YMM9060 MATEMAATIKA DOKTORANTIDELE I

Kava

I+1. Banachi püsipunkti printsiip ja selle rakendused.
I+2. Normeeritud ruumid ja nende kaasruumid.
I+3. Nõrk koonduvus ja koonduvus normi järgi.
I+4. Operaatorite diferentsiaalarvutus.
I+5. Üldistatud funktsioonid.
I+6. Maatriksmuutuja funktsioonid.
I+7. Ortogonaalread.
I+8. Järeldused.

Kirjandus

1. Collatz L. Functional analysis and numerical mathematics. Moscow, 1969 (venekeelne).
2. Dunford N, Schwartz J. T. Linear operators. Part I. Moscow, 1962 (venekeelne).
3. Edwards R. E. Functional analysis. Moscow, 1969 (venekeelne).
4. Kolmogorov A. N. Elements of theory of functions and functional analysis. Moscow, 1968 (venekeelne).
5. Oja E, Oja P. Funktsionaalanalüüs. Tartu, TÜ, 1991.
6. Schwartz L. Analysis I. Moscow, 1972 (venekeelne).
7. Tammeraid I. Lineaaralgebra rakendused. Tallinn, TTÜ, 1999.
8. Vichmann F. Funktsionaalanalüüsi elementaarkursus. Tallinn, TTÜ, 2002.
9. Zeidler E. Applied functional analysis. Main principles and their applications. Springer, 1995.
10. Zeidler E. Applied functional analysis. Applications to mathematical Physics. Springer, 1995.

1 Banachi püsipunkti printsiip ja selle rakendused

1.1 Meetriline ruum

Definitsioon 1. Hulka X nimetatakse *meetriliseks ruumiks,* kui igale tema elementide paarile (x, y) on vastavusse seatud reaalarv $\rho(x, y)$ nii, et on täidetud tingimused:
1° $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (samasus);
2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (sümmeetria);
3° $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (kolmnurga võrratus).

Arvu $\rho(x, y)$ nimetatakse punktide x ja y vaheliseks *kauguseks*.

Lause 1. Kaugus $\rho(x, y)$ on mittenegatiivne.

Tõestus. Saame

$$0 = \rho(x,x) \overset{3^\circ}{\le} \rho(x,y) + \rho(y,x) \overset{2^\circ}{=} 2\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) \ge 0. \qquad \square$$

Ülesanne 1. Olgu $X = \mathbf{R}$ ja $x, y \in X$ ning $\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} |x-y|$. Kontrollige, et on täidetud tingimused 1°–3°.

Näide 1. Olgu $X = \mathbf{R}^n = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_k \in \mathbf{R}\}$ ja $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ ning $\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2}$. Teostame tingimuse 3° kontrolli.

Kui $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n)$, siis

$$\rho^2(x,y) = \sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2 = \sum_{k=1}^n ((\xi_k - \varsigma_k) + (\varsigma_k - \eta_k))^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^n (\xi_k - \varsigma_k)^2 + 2\sum_{k=1}^n (\xi_k - \varsigma_k)(\varsigma_k - \eta_k) + \sum_{k=1}^n (\varsigma_k - \eta_k)^2 \le$$

$$\le \left[\begin{array}{c} \text{kasutame Cauchy-Bunjakovski võrratust} \\ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \beta_k^2\right) \end{array} \right] \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n (\xi_k - \varsigma_k)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - \varsigma_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^n (\varsigma_k - \eta_k)^2\right)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n (\varsigma_k - \eta_k)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \varsigma_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (\varsigma_k - \eta_k)^2}\right)^2 =$$

$$= (\rho(x,z) + \rho(z,y))^2. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 2. Tõestage, et kehtib *nelinurga võrratus*

$$|\rho(x,y)-\rho(u,v)| \le \rho(x,u)+\rho(y,v)\,.$$

Ülesanne 3. Tõestage, et meetrilise ruumi iga alamhulk on meetriline ruum.

Näide 2. Kontrollime, kas

$$m=\{x=\{\xi_k\}:\xi_k\in\mathbf{K}\wedge\xi_k=O(1)\}\,,$$

s.o. kõigi tõkestatud arvjadade ruum, kus $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ või $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ ja

$$\rho(x,y)\overset{\text{def.}}{=}\sup_k|\xi_k-\eta_k|\,,$$

on meetriline ruum.

Kuna

$$\xi_k=O(1)\;\wedge\;\eta_k=O(1)\Rightarrow\xi_k-\;\eta_k=O(1),$$

siis mittenegatiivsete reaalarvude hulk $\{|\xi_k-\;\eta_k|\}$ on ülalt tõkestatud. Seega $\exists\sup_k|\xi_k-\eta_k|$. Et

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=0\Leftrightarrow\sup_k|\xi_k-\eta_k|=0\Leftrightarrow(|\xi_k-\eta_k|=0\;\;(k\in\mathbf{N}))\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow(\xi_k=\eta_k\;\;(k\in\mathbf{N}))\Leftrightarrow x=y,\end{aligned}$$

siis tingimus 1° on täidetud. Lisaks järeldub võrdusest

$$|\xi_k-\eta_k|=|\eta_k-\xi_k|$$

tingimuse 2° täidetus. Kuna

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sup_k|\xi_k-\eta_k|=\sup_k|(\xi_k-\varsigma_k)+(\varsigma_k-\eta_k)|\le\\&\le\sup_k(|\xi_k-\varsigma_k|+|\varsigma_k-\eta_k|)\le\sup_k|\xi_k-\varsigma_k|+\sup_k|\varsigma_k-\eta_k|=\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y)\,,\end{aligned}$$

siis on täidetud ka 3°. $\diamondsuit$

Ülesanne 4. Tõestage, et hulk

$$l_p=\left\{\{\xi_k\}:\;\xi_k\in\mathbf{K}\wedge\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty\right\}$$

koos kaugusega

$$\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p}$$

moodustab meetrilise ruumi. Tõestamisel kasutage Minkowski võrratust, vt [5],

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$$

ja piirile minekut $n \to \infty$.

Ülesanne 5. Tõestage, et kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulk $C[a,b]$ koos kaugusega

$$\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

annab meetrilise ruumi.

Ülesanne 6. Tõestage, et kõigi lõigul $[a,b]$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk

$$C^m[a,b] = \left\{x = x(t) : x^{(m)}(t) \in C[a,b]\right\}$$

koos kaugusega

$$\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{m} \max_{a \le t \le b} \left|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\right|$$

annab meetrilise ruumi.

Definitsioon 2. Hulka

$$B(a,r) \overset{a \in X \wedge r>0}{=} \{x : x \in X \wedge \rho(x,a) < r\}$$

nimetatakse *lahtiseks keraks* meetrilises ruumis X.

Definitsioon 3. Hulka

$$B(a,r) \overset{a \in X \wedge r>0}{=} \{x : x \in X \wedge \rho(x,a) \le r\}$$

nimetatakse *kinniseks keraks* meetrilises ruumis X.

Definitsioon 4. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ $(x_n \in X)$ koondub meetrilise ruumi X elemendiks x, kui

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Ülesanne 7. Tõestage, et meetrise ruumi koonduva jada iga osajada koondub.

Lause 2. Koonduva jada piirelement on ainus.

Tõestus. Koondugu jada $\{x_n\}$ $(x_n \in X)$ meetrilise ruumi X elemendiks x. Olgu jadal $\{x_n\}$ veel teine piirelement $y \in X$. Siis

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &\leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) \to \left[\begin{array}{c} \rho(x_n,\, x) \to 0 \\ \rho(x_n,y) \to 0 \end{array} \right] \to 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \qquad \square \end{aligned}$$

Definitsioon 5. Jada $\{x_n\}$ nimetatakse fundamentaaljadaks, kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $n_0 = n_0(\varepsilon)$, et

$$n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Definitsioon 6. Meetrilist ruumi nimetatakse *täielikuks,* kui iga tema fundamentaaljada koondub selle ruumi elemendiks.

Ülesanne 8. Näidake, et $X = Q$, kus Q on kõigi ratsionaalarvude hulk, meetrikaga $\rho(x,y) = |x-y|$ ei ole täielik.

Näide 3. Olgu $X = \mathbf{R}^n$ meetrikaga $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2}$. Kontrollime, selle meetrilise ruumi täielikkust.

