = 1$ ja

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^2 (x + 1)(x - 2). \qquad \diamondsuit$$

Piirdume järgnevalt reaalsete kordajatega polünoomi $P_n(x)$ tegureiks lahutamisega, s.o

$$a_k \in \mathbf{R}\ (0 \leq k \leq n).$$

Olgu $\gamma = \alpha + i\beta$ polünoomi $P_n(x)$ kompleksarvuline nullkoht. Seega, $P_n(\gamma) = 0$. Käsitleme viimast seost kui kahe kompleksarvu võrdumise tingimust. Kui aga kaks kompleksarvu on võrdsed, on võrdsed ka nende kaaskompleksarvud:

$$\overline{P_n(\gamma)} = \overline{0}.$$

Arvestades, et kompleksarvude summa kaaskompleksarv on liidetavate kaaskompleksarvude summa, kompleksarvude korrutise kaaskompleksarv on tegurite kaaskompleksarvude korrutis ja kompleksarvu astme kaaskompleksarv on kaaskompleksarvu aste, saame, et

$$P_n(\overline{\gamma}) = 0,$$

st koos nullkohaga $\alpha + i\beta$ on reaalsete kordajatega polünoomi nullkohaks ka kaaskompleksarv $\alpha - i\beta$. Osutub (tõestage), et reaalsete kordajatega polünoomi $P_n(x)$ korral langevad kokku nullkohtade $\alpha + i\beta$ ja $\alpha - i\beta$ kordsused. Et korrutis

$$\begin{gathered}(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = \\ = x^2 - (\alpha - i\beta + \alpha + i\beta)\,x + \alpha^2 + \beta^2 = \\ = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q\end{gathered}$$

on reaalsete kordajatega polünoom, st $p, q \in \mathbf{R}$, siis polünoomi $P_n(x)$ esitus (2.5.1) on viidav kujule

$$P_n(x) = a_0\,(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_\mu)^{k_\mu} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdots \left(x^2 + p_\nu x + q_\nu\right)^{l_\nu}, \quad (2.5.2)$$

kus $x_1, \ldots, x_\mu$ on polünoomi $P_n(x)$ reaalarvulised nullkohad vastavalt kordsustega $k_1, \ldots, k_\mu$ ja kompleksarvulistele nullkohtadele, täpsemini erinevatele kaaskompleks-arvuliste nullkohtade paaridele kordsusega l_i vastavad tegurid $\left(x^2 + p_i x + q_i\right)^{l_i}$, kusjuures $k_1 + \ldots + k_\mu + 2\,(l_1 + \ldots + l_\nu) = n$.

Näide 2. Esitame polünoomi $x^4 + 1$ kujul (2.5.2).

Selle polünoomi nullkohtadeks on juure $\sqrt[4]{-1}$ erinevad väärtused

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\; x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\; x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

kusjuures $\overline{x_4} = x_1$ ja $\overline{x_3} = x_2$. Leiame, et

$$(x - x_1)\,(x - x_4) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x^2 - x\sqrt{2} + 1$$

ja

$$(x - x_2)\,(x - x_3) = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x^2 + x\sqrt{2} + 1$$

ning

$$x^4 + 1 = \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right). \qquad \diamondsuit$$

2.6. Ratsionaalfunktsiooni osamurdudeks lahutamine

Olgu $Q_m(x)/P_n(x)$ ratsionaalfunktsioon, kusjuures $Q_m(x)$ on m-astme ja $P_n(x)$ on n-astme polünoom ning $m < n$, st tegemist on lihtmurruga. Liigmurru, st $(m \geq n)$ korral tuleb esiteks eraldada täisosa. Selleks tuleb polünoomi $Q_m\,(x)$ jagada polünoomiga $P_n\,(x)$. Saame

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \overset{m \geq n}{\equiv} R_{m-n}\,(x) + \frac{S_k(x)}{P_n(x)},$$

kusjuures $S_k(x)\ \ (k < n)$ on polünoomide jagamisel tekkiv jääk ja $S_k(x)/P_n(x)$ on lihtmurd.

Näide 1. Eraldame liigmurru

$$\frac{6x^5 - 9x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 10x - 5}{3x^3 + 2x - 3}$$

täisosa. Kasutame skeemi

$$\begin{array}{rl|l}
- & 6x^5 - 9x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 10x - 5 & 3x^3 + 2x - 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{6x^5 \qquad\quad +4x^3 - 6x^2 \qquad\qquad\quad} & 2x^2 - 3x - 5 \\
- & -9x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 10x - 5 & \\
 & \underline{-9x^4 \qquad\qquad -6x^2 + 9x \quad} & \\
- & -15x^3 + 24x^2 \quad +x - 5 & \\
 & \underline{-15x^3 \qquad\quad -10x + 15} & \\
 & 24x^2 + 11x - 20 &
\end{array}$$

Tulemuseks saame

$$\frac{6x^5 - 9x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 10x - 5}{3x^3 + 2x - 3} = 2x^2 - 3x - 5 + \frac{24x^2 + 11x - 20}{3x^3 + 2x - 3}. \quad \diamondsuit$$

Lause1. Kui $Q_m(x)/P_n(x)$ on lihtmurd ja polünoomil

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n$$

on nullkohad $x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_r$ kordsustega $k_1,\ k_2,\ \ldots\ , k_r\ \ (k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n)$, st polünoom $P_n(x)$ on esitatav kujul

$$P_n(x) = a_0\,(x - x_1)^{k_1}\,(x - x_2)^{k_2}\ \cdots\ (x - x_r)^{k_r}\,,$$

siis $Q_m(x)/P_n(x)$ on ühesel viisil lahutatav osamurdudeks

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_{1;1}}{x - x_1} + \frac{a_{1;2}}{(x - x_1)^2} + \ \ldots\ + \frac{a_{1;k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{a_{2;1}}{x - x_2} + \frac{a_{2;2}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{a_{2;k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ \ldots\ +$$

$$+\frac{a_{r;1}}{x-x_r}+\frac{a_{r;2}}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r;k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}.$$

Tõestust vt [5] , lk 321–322. $\square$

Näide 2. Lahutame murru $1/(x^4-1)$ osamurdudeks.

Et

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i),$$

siis

$$x^4-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=i,\ x_4=-i,$$

kusjuures $k_1=k_2=k_3=k_4=1$. Kasutades Lauset 1, saame lahutuse kujul

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-i}+\frac{D}{x+i}, \tag{2.6.1}$$

kusjuures on loobutud indekstähistusest, st $A=a_{1;1}, B=a_{2;1}, C=a_{3;1}$ ja $D=a_{4;1}$. Minnes seose (2.6.1) paremas pooles ühisele nimetajale, leiame, et iga $x\in \mathbf{R}\backslash\{1;\ -1;\ i;\ -i\}$ korral

$$\frac{1}{x^4-1}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x-i)(x+i)+B(x-1)(x-i)(x+i)+C(x-1)(x+1)(x+i)}{x^4-1}+$$

$$+\frac{D(x-1)(x+1)(x-i)}{x^4-1},$$

st iga $x\in\mathbf{C}$ korral

$$\begin{gathered}1=A(x+1)(x-i)(x+i)+B(x-1)(x-i)(x+i)+\\+C(x-1)(x+1)(x+i)+D(x-1)(x+1)(x-i)\end{gathered} \tag{2.6.2}$$

ehk

$$1=A(x^3+x^2+x+1)+B\left(x^3-x^2+x-1\right)+C\left(x^3+ix^2-x-i\right)+D(x^3-ix^2-x+i)$$

või

$$\begin{gathered}1=x^3(A+B+C+D)+x^2(A-B+iC-iD)+\\+x(A+B-C-D)+(A-B-iC+iD).\end{gathered} \tag{2.6.3}$$

Kaks polünoomi on igal argumendi väärtusel võrdsed parajasti siis, kui on võrdsed vastavate astmete kordajad. Lähtudes seosest (2.6.3), saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}A+B+C+D= & 0\\A-B+iC-iD= & 0\\A+B-C-D= & 0\\A-B-iC+iD= & 1,\end{cases}$$

mis Lause 1 põhjal on üheselt lahenduv. Liites selle süsteemi võrrandid, saame $4A=1$. Seega $A=1/4$. Liites süsteemi esimese ja kolmanda võrrandi, leiame, et $2A+2B=0$, millest $B = -A = -1/4$. Liites teisele võrrandile arvuga i korrutatud esimese võrrandi ja arvestades leitud A ja B väärtusi, saame

$$\frac{1}{2} + 2iC = 0 \Rightarrow C = \frac{i}{4}$$

ja esimesest võrrandist leiame seejärel, et $D = -i/4$. Seega saame murru $1/(x^4 - 1)$ lahutuse osamurdudeks

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4\,(x-1)} - \frac{1}{4\,(x+1)} + \frac{i}{4\,(x-i)} - \frac{i}{4\,(x+i)}.$$

Seosest (2.6.2) on lihtne leida kordajaid. Võttes seoses (2.6.2) muutuja x võrdseks arvuga 1, saame

$$1 = A(1+1)\,(1-i)\,(1+i) \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{4}.$$

Analoogiliselt

$$x = -1 \;\Rightarrow 1 = \;B\,(-1-1)\,(-1-i)\,(-1+i) \Rightarrow\; B = -\frac{1}{4},$$

$$x = i \;\Rightarrow\; 1 = C\,(i-1)\,(i+1)\,(i+i) \;\Rightarrow\; C = \frac{i}{4},$$

$$x = -i \;\Rightarrow\; 1 = D\,(-i-1)\,(-i+1)\,(-i-i) \;\Rightarrow\; D = -\frac{i}{4}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Lahutame murru $1/(x^4 - 4x^3)$ osamurdudeks.

Et

$$x^4 - 4x^3 = x^3(x-4),$$

siis

$$x^4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\; x_2 = 4,$$

kusjuures $k_1 = 3$ ja $k_2 = 1$. Kasutades lauset 1, saame lahutuse kujul

$$\frac{1}{x^4 - 4x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-4},$$

millest saame

$$\frac{1}{x^4 - 4x^3} = \frac{Ax^2\,(x-4) + Bx\,(x-4) + C(x-4) + Dx^3}{x^4 - 4x^3}$$

ehk iga $x \in \mathbf{C}$ korral

$$1 = Ax^2\,(x-4) + Bx\,(x-4) + C(x-4) + Dx^3$$

või

$$1 = x^3\,(A+D) + x^2\,(-4A+B) + x\,(-4B+C) - 4C \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -4A + B = 0 \\ -4B + C = 0 \\ -4C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/64 \\ B = -1/16 \\ C = -1/4 \\ D = 1/64. \end{cases}$$

Järelikult

$$\frac{1}{x^4 - 4x^3} = -\frac{1}{64x} - \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{64\,(x-4)}. \qquad \diamondsuit$$

Kui reaalsete kordajatega polünoomi $P_n(x)$ reaalarvulisteks nullkohtadeks on $x_1, \ldots, x_\mu$, vastavalt kordsustega $k_1, \ldots, k_\mu$, ja erinevatele kaaskompleksarvuliste nullkohtade paaridele, kordsusega l_i, vastavad tegurid on $\left(x^2 + p_i x + q_i\right)^{l_i}$, siis seose (2.5.2) põhjal on polünoom $P_n(x)$ esitatav kujul

$$P_n(x) = a_0\,(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_\mu)^{k_\mu} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdots \left(x^2 + p_\nu x + q_\nu\right)^{l_\nu}, \qquad (2.6.4)$$

kusjuures $k_1 + \ldots + k_\mu + 2\,(l_1 + \ldots + l_\nu) = n$.

Lause 2. Kui $Q_m(x)/P_n(x)$ on reaalsete kordajatega lihtmurd, kusjuures polünoom $P_n(x)$ on esitatav kujul (2.6.4), siis $Q_m(x)/P_n(x)$ on ühesel viisil lahutatav osamurdudeks

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} &= \frac{a_{1;1}}{x - x_1} + \frac{a_{1;2}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1;k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{a_{2;1}}{x - x_2} + \frac{a_{2;2}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{a_{2;k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots + \\ &+ \frac{a_{\mu;1}}{x - x_\mu} + \frac{a_{\mu;2}}{(x - x_\mu)^2} + \ldots + \frac{a_{\mu;k_\mu}}{(x - x_\mu)^{k_\mu}} + \\ &+ \frac{b_{1;1}x + c_{1;1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{b_{1;\,l_1}x + c_{1;\,l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \ldots + \\ &+ \frac{b_{\nu;1}x + c_{\nu;1}}{x^2 + p_\nu x + q_\nu} + \ldots + \frac{b_{\nu;\,l_\nu}x + c_{\nu;\,l_\nu}}{(x^2 + p_\nu x + q_\nu)^{l_\nu}}. \end{aligned} \qquad (2.6.5)$$

Tõestust vt [5], lk 321–322. $\square$

Märkus 1. Lauses 2 saadud reaalsete kordajatega lihtmurru $Q_m(x)/P_n(x)$ esituses (2.6.5) konstantse kordaja $a_{i\,j}$ indeks i näitab, et see liidetav vastab nullkohale x_i ja indeks j langeb kokku murru nimetajas oleva astme astmenäitajaga. Konstantsete kordajate $b_{i\,j}$ ja $c_{i\,j}$ indeks i vastab kaaskompleksarvuliste nullkohtade paari poolt määratud tegurile $x^2 + p_i x + q_i$ ja indeks j langeb kokku murru nimetajas oleva astmenäitajaga.

Näide 4. Lahutame murru $1/(x^4 - 1)$ osamurdudeks, kasutades Lauset 2.

Et

$$x^4 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)\left(x^2 + 1\right),$$

siis lahutust otsime kujul

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Minnes ühisele nimetajale, leiame, et

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A\,(x+1)\left(x^2+1\right)+B\,(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-1\right)}{x^4-1}$$

ehk

$$1=A\,(x+1)\left(x^2+1\right)+B\,(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-1\right) \tag{2.6.6}$$

või

$$1=x^3(A+B+C)+x^2(A-B+D)+x(A+B-C)+(A-B-D). \tag{2.6.7}$$

Võrrutades seoses (2.6.7) vastavate astmete kordajad, saame Lause 2 põhjal üheselt lahenduva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A+B+C= & 0\\ A-B+D= & 0\\ A+B-C= & 0\\ A-B-D= & 1,\end{cases}$$

mille lahendamisel leiame, et $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=0$ ja $D=-\frac{1}{2}$. Kordajad on võimalik leida ka seose (2.6.6) abil:

$$x=1\ \Rightarrow\ 1\equiv A\,(1+1)\left(1^2+1\right)\ \Rightarrow A=\frac{1}{4},$$

$$x=-1\ \Rightarrow 1=B\,(-1-1)\left((-1)^2+1\right)\ \Rightarrow\ B=-\frac{1}{4},$$

$$x=i\ \Rightarrow 1=(Ci+D)\left(i^2-1\right)\ \Rightarrow -2D-2iC=1\ \Rightarrow D=-\frac{1}{2},\ C=0.$$

Järelikult

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4\,(x-1)}-\frac{1}{4\,(x+1)}-\frac{1}{2\,(x^2+1)}.\qquad\diamondsuit$$

Näites 2 saadud lahutusest on lihtsalt saadav Näite 4 lahutus, sest

$$\frac{i}{4\,(x-i)}-\frac{i}{4\,(x+i)}=\frac{i\,(x+i)-i\,(x-i)}{4\,(x-i)\,(x+i)}=\frac{-1-1}{4\,(x^2+1)}=-\frac{1}{2\,(x^2+1)}.\qquad\diamondsuit$$

Märkus 2. Kerkib küsimus, kumba kordajate leidmise võtet murru $Q_m(x)/P_n(x)$ osamurdudeks lahutamisel kasutada? Kas
1^o võrrutada muutuja x ühesuguste astmete kordajad või
2^o anda muutujale x teatud väärtused?
Teine võte on efektiivsem, kui murru nimetaja $P_n(x)$ nullkohad on ühekordsed. Kui polünoomil $P_n(x)$ on kordseid nullkohti, siis eelistatakse esimest võtet või kirjutatakse esimese võtte abil välja võrrandisüsteem kordajate leidmiseks ja teise võtte abil lihtsustatakse seda süsteemi.

2.7. Lihtsamate osamurdude integreerimine

Vaatleme arenduses (2.6.5) esinevate osamurdude integreerimist. Tegemist on nelja juhuga.

I

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d\,(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

II

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m}\, d\,(x-a) \underset{m\in\mathbf{N}}{\overset{m\neq 1}{=}} \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C =$$

$$= \frac{1}{(1-m)\,(x-a)^{m-1}} + C.$$

III

$$\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}dx = \int \frac{bx+c}{x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}dx =$$

$$= \int \frac{bx+c}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}dx = \left[\begin{array}{c} x+\frac{p}{2} = t,\ x = t - \frac{p}{2}, \\ dx = dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{b(t-\frac{p}{2})+c}{t^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{et polünoomi } x^2+px+q \text{ nullkohtadeks on kompleksarvud,} \\ \text{siis diskriminant } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \text{ ja kasutame tähistust} \\ a^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ ning } \ k = c - \frac{bp}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{bt+k}{t^2+a^2}dt = \frac{b}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \frac{k}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{b}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{k}{a}\arctan\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{b}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + \frac{c-\frac{bp}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}} + C =$$

$$= \frac{b}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2c-bp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Näide 1. Leiame määramata integraali $\int \frac{dx}{x^4-1}$. Kasutame Näites 2.6.4 leitud lahutust osamurdudeks

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Saame

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} &= \int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}\right) dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C = \\ &= \ln\sqrt[4]{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} - \frac{1}{2}\arctan x + C. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

IV

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{bx+c}{\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q\right)^m}dx =$$

$$= \int \frac{bx+c}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^m}dx = \left[\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t,\ x=t-\frac{p}{2}, \\ dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{b(t-\frac{p}{2})+c}{\left(t^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^m}dt = \left[a^2 = q-\left(\frac{p}{2}\right)^2,\ k=c-\frac{bp}{2}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{et polünoomi } x^2+px+q \text{ nullkohtadeks on kompleksarvud,} \\ \text{siis diskriminant } \left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0 \text{ ja kasutame tähistust} \\ a^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ ning } k=c-\frac{bp}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{bt+k}{(t^2+a^2)^m}dt = \frac{b}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{(t^2+a^2)^m} + \frac{k}{a^{2m-1}}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2+1\right)^m} =$$

$$= \frac{b}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{k}{a^{2m-1}}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2+1\right)^m} = \left[\begin{array}{c} \text{teises liidetavas} \\ u=\frac{t}{a} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{b}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{k}{a^{2m-1}} \int \frac{du}{(u^2+1)^m} = \left[\text{olgu } I_m = \int \frac{du}{(u^2+1)^m}\right]$$

$$= \frac{b}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{k}{a^{2m-1}} I_m, \tag{2.7.1}$$

Et

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C$$

ja

$$I_m = \int \frac{du}{(u^2+1)^m} = \int \frac{(u^2+1)-u^2}{(u^2+1)^m} du = I_{m-1} - \int u \frac{udu}{(u^2+1)^m} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \rho = u & \vdots & d\rho = du \\ d\sigma = \dfrac{udu}{(u^2+1)^m} & \vdots & \sigma = \dfrac{1}{2(1-m)(u^2+1)^{m-1}} \end{array}\right] =$$

$$= I_{m-1} - \frac{u}{2(1-m)(u^2+1)^{m-1}} + \frac{1}{2(1-m)} I_{m-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2(1-m)}\right) I_{m-1} - \frac{u}{2(1-m)(u^2+1)^{m-1}},$$

st peab paika rekurrentne valem

$$I_m = \left(1 + \frac{1}{2(1-m)}\right) I_{m-1} - \frac{u}{2(1-m)(u^2+1)^{m-1}} \quad (m = 2; 3; \ldots),$$

siis saame samm-sammult leida I_2, I_3, … . Näiteks,

$$I_2 = \frac{I_1}{2} + \frac{u}{2(u^2+1)} = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{\arctan u}{2} + C.$$

Saadud avaldise suuruse I_m jaoks paigutame seosesse (2.7.1) ja seejärel teostame muutujate tagasiasenduse.