Olgu jada $\{x_m\}$, kus $x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}\right) \in \mathbf{R}^n$, fundamentaalne. Seega suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $n_0 = n_0(\varepsilon)$, et

$$\begin{aligned} l &> n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow \rho\,(x_l, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(m)}\right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\left|\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(m)}\right| < \varepsilon \quad (l > n_0 \wedge m > n_0 \;\; k = 1; 2; \ldots; n)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\text{kasutame Cauchy kriteeriumit}] \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \xi_k^{(m)} = \xi_k \quad (k = 1; \ldots; n)\,. \end{aligned}$$

Seega punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ on jada $\{x_m\}$ piirpunkt ja selle meetrikaga varustatud ruum R^n on täielik. $\diamondsuit$

Saab tõestada, et ka eespool vaadeldud ruumid m, l^p ja $C\,[a,b]$ on täielikud.

1.2 Operaatorid

Operaatori mõiste on matemaatilisest analüüsist tuttava funktsiooni mõiste üldistus.

Definitsioon 1. Kui on antud kindel eeskiri f, mille põhjal igale hulga X elemendile x on vastavusse seatud hulga Y element y, siis öeldakse, et on defineeritud *operaator* f, ja kirjutatakse $f : X \to Y$ või $y = f(x)$ $(x \in X)$, või $y = f\,x$ $(x \in X)$, või $f : x \mapsto y$ $(x \in X)$.

Operaatori asemel kasutatakse nimetusena ka *kujutust* või *teisendust.* Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x *kujutiseks,* kusjuures elementi x nimetatakse originaaliks. Hulka X nimetatakse operaatori määramispiirkonnaks. Kui $X_1 \subset X$, siis hulka

$$f(X_1) = \{y : y \in Y \wedge y = f(x) \wedge x \in X_1\}$$

nimetatakse hulga X_1 kujutiseks.

Ülesanne 1. Tõestage järgmised väited:
1° $f(\emptyset) = \emptyset$; 2° $f(X) \subset Y$; 3° $X_1 \subset X_2 \subset X \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$;
4° $X_\alpha \subset X \Rightarrow f(\cup_\alpha X_\alpha) = \cup_\alpha f(X_\alpha)$;
5° $X_\alpha \subset X \Rightarrow f(\cap_\alpha X_\alpha) \subset \cap_\alpha f(X_\alpha)$; 6° $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
7° $X_1 \subset X \Rightarrow X_1 \subset f^{-1}(f(X_1))$; 8° $Y_1 \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y_1)) \subset Y_1$;
9° $f(X) = Y \Leftrightarrow f^{-1}(Y) = X$; 10° $Y_1 \subset Y_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$;
11° $Y_\alpha \subset Y \Rightarrow f^{-1}(\cup_\alpha Y_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(Y_\alpha)$;
12° $Y_\alpha \subset Y \Rightarrow f^{-1}(\cap_\alpha Y_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(Y_\alpha)$;
13° $f(X) = Y \wedge Y_1 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus Y_1) = X \setminus f^{-1}(Y_1)$.

Definitsioon 2. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse *injektiivseks* (üksüheseks), kui

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

st ühelgi elemendil hulgast Y ei ole üle ühe originaali.

Definitsioon 3. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse *sürjektiivseks*, kui (pealekujutuseks), kui $f(X) = Y$, st igal elemendil hulgast Y leidub originaal.

Definitsioon 4. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse *bijektiivseks,* kui ta on injektiivne ja sürjektiivne, st igal elemendil hulgast Y leidub parajasti üks originaal.

Definitsioon 5. Operaatorit f meetrilisest ruumist X meetrilisse ruumi Y nimetatakse *pidevaks* punktis $a \in X$, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) :\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Ülesanne 2. Tõestage, et operaator f on pidev punktis $a \in X$ parajasti siis, kui iga koonduva jada $x_n \to a$ korral $f(x_n) \to f(a)$.

1.3 Banachi püsipunkti printsiip

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon 1. Punkti $x^* \in X$ nimetatakse operaatori $f : X \to X$ *püsipunktiks,* kui $f(x^*) = x^*$.

Näide 1. Olgu $X = [a, b]$ ja $f(x) \in C[a, b]$, kusjuures

$$x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in [a, b].$$

Näitame, et funktsioonil f on (vähemalt üks) püsipunkt.

Moodustame abifunktsiooni $g(x) = x - f(x)$. Saame $g(a) \leq 0$ ja $g(b) \geq 0$. Et $g(x) \in C[a, b]$, siis peab lõigul $[a, b]$ leiduma selline punkt x^*, mille korral $g(x^*) = 0$. Seega $x^* - f(x^*) = 0$ ja $f(x^*) = x^*$. $\diamondsuit$

Definitsioon 2. Operaatorit $f : X \to X$ nimetatakse *ahendavaks,* kui leidub selline $q < 1$, et

$$(\forall x, y \in X) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y).$$

Ülesanne 1. Näidake, et ahendav operaator on pidev.

Ülesanne 2. Näidake, et kui $|f'(x)| \leq K < 1 \ (x \in [a, b])$, siis operaator f on ahendav.

Lause 1 (Banachi püsipunkti printsiip)**.** Kui X on täielik meetriline ruum, siis ahendaval operaatoril $f : X \to X$ on parajasti üks püsipunkt.

Tõestus. Olgu $x_0 \in X$ suvaline. Moodustame jada $\{x_n\}$, kus

$$x_n = f(x_{n-1}) \ (n \in \mathbf{N}).$$

Näitame, et $\{x_n\}$ on Cauchy jada. Et

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n) \leq \\ &\leq q^2\rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq \ldots \leq q^n\rho(x_0, x_1), \end{aligned}$$

st

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n\rho(x_0, x_1),$$

siis kolmnurga võrratuse ja viimase hinnangu abil saame

$$\begin{aligned}\rho\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq \rho\left(x_n, x_{n+1}\right)+\rho\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)+\ldots+\rho\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \leq \\ &\leq q^n \rho\left(x_0, x_1\right)+q^{n+1} \rho\left(x_0, x_1\right)+\ldots+q^{n+p-1} \rho\left(x_0, x_1\right) \leq \\ &\leq \rho\left(x_0, x_1\right) q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k=\frac{q^n}{1-q} \rho\left(x_0, x_1\right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 .\end{aligned}$$

Seega $\forall \varepsilon>0$ korral $\exists\, n_0$, et $n>n_0$ ja $\forall p \in \mathbf{N}$ korral $\rho\left(x_n, x_{n+p}\right)<\varepsilon$, st $\{x_n\}$ on Cauchy jada. Ruumi täielikkuse tõttu $x_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} x^* \in X$. Seega

$$f\left(x^*\right)=f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)=[f \text{ on pidev}]=\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}=x^*,$$

st x^* on operaatori f püsipunkt. Tõestame püsipunkti ühesuse. Olgu lisaks $f(x^{**})=x^{**}$. Järelikult

$$\begin{aligned}\rho\left(x^*, x^{**}\right) &= \rho\left(f\left(x^*\right), f\left(x^{**}\right)\right) \leq q \rho\left(x^*, x^{**}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\rho\left(x^*, x^{**}\right) \geq 0, \\ q<1\end{array}\right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho\left(x^*, x^{**}\right) \leq 0 \Rightarrow \rho\left(x^*, x^{**}\right)=0 \Leftrightarrow x^*=x^{**} . \qquad \square\end{aligned}$$

Ülesanne 3. Tõestage, et kui X on täielik meetriline ruum ja operaator f on selline, et mingi $n \in N$ korral on f^n ahendav operaator, siis operaatoril f on parajasti üks püsipunkt.

1.4 Banachi püsipunkti printsiibi rakendused

1.4.1 Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine

Uurime ruumi

$$X=\mathbf{R}^n=\left\{x: x=\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right) \wedge \xi_k \in \mathbf{R}\right\} \tag{1.4.1.1}$$

kujutust $A: X \rightarrow X$, mis on antud seoste

$$\eta_k=\sum_{i=1}^n a_{k i} \xi_i \quad(k=1,2, \ldots, n) \tag{1.4.1.2}$$

abil.

Olgu $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ ning

$$\rho(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \max_{1 \le k \le n} |\xi_k - \eta_k| . \qquad (1.4.1.3)$$

Kuna

$$\begin{aligned}
\rho(y', y'') &= \max_{1 \le k \le n} |\eta_k' - \eta_k''| = \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \xi_i' - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \xi_i'' \right| = \\
&= \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ki} (\xi_i' - \xi_i'') \right| \le \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ki}| \, |\xi_i' - \xi_i''| \le \\
&\le \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ki}| \max_{1 \le i \le n} |\xi_i' - \xi_i''| = \left(\max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ki}| \right) \rho(x', x'') ,
\end{aligned}$$

siis meetrika (1.4.1.3) korral on tingimus

$$\max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ki}| < 1 \qquad (1.4.1.4)$$

piisav selleks, et seostega (1.4.1.2) määratud kujutus A on ahendav. Et meetrika (1.4.1.3) korral ruum $\mathbf{R}^n$ on täielik (veenduge), siis tingimus (1.4.1.4) garanteerib võrradisüsteemi $x = Ax$ ühese lahenduvuse. Seejuures iteratsioonimeetod $x_{n+1} = Ax_n$ koondub suvalise $x_0 \in X$ korral selle süsteemi ainsaks lahendiks.

Ülesanne 1. Olgu $X = \mathbf{R}^n$ ja $\rho(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|$. Näidake, et tingimused

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}| < 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

on piisavad selleks, et seostega (1.4.1.2) määratud kujutus A oleks ahendav.

Ülesanne 2. Olgu $X = \mathbf{R}^n$ ja $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2}$. Näidake, et tingimus

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^2 < 1$$

on piisav selleks, et seostega (1.4.1.2) määratud kujutus A oleks ahendav.

1.4.2 Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesus

Lause 1 (Cauchy teoreem). Kui $D \subset \mathbf{R}^2$ on lahtine sidus hulk ja

$$f : D \to \mathbf{R},$$

kusjuures f on pidev piirkonnas D ja rahuldab muutuja y järgi Lipschitzi tingimust piirkonnas D, st leidub selline arv $L > 0$, et

$$|\, f\,(x, y_1) - f\,(x, y_2)| \le L\, |y_1 - y_2| \quad ((x, y_1)\,, (x, y_2) \in D)\,, \tag{1.4.2.1}$$

siis algtingimusega

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4.2.2}$$

diferentsiaalvõrrandil

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.4.2.3}$$

leidub iga $(x_0, y_0) \in D$ korral parajasti üks lahend.

Ülesanne $(1.4.2.2) \wedge (1.4.2.3)$ on ekvivalentne integraalvõrrandiga

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(t, y(t))dt. \tag{1.4.2.4}$$

Miks? Valime sellise arvu d, et $Ld < 1$ ja ristkülik

$$\Delta = \{(x, y) : (x_0 - d \le x \le x_0 + d) \wedge (y_0 - Md \le y \le y_0 + Md)\}$$

kuulub hulka D, kusjuures $M > 0$ on valitud selliselt, et

$$|\, f(x, y)| \le M \quad ((x,\, y) \in \Delta)\,.$$

Miks on selline valik võimalik? Olgu

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in C\,[x_0 - d, x_0 + d] : \\ x \in [x_0 - d, x_0 + d] \Rightarrow |\varphi(x) - y_0| \le Md \end{array} \right\},$$

st hulk koosneb lõigul $[x_0 - d, x_0 + d]$ määratud pidevatest funktsioonidest, mille graafik paikneb ribas ümber funktsiooni $y = y_0$. Kuna

$$B = \overline{B}\,(y_0, Md) = \{\varphi : \rho\,(\varphi, y_0) \le Md\}$$

on kinnine hulk (kinnine kera) täielikus meetrilises ruumis $C\left[x_0-d,x_0+d\right]$, siis B on ka ise täielik meetriline ruum. Vaatleme operaatorit g, mis määratakse seosega

$$\left(g(y)\right)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(t,y(t)\right)dt \quad \left(y\in B\right).$$

Näitame, et $g:B\to B$ ja g on ahendav. Kui $y\in B\ \wedge\ x\in\left[x_0-d,x_0+d\right]$, siis

$$\left|\left(g(y)\right)(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f\left(t,y(t)\right)dt\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(t,y(t)\right)\right|dt\right|\le Md,$$

st $g(y)\in B$. Kui $y_1,y_2\in B$, siis

$$\begin{aligned}
\rho\left(g(y_1),g(y_2)\right) &= \max_{|x-x_0|\le d}\left|\left(g(y_1)\right)(x)-\left(g(y_2)\right)(x)\right|\le\\
&\le \max_{|x-x_0|\le d}\left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left(t,y_1(t)\right)-f\left(t,y_2(t)\right)\right)dt\right|\le\\
&\le \max_{|x-x_0|\le d}\int_{x_0}^{x}\left|\left(f\left(t,y_1(t)\right)-f\left(t,y_2(t)\right)\right)\right|dt\overset{(1.4.2.1)}{\le}\\
&\le \max_{|x-x_0|\le d}\int_{x_0}^{x} L\left|y_1(t)-y_2(t)\right|dt\le\\
&\le L\int_{x_0}^{x}\max_{|t-x_0|\le d}\left|y_1(t)-y_2(t)\right|dt\le Ld\,\rho(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

ja tingimuse $Ld<1$ tõttu on operaator g ahendav. Lause 1.3.1 põhjal on võrrandil $y=g(y)$ parajasti üks lahend. See on samaväärne sellega, et võrrandil (1.4.2.4) on parajasti üks lahend ja sellega, et ülesandel (1.4.2.2) $\wedge$ (1.4.2.3) on parajasti üks lahend. $\square$

1.4.3 Teoreem ilmutamata funktsioonist

Proleemiks on operaatorvõrrandi

$$F(u,v)=0 \tag{1.4.3.1}$$

lahendamine punkti (u_0,v_0) ümbruses, kusjuures

$$F(u_0,v_0)=0. \tag{1.4.3.2}$$

Lause 1. Olgu X, Y ja Z Banachi ruumid üle arvukorpuse $\mathbf{K}$ ning

$$F : U(u_0, v_0) \subseteq X \times Y \ \rightarrow \ Z \tag{1.4.3.3}$$

olgu C^n-kujutus ($n \in \mathbf{N}$) punkti (u_0, v_0) ümbruses, kusjuures (1.4.3.2) kehtib. Kui operaator

$$F_v(u_0, v_0) : Y \ \rightarrow \ Z$$

on bijektiivne, siis kehtivad järgmised väited:
1° eksisteerivad sellised arvud $r > 0$ ja $\rho > 0$, et iga $u \in U$ korral on võrrandil (1.4.3.1) selline ühene lahend $v = v(u) \in Y$, mille korral $\|u - u_0\| < \rho \Rightarrow \|v - v_0\| < r$;
2° funktsioon $u \mapsto v\,(u) \in C^n\,(U)$, kusjuures

$$v'(u) = -F_v\,(u, v(u))^{-1}\,F_u\,(u, v(u)) \quad (\forall u \in U)\,.$$

2 Normeeritud ruumid ja nende kaasruumid

2.1 Vektorruumid

Vektorruumi mõiste on see üks sagedamini kasutatavaid algebralise struktuuri mõisteid tänapäeva matemaatikas. Näiteks, paljud matemaatilises analüüsis vaadeldavad funktsioonide hulgad on oma algebraliste omaduste poolest vektorruumid. Analüüsis pruugitakse termini "vektorruum" asemel terminit "*lineaarne ruum*".

Definitsioon 1. Hulka X nimetatakse *vektorruumiks üle arvukorpuse* $\mathbf{K}$, kui hulga X elementide igale paarile (x, y) on vastavusse seatud summa, $x + y \in X$, ja igale paarile (α, x), kus $\alpha \in \mathbf{K}$ ning $x \in \mathbf{X}$, on vastavusse seatud element $\alpha x \in X$, kusjuures on rahuldatud tingimused 1-8 :

1. $x + y = y + x$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (liitmise assotsiatiivsus);
3. $\exists\ \theta \in X : \theta + x = x$ (nullelemendi olemasolu);
4. $\forall\ x \in X \Rightarrow \exists\ -x \in X : x + (-x) = \theta$ (vastandelemendi olemasolu);
5. $1 \cdot x = x$ (unitaarsus);
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (assotsiatiivsus arvude korrutamise suhtes);
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributiivsus vektorite liitmise suhtes);
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributiivsus arvude liitmise suhtes).

Tingimused 1-8 kannavad vektorruumi aksioomide nime. Aksioomid 1-4 näitavad, et elementide liitmise suhtes on $\mathbf{X}$ kommutatiivne rühm ehk Abeli rühm. Teist vastavust nimetatakse elemendi arvuga korrutamise tehteks ja see rahuldab aksioome 5-8. Vektorruumi elemente nimetame *vektoriteks.* Kui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, siis kõneldakse reaalsest vektorruumist ja kui $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, siis kompleksest vektorruumist. Termini "vektorruum" asemel kasutatakse ka lühendit "*ruum.*"

Näide 1. Olgu $X = \mathbf{R}^n = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \wedge \xi_k \in \mathbf{R}\}$ ja $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Kahe ruumi $\mathbf{R}^n$ elemendi x ja y summa defineerime

$$x + y \overset{\text{def.}}{=} (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n)\,.$$

Elemendi x korrutamisel reaalarvuga λ korrutame selle arvuga kõik koordinaadid. Lihtne otsene kontroll näitab, et tingimused 1-8 on täidetud.