Näide 5. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2} dx.$$

Et

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 + 2i, \ x_2 = -1 - 2i,$$

siis leitav integraal on IV tüüpi. Seega

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{x-1}{\left((x+1)^2+4\right)^2} dx = \left[\begin{array}{c} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{t-2}{\left(t^2+4\right)^2} dt = \int \frac{t}{\left(t^2+2^2\right)^2} dt - \int \frac{2}{\left(t^2+2^2\right)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2+4\right)}{\left(t^2+4\right)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{d\frac{t}{2}}{\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \int \frac{d\frac{t}{2}}{\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2+1\right)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{integraalis} \\ u = t/2,\ t = 2u \end{array} \right] = -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{\left(u^2+1\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \int \frac{\left(u^2+1\right) - u^2}{\left(u^2+1\right)^2} du =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{4} \int \frac{u^2 du}{\left(u^2+1\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \arctan u + \frac{1}{8} \int u \frac{2u du}{\left(u^2+1\right)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \rho = u & \vdots & d\rho = du \\ d\sigma = \dfrac{2u du}{\left(u^2+1\right)^2} & \vdots & \sigma = -\dfrac{1}{u^2+1} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{4} \arctan u - \frac{u}{8\left(u^2+1\right)} + \frac{1}{8} \int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{8} \arctan u - \frac{u}{8\left(u^2+1\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\left(t^2+4\right)} - \frac{1}{8} \arctan \frac{t}{2} - \frac{\frac{t}{2}}{8\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2+1\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\left((x+1)^2+4\right)} - \frac{1}{8} \arctan \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4\left((x+1)^2+4\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{8} \arctan \frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{4\left(x^2+2x+5\right)} + C. \qquad \diamondsuit$$

2.8. Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Sageli on otstarbeks enne trigonomeetriliste funktsioonide integreerimist teisendada integreeritavat avaldist, kasutades mõnda järgnevatest valemitest:

$$\begin{array}{ll} 2\sin x\cos x = \sin 2x, & 2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y), \\ 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, & 2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y), \\ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, & 2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y). \end{array}$$

Näide 1. Leiame määramata integraali

$$\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4\,dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(2\sin^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{64}\int (1-\cos 4x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 8x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame määramata integraali

$$\int \cos^2 3x\cos^2 5x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\cos 3x\cos 5x)^2\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos(-2x) + \cos 8x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\cos^2 2x + 2\cos 2x\cos 8x + \cos^2 8x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \cos(-6x) + \cos 10x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 16x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 16x}{32}\right) + C. \qquad \diamondsuit$$

Olgu $R(u,v)$ kahe muutuja ratsionaalfunktsioon, st

$$R(u,v) = \frac{Q(u,v)}{P(u,v)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} a_{ij}u^i v^j}{\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{q} b_{ij}u^i v^j}.$$

Järgnevalt käsitleme trigonomeetriliste funktsioonide suhtes ratsionaalfunktsioonide integreerimist.

I Üldine trigonomeetriline asendus

Muutujate vahetust $\tan\dfrac{x}{2} = t$ integraalis $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ nimetatakse *üldiseks trigonomeetriliseks asenduseks.* Et

$$\tan\frac{x}{2} = t \leftrightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ja

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

siis

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$$

Näide 3. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \left[\tan\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5+4\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + 1 - \frac{16}{25}} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 \int \frac{dt}{\left(\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}\cdot\int \frac{d\left(\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)}{\left(\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + C = \frac{2}{3}\arctan\frac{5t+4}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \arctan \left(\frac{5}{3} \tan \frac{1}{2} x + \frac{4}{3} \right) + C. \qquad \diamondsuit$$

Et üldine trigonomeetriline asendus taandab tavaliselt integraali $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ leidmise suhteliselt keeruka ühe muutuja ratsionaalfunktsiooni integreerimisele, on otstarbekam teatud lisatingimuste täidetuse korral kasutada vastavalt muutujate vahetusi $t = \tan x,\ t = \cos x$ või $t = \sin x$. Seega sõltub muutujate vahetus ratsionaalfunktsiooni $R(u, v)$ kujust.

II Muutujate vahetus $t = \tan x$

Kui $R(-u, -v) = R(u, v)$, siis

$$R(u, v) = R\left(u, \frac{v}{u} u\right) = R_1\left(u, \frac{v}{u}\right),$$

kusjuures

$$R_1\left(-u, \frac{v}{u}\right) = R_1\left(-u, \frac{-v}{-u}\right) = R\left(-u, -v\right) = R(u, v) = R_1\left(u, \frac{v}{u}\right),$$

st funktsioon $R_1(x,\, y)$ on paarisfunktsioon muutuja x suhtes, mis tähendab, et $R_1(x,\, y)$ sisaldab vaid muutuja x paarisastmeid. Seega

$$R(\cos x, \sin x) = R(\cos x, \frac{\sin x}{\cos x} \cos x) = R_1(\cos x, \tan x) = R_2(\cos^2 x, \tan x) =$$

$$= R_2(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}, \tan x) = R_2(\frac{1}{1 + \tan^2 x}, \tan x) = R_3(\tan x)$$

ja

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \overset{R(-u,-v)=R(u,v)}{=} \left[t = \tan x \leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2} \right] =$$

$$= \int R_3(t) \frac{dt}{1 + t^2} = \int R_4(t) dt$$

ning juhul $R(-u, -v) = R(u, v)$ on otstarbekas muutujate vahetus $t = \tan x$.

Näide 4. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}.$$

Sel korral $R(u, v) = 1/(uv^3)$ ja

$$R(-u, -v) = \frac{1}{(-u)\,(-v)^3} = \frac{1}{uv^3} = R(u, v)$$

ning

$$\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \left(\frac{1}{\tan^3 x} + 2 \frac{1}{\tan x} + \tan x \right) dx =$$

$$= \left[t = \tan x \leftrightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] = \int \left(\frac{1}{t^3} + 2\frac{1}{t} + t \right) \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\, dt =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C. \qquad \diamondsuit$$

III Muutujate vahetus $t = \sin x$

Kui $R(-u,v) = -R(u,v)$, st $R(u,v)$ on paaritu funktsioon muutuja u suhtes, siis funktsioon $R(u,v)$ on esitatav kujul $R(u,v) = uR_1(u^2,v)$ ja on otstarbekas kasutada muutujate vahetust $t = \sin x$, kusjuures

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x\, dx =$$

$$= \left[t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx,\ \cos^2 x = 1 - t^2 \right] =$$

$$= \int R_1(1-t^2, t) dt = \int R_2(t)\, dt.$$

Näide 5. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos^2 x}.$$

Et $R(u,v) = u/(v+u^2)$ ja

$$R(-u,v) = \frac{-u}{v + (-u)^2} = -\frac{u}{v+u^2} = -R(u,v),$$

siis saame kasutada muutujate vahetust $t = \sin x$. Seega

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos^2 x} = \left[\begin{array}{c} t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{t + (1-t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - t - 1} = -\int \frac{dt}{(t-1/2)^2 - 5/4} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} w = t - 1/2, \\ dw = dt \end{array} \right] = -\int \frac{dw}{w^2 - \left(\sqrt{5}/2\right)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{w^2 - \left(\sqrt{5}/2\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{w - \sqrt{5}/2} - \frac{1}{w + \sqrt{5}/2} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\int \frac{dw}{w - \sqrt{5}/2} - \int \frac{dw}{w + \sqrt{5}/2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|w-\sqrt{5}/2\right| - \ln\left|w+\sqrt{5}/2\right|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\left|w+\sqrt{5}/2\right|}{\left|w-\sqrt{5}/2\right|} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-1/2+\sqrt{5}/2}{t-1/2-\sqrt{5}/2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sin x - 1 + \sqrt{5}}{2\sin x - 1 - \sqrt{5}}\right| + C. \qquad \diamondsuit$$

Kui kasutada Näites 5 esitatud integraali korral üldist trigonomeetrilist asendust, siis

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos^2 x} = \left[\tan\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{2\,t}{1+t^2} + \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{2-2t^2}{t^4+2t^3-2t^2+2t+1}dt$$

ja saadud integraali leidmiseks tuleb esiteks lahendada võrrand

$$t^4+2t^3-2t^2+2t+1=0,$$

mille täpsete lahendite leidmine on keerukam ülesanne. Lahendage see võrrand ja leidke määramata integraal. Milline on järeldus?

IV Muutujate vahetus $t = \cos x$

Kui $R(u,-v) = -R(u,v)$, st $R(u,v)$ on paaritu funktsioon muutuja v suhtes, siis funktsioon $R(u,v)$ on esitatav kujul $R(u,v) = vR_1(u,v^2)$ ja on otstarbekas kasutada muutujate vahetust $t = \cos x$, kusjuures

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R_1(\cos x, \sin^2 x)\sin x\, dx =$$

$$= \left[t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx,\ \sin^2 x = 1-t^2\right] =$$

$$= -\int R_1(t, 1-t^2)dt = \int R_2(t)\, dt.$$

Näide 6. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^2 \sin x}.$$

Et antud ülesande korral $R(u,v) = u/\left((1-u)^2\, v\right)$ ja

$$R(u,-v) = \frac{u}{(1-u)^2(-v)} = -\frac{u}{(1-u)^2\, v} = -R(u,v),$$

siis

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2\sin x} = \int \frac{\cos x\,\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2\sin^2 x} =$$

$$= \left[t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx,\ \sin^2 x = 1-t^2\right] = -\int \frac{t\,dt}{(1-t)^2\,(1-t^2)} =$$

$$= \left[\frac{t}{(t-1)^3\,(t+1)} = \frac{1}{2\,(t-1)^3} + \frac{1}{4\,(t-1)^2} - \frac{1}{8\,(t-1)} + \frac{1}{8\,(t+1)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\,(t-1)^2} - \frac{1}{4\,(t-1)} - \frac{\ln|t-1|}{8} + \frac{\ln|t+1|}{8} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\,(\cos x-1)^2} - \frac{1}{4\,(\cos x-1)} + \ln\sqrt[8]{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} + C. \qquad \diamondsuit$$

2.9. Hüperboolsete funktsioonide integreerimine

Hüperboolsete ja trigonomeetriliste funktsioonide integreerimisel kerkib palju sarnaseid probleeme. Sageli on otstarbekas enne hüperboolsete funktsioonide integreerimist teisendada integreeritavat avaldist, kasutades mõnda järgnevatest valemitest:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, & \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,2x, \\ 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,2x, & 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y = \mathrm{ch}\,(x+y) - \mathrm{ch}\,(x-y), \\ 2\,\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,2x - 1, & 2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y = \mathrm{ch}\,(x+y) + \mathrm{ch}\,(x-y), \\ 2\,\mathrm{ch}^2 x = \mathrm{ch}\,2x + 1, & 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y = \mathrm{sh}\,(x+y) + \mathrm{sh}\,(x-y). \end{array}$$

Näide 1. Leiame määramata integraali

$$\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x)^2\,\mathrm{ch} x\,dx = \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x\,\mathrm{ch}\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\mathrm{ch}\,4x - 1)\ \mathrm{ch}\,x\,dx = \frac{1}{16}\int (\mathrm{ch}\,5x + \mathrm{ch}\,3x)\ dx - \frac{1}{8}\int \mathrm{ch}\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{80}\,\mathrm{sh}\,5x + \frac{1}{48}\,\mathrm{sh}\,3x - \frac{1}{8}\,\mathrm{sh}\,x + C. \qquad \diamondsuit$$

I Üldine hüperboolne asendus

Muutujate vahetust $\mathrm{th}\,\dfrac{x}{2} = t$ integraalis $\int R(\mathrm{ch}\,x,\mathrm{sh}\,x)\,dx$ nimetatakse *üldiseks hüperboolseks asenduseks*. Et

$$\mathrm{th}\,\frac{x}{2} = t \leftrightarrow x = 2\,\mathrm{arth}\,t \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1-t^2},$$

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2} + \mathrm{sh}^2\frac{x}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2} - \mathrm{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

ja

$$\operatorname{sh} x=\frac{2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{th}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2},$$

siis

$$\int R(\operatorname{ch} x,\operatorname{sh} x)\,dx=\int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2\,dt}{1-t^2}=\int R_1(t)\,dt.$$

Näide 2. Leiame määramata integraali

$$\int\frac{dx}{5+\operatorname{sh} x}=\left[\operatorname{th}\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2},\ \operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2}\right]=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1-t^2}}{5+\dfrac{2t}{1-t^2}}=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2-\dfrac{2}{5}t-1}=$$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2-\dfrac{2}{5}t-1}=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t-\dfrac{1}{5}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{26}}{5}\right)^2}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{26}}\int\frac{d\dfrac{5t-1}{\sqrt{26}}}{\left(\dfrac{5t-1}{\sqrt{26}}\right)^2-1}=\left[\frac{5t-1}{\sqrt{26}}=u\right]=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{26}}\int\frac{du}{u^2-1}=-\frac{1}{\sqrt{26}}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{\dfrac{5t-1}{\sqrt{26}}+1}{\dfrac{5t-1}{\sqrt{26}}-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{5t-1+\sqrt{26}}{5t-1-\sqrt{26}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{5\operatorname{th}\dfrac{x}{2}-1+\sqrt{26}}{5\operatorname{th}\dfrac{x}{2}-1-\sqrt{26}}\right|+C.\quad\diamondsuit$$

Mõnikord on integraali $\int R(\operatorname{ch} x,\operatorname{sh} x)\,dx$ leidmisel otstarbekas kasutada funktsiooni $\operatorname{ch} x$ ja $\operatorname{sh} x$ asendamist, kasutades definitsiooni. Näite 2 korral saame

$$\int\frac{dx}{5+\operatorname{sh} x}=\int\frac{dx}{5+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}=\int\frac{2e^x dx}{10e^x+e^{2x}-1}=[e^x=t]=$$

$$= \int \frac{2dt}{10t+t^2-1} = \int \frac{2dt}{(t+5)^2-26} = \frac{\sqrt{26}}{13} \int \frac{d\dfrac{t+5}{\sqrt{26}}}{\left(\dfrac{t+5}{\sqrt{26}}\right)^2 - 1} =$$

$$= \left[\frac{t+5}{\sqrt{26}} = u\right] = \frac{1}{\sqrt{26}} \left(\int \frac{d\,(u-1)}{u-1} - \int \frac{d\,(u+1)}{u+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{26}} \ln \left| \frac{\dfrac{t+5}{\sqrt{26}} - 1}{\dfrac{t+5}{\sqrt{26}} + 1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \ln \left| \frac{t+5-\sqrt{26}}{t+5+\sqrt{26}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{26}} \ln \left| \frac{e^x+5-\sqrt{26}}{e^x+5+\sqrt{26}} \right| + C.$$

Näidake, et kahe erineva meetodi rakendamisel saadud vastused on samad.

II Muutujate vahetus $t = \operatorname{th} x$

Kui $R(-u,-v) = R(u,v)$, siis analoogselt trigonomeetriliste funktsioonidega on määramata integraali $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, dx$ korral otstarbekas muutujate vahetus $t = \operatorname{th} x$, sest

$$R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) = R\left(\operatorname{ch} x, \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \operatorname{ch} x\right) = R_1(\operatorname{ch} x, \operatorname{th} x) = R_2(\operatorname{ch}^2 x, \operatorname{th} x) =$$

$$= R_2\left(\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}, \operatorname{th} x\right) = R_2\left(\frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}, \operatorname{th} x\right) = R_3(\operatorname{th} x)$$

ja

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) dx \overset{R(-u,-v)=R(u,v)}{=} \left[t = \operatorname{th} x \leftrightarrow x = \operatorname{arth} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1-t^2} \right] =$$

$$= \int R_3(t) \frac{dt}{1-t^2} = \int R_4(t) dt.$$

Näide 3. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$$

Et antud ülesande korral $R(u,v) = 1/(uv)$ ja

$$R(-u,-v) = 1/((-u)\,(-v)) = 1/(uv) = R(u,v),$$

siis on rakendatav muutujate vahetus $t = \operatorname{th} x$, kusjuures

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \int \frac{1}{\operatorname{th} x} \cdot \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \left[x = \operatorname{arth} t \leftrightarrow t = \operatorname{th} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{th} x| + C. \qquad \diamondsuit$$

III Muutujate vahetus $t = \operatorname{sh} x$

Kui $R(-u, v) = -R(u, v)$, st $R(u, v)$ on paaritu funktsioon muutuja u suhtes, siis funktsioon $R(u, v)$ on esitatav kujul $R(u, v) = uR_1(u^2, v)$ ja määramata integraali $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, dx$ korral on otstarbekas muutujate vahetus $t = \operatorname{sh} x$, sest

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, dx = \int R_1(\operatorname{ch}^2 x, \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= \left[t = \operatorname{sh} x,\ dt = \operatorname{ch} x\, dx,\ \operatorname{ch}^2 x = 1 + t^2\right] =$$

$$= \int R_1(1 + t^2, t) dt = \int R_2(t)\, dt.$$

Näide 4. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch}^2 x}.$$

Et antud ülesande korral $R(u, v) = u/(v + u^2)$ ja

$$R(-u, v) = -u/(v + (-u)^2) = -u/(v + u^2) = -R(u, v),$$

siis on rakendatav muutujate vahetus $t = \operatorname{sh} x$, kusjuures

$$\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch}^2 x} = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{sh} x,\ dt = \operatorname{ch} x\, dx, \\ \operatorname{ch}^2 x = 1 + t^2 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t + 1 + t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t + 1/2)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\dfrac{t + 1/2}{\sqrt{3}/2}}{\left(\dfrac{t + 1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{t + 1/2}{\sqrt{3}/2} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2 \operatorname{sh} x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Kontrollige, et $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \dfrac{2 \operatorname{sh} x + 1}{\sqrt{3}}$ on funktsiooni $\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch}^2 x}$ algfunktsioon. $\diamondsuit$

IV Muutujate vahetus $t = \operatorname{ch} x$

Kui $R(u, -v) = -R(u, v)$, st $R(u, v)$ on paaritu funktsioon muutuja v suhtes, siis funktsioon $R(u, v)$ on esitatav kujul $R(u, v) = v\, R_1(u, v^2)$ ja määramata integraali $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, dx$ korral on otstarbekas muutujate vahetus $t = \operatorname{ch} x$, sest

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\, dx = \int R_1(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \left[t = \operatorname{ch} x,\ dt = \operatorname{sh} x\, dx,\ \operatorname{sh}^2 x = t^2 - 1\right] =$$

$$= -\int R_1(t,\, t^2 - 1)dt = \int R_2(t)\, dt.$$

Näide 5. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{(1 - \operatorname{ch} x)^2 \operatorname{sh} x}.$$

Et antud ülesande korral $R(u, v) = u/\left((1-u)^2 v\right)$ ja

$$R(u, -v) = u/\left((1-u)^2\,(-v)\right) = -u/\left((1-u)^2 v\right) = -R(u, v),$$

siis on rakendatav muutujate vahetus $t = \operatorname{ch} x$, kusjuures

$$\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{(1 - \operatorname{ch} x)^2 \operatorname{sh} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x dx}{(1 - \operatorname{ch} x)^2 \operatorname{sh}^2 x} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{ch} x,\ dt = \operatorname{sh} x\, dx, \\ \operatorname{sh}^2 x = t^2 - 1 \end{array}\right] = \int \frac{tdt}{(1-t)^2\,(t^2-1)} = \int \frac{tdt}{(t+1)\,(t-1)^3} =$$

$$= \left[\frac{t}{(t+1)\,(t-1)^3} = \frac{1}{8\,(t+1)} - \frac{1}{8\,(t-1)} + \frac{1}{4\,(t-1)^2} + \frac{1}{2\,(t-1)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{8} \ln|t+1| - \frac{1}{8} \ln|t-1| - \frac{1}{4\,(t-1)} - \frac{1}{4\,(t-1)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{8} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{4\,(t-1)} - \frac{1}{4\,(t-1)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{8} \ln\left|\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}\right| - \frac{1}{4\,(\operatorname{ch} x - 1)} - \frac{1}{4\,(\operatorname{ch} x - 1)^2} + C.$$

Kontrollige! $\diamondsuit$

2.10. Algebraliste funktsioonide integreerimine

Olgu $R(u, v)$ kahe muutuja ratsionaalfunktsioon, st

$$R(u, v) = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{ij} u^i v^j}{\sum\limits_{i=0}^{p} \sum\limits_{j=0}^{q} b_{ij} u^i v^j}.$$

I Funktsiooni $R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ **integreerimine**

Teisendame integraali

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

muutujate vahetuse $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ abil. Leiame, et

$$\int R(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d},\ x = \dfrac{b-t^n d}{ct^n - a}, \\ dx = \dfrac{-dnt^{n-1}\left(ct^n - a\right) - cnt^{n-1}\left(b - t^n d\right)}{\left(ct^n - a\right)^2} dt = \\ = \dfrac{ad - bc}{\left(ct^n - a\right)^2} nt^{n-1} dt \end{array}\right] =$$

$$= \int R\left(\frac{b - t^n d}{ct^n - a},\ t\right) \frac{ad - bc}{\left(ct^n - a\right)^2} nt^{n-1} dt = \int R_1(t) dt,$$

kusjuures $R_1(t)$ on ühe muutuja ratsionaalfunktsioon, mille integreerimisalgoritm on eelnevalt esitatud.

Näide 1. Leiame määramata integraali $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{dx}{x}$. Tegemist on tüüpi $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ integraaliga, kusjuures $n = 2,\ a = -1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 1$ ja $R(u, v) = \dfrac{v}{u}$. Saame

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},\ t^2 = \dfrac{1-x}{1+x},\ x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = -\dfrac{4t\, dt}{\left(1+t^2\right)^2} \end{array}\right] =$$

$$= -\int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{4t\, dt}{\left(1+t^2\right)^2} = \int \frac{4t^2 dt}{t^4 - 1} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2 \arctan t + \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2 \arctan t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + 1}\right| + C. \qquad \diamondsuit$$

II Funktsiooni $R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$ **integreerimine**

Et juhul $\alpha = 0$ on tegemist eelmises alapunktis käsitletuga, siis piirdume siin vaid juhuga $\alpha \neq 0$. Kui $\alpha > 0$, siis

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx = \int R_1\left(x, \sqrt{x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}}\right) dx =$$

$$= \left[b = \frac{\beta}{\alpha},\ c = \frac{\gamma}{\alpha}\right] = \int R_1\left(x, \sqrt{x^2 + 2bx + c}\right) dx =$$

$$= \int R_1\left(x, \sqrt{(x+b)^2 + c - b^2}\right) dx = [t = x + b,\ x = t - b,\ dx = dt] =$$

$$= \int R_2\left(t, \sqrt{t^2 + c - b^2}\right) dt.$$

Kui $c - b^2 = 0$, siis

$$\int R_2\left(t, \sqrt{t^2 + c - b^2}\right) dt = \int R_2\left(t, |t|\right) dt,$$

millest juhul $t \geq 0$ leiame, et

$$\int R_2\left(t, |t|\right) dt = \int R_2\left(t, t\right) dt = \int R_3(t) dt,$$

ja juhul $t < 0$ leiame, et

$$\int R_2\left(t, |t|\right) dt = \int R_2\left(t, -t\right) dt = \int R_4(t) dt.$$

Kui $c - b^2 > 0$, siis tähistuse $c - b^2 = a^2$ $(a > 0)$ korral saame, et

$$\int R_2\left(t, \sqrt{t^2 + c - b^2}\right) dt = \int R_2\left(t, \sqrt{t^2 + a^2}\right) dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = a \operatorname{sh} u \Leftrightarrow t = a\dfrac{e^u - e^{-u}}{2} \Leftrightarrow e^{2u} - \dfrac{2t}{a}e^u - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^u = \dfrac{t}{a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{t}{a}\right)^2 + 1} \overset{e^u > 0}{\Rightarrow} u = \ln\left(\dfrac{t}{a} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{a}\right)^2 + 1}\right), \\ \sqrt{t^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + a^2} = a \operatorname{ch} u,\ dt = a \operatorname{ch} u\, du \end{array}\right] =$$

$$= \int R_2\left(a \operatorname{sh} u,\ a \operatorname{ch} u\right) a \operatorname{ch} u\, du = \int R_5\left(\operatorname{sh} u,\ \operatorname{ch} u\right) du.$$

Näide 2. Leiame määramata integraali $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{4 + t^2}}$.

Kontrollige, et sobib muutujate vahetus $t = 2\,\mathrm{sh}\,u$. Saame

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{4+t^2}} = \left[\begin{array}{c} t = 2\,\mathrm{sh}\,u,\ \ u = \ln\left(\dfrac{t}{2} + \sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right), \\ \sqrt{t^2+4} = 2\,\mathrm{ch}\,u,\ \ dt = 2\,\mathrm{ch}\,u\,du \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{ch}\,u\,du}{(2\,\mathrm{sh}\,u)^2\,2\,\mathrm{ch}\,u} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2\,u} = -\frac{1}{4}\mathrm{cth}\,u + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot \frac{\exp\left(\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)\right) + \exp\left(-\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)\right)}{\exp\left(\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)\right) - \exp\left(-\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot \frac{\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1} + 1/\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)}{\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1} - 1/\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)^2 + 1}{\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)^2 - 1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\dfrac{t^2}{4} + t\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1} + \dfrac{t^2}{4} + 2}{\dfrac{t^2}{4} + t\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1} + \dfrac{t^2}{4}} + C = -\frac{1}{4}\frac{\dfrac{t^2}{2} + t\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1} + 2}{\dfrac{t^2}{2} + t\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\left(\dfrac{t^2}{2} + t\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)} + C = C_1 - \frac{1}{t^2 + t\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= C_1 - \frac{1}{t^2 + t\sqrt{t^2+4}} \cdot \frac{t^2 - t\sqrt{t^2+4}}{t^2 - t\sqrt{t^2+4}} = C_1 + \frac{t^2 - t\sqrt{t^2+4}}{4t^2} =$$

$$= C_2 - \frac{1}{4t}\sqrt{(4+t^2)}. \qquad \diamondsuit$$

Kui $c - b^2 < 0$, siis tähistuse $-c + b^2 = a^2$ $(a > 0)$ korral saame

$$\int R_2\left(t, \sqrt{t^2 + c - b^2}\right) dt = \int R_2\left(t, \sqrt{t^2 - a^2}\right) dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = a\operatorname{ch} u \Leftrightarrow t = a\dfrac{e^u + e^{-u}}{2} \Leftrightarrow e^{2u} - \dfrac{2t}{a}e^u + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^u = \dfrac{t}{a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{t}{a}\right)^2 - 1} \overset{\text{valime}}{\Rightarrow} u = \ln\left(\dfrac{t}{a} + \sqrt{\left(\dfrac{t}{a}\right)^2 - 1}\right), \\ \sqrt{t^2 - a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 u - a^2} = a\,|\operatorname{sh} u| \overset{\text{miks?}}{=} a\operatorname{sh} u,\ dt = a\operatorname{sh} u\,du \end{array}\right] =$$

$$= \int R_2\left(a\operatorname{ch} u,\ a\operatorname{sh} u\right) a\operatorname{sh} u\,du = \int R_6\left(\operatorname{ch} u,\ \operatorname{sh} u\right) du.$$

Näide 3. Leiame määramata integraali

$$\int \sqrt{t^2 - 9}\,dt = \left[\begin{array}{c} t = 3\operatorname{ch} u,\ u = \ln\left(\dfrac{t}{3} + \sqrt{\dfrac{t^2}{9} - 1}\right), \\ \sqrt{t^2 - 9} = 3\operatorname{sh} u,\ dt = 3\operatorname{sh} u\,du \end{array}\right] =$$

$$= \int 3\operatorname{sh} u \cdot 3\operatorname{sh} u\,du = \frac{9}{2}\int 2\operatorname{sh}^2 u\,du = \frac{9}{2}\int\left(\operatorname{ch} 2u - 1\right) du = \frac{9}{4}\operatorname{sh} 2u - \frac{9}{2}u + C =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u - \frac{9}{2}u + C =$$

$$= \frac{t\sqrt{t^2 - 9}}{2} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{t}{3} + \sqrt{\frac{t^2}{9} - 1}\right) + C. \qquad \diamondsuit$$

Kui $\alpha < 0$, siis

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx = \int R_1\left(x, \sqrt{-x^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}x - \frac{\gamma}{\alpha}}\right) dx =$$

$$= \left[b = \frac{\beta}{\alpha},\ c = \frac{\gamma}{\alpha}\right] = \int R_1\left(x, \sqrt{-\left(x^2 + 2bx + c\right)}\right) dx =$$

$$= \int R_1\left(x, \sqrt{-\left(x + b\right)^2 - c + b^2}\right) dx = \left[t = x + b,\ x = t - b,\ dx = dt\right] =$$

$$= \int R_2\left(t, \sqrt{-t^2 - c + b^2}\right) dt.$$

Kui $-c + b^2 \le 0$, siis ruutjuure $\sqrt{-t^2 - c + b^2}$ alune avaldis on negatiivne iga $t \in \mathbf{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ korral. Kui $-c + b^2 > 0$, siis tähistuse $-c + b^2 = a^2$ $(a > 0)$ korral saame, et

$$\int R_2\left(t, \sqrt{-t^2 - c + b^2}\right) dt = \int R_2\left(t, \sqrt{a^2 - t^2}\right) dt =$$

$$= \left[t = a\sin u \leftrightarrow u = \arcsin\frac{t}{a},\ \sqrt{a^2 - t^2} = a\left|\cos u\right|,\ dt = a\cos u\,du\right] =$$

$$\stackrel{\cos u > 0}{=} \int R_2(a\sin u,\ a\cos u)\, a\cos u\, du = \int R_7(\sin u, \cos u)\ du.$$

Näide 4. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\sqrt{4-t^2}}{t^2} dt = \left[\begin{array}{c} t = 2\sin u,\ \sqrt{4-t^2} = 2\left|\cos u\right|, \\ u = \arcsin \frac{t}{2},\ dt = 2\cos u\, du \end{array} \right] =$$

$$\stackrel{\cos u > 0}{=} \int \frac{2\cos u}{(2\sin u)^2} 2\cos u\, du = \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}\, du =$$

$$= -\cot u - u + C = C - \frac{\sqrt{4-t^2}}{t} - \arcsin\frac{t}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Märkus 1. Kui integraalide

$$\int R\left(t, \sqrt{t^2+a^2}\right) dt,\ \int R\left(t, \sqrt{t^2-a^2}\right) dt,\ \int R\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right) dt$$

korral on $R(-u, v) = -\ R(u, v)$, siis on otstarbekam teostada vastavalt muutujate vahetused $u = \sqrt{t^2+a^2}$, $u = \sqrt{t^2-a^2}$ ja $u = \sqrt{a^2-t^2}$.

Näide 5. Leiame määramata integraali

$$\int \frac{\sqrt{4-t^2}}{t} dt.$$

Et antud ülesande korral $R(u, v) = \dfrac{v}{u}$ ja

$$R(-u, v) = \frac{v}{-u} = -\frac{v}{u} = -R(u, v),$$

siis

$$\int \frac{\sqrt{4-t^2}}{t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{4-t^2}}{t^2} 2t dt = \left[\begin{array}{c} \sqrt{4-t^2} = u \leftrightarrow t = \sqrt{4-u^2}, \\ t^2 = 4-u^2,\ 2t\, dt = -2u\, du \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u}{4-u^2} 2u\, du = \int \frac{\left(u^2-4\right)+4}{u^2-4}\, du = \int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) du = u + \ln|u-2| - \ln|u+2| + C =$$

$$= \sqrt{4-t^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-t^2}-2}{\sqrt{4-t^2}+2}\right| + C. \qquad \diamondsuit$$

III Diferentsiaalbinoomi integreerimine

Definitsioon 1. Avaldist kujul

$$x^{\alpha}\left(ax^{\beta}+b\right)^{\gamma}dx, \tag{2.10.1}$$

kus α, β, $\gamma \in \mathbf{Q}$ ja a, $b \in \mathbf{R}$, nimetatakse *diferentsiaalbinoomiks*.

Lause 1. Integraal diferentsiaalbinoomist (2.10.1) on elementaarfunktsioon vaid juhtudel, kui

$$\gamma \in \mathbf{Z} \vee \ (\alpha+1)/\beta \in \mathbf{Z} \vee \ (\alpha+1)/\beta+\gamma \in \mathbf{Z},$$

kusjuures:

1) juhul $\gamma \in \mathbf{Z}$ muudab muutujate vahetus $\sqrt[n]{x}=t$, kus n on murdude α ja β ühine nimetaja, avaldise (1) ratsionaalseks muutuja t suhtes;

2) juhul $(\alpha+1)/\beta \in \mathbf{Z}$ muudab muutujate vahetus $\sqrt[m]{ax^{\beta}+b}=t$, kus m on murru γ nimetaja, avaldise (1) ratsionaalseks muutuja t suhtes;

3) juhul $(\alpha+1)/\beta+\gamma \in \mathbf{Z}$ muudab muutujate vahetus $\sqrt[m]{\dfrac{ax^{\beta}+b}{x^{\beta}}}=t$, kus m on murru γ nimetaja, avaldise (1) ratsionaalseks muutuja t suhtes.

Tõestust vt [5], lk 239–241. $\square$

Näide 6. Taandame määramata integraali

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{4}dx$$

leidmise ratsionaalfunktsiooni integreerimisele.

Et $\alpha=1/2,\ \beta=1/3$ ja $n=6$ on murdude α ja β ühine nimetaja ning $\gamma=4$, siis on tegemist esimese juhuga, muutujate vahetusega $\sqrt[6]{x}=t$. Seega

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{4}dx=\left[\sqrt[6]{x}=t \leftrightarrow x=t^{6} \Rightarrow dx=6t^{5}dt\right]=$$

$$=\int t^{3}(1+t^{2})^{4}6t^{5}dt=6\int t^{8}(1+t^{2})^{4}dt. \qquad \diamondsuit$$

Näide 7. Taandame määramata integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^{3}}}$$

leidmise ratsionaalfunktsiooni integreerimisele.

Et $\alpha=0,\ \beta=3$ ja $\gamma=-1/3$, siis $(\alpha+1)/\beta+\gamma=0 \in \mathbf{Z}$ ning tegemist on kolmanda juhuga, kusjuures $m=3$ ja muutujate vahetuseks on $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^{3}}{x^{3}}}=t$. Leiame, et

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^{3}}}=\frac{1}{3}\int \frac{3x^{2}dx}{x^{3}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^{3}}{x^{3}}}}=$$

$$= \left[\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}} = t \leftrightarrow \frac{1+x^3}{x^3} = t^3,\ x^3 = \frac{1}{t^3-1},\ 3x^2dx = -\frac{3t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{t^3-1}{t} \cdot \left(-\frac{3t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} \right) = -\int \frac{t\,dt}{t^3-1}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 8. Taandame määramata integraali

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$$

leidmise ratsionaalfunktsiooni integreerimisele. Et $\alpha = -1$, $\beta = 2$ ja $\gamma = -1/3$, siis $(\alpha+1)/\beta = 0 \in \mathbf{Z}$ ning tegemist on teise juhuga ja sobib muutujate vahetus $\sqrt[3]{1+x^2} = t$. Järelikult

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt[3]{1+x^2}} =$$

$$= \left[\sqrt[3]{1+x^2} = t \leftrightarrow 1+x^2 = t^3 \ \Leftrightarrow x^2 = t^3-1 \Rightarrow 2x\,dx = 3t^2dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3t^2dt}{\left(t^3-1\right)t} = \frac{3}{2}\int \frac{tdt}{t^3-1}. \qquad \diamondsuit$$

2.11. Mitteelementaarsed integraalid

Eelnevates punktides vaatlesime integreerimisvõtteid, mis võimaldavad leida elementaarfunktsioonide hulka kuuluvat algfunktsiooni. Kuigi igal lõigul pideval funktsioonil $f(x)$ leidub algfunktsioon, st eksisteerib määramata integraal

$$\int f(x)dx,$$

ei ole see algfunktsioon sageli elementaarfunktsioon. Sellised on näiteks integraalid

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \sin x^2 dx.$$

Elementaarfunktsioonide lisaks defineeritakse paljud mitteelementaarsed funktsioonid, näiteks *integraallogaritm*

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x},$$

integraalsiinus

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

ja *integraalkoosinus*

$$\operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Rakendustes kasutatakse tihti integraale

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) dx \tag{2.11.1}$$

ja

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx, \tag{2.11.2}$$

kusjuures vaid vähestel erijuhtudel on funktsioonide $R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)$ ja $R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right)$ algfunktsiooniks elementaarfunktsioon. Neil juhtudel, mil integraalid (2.11.1) ja (2.11.2) ei ole avaldatavad elementaarfunktsioonide abil, nimetatakse neid integraale *elliptilisteks integraalideks*.

2.12. Määratud integraal

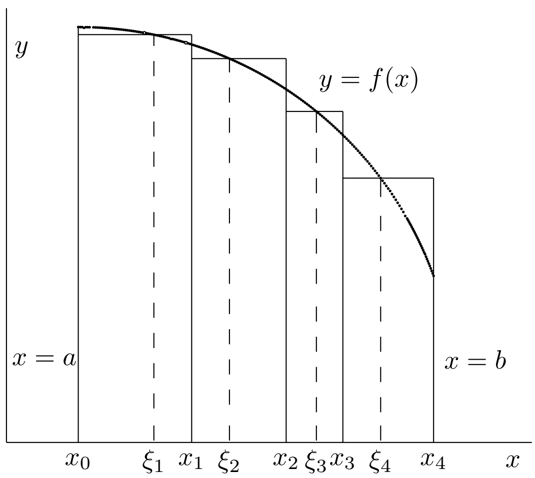
Olgu lõigul $[a, b]$ määratud funktsioon $f(x)$. Vaatleme esiteks juhtu $b > a$. Jaotame selle lõigu punktidega x_i $(i = 0; 1; 2; \ldots; n)$ osalõikudeks $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1; 2; \ldots ; n)$, kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Osalõikude hulka

$$\Pi = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1;2;\ldots;n}$$

nimetame lõigu $[a, b]$ *tükelduseks.* Olgu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1; 2; \ldots ; n)$.



Moodustame tükelduse Π korral summa

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ (*Riemanni*) *integraalsummaks* lõigul $[a,b]$.

Kui lõigul $[a,b]$ on $f(x) \geq 0$, siis integraalsumma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ annab x-telje, funktsiooni $y = f(x)$ graafiku ja sirgetega $x = a$ ja $x = b$ määratud kõverjoonelise trapetsi pindala lähisväärtuse. Teatud tingimustel funktsiooni $f(x)$ kohta läheneb funktsiooni $f(x)$ integraalsumma piirprotsessis $n \to \infty$, kusjuures $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, selle kõverjoonelise trapetsi pindalale. Märgime, et selle piirprotsessi kirjeldamiseks piisab tingimusest $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, sest

$$\max_i \Delta x_i \to 0 \Rightarrow n \to \infty.$$

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

mis ei sõltu lõigu $[a,b]$ osalõikudeks jaotamise viisist ja punktide ξ_i valikust, siis kõneldakse, et funktsioon $f(x)$ on *integreeruv (Riemanni mõttes) lõigul* $[a,b]$ ning seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *määratud integraaliks* ehk *Riemanni integraaliks* lõigul $[a,b]$ ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Fakti, et funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigul $[a,b]$, st $\exists \int_a^b f(x)dx$, tähistame $f(x) \in I[a,b]$, kus hulk $I[a,b]$ on kõigi lõigul $[a,b]$ integreeruvate funktsioonide hulk.