Näiteks, kontrollime tingimusi 3 ja 4. Konstrueerime elemendid

$$\theta = (0, 0, \ldots, 0)\,, \quad -x = (-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n)\,.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \theta + x &= (0, 0, \ldots, 0) + (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (0 + \xi_1, 0 + \xi_2, \ldots, 0 + \xi_n) = \\ &= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = x, \end{aligned}$$

siis element θ rahuldab suvalise $x \in X$ korral tingimust 3 ja on seega ruumi X nullelement. Elemendi $-x$ korral

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n) = \\ &= (\xi_1 - \xi_1, \xi_2 - \xi_2, \ldots, \xi_n - \xi_n) = \theta, \end{aligned}$$

st tingimus 4 on täidetud. Veenduge, et ka ülejäänud tingimused 1-2 ja 5-8 on täidetud!

Ülesanne 1. Olgu X on vektorruum. Näidake, et mistahes vektorite $x, y \in X$ ja arvu $\lambda \in \mathbf{K}$ korral kehtivad järgmised väited ja võrdused:
1° vektorruumi X nullvektor θ on ainus;
2° iga $x \in X$ vastandvektor $-x$ on ainus;
3° vastandvektori ühesus lubab defineerida lahutamistehte seosega

$$x - y \overset{\text{def.}}{=} x + (-y);$$

4° $x = y \;\Leftrightarrow\; x - y = 0\,;$
5° $0x = 0 \quad \forall\, x \in X$;
6° $\lambda 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$;
7° $(-1)x = -x$;
8° $\lambda x = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda = 0 \;\vee\; x = 0)$.

Ülesanne 2. Vaatleme kõigi kompleksarvuliste elementidega $m \times n-$maatriksite hulka. Kahe maatriksi summa defineerime maatriksite vastavate elementide
liitmise teel. Maatriksi korrutamisel kompleksarvuga λ korrutame selle arvuga maatriksi kõik elemendid. Kas saame vektorruumi?

Ülesanne 3. Kas kõigi funktsioonide $x = x\,(t)\colon\; [\alpha, \beta] \;\to \mathbf{R}$ hulk on vektorruum (tõestage!) üle arvukorpuse $\mathbf{R}$, kui

$$(x + y)(t) \overset{\text{def.}}{=} x(t) + y(t) \;\;\forall t \in [\alpha, \beta]$$

ja

$$(\lambda x)(t) \overset{\text{def.}}{=} \lambda x(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Ülesanne 4. Kontrollime, kas

$$m = \{x = \{\xi_k\} : \xi_k \in \mathbf{K} \wedge \xi_k = O(1)\},$$

s.o. kõigi tõkestatud arvjadade ruum, kus $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ või $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ja

$$x + y \overset{\text{def.}}{=} \{\xi_k + \eta_k\}, \quad \lambda x \overset{\text{def.}}{=} \{\lambda \xi_k\},$$

on vektorruum.

Definitsioon 2. Vektorruumi X (üle korpuse $\mathbf{K}$) vektorite hulka W, mis on vektorruum ruumis X defineeritud vektorite liitmise ja vektori arvuga korrutamise suhtes, nimetatakse vektorruumi $\mathbf{X}$ *alamruumiks.*

Ülesanne 5. Näidake, et vektorruumi X vektorite hulk W on vektorruumi X alamruum parajasti siis, kui iga kahe vektori $x, y \in W$ ja iga arvu $\lambda \in \mathbf{K}$ korral ka vektorid $x + y$ ja λx kuuluvad hulka W.

Ülesanne 6. Näidake, et kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ pidevate funktsioonide hulk $C[\alpha, \beta]$ on kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ defineeritud funktsioonide vektorruumi alamruum.

Ülesanne 7. Tõestage, et kõigi lõigul $[a, b]$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk

$$C^m[a, b] = \left\{x = x(t) : x^{(m)}(t) \in C[a, b]\right\}$$

on vektorruumi $C[\alpha, \beta]$ alamruum.

Ülesanne 8. Tõestage, et kõigi sümmeetriliste maatriksite hulk moodustab alamruumi ruutmaatriksite vektorruumis $\mathbf{R}^{n \times n}$.

Definitsioon 3. Vektorruumi X (üle korpuse $\mathbf{K}$) elementide $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineaarseks kombinatsiooniks* nimetatakse ruumi X iga elementi, mida saab esitada kujul $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, kus $\alpha_i \in \mathbf{K}$.

Definitsioon 4. *Hulga* $Z \subset X$ *lineaarseks katteks* nimetatakse hulga Z elementide kõigi lineaarsete kombinatsioonide hulka. Hulga Z lineaarset katet tähistatakse sümboliga *span* Z.

Ülesanne 9. Olgu $X = \mathbf{R}^3$ ja $Z = \{\ (1;1;0)\ , (1;-1;0)\}$. Näidake, et *span* $Z = \{\ (\alpha;\beta;0)\ :\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\ \}$.

Ülesanne 10. Näidake, et hulga $Z \subset X$ lineaarne kate *span* Z on vektorruumi X vähim alamruum, mis sisaldab hulka Z.

Ülesanne 11. Näidake, et vektorruumi X alamhulk W on alamruum parajasti siis, kui ta ühtib oma lineaarse kattega, s.o. $W = spanW.$

Definitsioon 5. Vektorruumi X (üle korpuse $\mathbf{K}$) vektorite hulka

$$\{ x_1, \ldots, x_k\}$$

nimetatakse *lineaarselt sõltuvaks,* kui

$$\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{K} \ \ : |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0 \wedge\ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \theta.$$

Definitsioon 6. Vektorruumi X (üle korpuse $\mathbf{K}$) vektorite hulka

$$\{ x_1, \ldots, x_k\}$$

nimetatakse *lineaarselt sõltumatuks,* kui ta ei ole lineaarselt sõltuv

Definitsioon 7. Vektorruumi X (üle korpuse $\mathbf{K}$**)** mingit vektorite hulka X_1 nimetatakse *lineaarselt sõltumatuks,* kui mistahes lõplik hulk elemente hulgast X_1 on lineaarselt sõltumatu.

Näide 2. Kontrollime, kas hulk $U = \{1+x,\ x+x^2,\ 1+x^2\}$ on lineaarselt sõltumatu kõigi reaalsete kordajatega ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n$ $(n \geq 2)$.

Vaatleme võrdust

$$\alpha(1 + x) + \beta(x + x^2) + \gamma(1 + x^2) = 0$$

Algebrast teame, et polünoom võrdub nulliga parajasti siis, kui kõik selle polünoomi kordajad on nullid. Seega võime välja kirjutada süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array} \right. .$$

Sellel süsteemil leidub vaid triviaalne lahend. Hulk U on lineaarselt sõltumatu. $\diamondsuit$

Ülesanne 12. Tõestage, et iga vektorite hulk, mis sisaldab nullvektorit, on lineaarselt sõltuv.

Ülesanne 13. Tõestage, et kui determinandi reavektorid on lineaarselt sõltuvad, siis determinant võrdub nulliga.

Definitsioon 8. Vektorruumi X vektorite hulka B nimetatakse vektorruumi X *Hameli baasiks* ehk *algebraliseks baasiks,* kui B on lineaarselt sõltumatu ja ruumi X iga vektor x avaldub üheselt hulga B vektorite lineaarkombinatsioonina

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad (\alpha_i \in \mathbf{K},\, x_i \in B)\,,$$

kusjuures kordajaid α_i $(i = 1\colon n)$ nimetatakse *vektori x koordinaatideks* baasil B ja baasi võimsust nimetatakse vektorruumi X *mõõteks*.

Definitsioon 9. Kui vektorruumi $\mathbf{X}$ baasis B olevate vektorite arv on lõplik, siis seda arvu nimetatakse *vektorruumi dimensiooniks* ja tähistatakse $\dim \mathbf{X}$ ning vektorruumi nimetatakse *lõplikudimensionaalseks* ehk *lõplikumõõtmeliseks ruumiks.* Kui vektorruumi $\mathbf{X}$ baasis B olevate vektorite arv on lõpmatu, siis vektorruumi $\mathbf{X}$ nimetatakse *lõpmatudimensionaalseks* ehk *lõpmatumõõtmeliseks ruumiks.*

Ülesanne 14. Näidake, et vektorid

$$\mathbf{e}_k = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{k-1\ nulli}; 1; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n-k\ nulli}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

moodustavad baasi ruumis $\mathbf{R}^n$. **Ülesanne 15.** Näidake, et vektorite süsteem $\{1; t; t^2; \ldots; t^n\}$ moodustab baasi ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n$.

2.2 Normeeritud ruum. Banachi ruum

Definitsioon 1. Vektorruumi X (üle arvukorpuse $\mathbf{K}$) nimetatakse *normeeritud ruumiks,* kui igale vektorile $x \in X$ on vastavusse seatud kindel, *vektori normiks* nimetatav, mittenegatiivne reaalarv $\|x\|$ nii, et on täidetud tingimused:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (samasuse aksioom);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (homogeensuse aksioom);
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (kolmnurga võrratus).

Definitsioon 2. Normeeritud ruumis X *kahe vektori vaheline kaugus* $\rho(x, y)$ defineeritakse valemiga $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Veenduge, et sel viisil defineeritud kaugus rahuldab meetrika aksioome.

Näide 1. Vektorruumis $\mathbf{C}^n$ tuuakse sisse vektori p-norm $(1 \le p \le \infty)$ seostega

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)\,,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k| \, .$$

Veendume, et p-norm ($1 \le p < \infty$) rahuldab definitsioonis 1.5.1 esitatud tingimusi 1-3 :

$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \xi_k = 0 \ \ (1 \le k \le n) \Leftrightarrow x = \theta;$

$\|\lambda x\|_p = (|\lambda\xi_1|^p + \ldots + |\lambda\xi_n|^p)^{1/p} = [|\lambda|^p \left(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p\right)]^{1/p} =$

$= |\lambda| \left(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p$;

kasutades Minkowski võrratust, saame

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p} = \\ &= \|x\|_p + ||y||_p. \end{aligned}$$

Veenduge tingimuste 1-3 täidetuses normi $\|\cdot\|_\infty$ korral!

Enamkasutatavad p-normid on:

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \ ;$$

$$\|x\|_2 = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} \, ;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k| \, . \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 1. Olgu $u = (1, -1, 3)$. Leidke $\|\mathbf{u}\|_1$, $\|\mathbf{u}\|_2$ ja $\|\mathbf{u}\|_\infty$.

Lause 1. Ruumi $\mathbf{C}^n$ kõik p-normid on ekvivalentsed, s.t. kui $\|\cdot\|_\alpha$ ja $\|\cdot\|_\beta$ on ruumi $\mathbf{C}^n$ p-normid, siis leiduvad sellised positiivsed konstandid c_1 ja c_2 , et

$$c_1 \|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2 \|x\|_\alpha \quad \forall x \in \mathbf{C}^n.$$

Seejuures

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \, \|x\|_2 \, ,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \, \|x\|_\infty \ ,$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \, \|x\|_\infty \ .$$

Tõestame kolm viimast väidet:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\xi_i| \, |\xi_j|\right)^{1/2} =$$

$$= ((\sum_{k=1}^{n} |\xi_i|)^2)^{1/2} = \|x\|_1 ;$$

Hölderi võrratust kasutades, saame $p = q = 2$ korral, et

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| = 1 \cdot |\xi_1| + \ldots + 1 \cdot |\xi_n| = \\ &= |1 \cdot \xi_1| + \ldots + |1 \cdot \xi_n| \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1^2 + \ldots + 1^2)^{1/2} (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_2 ;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = ((\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} \leq (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2} = \|x\|_2 ;$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2} \leq ((\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2 + \ldots + (\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} =$$

$$= (n(\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} = \sqrt{n}\, \|x\|_\infty ;$$

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = n\, \|x\|_\infty . \quad \square$$

Ülesanne 2. Näidata, et kui $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, siis $\lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$.

Ülesanne 3. Kontrollige, kas kõigi tõkestatud arvjadade ruum m on normi

$$\|x\| = \sup_{1 \leq\, k < \infty} |\xi_k|$$

korral normeeritud ruum.

Ülesanne 4. Tõestage, et ruum

$$l_p = \left\{ \{\xi_k\} : \xi_k \in \mathbf{K} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}$$

on normi

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$$

korral normeeritud ruum.

Ülesanne 4. Tõestage, et kõigi lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide ruum $C\,[a, b]$ on normi

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

korral normeeritud ruum.

Ülesanne 5. Tõestage, et kõigi lõigul $[a,b]$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk

$$C^m\,[a,b] = \left\{x = x(t) : x^{(m)}(t) \in C\,[a,b]\right\}$$

on normi

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{a\,\le t\,\le b} \left|x^{(k)}(t)\right|$$

korral normeeritud ruum.

Definitsioon 3. Öeldakse, et jada $\{x_n\}$ normeeritud ruumis X *koondub normi järgi* elemendiks $x \in X$ ja kirjutatakse $x_n \to x$, kui

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definitsioon 4. Täielikku normeeritud ruumi nimetatakse *Banachi ruumiks* ehk *B-ruumiks.*

Ülesanne 6. Tõestage, et kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide ruum $C\,[a,b]$ on normi

$$\|x\| = \max_{a\,\le t\,\le b} |x(t)|$$

korral Banachi ruum.

Definitsioon 5. Banachi ruumi X elementide jada $\{x_k\}$ nimetatakse ruumi X *Schauderi baasiks,* kui iga $x \in X$ korral leidub selline üheselt määratud jada $\{\alpha_k\}$ $(\alpha_k \in \mathbf{K})$, et

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\| = 0.$$

B-ruumi $C\,[0;1]$ Schauder baasi konstrueeris J. Schauder. Haari lainekesed moodustavad Schauderi baasi B-ruumis $L_p(a,b)$ $(1 \le p < +\infty)$, kus

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Trigonomeetrilised polünoomid $(T=1)$ ja ka Legendre'i polünoomid moodustavad Schauderi baasi B-ruumis $L_2\,[0;1]$. Laguerre polünoomid moodustavad Schauderi baasi B-ruumis $L_2\,[0;+\infty)$ ja Hermiti polünoomid polünoomid moodustavad Schauder baasi B-ruumis $L_2\,(-\infty;+\infty)$.

2.3 Operaatorid normeeritud ruumis

Olgu X ja Y normeeritud vektorruumid üle korpuse $\mathbf{K}$.

Definitsioon 1. Operaatorit $A : X \to Y$ nimetatakse *lineaarseks*, kui

1° $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad (x_1, x_2 \in X) \quad$ (aditiivsus),

2° $A(\lambda x) = \lambda Ax \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbf{K}) \quad$ (homogeensus).

Ülesanne 1. Näidake, et kui A on lineaarne operaator, siis $A\theta = \theta$ ja

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A x_k \quad (\lambda_k \in \mathbf{K},\ x_k \in X).$$

Näide 1. Olgu $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ suvaline lineaarne operaator ja $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ ning $\{e_1'', \ldots, e_m''\}$ baasid vastavalt ruumides $\mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{R}^m$. Siis

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i' \Rightarrow y = Ax = A\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i' = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i' = \left[Ae_i' = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} e_k'' \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{m} a_{ki} e_k'' = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ki} \right) e_k'' = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e_k'' \Rightarrow \eta_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \xi_i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_m \end{pmatrix}^T = (a_{ki})_{m,n} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}^T$$

või lühidalt

$$y^T = Ax^T,$$

kus $A = (a_{ki})_{m,n}$.

Ülesanne 2. Olgu funktsioon $K(t,s)$ pidev ruudus $[a,b] \times [a,b]$. Näidake, et seosega

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)ds \quad (t \in [a,b])$$

määratud integraaloperaator $K :\ C[a,b] \to C[a,b]$ on lineaarne.

Ülesanne 3. Näidake, et seosega

$$(Dx)(t) = x'(t) \quad (t \in [a,b])$$

määratud operaator $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$ on lineaarne.

Operaatorit A normeeritud ruumist X normeeritud ruumi Y nimetatakse pidevaks punktis x kui

$$(\|x_n - x\| \to 0) \Rightarrow (\|Ax_n - Ax\| \to 0).$$

Kui operaator A on pidev ja lineaarne, siis

$$A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A x_k\right)$$

iga koonduva rea $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ korral ruumist X, sest

$$\begin{aligned} A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) &= A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A x_k. \end{aligned}$$

Lause 1. Lineaarne operaator $A : X \to Y$ on pidev punktis $x \in X$ parajasti siis, kui ta on pidev punktis θ.

Tõestus. Kui A on pidev punktis θ, siis

$$x_n - x \to \theta \Rightarrow A(x_n - x) \to \theta$$

ja $Ax_n - Ax \to \theta$ ning $Ax_n \to Ax$, st A on pidev punktis x.