Juhul $a \geq b$ defineeritakse $\int_a^b f(x)dx$ seosega

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} -\int_b^a f(x)dx,$$

millest juhul $b = a$ järeldub, et

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Järeldus 1. Kui $f(x) \geq 0 \quad (x \in [a,b])$, siis määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$ esitab x-telje, funktsiooni $y = f(x)$ graafiku ja sirgetega $x = a$ ning $x = b$ määratud kõverjoonelise trapetsi pindala.

Lause 1. Iga lõigul konstantne funktsioon on sel lõigul integreeruv, kusjuures

$$\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$$

ja

$$\int_a^b 1 \cdot dx = b - a.$$

Tõestus. Olgu $c \in \mathbf{R}$ konstant ja $f(x) = c \ \ (x \in [a,b])$. Et iga lõigu $[a,b]$ tükelduse Π ja punktide ξ_i valiku korral saame

$$\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c\,(b-a)\,,$$

siis

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} c\,(b-a) = c\,(b-a)\,. \qquad \square$$

Lause 2 (integreeruva funktsiooni tõkestatus). Lõigul integreeruv funktsioon on tõkestatud sel lõigul, st

$$f(x) \in I\,[a,b] \Rightarrow f(x) = O\,(1) \quad (x \in [a,b])\,.$$

Tõestus. Olgu $f(x) \in I\,[a,b]$. Eeldame vastuväiteliselt, et funktsioon $f(x)$ ei ole tõkestatud sel lõigul. Siis lõigu $[a,b]$ iga tükelduse Π korral peab leiduma osalõik $[x_{k-1}, x_k]$, milles funktsioon $f(x)$ ei ole tõkestatud. Kui punktid $\xi_i \ \ (i \neq k)$ on fikseeritud ja ξ_k esialgu fikseerimata ning

$$S_\Pi\,(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

siis

$$|S_\Pi\,(f)| \geq |f(\xi_k)|\,\Delta x_k - \sigma, \tag{2.12.1}$$

kus

$$\sigma = \left| \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|.$$

Kui K on mingi suvaline positiivne arv, siis sellest, et funktsioon $f(x)$ ei ole tõkestatud lõigul $[x_{k-1}, x_k]$, järeldub võimalus fikseerida punkt ξ_k selliselt, et

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{K+\sigma}{\Delta x_k}. \tag{2.12.2}$$

Seostest (2.12.1) ja (2.12.2) saame

$$|S_\Pi\,(f)| \geq \frac{K+\sigma}{\Delta x_k}\Delta x_k - \sigma = K.$$

Et K on suvaline positiivne arv, siis suurus $S_\Pi(f)$ ei ole tõkestatud piirprotsessis $\max \Delta x_i \to 0$ ja sellest suurusest ei saa eksisteerida lõplikku piirväärtust antud piirprotsessis. Seega funktsioon $f(x)$ ei ole integreeruv lõigul $[a,b]$. Saadud vastuolu näitab Lause 2 tõesust. $\square$

Järeldus 2. Kui $f(x) \in I[a,b]$, $g(x) = O(1) \quad (x \in [a,b])$ ja $g(x) = f(x)$ lõigul $[a,b]$, välja arvatud lõplikus arvus selle lõigu punktides, siis ka $g(x) \in I[a,b]$ ning

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Tõestame selle järelduse juhul, kui $g(x) \neq f(x)$ vaid punktis $x = c \in [a,b]$. Olgu $f(x) \in I[a,b]$ ja Π selle lõigu tükeldus, kusjuures $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Kuna $g(x) = O(1) \quad (x \in [a,b])$ ja $g(x) \neq f(x)$ vaid punktis c ning Lause 2 põhjal

$$f(x) \in I[a,b] \Rightarrow f(x) = O(1) \quad (x \in [a,b]),$$

siis

$$\begin{aligned} S_\Pi(g) &= \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + (g(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k \\ &= S_\Pi(f) + (g(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k, \end{aligned}$$

kus tingimuste $f(x) = O(1)$, $g(x) = O(1) \quad (x \in [a,b])$ põhjal

$$(g(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k \overset{\max_i \Delta x_i \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &= \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} S_\Pi(g) = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} (S_\Pi(f) + (g(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k) = \\ &= \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} S_\Pi(f) + \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} (g(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

ja oleme näidanud Järelduse 2 tõesust. $\square$

Järeldus 3. Kui $f(x) = O(1) \quad (x \in [a,b])$ ja $f(x) = 0$ lõigul $[a,b]$, välja arvatud lõplikus arvus selle lõigu punktides, siis $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Tõestus. Lause 1 põhjal $0 \in I[a,b]$ ja

$$\int_a^b 0\,dx = 0\,(b-a) = 0.$$

Et $f(x) = 0$ lõigul $[a, b]$, välja arvatud lõplikus arvus selle lõigu punktides, siis Järelduse 2 põhjal $f(x) \in I\,[a, b]$ ning

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0. \qquad \square$$

Soovi korral võib järgmise väite võtta tõestuseta.

Lause 3 (määratud integraali olemasolu piisav tingimus). Iga lõigul pidev funktsioon on sel lõigul integreeruv, st

$$f(x) \in C[a, b] \;\Rightarrow\; f(x) \in I\,[a, b].$$

Tõestus. Olgu antud $f(x) \in C[a, b]$. Lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon $f(x)$ on Lause 1.9.6 põhjal sellel lõigul ühtlaselt pidev. Seega leidub iga $\varepsilon > 0$ korral selline $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, et

$$\xi', \xi'' \in [a, b] \;\wedge\; |\xi' - \xi''| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon.$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Vaatleme selliseid lõigu $[a, b]$ tükeldusi $\Pi = \{B_1, \ldots, B_n\}$, kus

$$B_i = [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1; 2; \ldots ; n),$$

mille korral

$$\xi', \xi'' \in B_i \;\Rightarrow\; |f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon \quad (i = 1; 2; \ldots ; n).$$

Nimetame neid tükeldusi lõigu $[a, b]$ ε-tükeldusteks (funktsiooni $f(x)$ korral). Sellised lõigu $[a, b]$ ε-tükeldused on võimalikud tänu funktsiooni f(x) ühtlasele pidevusele sel lõigul.

Uurime esiteks juhtu, kus üks tükeldus on saadud teisest täiendavate jaotuspunktide lisamisel. Olgu antud kaks lõigu $[a, b]$ tükeldust $\Pi = \{B_1, \ldots, B_n\}$ ja

$$\Pi' = \{B_{1,1}, \ldots, B_{1,m_1}, \ldots, B_{n,1}, \ldots, B_{n,m_n}\},$$

kusjuures $B_{i,k} \subset B_i$. Seega on lõigud $B_{i,k}$ $(k = 1, \ldots, m_i)$ saadud lõigu B_i osalõikudeks tükeldamisel punktidega $x_{i,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m_i)$. Olgu Π lõigu $[a, b]$ ε-tükeldus. Sel korral on ka Π' lõigu $[a, b]$ ε-tükeldus (veenduge selles) ja kui $\xi_i \in B_i$, $\xi_{i,k} \in B_{i,k}$ ning

$$\varepsilon_{i,k} = f(\xi_{i,k}) - f(\xi_i),$$

siis $|\varepsilon_{i,k}| < \varepsilon$. Moodustame kaks integraalsummat

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ja

$$S_{\Pi'}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} f(\xi_{i,k})\Delta x_{i,k},$$

kus $\Delta x_{i,k}$ on lõigu $B_{i,k}$ pikkus, st $\Delta x_{i,k} = x_{i,k} - x_{i,k-1}$. Sel korral saame

$$|S_{\Pi'}(f) - S_\Pi(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} f(\xi_{i,k})\Delta x_{i,k} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| =$$

$$= \left[\Delta x_i = \sum_{k=1}^{m_i} \Delta x_{i,k}\right] = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \left(f(\xi_{i,k}) - f(\xi_i)\right)\Delta x_{i,k}\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} |f(\xi_{i,k}) - f(\xi_i)|\,\Delta x_{i,k} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \varepsilon_{i,k}\Delta x_{i,k} < \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \varepsilon\Delta x_{i,k} = \varepsilon\,(b-a)\,.$$

Olgu Π_1 ja Π_2 kaks suvalist lõigu $[a,b]$ ε-tükeldust. Moodustame ε-tükelduse $\Pi_{1,2}$, mis koosneb tükelduste Π_1 ja Π_2 osalõikude ühisosadest. Veenduge, et $\Pi_{1,2}$ on tõesti lõigu $[a,b]$ ε-tükeldus. Et eelneva põhjal saame hinnangud

$$\left|S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right| < \varepsilon\,(b-a)$$

ja

$$\left|S_{\Pi_2}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right| < \varepsilon\,(b-a)\,,$$

siis

$$\begin{gathered}|S_{\Pi_2}(f) - S_{\Pi_1}(f)| = \\ = \left|\left(S_{\Pi_2}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right) - \left(S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right)\right| \leq \\ \leq \left|\left(S_{\Pi_2}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right)\right| + \left|\left(S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_{1,2}}(f)\right)\right| < \\ < 2\varepsilon\,(b-a)\,,\end{gathered}$$

st kui integraalsummast $S_\Pi(f)$ eksisteerib piirväärtus lõigu tükelduse piiramatul tihendamisel, siis ei sõltu see piirväärtus lõigu $[a,b]$ osalõikudeks jaotamise viisist ja punktide ξ_i valikust.

Näitame, et eksisteerib piirväärtus integraalsummast $S_\Pi(f)$. Olgu antud positiivne arvjada $\{\varepsilon_n\}$, kusjuures $\varepsilon_n \downarrow 0$, ja Π_n lõigu $[a,b]$ ε_n-tükeldus. Saame vastavuse

$$n \to \varepsilon_n \to \Pi_n \to S_{\Pi_n}(f)\,.$$

Näitame, et jada $\{S_{\Pi_n}(f)\}$ on Cauchy jada, st iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $n_0 \in \mathbf{N}$, et

$$(n,m \in \mathbf{N}) \wedge (n > n_0) \wedge (m > n_0) \Rightarrow |S_{\Pi_n}(f) - S_{\Pi_m}(f)| < \varepsilon. \tag{2.12.3}$$

Et eelneva põhjal

$$n,m > n_0 \Rightarrow |S_{\Pi_n}(f) - S_{\Pi_m}(f)| < 2\varepsilon_{n_0}(b-a)\,,$$

siis valime arvuks n_0 vähima naturaalarvu ν, mille korral

$$\varepsilon_\nu < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)}.$$

Sellise valiku korral kehtib (2.12.3). Seega on jada $\{S_{\Pi_n}(f)\}$ Cauchy jada. Et arvjada koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada, siis oleme tõestanud Lause 3. $\square$

Märkus 1. Saab näidata (vt [5], lk 361–362), et iga lõigul monotoonne funktsioon on sel lõigul integreeruv.

Lause 4 (määratud integraali lineaarsuse omadus). Kui $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, siis

$$f_1(x),\ f_2(x) \in I\,[a,b] \Rightarrow (c_1 f_1(x) + c_2\, f_2(x) \in I\,[a,b]) \wedge$$

$$\wedge \left(\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2\, f_2(x))\, dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx \right).$$

Tõestus. Et funktsiooni $c_1 f_1(x) + c_2\, f_2(x)$ integraalsumma korral kehtib seos

$$\sum_{i=1}^n (c_1 f_1(\xi_i) + c_2\, f_2(\xi_i))\, \Delta x_i = c_1 \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i$$

ja piirväärtus summast on piirväärtuste summa, kui piirväärtus mõlemast liidetavast eksisteerib, ning konstantne tegur on toodav piirväärtuse märgi ette, siis

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^n (c_1 f_1(\xi_i) + c_2\, f_2(\xi_i))\, \Delta x_i =$$

$$= c_1 \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + c_2 \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx. \quad \square$$

Lause 5 (määratud integraali aditiivsuse omadus). Kui $a < c < b$, siis

$$f(x) \in I\,[a,c] \ \wedge\ f(x) \in I\,[c,b] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) \in I\,[a,b]\ \wedge \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Tõestus. Kui Π on lõigu $[a,b]$ tükeldus, kusjuures c kuulub selle tükelduse osalõiku $[x_{k-1}, x_k]$, siis

$$\begin{gathered} S_\Pi(f) = \textstyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \\ = \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)\,(c - x_{k-1}) + f(c)\,(x_k - c) - f(c)\,(c - x_{k-1}) - \\ -f(c)\,(x_k - c) + f(\xi_k)\Delta x_k + \textstyle\sum_{i=k+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \\ = \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(c)\,(c - x_{k-1})\right) + \left(f(c)\,(x_k - c) + \textstyle\sum_{i=k+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right) + \\ + (f(\xi_k) - f(c))\,\Delta x_k = S_{\Pi_1}(f) + S_{\Pi_2}(f) + (f(\xi_k) - f(c))\,\Delta x_k, \end{gathered}$$

kus Π_1 on lõigu $[a,c]$ tükeldus punktidega $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ c$ ja Π_2 on lõigu $[c,b]$ tükeldus punktidega $c,\ x_k,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$. Lause 2 põhjal saame

$$f(x)\in I\,[a,c] \ \Rightarrow\ f(x)=O\,(1) \quad (x\in[a,c])\,,$$
$$f(x)\in I\,[c,b] \ \Rightarrow\ f(x)=O\,(1) \quad (x\in[c,b])\,,$$

millest järeldub $f(x)=O\,(1) \quad (x\in[a,b])$. Et

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} S_{\Pi_1}(f)=\int_a^c f(x)dx$$

ja

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} S_{\Pi_2}(f)=\int_c^b f(x)dx$$

ning

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} (f(\xi_k)-f(c))\,\Delta x_k=0,$$

siis

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} S_{\Pi}(f)=$$
$$=\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0}(S_{\Pi_1}(f)+S_{\Pi_2}(f)+(f(\xi_k)-f(c))\,\Delta x_k)=$$
$$=\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} S_{\Pi_1}(f)+\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0} S_{\Pi_2}(f)+\lim_{\max\limits_i \Delta x_i\to 0}(f(\xi_k)-f(c))\,\Delta x_k=$$
$$=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx+0=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Seega on Lause 5 tõene. $\square$

Märkus 2. Saab näidata (vt [5], lk 357–358), et

$$(a\ <\ c\ <\ b)\wedge f(x)\in I\,[a,b]\ \Rightarrow\ f(x)\in I\,[a,c]\ \wedge\ f(x)\in I\,[c,b]\,.$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse tükati monotoonseks lõigul $[a,b]$, kui see lõik on jaotatav lõplikuks arvuks osalõikudeks, millel $f(x)$ on monotoonne.

Märkus 3. Lausest 5 ja Märkusest 1 järeldub, et lõigul tükati monotoonne funktsioon on sel lõigul integreeruv.

Lause 6. Kui $a<b$, siis

$$(f(x),g(x)\in I\,[a,b]\,)\ \wedge\ (f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b])\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Tõestus. Et mõlemad integraalid eksisteerivad, siis määratud integraali definitsiooni põhjal ei tohi funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ jaoks moodustatud integraalsummade piirväärtused sõltuda lõigu $[a,b]$ osalõikudeks jaotamise viisist ja punktide ξ_i valikust. Kui valime mõlema integraalsumma jaoks sama osalõikudeks tükelduse ja samad punktid ξ_i, siis

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i$$

ja

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

ning

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \quad \square$$

Järeldus 4. Kui $a < b$ ja $f(x) \in C\,[a,b]$ ning

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

siis

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ja

$$\exists c \in (a,b): \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \tag{2.12.4}$$

kusjuures seost (2.12.4) nimetatakse *määratud integraali keskväärtusteoreemiks.*

Tõestus. Lausest 1 ja 3 järelduvad vastavalt väited $m, M \in I[a,b]$ ja $f(x) \in I[a,b]$. Kasutades võrratuste ahelat

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in [a,b])$$

ja Lauseid 6 ning 1.9.4, veendume Järelduse 4 tõesuses. $\square$

Lause 7. Kui $a < b$ ja funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigul $[a,b]$, siis on ka $|\,f(x)|$ integreeruv sel lõigul, kusjuures

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.12.5}$$

Tõestus. Olgu $f(x) \in I\,[a,b]$. Et (vt [5], lk 367–368)

$$f(x) \in I\,[a,b] \Rightarrow |f(x)| \in I\,[a,b]$$

ja Lause 4 põhjal

$$|f(x)| \in I\ [a,b] \Rightarrow -|f(x)| \in I\ [a,b]$$

ning

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad (x \in [a,b]),$$

siis Lausete 6 ja 4 abil saame võrratuste ahela

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\, dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx,$$

millest järeldub väide (2.12.5). $\square$

Lause 8. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on integreeruvad lõigul $[a,b]$, siis on integreeruv sel lõigul ka nende funktsioonide korrutis $f(x)g(x)$.

Tõestust vaadake [5], lk 366–367. $\square$

Kuigi selles punktis esitatud klassikaline määratud integraali (Riemanni integraali) mõiste on piisav paljude matemaatikas ja selle rakendustes esinevate probleemide lahendamisel, leidub tänapäeval rohkesti probleeme, mille lahendamisel kasutatakse *üldist integraaliteooriat.* Teatud võimalusi pakuvad lisaks Riemanni integraalile ka *Stieltjesi* ja *Lebesgue'i* ning teised integraalid.

2.13. Määratud integraal ülemise raja funktsioonina

Olgu $f(t) \in I[a,b]$ ja

$$G(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Märkuse 2.12.2 põhjal on funktsioon $G(x)$ määratud lõigul $[a,b]$.

Lause 1. Kui $a < b$, siis

$$f(t) \in I[a,b] \Rightarrow G(x) \in C[a,b].$$

Tõestus. Lause 2.12.2 abil saame

$$|f(t)| \le K \quad (t \in [a,b]). \tag{2.13.1}$$

Kui $x, x+\Delta x \in [a,b]$, siis

$$\Delta G = G(x+\Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \left[\begin{array}{c}\text{kasutame}\\ \text{Lauset 2.12.5}\end{array}\right] =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

Kui $\Delta x \ge 0$, siis Lause 2.12.7 ja võrratuse (2.13.1) põhjal

$$|\Delta G| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\, dt \le K\Delta x = K\,|\Delta x|.$$

Veenduge, et ka juhul $\Delta x < 0$ kehtib hinnang $|\Delta G| \leq K\,|\Delta x|$. Seega $x, x+\Delta x \in [a,b]$ korral saame

$$|\Delta G| \leq K\,|\Delta x|,$$

millest järeldub

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta G| = 0.$$

Et iga $x \in [a,b]$ korral

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta G| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta G = 0 \Leftrightarrow G(x) \in C(x),$$

siis $G(x) \in C[a,b]$ ja Lause 1 on tõene. $\square$

Lause 2. Kui $a < b$, siis

$$f(x) \in C\,[a,b] \Rightarrow G(x) \in D\,(a,b) \wedge G'(x) = f(x).$$

Tõestus. Leiame funktsiooni $G(x)$ tuletise (lõigu otspunktides ühepoolse tuletise):

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \overset{x,x+\Delta x \in [a,b]}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \begin{bmatrix} \text{kasutame} \\ \text{Järeldust 2.12.4} \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\vartheta\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\vartheta\Delta x) = [f(x) \in C\,[a,b]] = f(x). \qquad \square$$

2.14. Newton-Leibnizi valem

Eelmises punktis näitasime, et funktsioon $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ on lõigul $[a,b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon sel lõigul. Et funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid erinevad üksteisest ülimalt konstandi võrra, siis avaldub iga lõigul $[a,b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon kujul

$$\int_a^x f(t)dt + C \quad (x \in [a,b]),$$

kus C on konstant. Kui $F(x)$ on mingi funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon lõigul $[a,b]$, siis

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

mingi konstandi C korral. Valides selles seoses $x = a$, saame

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \quad \Rightarrow C = F(a)$$

ja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad (x \in [a,b]).$$

Võttes viimases seoses $x = b$, saame

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a).$$

Vormistame tõestatu.

Lause 1 (Newton-Leibnizi valem). Kui $f(x) \in C[a,b]$ ja $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon lõigul $[a,b]$, siis

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Bigg|_a^b .$$

Newton-Leibnizi valem võimaldab määratud integraali arvutamisel kasutada määramata integraali jaoks saadud tulemusi. Seega kujutab Newton-Leibnizi valem endast "vahelüli" määratud integraali ja määramata integraali vahel.

Näide 1. Leiame määratud integraali

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Funktsiooni $\sin x$ algfunktsiooniks lõigul $[0, \pi/2]$ on $-\cos x$. Newton-Leibnizi valemi abil leiame, et

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = (-\cos x)\Bigg|_0^{\pi/2} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame määratud integraali

$$\int_1^2 \left(x - x^4\right)\, dx.$$

Funktsiooni $x - x^4$ üheks algfunktsiooniks lõigul $[1;2]$ on funktsioon $x^2/2 - x^5/5$. Newton-Leibnizi valemi abil leiame, et

$$\int_1^2 \left(x - x^4\right)\, dx = \left(x^2/2 - x^5/5\right)\Bigg|_1^2 = \left(2^2/2 - 2^5/5\right) - \left(1^2/2 - 1^5/5\right) =$$

$$= 2 - \frac{32}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -\frac{47}{10}. \qquad \diamondsuit$$

2.15. Muutujate vahetus ja ositi integreerimine määratud integraalis

Kui $F(x)$ on lõigul $[a,b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis Lause 2.14.1 põhjal

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.15.1)$$

Olgu $\varphi(t)$ pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[\alpha, \beta]$, st $\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, kusjuures $\varphi(\alpha) = a$ ja $\varphi(\beta) = b$. Et Lause 1.11.1 põhjal

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

siis $F(\varphi(t))$ on funktsiooni $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ algfunktsioon lõigul $[\alpha,\beta]$. Kasutame Newton-Leibnizi valemit:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = \tag{2.15.2}$$
$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Et seose (2.15.1) parem pool ja seoste ahela (2.15.2) viimane lüli on võrdsed, siis on võrdsed ka seose (2.15.1) vasak pool ja ahela (2.15.2) esimene lüli. Vormistame tõestatu.

Lause 1 (muutujate vahetus määratud integraalis). Kui $f(x)$ on lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon ja $\varphi(t)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[\alpha,\beta]$, kusjuures $\varphi(\alpha)=a$ ja $\varphi(\beta)=b$, siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Märkus 1. Määratud integraali leidmisel muutujate vahetuse abil on võimalik vältida rajade vahetust, kui leida muutujate vahetuse abil vastav määramata integraal, st leida integreeritava funktsiooni mingi algfunktsioon, ja kasutada siis Newton-Leibnizi valemit. Rõhutame, et määramata integraali leidmisel muutujate vahetuse abil nõutakse täiendavalt funktsiooni $\varphi(t)$ ranget monotoonsust (vt Lauset 2.3.1).

Märkust 1 on otstarbekas kasutada koos Järelduses 2.3.1 esitatud diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

Näide 1. Leiame määratud integraali

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx$$

kahel erineval viisil.

1. Et integreeritav funktsioon $x\sqrt{1+x^2}$ on pidev lõigul $[1;2]$ ja funktsioon $\sqrt{t^2-1}$ on pidevalt diferentseeruv lõigul $\left[\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$, siis muutujate vahetusega $x=\varphi(t)=\sqrt{t^2-1}$ saame Lause 1 abil

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x=\sqrt{t^2-1}\leftrightarrow t=\sqrt{1+x^2},\ dx=d\varphi(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ x=1\leftrightarrow t=\sqrt{2},\ x=2\leftrightarrow t=\sqrt{5} \end{array}\right] =$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{t^2-1}\,t\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

2. Kui kasutada Märkust 1 koos Järelduses 2.3.1 esitatud diferentsiaali märgi alla viimise võttega, siis

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) =$$
$$= \frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right). \quad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame määratud integraali

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$$

Et funktsioon $\sqrt{4-x^2}$ on pidev lõigul $[0;2]$ ja $\varphi(t) = 2\sin t$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[0;\pi/2]$, siis Lause 1 põhjal kehtib seos (2.15.3), st

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\sin t,\ dx = d\varphi\,(t) = 2\cos t\,dt, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = 2 \leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} |2\cos t|\ 2\cos t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2}\right) = \pi.$$

Sama tulemuseni jõuame, kui leiame esiteks määramata integraali abil integreeritava funktsiooni $\sqrt{4-x^2}$ algfunktsiooni

$$2\arcsin(x/2) + x\sqrt{1-(x/2)^2}$$

ja kasutame siis Newton-Leibnizi valemit

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left(2\arcsin(x/2) + x\sqrt{1-(x/2)^2}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\arcsin 1 + 0 - 2\arcsin 0 - 0 = \pi. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Leiame määratud integraali

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$$

Saame

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1} = \left[\begin{array}{c} x = t^2 \leftrightarrow \sqrt{x} = t,\ dx = 2tdt, \\ x = 4 \leftrightarrow t = 2,\ x = 9 \leftrightarrow t = 3 \end{array} \right] =$$

$$= \int_2^3 \frac{t\cdot 2t\cdot dt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\int_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \left(t^2+2t+2\ln|t-1|\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 9+6+2\ln 2-4-4-2\ln 1 = 7+2\ln 2. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame määratud integraali

$$\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\, dx.$$

Selle integraali leidmiseks on võimalik kasutada punktis 2.8 esitatud muutujate vahetamise võtet III. Tõesti, antud integraali korral $R(\cos 2x, \sin 2x) = \cos^7 2x$. Seega $R(u,v) = u^7$ on muutuja u paaritu funktsioon, st sobib muutujate vahetus $\sin 2x = t$, ja

$$\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\, dx = \int_0^{\pi/4} \left(1-\sin^2 2x\right)^3 \cos 2x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \sin 2x,\ dt = 2\cos 2x\, dx, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = \pi/4 \leftrightarrow t = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^3 dt = \frac{1}{2}\left(t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}.$$

Antud määratud integraali on võimalik leida ka diferentsiaali märgi alla viimisega

$$\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(1-\sin^2 2x\right)^3 d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \sin^3 2x + \frac{3}{5}\sin^5 2x - \frac{1}{7}\sin^7 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{8}{35}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Näitame, et iga lõigul $[0;1]$ pideva funktsiooni $f(t)$ korral

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

Tõesti,

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \cos x = \sin t,\ x = \arccos \sin t,\ x = 0 \leftrightarrow t = \pi/2, \\ x = \pi/2 \leftrightarrow t = 0,\ dx = -\left(1/\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\cos t\, dt = -dt \end{array} \right] =$$

$$= -\textstyle\int_{\pi/2}^0 f(\sin t)\ dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\ dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{määratud integraali väärtus ei sõltu} \\ \text{argumendi tähistusest,} \quad t \leftrightarrow x \end{array} \right] = \textstyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx. \quad \diamondsuit$$

Näide 6. Leiame määratud integraali

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx.$$

Võttes $x = \mathrm{sh} t,$ saame

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = \mathrm{sh}\, t,\ x = \left(e^t - e^{-t}\right)/2,\ \sqrt{1+x^2} = \mathrm{ch}\, t,\ dx = \mathrm{ch}\, t\, dt, \\ e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0,\ e^t = x + \sqrt{x^2+1},\ t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ x = 1 \leftrightarrow t = \ln(1+\sqrt{2}),\ x = \sqrt{3} \leftrightarrow t = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} \frac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}^2 t} \cdot \mathrm{ch}\, t\, dt = \int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} \frac{1+\mathrm{sh}^2\, t}{\mathrm{sh}^2 t}\, dt =$$

$$= (-\mathrm{cth}\, t + t)\Big|_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= -\mathrm{cth}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) + \mathrm{cth}\left(\ln(1+\sqrt{2})\right) + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} + e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}} + \frac{e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} + e^{-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - e^{-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2+\sqrt{3} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}}{2+\sqrt{3} - \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}} + \frac{1+\sqrt{2} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-1}}{1+\sqrt{2} - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-1}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 1} + \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 1} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{8+4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}} + \frac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{4+2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}. \qquad \diamondsuit$$

Lause 2. Kui paarisfunktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigul $[-a, a]$, siis

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Tõestus. Kui $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis Märkuse 2.12.2 ja Lause 2.12.5 abil saame

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{teostame esimeses liidetavas muutujate} \\ \text{vahetuse } x = -t,\quad dx = -dt, \\ x = -a \leftrightarrow t = a,\ x = 0 \leftrightarrow t = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_a^0 f(-t)\,(-dt) + \int_0^a f(x)\,dx = [f(-t) = f(t)] =$$

$$= \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{määratud integraali väärtus} \\ \text{ei sõltu argumendi tähistusest} \end{array} \right] =$$
$$= 2\int_0^a f(x)\,dx. \qquad \square$$

Näide 7. Leiame määratud integraali

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx.$$

Paarisfunktsioon $y = \sqrt{4-x^2}$ on integreeruv lõigul $[-2, 2]$. Integraali rajad on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Lause 2 ning Näite 2 abil leiame

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx = 2\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}dx = 2\pi. \qquad \diamondsuit$$

Lause 3. Kui paaritu funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigul $[-a, a]$, siis

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Tõestus. Kui funktsioon $y = f(x)$ on paaritu funktsioon, siis Märkuse 2.12.2 ja Lause 2.12.5 abil saame

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$
$$= \left[\begin{array}{c} \text{teostame esimeses liidetavas muutujate} \\ \text{vahetuse } x=-t,\;\; dx=-dt, \\ x=-a \leftrightarrow t=a,\; x=0 \leftrightarrow t=0 \end{array} \right] = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$
$$= [f(-t) = -f(t)] = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0. \quad \square$$

Näide 8. Leiame määratud integraali

$$\int_{-4}^{4} \sqrt[3]{x\sin^2 x}dx.$$

Funktsioon $y = \sqrt[3]{x\sin^2 x}$ on paaritu funktsioon ja integreeruv lõigul $[-4, 4]$ ning integraali rajad on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Lause 3 põhjal

$$\int_{-4}^{4} \sqrt[3]{x\sin^2 x}dx = 0. \qquad \diamondsuit$$

Lause 4. Kui funktsioonide $u(x)$ ja $v(x)$ tuletised $u'(x)$ ja $v'(x)$ on integreeruvad lõigul $[a, b]$, siis

$$\int\limits_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v\,du.$$

Tõestus. Et
$$d\,(uv) = v\,du + u\,dv$$
ja Newton-Leibnizi valemi põhjal
$$\int_a^b d\,(uv) = uv\Big|_a^b,$$
siis
$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b,$$
millest järeldub Lause 4 väide. $\square$

Näide 9. Leiame ositi integreerides määratud integraali
$$\int_1^e \ln x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \ln x & \vdots & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{array}\right] = (x \ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx =$$
$$= e \ln e - 1 \ln 1 - e + 1 = 1. \qquad \diamondsuit$$

Näide 10. Leiame ositi integreerides määratud integraali:
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \sqrt{a^2 - x^2} & \vdots & du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{array}\right] =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int_0^a \frac{\left(\left(a^2 - x^2\right) - a^2\right)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= -\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} =$$
$$= -\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \arcsin(x/a)\Big|_0^a =$$
$$= -\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx + \frac{a^2\pi}{2}.$$
Võttes selle võrduste ahela esimese ja viimase lüli
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = -\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx + \frac{a^2\pi}{2},$$
saame avaldada meid huvitava integraali
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Leiame sama integraali, kasutades muutujate vahetust

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = a\sin t,\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,\ dx = a\cos t\, dt, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = a \leftrightarrow t = \pi/2 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Kumba võtte rakendamine on selle näite korral efektiivsem? $\diamondsuit$

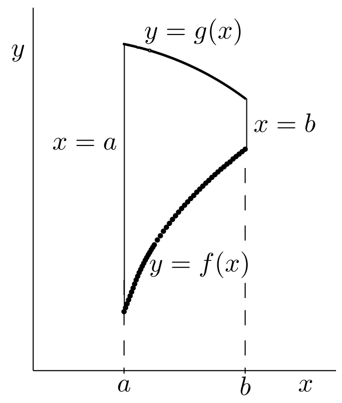
2.16. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Järelduses 2.12.1 on esitatud eeskiri joontega $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ määratud kõverjoonelise trapetsi pindala arvutamiseks juhul, kui $f(x) \geq 0\ \ (x \in [a,b])$. Selle järelduse abil on võimalik tõestada järgmine väide.

Lause 1. Kui $f(x)$ ja $g(x)$ on integreeruvad funktsioonid lõigul $[a,b]$ ning $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,b])$, siis joontega $y = f(x),\ y = g(x)$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kõverjoonelise trapetsi pindala S avaldub kujul

$$S = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Tõestus. **I** Kui $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,b])$, siis uuritava kõverjoonelise trapetsi pindala avaldub joontega $y = g(x),\ y = 0,\ x = a$ ja $x = b$ määratud kõverjoonelise trapetsi ning joontega $y = f(x),\ y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ määratud kõverjoonelise



trapetsi, mille pindalad on leitavad Järelduse 2.12.1 abil, pindalade vahena

$$S = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

II Olgu funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ väärtused lõigul $[a, b]$ suvalise märgiga ning $f(x) \le g(x)$ $(x \in [a, b])$. Lause 2.12.2 põhjal järeldub eeldusest $f(x),\, g(x) \in I\,[a, b]$ nende funktsioonide tõkestatus sel lõigul. Seega leidub selline konstant c, et funktsioonid $g_1(x) = g(x) + c$ ja $f_1(x) = f(x) + c$ on lõigul $[a, b]$ mittenegatiivsed. Et

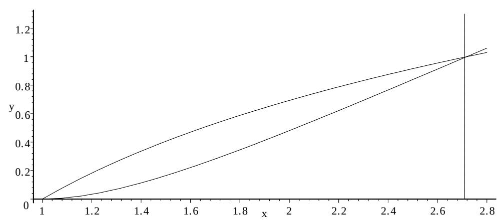
$$f(x),\, g(x) \in I\,[a, b] \;\Rightarrow\; f_1(x),\, g_1(x) \in I\,[a, b]$$

ja $0 \le f_1(x) \le g_1(x)$ $(x \in [a, b])$ ning joontega $y = f_1(x),\ y = g_1(x)$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kõverjoonelise trapetsi pindala võrdub meid huvitava trapetsi pindalaga, siis osa **I** põhjal

$$S = \int_a^b (g_1(x) - f_1(x))\, dx = \int_a^b ((g(x) + c) - (f(x) + c))\, dx =$$

$$= \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx. \qquad \square$$

Näide 1. Leiame joontega $y = \ln x$ ja $y = \ln^2 x$ piiratud kujundi pindala. Skitseerime joonise



Et
$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{cases} \Rightarrow a = x_1 = 1,\, b = x_2 = e$$
ja
$$\ln^2 x \leq \ln x \quad (x \in [1; e])\,,$$
siis Lause 1 põhjal
$$S = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx.$$
Leiame esiteks, et
$$\int_1^e \ln^2 x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x & \vdots & du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ dv = dx & \vdots & v = x \end{bmatrix} =$$
$$= \left(x \ln^2 x\right)\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\, dx = e - 2\int_1^e \ln x\, dx.$$
Seega
$$S = 3\int_1^e \ln x\, dx - e = \begin{bmatrix} \text{kasutame} \\ \text{Näidet 2.15.4} \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 - e + 0 = 3 - e. \qquad \diamondsuit$$

Lause 2. Olgu lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon $y = f(x) \geq 0$ antud parameetriliste võrranditega
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta])\,,$$
kusjuures $\varphi(t)$ on rangelt monotoonne pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[\alpha, \beta]$. Kui $\varphi(\alpha) = a$ ja $\varphi(\beta) = b$, siis joontega $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kõverjoonelise trapetsi pindala S avaldub kujul
$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\ dt.$$

Tõestus. Lause 1 põhjal $S = \int_a^b f(x)dx$. Rakendades muutujate vahetust $x = \varphi(t)$ (vt Lause 2.15.1), saame
$$S = \int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t),\ y = f(\varphi(t)) = \psi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt,\ a \leftrightarrow \alpha,\ b \leftrightarrow \beta \end{bmatrix} =$$
$$= \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\ dt. \qquad \square$$

Näide 2 . Leiame ellipsiga
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

piiratud kujundi pindala.

Tänu sümmeetriale piisab leida vaid esimeses veerandis paikneva osa pindala ja korrutada see neljaga. See osa on määratud joontega $y = \left(b\sqrt{a^2 - x^2}\right)/a$, $y = 0$, $x = 0$ ja $x = a$. Selle ellipsi esimeses veerandis paiknev kaar on parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (t \in [0; \pi/2]).$$

Kasutame Lauset 2. Antud ülesande korral $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, kusjuures $x = 0 \leftrightarrow t = \pi/2$ ja $x = a \leftrightarrow t = 0$. Saame

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 t\,dt =$$
$$= 2ab\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab. \qquad \diamondsuit$$

Vaatleme piirkonda (kõverjoonelist kolmnurka), mis on piiratud polaarkoordinaatides esitatud joonega

$$\rho = \rho(\varphi) \quad (0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le 2\pi)$$

ja kiirtega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$. Jagame kiirte $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ vahelise nurga kiirtega $\varphi = \varphi_i$ $(i = 1; \ldots; n)$, kus $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta$, n osanurgaks. Olgu kiirte $\varphi = \varphi_{i-1}$ ja $\varphi = \varphi_i$ vaheline nurk $\Delta\varphi_i$ $(i = 1; \ldots; n)$, st $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Fikseerime ψ_i $(i = 1; \ldots; n)$, kus $\psi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Joonega $\rho = \rho(\varphi)$ ja kiirtega $\varphi = \varphi_{i-1}$ ning $\varphi = \varphi_i$ piiratud piirkonna pindala võrdub ligikaudu kesknurgale $\Delta\varphi_i$ vastava ringi, raadiusega $\rho(\psi_i)$, sektori pindalaga

$$\frac{\rho^2(\psi_i)\,\Delta\varphi_i}{2}.$$

Tõesti, et kesknurgale 2π vastava ringi, raadiusega $\rho(\psi_i)$, pindala on $\pi\rho^2(\psi_i)$, siis kesknurgale $\Delta\varphi_i$ vastab pindala

$$\pi\rho^2(\psi_i) \cdot \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} = \frac{\rho^2(\psi_i)\,\Delta\varphi_i}{2}.$$

Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^2(\psi_i)\,\Delta\varphi_i}{2}.$$

Teatud tingimustel, näiteks funktsiooni $\rho = \rho(\varphi)$ pidevuse korral lõigul $[\alpha, \beta]$, eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta\varphi_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^2(\psi_i)\,\Delta\varphi_i}{2},$$

mis annab meid huvitava kõverjoonelise kolmnurga pindala. Vormistame tõestatu.

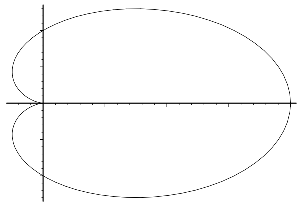
Lause 3. Kui joon on antud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$\rho = \rho(\varphi) \quad \varphi \in [\alpha, \beta]\,,$$

kusjuures $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ ja $\rho(\varphi) \in C\,[\alpha, \beta]\,,$ siis selle joone ja kiirtega $\varphi = \alpha$ ning $\varphi = \beta$ määratud kõverjoonelise kolmnurga pindala S avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Näide 3. Leiame kardioidiga $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ piiratud kujundi



pindala.