Kui A on pidev mingis punktis $x \in X$, siis

$$x_n \to \theta \Rightarrow x_n + x \to x \Rightarrow A(x_n + x) \to Ax \Rightarrow Ax_n + Ax \to Ax \Rightarrow Ax_n \to \theta,$$

st A on pidev punktis θ. $\square$

Definitsioon 2. Operaatorit $A : X \to Y$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui leidub selline arv $M > 0$, et

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \quad (\forall x \in X).$$

Näide 2. Olgu funktsioon $K(t,s)$ pidev ruudus $[a,b]\times[a,b]$. Näidake, et seosega

$$(Kx)(t)=\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds \quad (t\in[a,b])$$

määratud integraaloperaator $K:\ C[a,b]\to C[a,b]$ on tõkestatud.

Et

$$\|(Kx)(t)\| = \left\|\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds\right\| = \max_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^b K(t,s)\,x(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t,s)|\,|x(s)|\,ds \leq \max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t,s)|\max_{a\leq s\leq b}|x(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \max_{a\leq s\leq b}|x(s)|\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds \leq \left(\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds\right)\|x\|$$

ja funktsiooni $K(t,s)$ pidevusest ruudus $[a,b]\times[a,b]$ järeldub

$$\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b |K(t,s)|\,ds \leq M,$$

siis operaator K on tõkestatud. $\diamondsuit$

Lause 2. Lineaarne operaator on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Tõestus. Olgu A tõkestatud, st $\|Ax\|\leq M\|x\| \quad (\forall x\in X)$. Olgu $x_n\to\theta$. Siis

$$(\|Ax_n\|\leq M\|x_n\|\to 0)\Rightarrow(\|Ax_n\|\to 0)\Rightarrow Ax_n\to\theta,$$

st A on pidev punktis θ. Seega Lause 1 põhjal võime väita, et A on pivev kõikjal ruumis X.

Olgu A pidev. Oletame vastuväiteliselt, et A on tõkestamata. Siis leiduvad sellised elemendid $x_n\in X\setminus\{\theta\}$, et $\|Ax_n\|/\|x_n\|\to\infty$. Seega $\|x_n\|/\|Ax_n\|\to 0$, millest saame, et $x_n/\|Ax_n\|\to\theta$. Kuna

$$A\left(\frac{1}{\|Ax_n\|}x_n\right)=\frac{\|Ax_n\|}{\|Ax_n\|}=1,$$

siis A ei ole pidev punktis θ. Vastuolu. Järelikult A on tõkestatud. $\square$

Lause 3 (vt [5], lk 120-121). Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis tegutsev lineaarne operaator on pidev.

Definitsioon 3. Lineaarset sürjektsiooni $A : X \to Y$, mis säilitab normi, st

$$\|Ax\| = \|x\| \quad (x \in X),$$

nimetatakse *isomeetriliseks isomorfismiks.*

2.4 Pidevate lineaarsete operaatorite ruum.

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle korpuse $\mathbf{K}$. Olgu

$$\mathcal{L}(X,Y) \overset{\text{def.}}{=} \{A : A \text{ on pidev lineaarne operaator ruumist } X \text{ ruumi } Y\}.$$

Kui A, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$, siis defineerime operaatorite A ja B summa ning operaatori A korrutise arvuga $\lambda \in \mathbf{K}$ järgnevalt:

$$(A+B)\,x \overset{\text{def.}}{=} Ax + Bx \quad (x \in X); \quad (\lambda A)\,x \overset{\text{def.}}{=} \lambda\,(Ax).$$

Ülesanne 1. Tõestage, et kui pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ defineerida tehted sellisel viisil, siis saame tulemuseks vektorruumi.

Et tõkestatud lineaarse operaatori korral

$$\|Ax\| \leq M\,\|x\| \wedge \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\| \leq M,$$

siis $\exists \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ ja mõistlik järgmine definitsioon.

Definitsioon 1. *Operaatori* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *normiks* nimetatakse arvu

$$\|A\| \overset{\text{def.}}{=} \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|. \tag{2.4.1}$$

Kontrollime, kas nii defineeritud norm ikka rahuldab normi aksioome 1-3:

$$\begin{aligned}
\|A\| &= 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \\ \|x\| > 1 \Rightarrow A\left(\|x\|\,\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Ax = \theta \quad (\forall x \in X) \Leftrightarrow A = \theta; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\lambda A)\,x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\lambda\,(Ax)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leq 1} \|(Ax)\| = |\lambda|\,\|A\|; \\
\|A+B\| &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A+B)\,x\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax+Bx\| \leq \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

Ülesanne 2. Tõestada, et

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Lause 1. Kui X on normeeritud ruum ja Y on Banachi ruum, siis $\mathcal{L}(X,Y)$ on Banachi ruum.

2.5 Normeeritud ruumi kaasruumid

Olgu X normeeritud ruum üle K.

Definitsioon 1. Lineaarset operaatorit $f : X \to \mathbf{K}$ nimetatakse *lineaarseks funktsionaaliks.*

Definitsioon 2. Pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbf{K})$ nimetatakse ruumi X *kaasruumiks* ja tähistatakse X^*.

Kuna $\mathbf{K}$ on Banachi ruum, siis Lause 2.4.1 põhjal on X^* Banachi ruum. Seejuures

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \quad (f \in X^*).$$

Saab tõestada, et isomeetrilise isomorfismi mõttes:
1° $(l_1)^* = m$;
2° $(c_0)^* = l_1$, kus c_0 on nullelemendiks θ koonduvate jadade ruum;
3° $(l_p)^* = l_q$, kus $1/p + 1/q = 1$;
4° $f \in (C\,[a,b])^* \Rightarrow f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$, kusjuures $f = V_a^b\, g$, kus $V_a^b\, g$ on funktsiooni g täisvariatsioon lõigul a, b, st

$$V_a^b\, g = \sup \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ n \in \mathbf{N}).$$

Kehtib järgmine väide.

Lause 1 (Hahn-Banachi teoreem). Kui X_0 on normeeritud ruumi X alamruum ja $f : X_0 \to K$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis funktsionaalil f_0 leidub selline pidev lineaarne jätk f kogu ruumile X, et

$$f : X \to K,$$

kusjuures $\|f\| = \|f_0\|$.

Kui X on normeeritud ruum üle K ja X^* tema kaasruum , siis saab moodustada ruumi X^* kaasruumi.

Definitsioon 3. Ruumi $(X^*)^* \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{L}(X^*, \mathbf{K})$ nimetatakse ruumi X *teiseks kaasruumiks.*

Ruumi $(X^*)^*$ tähistamiseks kasutatakse sümbolit X^{**}.

Ruum X on loomulikul viisil samastatav ruumi X^{**} alamhulgaga. Selleks defineeritakse kujutis $\pi : X \to X^{**}$ võrdusega

$$\pi(x) = F_x \quad (x \in X),$$

kus

$$F_x(f) = f(x) \quad (f \in X^*).$$

kujutust π nimetatakse ruumi X *loomulikuks kujutuseks* teise kaasruumi X^{**}. Selles mõttes saame, et $X \subset X^{**}$.

Saab tõestada järgmise väite.

Lause 2. Alamruum $\pi(X)$ on kinnine ruumis X^{**} parajasti siis, kui X on Banachi ruum.

Definitsioon 4. Kui kujutus π on sürjektiivne ja $\pi(X) = X^{**}$, siis öeldakse, et ruum X on *refleksiivne.*

3 Nõrk ja tugev koonduvus

3.1 Operaatorite jada punktiviisi tõkestatus ja punktiviisi koonduvus

Definitsioon 1. Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis operaatorite jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ nimetatakse *punktiviisi tõkestatuks,* kui iga $x \in X$ korral leidub selline arv $M = M(x) > 0$, et

$$\|A_n x\| \leq M \quad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Ülesanne 1. Olgu funktsioonid $K_n(t, s)$ pidevad ruudus $[a, b] \times [a, b]$ ja integraaloperaatorid $K_n : C[a, b] \to C[a, b]$ määratud seosega

$$(K_n x)(t) = \int_a^b K_n(t, s)\, x(s) ds \quad (t \in [a, b]).$$

Näidake, et eeldusel

$$\max_{a \le t \le b} \int_a^b |K_n(t,s)|\, ds = O(1)$$

on jada $\{K_n\}$ punktiviisi tõkestatud.

Lause 1. Kui operaatorite jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, on normi järgi tõkestatud, siis ta on ka punktiviisi tõkestatud, st

$$(\exists M_0 > 0 : \|A_n\| \le M_0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists M = M(x) > 0 : \|A_n x\| \le M \quad (\forall n \in \mathbf{N}))\,.$$

Tõestus. Saame

$$(A_n \in \mathcal{L}(X,Y)) \Rightarrow (\|A_n x\| \le \|A_n\|\,\|x\|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A_n x\| \le M_0 \|x\| \Rightarrow \|A_n x\| \le M,$$

kus $M = M(x) = M_0 \|x\|$. $\square$

Saab tõestada järgmise väite (vt [5] lk 134).