Kasutame Lauset 3. Et $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ ja $\rho\,(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, siis

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame *lemniskaadiga* $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$ piiratud kujundi pindala.
Polaarkoordinaatides on selle joone võrrand

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$$

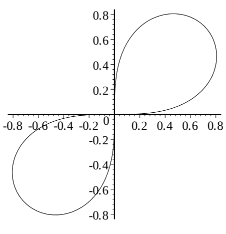
ehk

$$\rho^4 = \rho^2 2\cos\varphi\sin\varphi$$

või

$$\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Skitseerime graafiku



Sümmeetria põhjal piisab leida tingimust $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ rahuldava osa pindala ja korrutada saadud tulemus neljaga. Kasutades Lauset 3, saame

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{\sin 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi \, d\varphi = -\cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 1. \quad \diamondsuit$$

2.17. Joone pikkuse arvutamine

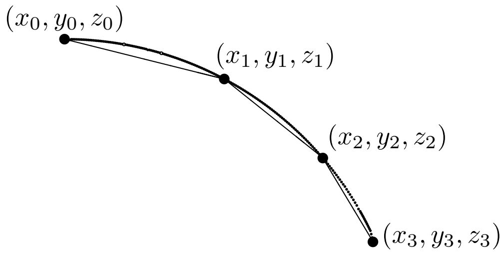
Olgu xyz-ruumis antud joon Γ parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \chi(t) \end{cases} \tag{2.17.1}$$

Tükeldame lõigu $[\alpha; \beta]$ punktidega t_i $(i = 0; 1; \ldots ; n)$, kusjuures

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

osalõikudeks $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1; 2; \ldots ; n)$. Olgu $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$ $(i = 0; 1; \ldots ; n)$ ja $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ $(i = 1; 2; \ldots ; n)$. Punktidega (x_i, y_i, z_i) $(i = 0; 1; \ldots ; n)$ määratud murdjoone γ



pikkus s_γ avaldub kõõlude pikkuste summana

$$s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}.$$

Definitsioon 1. Parameetriliste võrranditega (2.17.1) antud joone Γ pikkuseks s_Γ nimetatakse murdjoone γ pikkuse s_γ piirväärtust piirprotsessis $\max \Delta t_i \to 0$, st

$$s_\Gamma = \lim_{n \to \infty, \, \max \Delta t_i \to 0} s_\gamma. \tag{2.17.2}$$

Lause 1. Kui joon Γ on antud parameetriliste võrranditega (2.17.1), kusjuures

$$\varphi'(t), \, \psi'(t), \, \chi'(t) \in C\,[\alpha, \beta]\,,$$

siis joone Γ pikkus s_Γ avaldub kujul

$$s_\Gamma = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{2.17.3}$$

Tõestus. Lagrange'i keskväärtusteoreemi (Lause 1.12.3) abil saame

$$\Delta x_i = \varphi'(\tau_{i,1})\,\Delta t_i,\ \Delta y_i = \psi'(\tau_{i,2})\,\Delta t_i,\ \Delta z_i = \chi'(\tau_{i,3})\,\Delta t_i \quad (i = 1; 2; \ldots ; n),$$

kusjuures $\tau_{i,1},\ \tau_{i,2},\ \tau_{i,3} \in (t_{i-1}, t_i)$. Seega

$$s_\gamma = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\tau_{i,1}) + \psi'^2(\tau_{i,1}) + \chi'^2(\tau_{i,1})}\Delta t_i.$$

Et

$$\varphi'(t),\ \psi'(t),\ \chi'(t) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \varphi'^2(t),\ \psi'^2(t),\ \chi'^2(t) \in C[\alpha,\beta],$$

siis Lause 1.8.2 põhjal

$$\varphi'^2(\tau_{i,1}) = \varphi'^2(t_i) + \alpha_i,\ \psi'^2(\tau_{i,2}) = \psi'^2(t_i) + \beta_i,\ \chi'^2(\tau_{i,3}) = \chi'^2(t_i) + \gamma_i,$$

kus

$$\alpha_i \overset{\Delta t_i \to 0}{\to} 0,\ \beta_i \overset{\Delta t_i \to 0}{\to} 0,\ \gamma_i \overset{\Delta t_i \to 0}{\to} 0.$$

Kui tähistada

$$f(t) = \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t), \quad \delta_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i,$$

siis

$$s_\gamma = \sum_{i=1}^n \sqrt{f(t_i) + \delta_i}\Delta t_i,$$

kusjuures $\delta_i \overset{\Delta t_i \to 0}{\to} 0$. Kasutades võrratust

$$\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \le \sqrt{|a+b|} \le \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|},$$

saame

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{f(t_i)}\Delta t_i - \sum_{i=1}^n |\delta_i|\,\Delta t_i \le s_\gamma \le \sum_{i=1}^n \sqrt{f(t_i)}\Delta t_i + \sum_{i=1}^n |\delta_i|\,\Delta t_i. \tag{2.17.4}$$

Et

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=1}^n |\delta_i|\,\Delta t_i \le \left(\max\limits_{1\le i\le n} |\delta_i|\right) \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \left(\max\limits_{1\le i\le n} |\delta_i|\right)(\beta-\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty,\, \max \Delta t_i \to 0} \textstyle\sum_{i=1}^n |\delta_i|\,\Delta t_i = 0\end{gathered}$$

ja

$$\begin{gathered}\varphi'^2(t),\ \psi'^2(t),\ \chi'^2(t) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \sqrt{f(t)} \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \sqrt{f(t)} \in I[\alpha,\beta] \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty,\, \max \Delta t_i \to 0} \textstyle\sum_{i=1}^n \sqrt{f(t_i)}\Delta t_i = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(t)}dt,\end{gathered}$$

siis võrratuste ahelast (2.17.4) järeldub, et

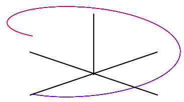
$$\lim_{n\to\infty,\, \max \Delta t_i \to 0} s_\gamma = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{f(t)}dt.$$

Seega, vt seost (2.17.2), on Lause 1 tõene. $\square$

Näide 1. Leiame kruvijoone

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = t \end{cases}$$

osa



mis vastab parameetri t väärtustele lõigust $[0; 2\pi]$, pikkuse.

Et selle näite korral $\varphi(t) = R\cos t,\ \psi(t) = R\sin t,\ \chi(t) = t$ ja funktsioonid $\varphi'(t) = -R\sin t,\ \psi'(t) = R\cos t$ ning $\chi'(t) = 1$ on pidevad lõigul $[0; 2\pi]$, siis Lause 1 abil saame

$$\begin{aligned} s_\Gamma &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + 1}dt = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2+1}dt = 2\pi\sqrt{R^2+1}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Järeldus 1. Kui joon Γ on antud xy-tasandil võrrandiga $y = f(x)\ \ (x \in [a, b])$, kus $f'(x) \in C[a, b]$, siis joone Γ pikkus s_Γ avaldub kujul

$$s_\Gamma = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx. \tag{2.17.5}$$

Tõestus. Väide järeldub Lausest 1 valiku $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = f(t),\ \chi(t) = 0\ (t \in [a, b])$ korral. $\square$

Näide 2. Leiame punktide $(0; 0)$ ja $(1; 1)$ vahel asetseva parabooli $y = x^2$ osa pikkuse.

Rakendame Järeldust 1. Selle näite korral $a = 0,\ b = 1$ ja $f(x) = x^2$. Et $y' = 2x$ ja $2x \in C[0; 1]$, siis valemi (2.17.5) põhjal

$$s_\Gamma = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Tegu on algebralise funktsiooni integreerimisega. Punkti 2.10 põhjal sobib muutujate vahetuseks $x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t$. Saame

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \leftrightarrow t = \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right), \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \leftrightarrow t = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) \\ dx = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t\ dt,\ \sqrt{1+4x^2} = \operatorname{ch} t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} (1 + \operatorname{ch} 2t)\ dt = \frac{1}{4}\left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right). \qquad \diamondsuit$$

Järeldus 2. Kui joon Γ on antud polaarkoordinaatides võrrandiga $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi \in [\alpha, \beta])$ ja $\rho'(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$, siis

$$s_\Gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi. \tag{2.17.6}$$

Tõestus. Joone Γ saame esitada parameetriliste võrranditega

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{array} \right. \quad (\varphi \in [\alpha, \beta]),$$

kus parameetriks on polaarnurk φ. Et

$$\begin{array}{c} \rho'(\varphi) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \rho(\varphi) \in C[\alpha,\beta], \\ (\rho(\varphi)\cos\varphi)' = \dfrac{d(\rho(\varphi)\cos\varphi)}{d\varphi} = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi \in C[\alpha,\beta], \\ (\rho(\varphi)\sin\varphi)' = \dfrac{d(\rho(\varphi)\sin\varphi)}{d\varphi} = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi \in C[\alpha,\beta], \\ \left((\rho(\varphi)\cos\varphi)'\right)^2 + \left((\rho(\varphi)\sin\varphi)'\right)^2 = \\ = (\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)^2 + (\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)^2 = \\ = \rho'^2 + \rho^2, \end{array}$$

siis (2.17.3) $\Rightarrow$ (2.17.6), st Järeldus 2 on tõene. $\square$

Näide 3. Leiame kardioidi $\rho = a(1+\cos\varphi)$ $(\varphi \in [-\pi, \pi])$ pikkuse.

Et $\rho' = -a\sin\varphi \in C[-\pi, \pi]$, siis saame rakendada Järeldust 2. Leiame, et

$$\begin{aligned} s_\Gamma &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + a^2(1+\cos\varphi)^2} d\varphi = \\ &= a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi} d\varphi = 2a \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= 4a \int_0^\pi \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

2.18. Pöördkeha ruumala arvutamine

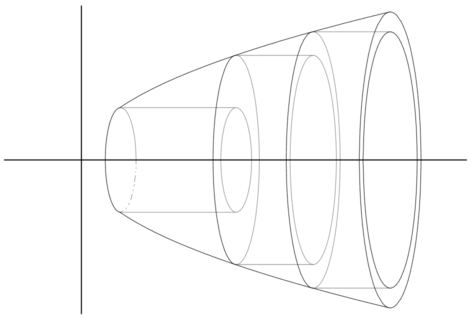
Olgu funktsioon $f(x)$ pidev ja mittenegatiivne lõigul $[a,b]$. Olgu xy-tasandil kõverjooneline trapets D määratud joontega $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$. Vaatleme pöördkeha Ω, mis tekib trapetsi D pöörlemisel ümber x-telje. Tükeldame lõigu $[a,b]$ punktidega x_i $(i = 0; 1; \ldots; n)$, kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

osalõikudeks $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$. Saame tükelduse Π. Olgu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$. Moodustame tükelduse Π korral funktsiooni $\pi f^2(x)$ integraalsumma $S_\Pi\left(\pi f^2\right)$ lõigul $[a,b]$

$$S_\Pi\left(\pi f^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi f^{\,2}(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.18.1}$$

Suurus $S_\Pi\left(\pi f^2\right)$ kujutab endast n püstsilindri, põhja raadiusega $f(\xi_i)$ ja kõrgusega Δx_i, ruumalade summat



Definitsioon 1. Kui funktsioon $f(x)$ on lõigul $[a,b]$ pidev ja mittenegatiivne, siis joontega $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ määratud kõverjooneline trapetsi D pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha Ω ruumalaks V_Ω nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{n\to\infty,\, \max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^{\,2}(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2.18.2}$$

kui see ei sõltu lõigu $[a,b]$ tükeldamise viisist ja valikust $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$.

Et

$$f(x) \in C\,[a,b] \Rightarrow f^{\,2}(x) \in C\,[a,b] \Rightarrow \pi f^{\,2}(x) \in I\,[a,b],$$

siis piirväärtus (2.18.2) eksisteerib. Vormistame saadud tulemuse.

Lause 1. Kui $f(x) \geq 0$ ja $f(x) \in C\,[a,b]$, siis joontega $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$, $x = a$ $(0 \leq y \leq f(a))$, $x = b$ $(0 \leq y \leq f(b))$ ja $y = 0$ $(a \leq x \leq b)$ piiratud kõverjoonelise trapetsi pöörlemisel ümber $x-$telje tekkiva pöördkeha Ω ruumala V_Ω avaldub kujul

$$V_\Omega = \pi \int_a^b f^{\,2}(x)dx. \tag{2.18.3}$$

Näide 1. Leiame joontega $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 1$ ja $x = e$ määratud kõverjoonelise trapetsi pöörlemisel ümber $x-$telje tekkiva pöördkeha Ω ruumala.

Et $e^{-x} \geq 0 \ \ (x \in [1; e])$ ja $e^{-x} \in C\,[1; e]$, siis võib rakendada Lauset 1. Saame

$$V_\Omega = \pi \int_1^e e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\pi \left(e^{-2} - e^{-2e}\right). \qquad \diamondsuit$$

Järeldus 1. Kui joon Γ on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

kusjuures $\psi(t) \geq 0 \ (t \in [\alpha, \beta])$, $\psi(t) \in C\,[\alpha, \beta]$ ja $\varphi(t)$ on rangelt monotoonne pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[\alpha, \beta]$, siis joonte $y = 0$, $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ ning Γ poolt määratud kõverjoonelise trapetsi pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha Ω ruumala V_Ω avaldub kujul

$$V_\Omega = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \left|\varphi'(t)\right| dt. \tag{2.18.4}$$

Tõestuse esitame rangelt kasvava funktsiooni $\varphi(t)$ korral. Et antud eeldustel

$$t = \varphi^{-1}(x) \in C\,[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \Rightarrow y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \in C\,[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)],$$

kusjuures $\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \geq 0 \ \ (x \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$, siis Lause 1 põhjal

$$\begin{aligned} V_\Omega &= \pi \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \psi^2\left(\varphi^{-1}(x)\right) dx = [x = \varphi(t)] = \\ &= \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \left|\varphi'(t)\right| dt, \end{aligned}$$

st Järeldus 1 on sel juhul tõene. Näidake, et Järeldus 1 on tõene ka rangelt kahaneva $\varphi(t)$ korral. $\diamondsuit$

Näide 2. Leiame parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

esitatud astroidi osa pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha Ω ruumala.

Tänu sümmeetriale piisab arvutada parameetri väärtustele $t \in [0; \pi/2]$ vastava joone osa ümber x-telje pöörlemisel saadud pöördkeha ruumala ja korrutada saadud tulemus kahega. Et $\psi(t) = b\sin^3 t \geq 0 \ \ (t \in [0; \pi/2])$, $b\sin^3 t \in C[0; \pi/2]$ ja

$$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \in C\,[0; \pi/2], \quad \varphi'(t) < 0 \ \ (t \in (0; \pi/2)),$$

siis on rahuldatud Järelduse 1 eeldused. Saame

$$
\begin{aligned}
V_\Omega &= 2\cdot\pi\int_0^{\pi/2}\left(b\sin^3 t\right)^2\left|-3a\cos^2 t\sin t\right|dt = 6\pi ab^2\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\,\cos^2 t\,dt = \\
&= -6\pi ab^2\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\;d\left(\cos t\right) = \\
&= -6\pi ab^2\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{\cos^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \\
&= 6\pi ab^2\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right) = \frac{32}{105}\pi ab^2. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

Järeldus 2. Kui joon Γ on antud polaarkoordinaatides võrrandiga $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi \in [\alpha,\beta])$, kusjuures $\rho'(\varphi) \in C[\alpha,\beta]$, $\sin\varphi \geq 0$ $(\varphi \in [\alpha,\beta])$ ja avaldis

$$\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi \tag{2.18.5}$$

säilitab märki vahemikus (α,β), siis joontega $y = 0$, $x = \rho(\alpha)\cos\alpha$, $x = \rho(\beta)\cos\beta$ ja Γ määratud kõverjoonelise trapetsi ümber x-telje pöörlemisel tekkiva pöördkeha Ω ruumala V_Ω avaldub kujul

$$V_\Omega = \pi\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi\,\left|\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right|\,d\varphi. \tag{2.18.6}$$

Tõestus. Joone Γ saame esitada parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad (\varphi\in[\alpha,\beta]),$$

kus parameetriks on polaarnurk φ. Kasutame Järeldust 1. $\square$

Näide 3. Leiame valemi (2.18.6) abil kera, mille raadius on R, ruumala.

Seda kera võib vaadelda kui polaarkoordinaatides esitatud ringjoone osa $\rho = R$ $(\varphi \in [0;\pi])$ ümber $x-$telje pöörlemisel tekkivat pöördkeha Ω. Et selle näite korral $\rho'(\varphi) = 0 \in C[0;\pi]$, $\sin\varphi \geq 0$ $(\varphi\in[0;\pi])$ ja

$$\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi = -R\sin\varphi < 0 \quad (\varphi \in (0;\pi)),$$

siis Järelduse 2 põhjal

$$
\begin{aligned}
V_\Omega &= \pi\int_0^\pi R^2\sin^2\varphi\,\left|-R\sin\varphi\right|\,d\varphi = \pi R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi = \\
&= -\pi R^3\int_0^\pi\left(1-\cos^2\varphi\right)\,d\cos\varphi = -\pi R^3\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

Näide 4. Kardioidi osa $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right)$ $(\varphi\in[0;\pi])$ pöörleb ümber x-telje. Leiame tekkiva pöördkeha Ω ruumala.

Et

$$\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi = -a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = -a\sin\varphi\,(2\cos\varphi+1),$$

siis vahemikus $(0;\pi)$ on vaid üks punkt, $\varphi = 2\pi/3$, milles avaldis (2.18.5) muudab märki. Jaotame esitatud joone kaheks, millest esimene vastab parameetri väärtustele lõigust $[0;2\pi/3]$ ja teine parameetri väärtustele lõigust $[2\pi/3;2\pi]$. Saame (miks?)

$$\begin{gathered}
V_\Omega = \pi\int_0^{2\pi/3}(a(1+\cos\varphi))^2\sin^2\varphi\,|-a\sin\varphi\,(2\cos\varphi+1)|\,d\varphi- \\
-\pi\int_{2\pi/3}^{\pi}(a(1+\cos\varphi))^2\sin^2\varphi\,|-a\sin\varphi\,(2\cos\varphi+1)|\,d\varphi = \\
= \pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\sin^3\varphi\,(2\cos\varphi+1)\,d\varphi = \\
= -\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\left(1-\cos^2\varphi\right)(2\cos\varphi+1)\,d\cos\varphi = \\
= -\pi a^3\int_0^{\pi}\left(1+4\cos\varphi+4\cos^2\varphi-2\cos^3\varphi-5\cos^4\varphi-2\cos^5\varphi\right)d\cos\varphi = \\
= -\pi a^3\left(\cos\varphi+2\cos^2\varphi+\frac{4}{3}\cos^3\varphi-\frac{1}{2}\cos^4\varphi-\cos^5\varphi-\frac{1}{3}\cos^6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \\
= \frac{8}{3}\pi a^3. \qquad \diamondsuit
\end{gathered}$$

Pöördkeha ruumala leidmisel esitatud mõttekäik on väikeste muudatustega kasutatav ka mõningatel juhtudel, mil tegemist ei ole pöördkehaga. Kui integraalsummas (2.18.1) pöördkeha ristlõike (tasandiga $x = \xi_i$) pindala $\pi f^{\,2}(\xi_i)$ asendada mingi teist laadi keha Ω ristlõike (tasandiga $x = \xi_i$) pindalaga $S(\xi_i)$, kus funktsioon $S(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$, saame integraalsumma

$$S_\Pi(S) = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta\xi_i.$$

Minnes piirile, $\max\Delta\xi_i \to 0$ saame määratud integraali $\int_a^b S(x)\,dx$, mis teatud lisatingimustel esitab keha Ω ruumala. Kehtib järgmine väide, mille korrektse tõestuse leiate õpikust [5], lk 408–409.

Lause 2. Kui
1) keha Ω asetseb tasandite $x = a$ ja $x = b$ vahel,
2) keha Ω lõiked tasandiga $x = \xi \ \ (\xi \in [a,b])$ on pindalaga $S(\xi)$,
3) iga kahe sellise lõike ristprojektsioonist yz-tasandile paikneb üks täielikult teise sees,
4) $S(x) \ge 0 \ \ (x \in [a,b])$, $\quad S(x) \in C[a,b]$, siis

$$V_\Omega = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$$

Näide 5. Leiame ellipsoidiga

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.18.7)$$

piiratud keha Ω ruumala V_Ω.