Lause 2. Kui X on B-ruum ja Y_n $(n \in \mathbf{N})$ on normeeritud ruumid ning jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X, Y_n)$, on punktiviisi tõkestatud, siis normide jada $\{\|A_n\|\}$ on tõkestatud.

Definitsioon 2. Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis operaatorite jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, nimetatakse *punktiviisi koonduvaks* ehk *kõikjal koonduvaks* ruumis X, kui iga $x \in X$ korral jada $\{A_n x\}$ koondub ruumis Y.

Definitsioon 3. Operaatorit $A : X \to Y$, mis on defineeritud seosega

$$Ax = \lim_n A_n x \quad (x \in X)\,,$$

nimetatakse kõikjal koonduva operaatorite jada $\{A_n\}$, kus $A_n : X \to Y$, *piiroperaatoriks.*

Lause 3. Kui jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, koondub kõikjal B-ruumis X ja A on jada $\{A_n\}$ piiroperaator, siis $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Tõestus. Kontrollime, kas A on lineaarne:

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) &= \lim_n (A_n(x_1+x_2)) = \lim_n (A_n x_1 + A_n x_2) = \\ &= \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2; \\ A(\lambda x) &= \lim_n (A_n(\lambda x)) = \lim_n (\lambda (A_n x)) = \\ &= \lambda \lim_n (A_n x) = \lambda A(x)\,. \end{aligned}$$

Seega piiroperaator A on lineaarne. Lause 2 põhjal on $\{\|A_n\|\}$ jada tõkestatud, st $\exists M > 0 : \|A_n\| \leq M$. Kontrollime, kas A on tõkestatud:

$$\|Ax\| = \left\|\lim_n A_n x\right\| = \lim_n \|A_n x\| \leq \lim_n \|A_n\| \|x\| \leq \lim_n M \|x\| = M \|x\| .$$

Seega

$$\exists M > 0 : \|Ax\| \leq M \|x\| \quad (x \in X) ,$$

st piiroperaator A on tõkestatud. Piiroperaatori A lineaarsusest ja tõkestatusest järeldub, et $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

3.2 Banach-Steinhausi teoreem

Definitsioon 1. Hulka E nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X, kui $\overline{\operatorname{span} E} = X$.

Seega hulga E lineaarne kate $\operatorname{span} E$ on kõikjal tihe ruumis X.

Lause 1 (Banach-Steinhausi teoreem). Olgu X ja Y B-ruumid ning E põhihulk ruumis X. Jada $\{A_n\}$, kus $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, koondub kõikjal ruumis X parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:
1° $\exists M > 0 :$ $\|A_n\| \leq M \quad (\forall n \in \mathbf{N})$;
2° $\exists \lim_n A_n x \quad (\forall x \in E)$.

Tõestus. Tarvilikkus. Tingimus 1° järeldub ühtlase tõkestatuse printsiibist. Nimelt

$$\begin{aligned} \{A_n x\} \text{ punktiviisi koondub} \quad &\Rightarrow \quad \{A_n x\} \text{ on punktiviisi tõkestatud } \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \{\|A_n\|\} \text{ on tõkestatud.} \end{aligned}$$

Tingimuse 2 tarvilikkus on ilmne.

Piisavus. Näitame kõigepealt, et $\exists \lim_n A_n x \quad (\forall x \in \operatorname{span} E)$. Kui $x \in \operatorname{span} E$, siis

$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k \ \ (x_k \in E,\ \lambda_k \in \mathbf{K})$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_n A_n x &= \lim_n A_n \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = \lim_n \sum_{k=1}^{r} \lambda_k A_n x_k = \\ &= \left[\exists \lim_n A_n x_k \quad (\forall x_k \in E)\right] = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \lim_n A_n x_k, \end{aligned}$$

st $\exists \lim\limits_{n} A_n x \quad (\forall x \in E)$.

Kui $x \in X$, kuid $x \notin \operatorname{span} E$, siis ruumi Y täielikkuse tõttu piisab jada $\{A_n x\}$ koondumiseks näidata, et $\{A_n x\}$ on Cauchy jada. Suvalise arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $z \in \operatorname{span} E$, et $\|x - z\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\,(M+1)}$. Saame

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\leq \|A_n (x - z) + (A_n z - A_m z) + A_m (z - x)\| \leq \\ &\leq \|A_n\| \, \|x - z\| + \|A_n z - A_m z\| + \|A_m\| \, \|z - x\| \leq \\ &\leq \frac{2M\varepsilon}{3\,(M+1)} + \|A_n z - A_m z\| . \end{aligned}$$

Kuna $z \in \operatorname{span} E$, siis $\{A_n z\}$ koondub ja

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} : n,\, m > n_0 \;\Rightarrow\; \|A_n z - A_m z\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seega $\{A_n x\}$ on Cauchy jada. $\square$

3.3 Hahn-Banachi teoreem

Lause 1 (Hahn-Banachi teoreem). Kui X_0 on normeeritud ruumi X alamruum ja $f_0 : X_0 \to \mathbf{K}$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub funktsionaali f_0 selline pidev lineaarne jätk f, et $f : X \to \mathbf{K}$ ning $\|f\| = \|f_0\|$.

Tõestuse leiab huviline õpikust [5], lk 165-169.

Lause 2 (piisavast arvust pidevatest funktsionaalidest). Kui X on normeeritud ruum, kusjuures $X \neq \{\theta\}$, siis iga $x \in X$ korral leidub selline pidev lineaarne funktsionaal $f \in X^*$, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$.

Tõestus. Eeldame lisaks, et $x \neq \theta$. Moodustame alamruumi

$$X_0 = \operatorname{span}\, \{x\} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbf{K}\} .$$

Defineerime

$$f_0(\lambda x) = \lambda \, \|x\| \quad (\lambda x \in X_0) .$$

Funktsionaal $f_0 : X_0 \to \mathbf{K}$ on lineaarne:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda x + \mu x) &= (\lambda + \mu)\, \|x\| \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{K}) ; \\ f_0(\mu\,(\lambda x)) &= f_0((\mu\lambda)\, x) = (\mu\lambda)\, \|x\| = \mu\,(\lambda\, \|x\|) = \mu f_0(\lambda x). \end{aligned}$$

Et

$$|f_0(\lambda x)| = |\lambda \cdot \|x\|| = |\lambda| \cdot \|x\| = 1 \cdot \|\lambda x\| ,$$

siis

$$\|f_0\| = 1, \quad f_0(x) = 1 \cdot \|x\| = \|x\| \,.$$

Rakendades Hahn-Banachi teoreemi, jõume $x \neq \theta$ korral Lause 2 väiteni. Kui $x = \theta$, siis pidevaks lineaarseks funktsionaaliks f sobib iga ruumi X element, mille korral $\|f\| = 1$. $\square$

Ülesanne 1 (normeeritud ruumi punktide eraldamisest). Tõestada, et kui $x \neq y$, siis leidub selline pidev lineaarne funktsionaal $f \in X^*$, et $f(x) \neq f(y)$.

Ülesanne 2. Tõestada, et kui $f(x) = f(y)$ $(\forall f \in X^*)$, siis $x = y$.

Lause 3. Kui X on normeeritud ruum, siis iga $x \in X$ korral

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\, f(x)| \,.$$

Tõestus. Et $\|\theta\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\, f(\theta)| = 0$, siis $x = \theta$ korral väide kehtib. Kui $x \neq \theta$, siis

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |\, f(x)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|\, f\| \, \|x\| \leq \|x\| \,.$$

Teisalt, valides Lause 2 põhjal funktsionaali f_0 nii, et $\|f_0\| = 1$ ja $f_0(x) = \|x\|$, saame

$$\|x\| = f_0(x) = |\, f_0(x)| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |\, f(x)| \,. \qquad \square$$

Lause 4. Kui Y on normeeritud ruumi X kinnine alamruum ja xY, siis leidub selline $f \in X^*$, et $f(1) = 0$ ja $f(y) = 0$ $(y \in Y)$.

3.4 Nõrk ja tugev koonduvus

Olgu X normeeritud ruum ja X^* tema kaasruum, st kõigi temal defineeritud pidevate lineaarsete funktsionaalide ruum.