Ellipsoidi (2.18.7) lõikejoon tasandiga $x = \xi$ $(\xi \in (-a, a))$ on ellips

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\xi^2}{a^2},$$

mille pooltelgede pikkused on vastavalt $b\sqrt{1 - \xi^2/a^2}$ ja $c\sqrt{1 - \xi^2/a^2}$. Näite 2.16.2 põhjal on selle ellipsi pindalaks

$$\pi b\sqrt{1 - \xi^2/a^2}c\sqrt{1 - \xi^2/a^2} = \pi bc\left(1 - \xi^2/a^2\right).$$

Seega $S(x) = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right)$ $(x \in [-a, a])$. Kontrollige, et Lause 2 tingimused on rahuldatud. Saame

$$V_\Omega = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right)\, dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - x^2/a^2\right)\, dx =$$
$$= 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4\pi abc}{3}. \qquad \diamondsuit$$

2.19. Pöördpinna pindala

Olgu joon Γ antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta]), \tag{2.19.1}$$

kus $\varphi'(t), \psi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\psi(t) \geq 0$ $(t \in [\alpha, \beta])$ ja $\varphi(t)$ on rangelt monotoonne lõigul $[\alpha, \beta]$. Kui joon Γ pöörleb ümber x-telje, tekkib pöördpind Σ, mille pindala leidmine meid huvitab.

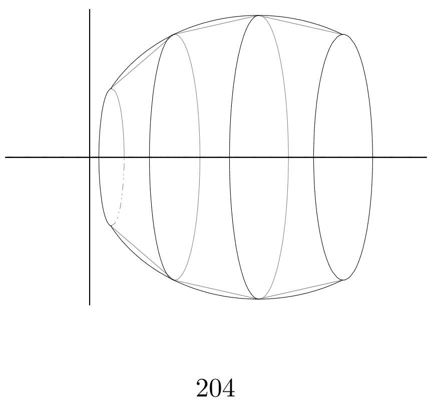
Jaotame lõigu $[\alpha; \beta]$ punktidega t_i $(i = 0; 1; \ldots; n)$ osalõikudeks $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1; 2; \ldots; n)$, kusjuures

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Olgu

$$x_i = \varphi(t_i),\ y_i = \psi(t_i)\ (i = 0; 1; \ldots; n),$$
$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]\ (i = 1; 2; \ldots; n).$$

Punktidega (x_i, y_i) $(i = 0; 1; \ldots; n)$ määratud murdjoone pöörlemisel ümber x-telje tekkib pöördpind



mille pindala avaldub ligikaudu kujul

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi\psi\left(\tau_i\right)\sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2+\left(\Delta y_i\right)^2}. \tag{2.19.2}$$

Definitsioon 1. Parameetriliste võrranditega (2.19.1) antud joone pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördpinna Σ pindalaks S_Σ nimetatakse piirväärtust summast (2.19.2) piirprotsessis $\max \Delta t_i \to 0$, st

$$S_\Sigma = \lim_{n\to\infty,\,\max\Delta t_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\psi\left(\tau_i\right)\sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2+\left(\Delta y_i\right)^2},$$

kui see piirväärtus ei sõltu lõigu $[\alpha,\beta]$ tükeldamise viisist ja valikust $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$ $(i=1;2;\ldots;n)$.

Lause 1. Kui joon Γ on antud parameetriliste võrranditega (2.19.1), kusjuures

$$\varphi'(t),\ \psi'(t) \in C\left[\alpha,\beta\right], \quad \psi(t)\ge 0 \quad (t\in[\alpha,\beta])$$

ja $\varphi'(t)$ säilitab märki vahemikus (α,β), siis joone Γ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördpinna Σ pindala avaldub kujul

$$S_\Sigma = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^{\,2}(t)+\psi'^{\,2}(t)}\,dt. \tag{2.19.3}$$

Tõestus on analoogiline Lause 2.17.1 tõestusega. Proovige iseseisvalt jõudu. □

Näide 1. Leiame sfääri Σ, mille raadius on R, pindala.

Tänu sümmeetriale piisab leida poolsfääri, mis tekkib poolringjoone

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (t\in[0;\pi/2])$$

pöörlemisel ümber x-telje, pindala ja korrutada saadud tulemust kahega. Antud ülesande korral

$$\varphi(t)=R\cos t,\ \psi(t)=R\sin t \ \ (t\in[0;\pi/2]) \ \Rightarrow\ \varphi'(t),\ \psi'(t)\ \in C[0;\pi/2]$$

ja $\varphi'(t)$ säilitab märki vahemikus $(0,\pi/2)$. Seega on rahuldatud Lause 1 tingimused. Saame

$$S_\Sigma = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt = -4\pi R^2\cos t\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= 4\pi R^2. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame astroidi kaare

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (t\in[0;\pi])$$

pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördpinna Σ pindala.

Tänu sümmeetriale piisab leida esimeses veerandis paikneva astroidi kaare pöörlemisel saadava pöördpinna pindala ja korrutada saadud tulemus kahega. Juhul

$$\varphi(t) = a\cos^3 t,\ \psi(t) = a\sin^3 t \quad (t \in [0; \pi/2])$$

on täidetud Lause 1 eeldused. Kontrollige seda! Rakendades Lauset 1, saame

$$\begin{aligned} S_\Sigma &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a\sin^3 t \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\, dt = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\ d\sin t = \\ &= 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{12\pi a^2}{5}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Järeldus 1. Kui joon Γ on antud võrrandiga $y = f(x)\quad (x \in [a, b])$, kusjuures $f'(x) \in C\,[a, b]$, siis joone ümber x-telje pöörlemisel tekkiva pöördpinna pindala S avaldub kujul

$$S_\Sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Tõestus. Väide järeldub Lausest 1 valiku $\varphi(t) = t,\ \psi(t) = f(t)$ korral. $\square$

Näide 3. Joon $y = \text{ch}x\ (0 \le x \le 1)$ pöörleb ümber x-telje. Leiame tekkiva pöördpinna Σ pindala.

Järelduse 1 abil saame

$$\begin{aligned} S_\Sigma &= 2\pi \int_0^1 \text{ch}x\sqrt{1 + \text{sh}^2 x}dx = 2\pi \int_0^1 \text{ch}^2 x dx = \pi \int_0^1 (1 + \text{ch}2x)\, dx = \\ &= \pi\left(x + \frac{\text{sh}2x}{2}\right)_0^1 = \pi\left(1 + \frac{\text{sh}2}{2}\right). \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

2.20. Päratud integraalid

Määratud integraali üheks omaduseks on (vt Lauset 2.12.2)

$$f(x) \in I[a, b] \Rightarrow f(x) = O(1)\ \ (x \in [a, b])\,.$$

Rakendustes on vajalik uurida ka juhtu $f(x) \ne O(1)$.

Definitsioon 1. Kui $f(x) \in I[a, c]$ iga $c \in (a, b)$ korral ja $\lim\limits_{c \to b-} |f(x)| = +\infty$, siis *päratuks integraaliks* funktsioonist $f(x)$ lõigul $[a, b]$ nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx,$$

st

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Kui see piirväärtus eksisteerib, siis öeldakse, et päratu integraal koondub. Vastasel juhul öeldakse, et päratu integraal hajub.

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal juhul, kui funktsioon $f(x)$ on tõkestamata punkti a ümbruses:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Juhul, kui funktsioon $f(x)$ on tõkestamata lõigu $[a,b]$ mitme punkti ümbruses, tuleb see lõik jaotada eelnevat tüüpi osalõikudeks ja iga osalõigu korral kasutada esitatud eeskirju.

Näide 1. Uurime päratu integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

koonduvust. Et integreeritav funktsioon on tõkestamata punkti 0 ümbruses, siis

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}\right) = 2. \qquad \diamondsuit$$

Seega antud päratu integraal koondub. $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime päratu integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

koonduvust. Et integreeritav funktsioon on tõkestamata nii punkti 0 kui ka punkti 1 ümbruses, siis

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{c\to 0+} \int_c^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \lim_{c\to 1-} \int_{0.5}^c \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} =$$

$$= \left[x = \sin^2 t,\ dx = 2\sin t\cos t\,dt,\ \sqrt{x-x^2} = \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t} = \sin t\cos t\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0+} \int_{\arcsin\sqrt{c}}^{\pi/4} \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sin t\cos t} + \lim_{c\to 1-} \int_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{c}} \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sin t\cos t} =$$

$$= \lim_{c\to 0+} 2t\Big|_{\arcsin\sqrt{c}}^{\pi/4} + \lim_{c\to 1-} 2t\Big|_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{c}} =$$

$$= \lim_{c\to 0+} \left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{c}\right) + \lim_{c\to 1-} \left(2\arcsin\sqrt{c} - \frac{\pi}{2}\right) = \pi. \qquad \diamondsuit$$

Uurime veel juhtu, kui vähemalt üks integraali rajadest on lõpmatu.

Definitsioon 2. Kui $f(x) \in I[a,b]$ iga $b > a$ korral ja $\exists \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, siis

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kui $f(x) \in I[a,b]$ iga $a < b$ korral ja $\exists \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, siis

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kui $f(x) \in I[a,b]$ iga $a, b \in \mathbf{R}$ korral, siis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Näide 3. Leiame päratu integraali

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \arctan x^2 \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\arctan b^2 - \arctan 0^2\right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame päratu integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \arctan x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Uurime, millistel parameetri α väärtustel koondub integraal

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}.$$

Antud integraali korral on integreeritav funktsioon tõkestamata punkti $x = 1$ ümbruses ja integraali ülemine raja on $+\infty$. Kui $\alpha = 1$ ja $c \in (1; +\infty)$, siis

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{a\to1+} \int_a^c \frac{d\ln x}{\ln x} + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{a\to1+} \ln|\ln x|\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty} \ln|\ln x|\Big|_c^b =$$

$$= \lim_{a\to 1+} \left(\ln|\ln c| - \ln|\ln a|\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|\ln b| - \ln|\ln c|\right),$$

kusjuures esimene liidetav läheneb suurusele $+\infty$ ja teine liidetav suurusele $+\infty$. Seega juhul $\alpha = 1$ on see päratu integraal hajuv.

Kui $\alpha \neq 1$ ja $c \in (1, +\infty)$, siis

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x} = \lim_{a\to 1+} \int_a^c \ln^{-\alpha} x \; d\ln x + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b \ln^{-\alpha} x \; d\ln x =$$

$$= \lim_{a\to 1+} \left(\frac{\ln^{1-\alpha} c}{1-\alpha} - \frac{\ln^{1-\alpha} a}{1-\alpha}\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln^{1-\alpha} b}{1-\alpha} - \frac{\ln^{1-\alpha} c}{1-\alpha}\right),$$

kus esimestes sulgudes olev avaldis läheneb lõplikule suurusele, kui $\alpha < 1$ ja teistes sulgudes olev avaldis läheneb lõplikule suurusele, kui $\alpha > 1$. Seega on päratu integraal $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^\alpha x}$ hajuv suvalise $\alpha \in \mathbf{R}$ korral, kuid $c \in (1, +\infty)$ korral

$$\int_1^c \frac{dx}{x\ln^\alpha x} \overset{\alpha\le 1}{=} \frac{\ln^{1-\alpha} c}{1-\alpha}, \quad \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x} \overset{\alpha\ge 1}{=} \frac{\ln^{1-\alpha} c}{\alpha-1}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 6. Uurime päratu integraali

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right) \, dx}{x} \tag{2.20.1}$$

koonduvust.

Et

$$\frac{2\ln x}{x} = \frac{\ln x^2}{x} < \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \qquad (x \in [1, +\infty))$$

ja

$$\int_1^a \frac{2\ln x \; dx}{x} < \int_1^a \frac{\ln\left(x^2+1\right) \, dx}{x} \qquad (a > 1)$$

ning

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\ln x \; dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{2\ln x \; dx}{x} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a 2\ln x \; d\ln x =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \ln^2 x \Big|_1^a = \lim_{a\to+\infty} \left(\ln^2 a - \ln^2 1\right) = +\infty,$$

siis ka

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right) \, dx}{x} = +\infty,$$

st päratu integraal (2.20.1) on hajuv. $\diamondsuit$

2.21. Määratud integraali ligikaudne arvutamine

Newton-Leibnizi valem võimaldab arvutada määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ juhul, kui integreeritav funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$ ja me teame (oskame leida) funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni $F(x)$ sel lõigul. Me puutume sageli kokku ülesannetega, mille korral $F(x)$ ei ole elementaarfunktsioon või $f(x)$ ei ole antud analüütiliselt. Ülesande arvutistamisel on tihti otstarbekas vältida keerukat algfunktsiooni leidmist ja kasutada teisi võimalusi määratud integraali arvutamiseks (vt [15], [18]).

Tutvume paari lihtsama võttega määratud integraali arvutamiseks. Olgu antud lõigu $[a,b]$ *ühtlane* tükeldus punktidega x_i $(i = 0; 1; \ldots; n)$, kus

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

ja

$$h = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1; 2; \ldots; n)\,.$$

Uurime valemit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, f(x_i) + R_n(a, b,\, f). \tag{2.21.1}$$

Valemit (2.21.1) nimetatakse *kvadratuurvalemiks* ja arve α_i ning x_i $(i = 0; 1; \ldots; n)$ vastavalt *kvadratuurvalemi kordajateks* ja *sõlmedeks.* Suurus $R_n(a,b,f)$ kannab valemi (2.21.1) *jääkliikme* nime. Kvadratuurvalemit (2.21.1) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ korral täpseks, kui $R_n(a, b,\, f) = 0$. Vaatleme kaht juhtu.

I Valiku $n = 1$ korral $h = b - a$ ja saame valemi (2.21.1) erijuhu

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha_0\, f(a) + \alpha_1\, f(b) + R_1(a, b,\, f). \tag{2.21.2}$$

Kui nõuda funktsioonide 1 ja x korral valemi (2.21.2) täpsust, siis saame

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_a^b 1dx = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 + \alpha_1 = b - a, \\ &\textstyle\int_a^b xdx = \alpha_0 \cdot a + \alpha_1 \cdot b \quad \Rightarrow \; a\,\alpha_0 + b\,\alpha_1 = \dfrac{b^2 - a^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1 = h \\ &a\,\alpha_0 + b\,\alpha_1 = \frac{a+b}{2} h \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{h}{2}$$

ning

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\,(\,f(a) + \,f(b)) + R_1(a,b,\,f). \tag{2.21.3}$$

Juhul $f(x) \geq 0$ annab valemi (2.21.3) vasak pool kõverjoonelise trapetsi pindala ja suurus $h\,(\,f(a) + \,f(b))\,/2$ trapetsi, mille kõrgus on h ja aluste pikkused vastavalt $f(a)$ ja $f(b)$, pindala. Jaotame lõigu $[a,b]$ punktidega x_i $(i = 0;1;\ldots;m)$ m võrdse pikkusega $h = (b-a)\,/m$ osalõiguks ja rakendame valemit (2.21.3) igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1;\ldots;m)$ eraldi. Saame

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^m \left(\frac{h}{2}\,(\,f(x_{i-1}) + \,f(x_i)) + R_1(x_{i-1}, x_i,\,f)\right) =$$
$$= h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)\right) + R_1,$$

kus

$$R_1 = \sum_{i=1}^m R_1(x_{i-1}, x_i,\,f)$$

ja

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2}f(x_m)\right). \tag{2.21.4}$$

Valem (2.21.4) kannab *trapetsvalemi* nime. Kehtib hinnang (vt [5], lk 390–392)

$$|R_1| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{x\in[a,b]} |\,f''(x)|\,. \tag{2.21.5}$$

Lause 1. Kui $f(x) \in I\,[a,b]$ ja $h = (b-a)\,/m$ $(m \in N)$ ning $x_i = x_{i-1} + h$ $(i = 1;\ldots;m)$, kusjuures $x_0 = a$, siis kehtib ligikaudne seos (2.21.4). Kui $\exists\, f''(x)$ $(x \in [a,b])$, siis kehtib veahinnang (2.21.5).

Näide 1. Leiame trapetsvalemi abil integraali $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ligikaudse väärtuse, jaotades lõigu $[a,b]$ viieks võrdseks osaks.

Antud ülesande korral $h = (1-0)\,/5 = 0.2$. Et

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},\ \frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2} = \left(4x^2-2\right)e^{-x^2},\ \frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2} = \left(12x-8x^3\right)e^{-x^2}$$

ja

$$\left(12x-8x^3\right)e^{-x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \left\{0; -\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right\},$$

siis funktsiooni e^{-x^2} teine tuletis on monotoonne lõigul $[0;1]$ ja

$$\max_{x\in[0;1]} \left|\,\left(e^{-x^2}\right)''\right| = \max\left\{\left|\left(e^{-x^2}\right)''\right|_{x=0}, \left|\left(e^{-x^2}\right)''\right|_{x=1}\right\} =$$
$$= \max\left\{|-2|\,; \left|\frac{2}{e}\right|\right\} = 2.$$

Valemi (2.21.5) abil saame hinnangu

$$|R_1| \le \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = \frac{1}{150}.$$

Teeme järgmised arvutused valemi (2.21.4) abil nelja *kümnendkohaga*, st nelja kohaga peale koma,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.2 \left(\frac{1}{2} e^{-0^2} + e^{-0.2^2} + e^{-0.4^2} + e^{-0.6^2} + e^{-0.8^2} + \frac{1}{2} e^{-1^2} \right) \approx 0.744\,4.$$

Lõppvastuse anname kahe kümnendkohaga

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.74.$$

Võime lugeda selle integraali ligikaudse väärtuse viimast kohta õigeks, sest koguviga (trapetsvalemi viga + ümardamisvead + vigade edasikandumine arvutustes) ei ületa ühte viimase koha ühikut. $\diamondsuit$

II Valiku $n = 2$ korral $h = (b-a)/2$ ja saame valemi (2.21.1) erijuhu

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(\frac{a+b}{2}) + \alpha_2 f(b) + R_2(a, b, f). \qquad (2.21.6)$$

Kui nõuda , et valem (2.21.6) on täpne funktsioonide 1, x ja x^2 korral, siis saame

$$\begin{cases} \int_a^b 1 dx = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1 \\ \int_a^b x\, dx = \alpha_0 \cdot a + \alpha_1 \cdot \dfrac{a+b}{2} + \alpha_2 \cdot b \\ \int_a^b x^2\, dx = \alpha_0 \cdot a^2 + \alpha_1 \cdot \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \alpha_2 \cdot b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = b - a, \\ a\,\alpha_0 + \dfrac{a+b}{2} \alpha_1 + b\,\alpha_2 = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \\ a^2\,\alpha_0 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \alpha_1 + b^2\,\alpha_2 = \dfrac{b^3 - a^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \alpha_2 = \dfrac{h}{3} \\ \alpha_1 = \dfrac{4h}{3} \end{cases}$$

ja

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R_2(a, b, f). \qquad (2.21.7)$$

Jaotame lõigu $[a, b]$ punktidega x_i $(i = 0; 1; \ldots; 2m)$ $2m$ võrdse pikkusega $h = (b-a)/(2m)$ osalõiguks ja rakendame igal osalõigul $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ $(k = 0; 1; \ldots; m-1)$ valemit (2.21.7). Saame

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{h}{3} \left(f(x_{2k}) + 4 f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right) + R_2(x_{2k}, x_{2k+2}, f) \right) = \\ &= \frac{b-a}{6m} \left[f(x_0) + 4 \left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{2m-1}) \right) + \right. \\ &\left. +2 \left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \ldots + f(x_{2m-2}) \right) + f(x_{2m}) \right] + R_2, \end{aligned}$$

kus

$$R_2=\sum_{k=0}^{m-1} R_2(x_{2k},x_{2k+2},\, f)$$

ja

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6m}\,[\,f(x_0)+4\,(\,f(x_1)+\,f(x_3)+\,f(x_5)+\ldots+\,f(x_{2m-1}))+\\
+2\,(\,f(x_2)+\,f(x_4)+\,f(x_6)+\ldots+\,f(x_{2m-2}))+f(x_{2m})]\,. \tag{2.21.8}$$

Valemit (2.21.8) nimetatakse *Simpsoni valemiks.* Kehtib hinnang (vt [5], lk 395–396)

$$|R_2|\le\frac{(b-a)^5}{180\,(2m)^4}\max_{x\in[a,b]}\left|\,f^{\,\mathrm{IV}}(x)\right|. \tag{2.21.9}$$

Lause 2. Kui $f(x)\in I\,[a,b]$ ja $h=(b-a)\,/\,(2m)$ $(m\in N)$ ning $x_i=x_{i-1}+h$ $(i=1;\ldots;2m)$, kusjuures $x_0=a$, siis kehtib ligikaudne seos (2.21.8). Kui $\exists\, f^{\mathrm{IV}}(x)$ $(x\in[a,b])$, siis kehtib veahinnang (2.21.9).

Näide 2. Leiame Simpsoni valemi abil integraali $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ligikaudse väärtuse, valides $m=2$.

Antud ülesande korral $h=(1-0)\,/\,(2\cdot2)=0.25$. Et

$$\frac{d^3}{dx^3}e^{-x^2}=\left(12x-8x^3\right)e^{-x^2},\ \frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}=\left(16x^4-48x^2+12\right)e^{-x^2},\\
\frac{d^5}{dx^5}e^{-x^2}=\left(-32x^5+160x^3-120x\right)e^{-x^2}$$

ja

$$\frac{d^5}{dx^5}e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(10+2\sqrt{10}\right)};\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(10-2\sqrt{10}\right)}\right\},$$

siis $\dfrac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}$ on monotoonne lõikudel $\left[0;\sqrt{\left(10-2\sqrt{10}\right)}/2\right]$ ja $\left[\sqrt{\left(10-2\sqrt{10}\right)}/2;1\right]$ ning

$$\max_{x\in[0;1]}\left|\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}\right|=\\
=\max\left\{\left|\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}\right|_{x=0},\left|\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}\right|_{x=\sqrt{\left(10-2\sqrt{10}\right)}/2},\left|\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}\right|_{x=1}\right\}=\\
=\max\{|12|\,;|-7.419\,5|\,;|-20/e|\}=12.$$

Hinnangu (2.21.9) abil leiame, et

$$|R_2|\le\frac{(1-0)^5}{180\,(2\cdot2)^4}\cdot12=\frac{1}{3840}\le0.0003.$$

Teeme arvutused valemi (2.21.8) abil viie kümnendkohaga

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 2}\left(e^{-0^2}+4\left(e^{-0.25^2}+e^{-0.75^2}\right)+2e^{-0.5^2}+e^{-1^2}\right)\approx 0.74685.$$

Lõppvastuse anname kolme kümnendkohaga

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0.747.$$

Võime lugeda selle integraali ligikaudse väärtuse viimast kohta õigeks, sest koguviga (Simpsoni valemi viga + ümardamisvead + vigade edasikandumine arvutustes) ei ületa ühte viimase koha ühikut. $\diamondsuit$

2.22. Harjutusülesanded

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ V: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+C.$
2. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx.$ V: $\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C.$
3. $\int \tan^2 x\,dx.$ V: $\tan x - x + C.$
4. $\int \frac{(1+x)^2}{x\,(1+x^2)}\,dx.$ V: $\ln|x| + 2\arctan x + C.$
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ V: $\sqrt{1+x^2}+C.$
6. $\int \sqrt[5]{(7-3x)^6}dx.$ V: $C-\frac{5}{33}\sqrt[5]{(7-3x)^{11}}.$
7. $\int \sin x\cos^3 x\,dx.$ V: $C-\frac{1}{4}\cos^4 x.$
8. $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx.$ V: $\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3}+C.$
9. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}.$ V: $C-\frac{1}{4\,(\arcsin x)^4}.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\cot x}}.$ V: $C-2\sqrt{1+\cot x}.$
11. $\int e^x\sin e^x dx.$ V: $C-\cos\left(e^x\right).$
12. $\int \frac{dx}{x\,(1+\ln x)}$. V: $\ln|1+\ln x|+C.$
13. $\int (\cot x)^{-7/3}(\sin x)^{-2}\,dx.$ V: $\frac{3}{4}(\cot x)^{-4/3}+C.$
14. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$ V: $C-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}(\arccos 3x)^3$.
15. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. V: $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}.$
16. $\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}.$ V: $\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}-x+C.$
17. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$ V: $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C.$
18. $\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}\,dx.$ V: $C-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+\frac{1}{2}\arctan x^2.$
19. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ V: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$
20. $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx.$ V: $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C.$
21. $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$ V: $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2+6x+7}$. V: $\displaystyle\frac{\sqrt{33}}{33}\arctan\left(\frac{\sqrt{33}}{11}(2x+1)\right)+C.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-5-x^2}}$. V: $\displaystyle\arcsin\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)+C.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+8x-16x^2}}$. V: $\displaystyle\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)+C.$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-10x-25x^2}}$. V: $\displaystyle\frac{1}{5}\arcsin\frac{5}{3}\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{5}\right)+C.$

26. $\int\left(\tan^2 x+\tan^4 x+\tan^6 x\right)\,dx$. V: $\displaystyle\tan x - x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$

27. $\int \cos 2x\sin 5x\,dx$. V: $\displaystyle C-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x.$

28. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$

29. $\int \sin 2x\sin 5x\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C.$

30. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{4}x+C.$

31. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$. V: $\displaystyle\ln\left(\frac{1}{\cos x}+\tan x\right)+C=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C.$

32. $\int\cot^4 x\,dx$. V: $\displaystyle x+\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$

33. $\displaystyle\int\frac{\sin^3\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}\,d\alpha$. V: $\displaystyle C-2\sqrt{\cos\alpha}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5\alpha}.$

34. $\int\sin^4\beta\,d\beta$. V: $\displaystyle -\frac{1}{4}\sin^3\beta\cos\beta-\frac{3}{8}\cos\beta\sin\beta+\frac{3}{8}\beta+C=$
$\displaystyle =\frac{3}{8}\beta-\frac{1}{4}\sin 2\beta+\frac{1}{32}\sin 4\beta+C.$

35. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^6 x}$. V: $\displaystyle C-\frac{\cos x}{5\sin^5 x}-\frac{4\cos x}{15\sin^3 x}-\frac{8}{15}\frac{\cos x}{\sin x}=$
$\displaystyle =C-\frac{\cot^5 x}{5}-\frac{2\cot^3 x}{3}-\cot x.$

36. $\int\arccos x\,dx$. V: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$

37. $\int x\arctan(2x)\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}x^2\arctan 2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\arctan 2x+C.$

38. $\int x\sin 3x\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{1}{3}x\cos 3x+C.$

39. $\int\arctan\sqrt{x}\,dx$. V: $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C.$

40. $\int x^3e^{2x}dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}+C.$

41. $\int\ln\left(x^2+2\right)\,dx$. V: $\displaystyle x\ln\left(x^2+2\right)-2x+2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)+C.$

42. $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. V: $C-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$.

43. $\int e^x\sin x\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

44. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)+C$.

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. V: $2\arctan\sqrt{x-1}+C$.

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$. V: $2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C$.

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$.

V: $\displaystyle x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(-1+\sqrt[6]{x}\right)+C$.

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$. V: $\displaystyle 2\sqrt{1+\ln x}-\ln\frac{1+\sqrt{1+\ln x}}{1-\sqrt{1+\ln x}}+C$.

49. $\displaystyle\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2}\ln^2\tan x+C$.

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$. V: $\displaystyle C-\frac{1}{a^2x}\sqrt{x^2+a^2}$.

51. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. V: $\displaystyle C-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. V: $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C$.

53. $\int e^{\sqrt{x}}dx$. V: $2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}-2e^{\sqrt{x}}+C$.

54. $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$. V: $-3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}+6\cos\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+C$.

55. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2\left(1+x^2\right)}\,dx$. V: $\displaystyle\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\arctan x}{x}-\frac{\left(\arctan x\right)^2}{2}+C$.

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. V: $\arcsin\left(2x-1\right)+C$.

57. $\displaystyle\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+C$.

58. $\displaystyle\int \frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x-1\right)^2}\,dx$. V: $\displaystyle\ln\frac{x^4}{\left(x-1\right)^3}-\frac{9}{x-1}+C$.

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. V: $\displaystyle\frac{1}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$.

60. $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx$. V: $\displaystyle\frac{1}{4\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{4\left(x-1\right)^2}+C$.

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8}$.

V: $\displaystyle\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2-2x+4\right)+\frac{1}{12}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+C$

.

62. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

V: $\displaystyle\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)++\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+C$.

63. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx.$

$V: \ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{3}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)+C.$

64. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

V: $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)+C.$

65. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx.$ V: $\frac{2-x}{4\left(2+x^2\right)}-\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+C.$

66. $\int \frac{x^9}{\left(x^4-1\right)^2}\,dx.$

V: $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16\,(x-1)}+\frac{1}{16\,(x+1)}+\frac{3}{8}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{1}{8\left(x^2+1\right)}+C.$

67. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$ V: $\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}}\right)+C.$

68. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ V: $\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C.$

69. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$ V: $C-\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x-\frac{2}{15}\cos^3 x.$

70. $\int \cos^6 x\,dx.$ V: $\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+C=$

$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

71. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx.$ V: $\sqrt{2}\int\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx=$

$$=\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C, \text{ kui } \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0,\\ -2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C, \text{ kui } \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<0.\end{cases}$$

72. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}\,dx.$ V: $2\sqrt{\tan x}+C.$

73. $\int \mathrm{th}^4 x\;dx.$ V: $x-\mathrm{th}x-\frac{1}{3}\mathrm{th}^3 x+C.$

74. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^3 x\,dx.$ V: $\frac{1}{3}\mathrm{sh}^3 x+\frac{1}{5}\mathrm{sh}^5 x+C.$

75. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}dx}{x^2}.$ V: $\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C.$

76. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$ V: $\frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{\sqrt{x^2+4x-4}}+C.$

77. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}.$ V: 2.

78. $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin 2x\,dx.$ V: $\frac{2}{7}.$

79. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^4 \varphi \, d\varphi$. V: $\frac{8}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - \frac{2}{3}$.

80. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$. V: $\pi - 2$.

81. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. V: $\frac{1}{4} a^2 \pi$.

82. $\int_{1/e}^{e} \ln^2 x \, dx$. V: $e - 5e^{-1}$.

83. $\int_1^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} \, dx$. V: $-\frac{4}{15}\sqrt{15} + \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{15} + 4)}{(\sqrt{2} + 1)}$.

84. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx$. V: $2\sqrt{2} - \arctan 2\sqrt{2}$.

85. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin x + 3}$. V: $\frac{2\sqrt{5}}{5} \left((\arctan \sqrt{5}) - \left(\arctan \frac{2}{5}\sqrt{5} \right) \right)$.

86. $\int_1^{25} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$. V: $25 \arctan 2 - \frac{14}{3}$.

87. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$. V: $\frac{3}{16}\pi$.

Ülesannetes 88−100 uurida päratu integraali koonduvust. Koonduvuse korral leida integraali väärtus.

88. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. V: $\frac{1}{3}$.

89. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. V: $+\infty$.

90. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$. V: $\begin{cases} \frac{1}{a}, \text{ kui } a > 0, \\ +\infty, \text{ kui } a \leq 0. \end{cases}$

91. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x \, dx}{x^2 + 1}$. V: Hajub.

92. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$. V: $+\infty$.

93. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$. V: $\frac{1}{4}\pi$.

94. $\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$. V: Hajub.

95. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$. V: $\frac{1}{2}$.

96. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} \, dx$. V: $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \ln 2$.

97. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x - 1}} \, dx$. V: $\frac{8}{3}$.

98. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$. V: $+\infty$.

99. $\int_0^1 x\ln x\,dx$. V: $-\dfrac{1}{4}$.

100. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. V: Hajub.

Ülesannetes 101–116 leida antud joontega piiratud kujundi pindala.

101. $\begin{cases} y^2=2x+1 \\ x-y=1 \end{cases}$. V: $S=\dfrac{16}{3}$. 102. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$. V: $S=\dfrac{1}{3}$.

103. $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

V: $S_1=\int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\dfrac{x^2}{2}\right)dx=\dfrac{4}{3}+2\pi$, $S_2=8\pi-\left(\dfrac{4}{3}+2\pi\right)=6\pi-\dfrac{4}{3}$.

104. $\begin{cases} y=\dfrac{1}{1+x^2} \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. V: $S=\dfrac{1}{2}\pi-\dfrac{1}{3}$. 105. $\begin{cases} y=x\,(x-1)^2 \\ y=0 \end{cases}$. $S=\dfrac{1}{12}$.

106. $\begin{cases} y^m=x^n \\ y^n=x^m \end{cases}$ $(m,n\in\mathbf{N})$.

V: $S\overset{m\geq n}{=}\int_0^1\left(x^{n/m}-x^{m/n}\right)dx=\dfrac{m-n}{n+m}$. $S\overset{m\leq n}{=}\dfrac{n-m}{n+m}$.

107. $y^2=x\,(x-1)^2$.

V: $S=\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x\,(x-1)^2}-\left(-\sqrt{x\,(x-1)^2}\right)\right)dx=\frac{8}{15}$.

108. $y^2=\left(1-x^2\right)^3$. V: $S=\dfrac{3}{4}\pi$.

109. $\begin{cases} y=(x+1)^2 \\ y=0 \\ x=\sin\pi y \quad (0\leq y\leq 1) \end{cases}$. V: $S=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{1}{3}$.

110. $\begin{cases} \begin{cases} x=a\,(t-\sin t) \\ y=a\,(1-\cos t) \end{cases} (0\leq t\leq 2\pi) \\ y=0 \end{cases}$. V: $S=3\pi a^2$.

111. $\rho=a\sin 2\varphi$. V: $S=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(a\sin 2\varphi)^2\,d\varphi+\dfrac{1}{2}\int_\pi^{3\pi/2}(a\sin 2\varphi)^2\,d\varphi=$
$=2\cdot\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(a\sin 2\varphi)^2\,d\varphi=\dfrac{1}{4}\pi a^2$.

112. $\rho=a\,(1+\sin\varphi)$. V: $S=\dfrac{3}{2}\pi a^2$.

113. $\rho=2a\,(2+\cos\varphi)$. V: $S=18\pi a^2$.

114. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)\ \Leftrightarrow\ \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. V: $S=a^2$.

115. $x^4+y^4=x^2+y^2\ \Leftrightarrow\ \rho^2=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi}\vee\rho=0$.

V: $S=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi}d\varphi=\pi\sqrt{2}$.

116. $y = xe^{-x^2/2}$ $(0 \le x < +\infty)$ ja selle asümptoot. V: $S = 1$.

Ülesannetes 117-124 leida kaare pikkus.

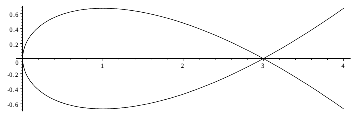
117. $y = \ln x \quad \left(\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}\right)$. V: $s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = 1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$.

118. $y = \ln\left(1 - x^2\right) \quad \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$. V: $s = \ln 3 - \frac{1}{2}$.

119. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{array} \right. \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

V: $s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = 6a$.

120. $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{array} \right. \quad (0 \le t \le 2\pi)$. V: $s = 5a\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{3}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$.

121. $\left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{array} \right.$ $\left(-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}\right)$. V: $s = 4\sqrt{3}$.  .

122. $\rho = a(1 + \cos\varphi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi \\ y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \end{array} \right.$. V: $s = 8a$.

123. $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a\sin^3\frac{\varphi}{3}\cos\varphi \\ y = a\sin^3\frac{\varphi}{3}\sin\varphi \end{array} \right. \quad (0 \le \varphi \le 3\pi)$. V: $s = \frac{3}{2}\pi a$.

124. $\rho = a\varphi \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$. V: $s = a\pi\sqrt{(4\pi^2 + 1)} + \frac{1}{2}a\ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)$.

Ülesannetes 125−128 leida pöördkeha ruumala, kui keha tekkib järgmiste joontega piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.

125. $y = \operatorname{ch} x,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$. V: $V = \pi(1 + (\operatorname{sh} 2)/2)$.

126. $y = x^2,\ y^2 = x$. V: $V = \frac{3}{10}\pi$.

127. $y = 2x - x^2,\ y = 0$. V: $V = \frac{16}{15}\pi$.

128. $\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ y = 0 \end{array} \right. \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

V: $V = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)\, dt = 5\pi^2 a^3$.

129. Leida pöördkeha, mis tekib ringjoonega $\rho = \sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi)$ piiratud ringi pöörlemisel ümber polaartelje, ruumala. V: $V = \frac{\pi^2}{4}$.

Ülesannetes 130−134 leida joone pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördpinna pindala.

130. $y = x^3/3 \ (0 \le x \le 1)$. V: $S = 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

131. $y = \sin x \quad (0 \le x \le \pi)$. V: $S = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$.

132. $y = \tan x \quad (0 \le x \le \pi/4)$. V: $S = \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) + \pi \ln\left(\dfrac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5} + 1}\right)$.

133. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{V: } S = 2\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi} - 2\right).$$

134. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. V: $S = \dfrac{6}{5}\pi a^2$.

135. Leida kardioidi $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ pöörlemisel ümber polaartelje tekkiva pöördpinna pindala.

$$\text{V: } \rho = a\,(1 + \cos\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\,(1 + \cos\varphi)\cos\varphi \\ y = a\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi \end{cases}. \quad S = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Kreeka tähed

Kreeka täht	Eesti keeles	Kreeka täht	Eesti keeles
A α	alfa	N ν	nüü
B β	beeta	Ξ ξ	ksii
Γ γ	gamma	O o	omikron
Δ δ	delta	Π π	pii
E ε, ϵ	epsilon	P ρ, ϱ	roo
Z ζ	dzeeta	Σ σ, ς	sigma
H η	eeta	T τ	tau
Θ θ, ϑ	teeta	Υ υ	üpsilon
I ι	iioota	Φ φ, ϕ	fii
K κ	kapa	X χ	hii
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psii
M μ	müü	Ω ω	omega

Märkus. Tabelist on näha, et viiel kreeka väiketähel on kaks võimalikku kirjapilti. Õppevahendis on kasutatud neist esimest.

Kirjandus

[1] Berman, G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. Moskva, Nauka, 1965 (venekeelne).

[2] Diferentsiaal- ja integraalarvutus (Kõrgema matemaatika teatmik II). Tallinn, TPI, 1978.

[3] Kaasik, Ü. Matemaatikaleksikon. Tallinn, Eesti Entsüklopeediakirjastus, 1992.

[4] Kaasik, Ü., Abel, M. Eesti-inglise-vene matemaatikasõnaraamat. Tartu, TÜ kirjastus, 1995.

[5] Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, Valgus, 1965.

[6] K orgema matemaatika teatmik I. Tallinn, TPI, 1978.

[7] Larsen, R. E., Holsteter, R. P. Calculus with Analytic Geometry. Toronto, D.C.Heth and Company, 1986.

[8] Lõhmus, A., Petersen, I., Roos, H. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Tallinn, Valgus, 1989.

[9] Lõhmus, A., Tammeraid, I. Kõrgema matemaatika põhiseosed. Tallinn, TTÜ, 1989.

[10] Nikolski, S.M. Kurss matematicheskogo analiza I. Moskva, Nauka, 1973 (venekeelne).

[11] Piskunov, N. S. Diferentsiaal- ja integraalarvutus I. Tallinn, Valgus, 1981.

[12] Puusemp, P. Lineaaralgebra. Tallinn, Avita, 2000.

[13] Päeva, H. Matemaatiline analüüs. Tallinn, ERKA kirjastus, 1997.

[14] Reimers, E. Matemaatilise analüüsi praktikum I. Tallinn, Valgus, 1988.

[15] Ruustal, E. Programmi MATHEMATICATM kasutamisjuhend. Tallinn, TTÜ kirjastus, 1999.

[16] Ruustal, E., Jõgi, T., Tuutmaa V. Matemaatiline analüüs I. Harjutused. Tallinn, TTÜ kirjastus, 1999.

[17] Tammeraid, I. Lausearvutus ja hulgateooria elemendid. Tallinn, TPI, 1982.

[18] Võhandu, L., Tamme, E., Luht L. Arvutusmeetodid. I. Tallinn, Valgus, 1986.