Definitsioon 1. Jada $\{x_n\}$ normeeritud ruumi X elementidest nimetatakse *nõrgalt koonduvaks* elemendiks $x \in X$, kui

$$f(x_n) \to f(x) \quad (\forall f \in X^*) \,. \tag{3.4.1}$$

Fakti et jada $\{x_n\}$ koondub nõrgalt elemendiks x, me tähistame $x_n \xrightarrow{w} x$ või $w - \lim\limits_n x_n = x$.

Definitsioon 2. Jada $\{x_n\}$ normeeritud ruumi X elementidest nimetatakse *tugevalt koonduvaks* elemendiks $x \in X$, kui jada $\{x_n\}$ koondub normi järgi elemendiks $x \in X$.

Tugev koonduvus on normeeritud ruumi tavaline koonduvus.

Ülesanne 1. Näidake, et nõrgalt koonduva jada piirelement on ühene.

Ülesanne 2. Näidake, et pidev lineaarne operaator teisendab nõrgalt koonduv jada nõrgalt koonduvaks jadaks.

Punktis 2.5 vaatlesime funktsionaale $F_x \in X^{**}$, defineerituna seosega

$$F_x(f) = f(x) \quad (\forall f \in X^*).$$

Funktsionaale F_x kasutades saame seosele (3.4.1) anda kuju

$$F_{x_n}(f) \to F_x(f) \quad (\forall f \in X^*). \tag{3.4.2}$$

Tingimus (3.4.2) tähendab pidevate lineaarsete funktsionaalide jada $\{F_{x_n}\}$ punktiviisi koondumist funktsionaaliks F_x. Kasutame Banach-Steinhausi teoreemi. Tõesti X^* ja $\mathbf{K}$ on B-ruumid ja jada $\{F_{x_n}\}$, kus $F_{x_n} \in \mathcal{L}(X^*, \mathbf{K})$, koondub kõikjal ruumis X^* parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

1° $\exists M > 0: \ \|F_{x_n}\| \leq M \quad (\forall n \in \mathbf{N})$;

2° $\exists \lim\limits_{n} F_{x_n}(f) \ (\forall f \in E \subset X^*)$, kus $\overline{\operatorname{span} E} = X^*$.

Kuna $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$, siis kehtib järgmine väide.

Lause 1. Normeeritud ruumi X elementide jada $\{x_n\}$ koondub nõrgalt elemendiks x parajasti siis, kui

1° $\exists M > 0: \ \|x_n\| \leq M \quad (\forall n \in \mathbf{N})$;

2° $\exists \lim\limits_{n} f(x_n) \ (\forall f \in E \subset X^*)$, kus $\overline{\operatorname{span} E} = X^*$.

Ülesanne 3. Näidake, et iga tugevalt koonduv jada $\{x_n\}$, kus x_n on normeeritud ruumi X elemendid, on ka nõrgalt koonduv samaks piirelemendiks.

Ülesannes 1 esitatud väide ei ole pööratav. Illustreerime seda Näite 1 abil.

Näide 1. Uurime jada $e_n = \left\{0; \ldots; 0; \underset{n}{1}; 0; \ldots\right\} \in l_2$ tugevat ja nõrka koonduvust.

Et ruumis l_2 on elemendi $x = \{\xi_k\}$ norm antud valemiga

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2},$$

siis $m < n$ korral

$$\begin{aligned} \|e_m - e_n\| &= \left\| \left\{0; \ldots; 0; \underset{m}{1}; 0; \ldots; 0; -\underset{n}{1}; 0; \ldots\right\} \right\| = \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Seega jada e_n ei ole Cauchy jada. Teisalt näitame, et $e_n \to \theta$. Tõesti, iga funktsionaal $f \in l_2^*$ on määratud jadaga $\{\alpha_k\} \in l_2$ kujul

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \quad (x = \{\xi_k\} \in l_2).$$

Seega

$$f(e_n) = \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot 0 + \alpha_n \cdot 1 + \alpha_{n+1} \cdot 0 + \ldots = \alpha_n$$

ja

$$f(e_n) = \alpha_n \Rightarrow \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \le M \right) \Rightarrow \alpha_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \right] \overset{n\to\infty}{\to} 0 = f(\theta),$$

st $e_n \overset{w}{\to} \theta$. $\diamondsuit$

Ülesanne 4. Uurige jada $e_n = \left\{ 0; \ldots; 0; \underset{n}{1}; 0; \ldots \right\} \in l_1$ tugevat ja nõrka koonduvust.

Definitsioon 3. Jada $\{y_n\}$ nimetatakse normeeritud ruumi X elementide jada $\{x_n\}$ *kumerate kombinatsioonide jadaks,* kui leiduvad indeksid $m_1 = 0 < m_2 < m_3 < \ldots$ ja arvud $\lambda_k \ge 0$ nii, et

$$y_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_k x \quad \left(n \in \mathbf{N}, \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_k = 1 \right).$$

Lause 2. Kui normeeritud ruumi X elementide jada $\{x_n\}$ koondub nõrgalt, siis leidub selle jada kumerate kombinatsioonide jada $\{y_n\}$, mis koondub normi järgi samaks piirelemendiks.

3.5 Pideva lineaarse operaatori kaasoperaator

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle K ning X* ja Y* nende kaasruumid.

Definitsioon 1. Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit $A^* : Y^* \to X^*$, mis on määratud võrdusega

$$A^* g = g\, A \quad (g \in Y^*).$$

Kuna

$$A \in \mathcal{L}(X, Y) \;\wedge\; g \in \mathcal{L}(Y, \mathbf{K}),$$

siis
$$g\,A \in X^* = \mathcal{L}\,(X, \mathbf{K})\,.$$

Lause 1. Kui $A \in \mathcal{L}\,(X, Y)$, siis $A^* \in \mathcal{L}\,(Y^*, X^*)$ ja $\|A^*\| = \|A\|$.

Tõestus. Et

$$\begin{aligned} A^*\,(g_1 + g_2) &= (g_1 + g_2)\,A = g_1 A + g_2 A = A^* g_1 + A^* g_2, \\ A^*\,(\lambda g) &= (\lambda g)\,A = \lambda\,(gA) = \lambda\,(A^* g)\,, \end{aligned}$$

siis operaator A^* on lineaarne. Kuna

$$\|A^* g\| = \|gA\| \leq \|g\|\,\|A\| = \|A\|\,\|g\|\,,$$

siis $A^* \in \mathcal{L}\,(Y^*, X^*)$, kusjuures kehtib võrratus $\|A^*\| \leq \|A\|$. Kui $Y = \{\theta\}$, siis $A = \theta$ ja vastupidine võrratus kehtib. Kui Y ja $x \in X$ on suvaline element, siis valime funktsionaali $g \in Y^*$ nii, et $\|g\| = 1$ ja $g(Ax) = \|Ax\|$. Sellise valiku korral saame

$$\|Ax\| = g\,(Ax) = (A^* g)\,(x) \leq \|A^*\|\,\|g\|\,\|x\| = \|A^*\|\,\|x\|\,.$$

Seega $\|A\| \leq \|A^*\|$. $\square$

Ülesanne 1. Tõestada, et
1° $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2° $(\lambda A)^* = \lambda A^*$,
3° $(AB)^* = B^* A^*$.

4 Operaatorite diferentsiaalarvutus

4.1 Nõrk diferentseeruvus

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle arvukorpuse $\mathbf{K}$ ja $U \subset X$ lahtine mittetühi hulk, millel on antud operaator $f : U \to Y$.

Definitsioon 1. Kui iga $h \in X$ korral eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{t \to 0\,\wedge\, t \in \mathbf{K}} \frac{f\,(x + th) - f\,(x)}{t}, \tag{4.1.1}$$

siis öeldakse, et operaator f on *nõrgalt diferentseeruv* (*Gâteaux'* mõttes *diferentseeruv*) punktis $x \in X$.

Piirväärtust (4.1.1) tähistatakse $\delta f(x,h)$ ja nimetatakse operaatori f *nõrgaks diferentsiaaliks* ehk *Gâteaux' diferentsiaaliks* punktis x elemendi h suunas.

Kuna U on lahtine hulk, siis tingimusest $x \in U$ järeldub piisavalt väikese t korral $x + th \in U$. Et $t \to 0 \Rightarrow th \to \theta$, siis piisab piirduda vaid juhuga $\|h\| = 1$, kus $h \in X$. Definitsioonist 1 järeldub, et

$$\delta f(x,\theta) = \lim_{t\to 0\,\wedge\, t\in\mathbf{K}} \frac{f(x+t\theta) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0\,\wedge\, t\in\mathbf{K}} \frac{f(x) - f(x)}{t} = \theta.$$

Ülesanne 1. Näidake, et $X = Y = \mathbf{R} = \mathbf{K}$ korral $\delta f(x,h) = f'(x)\,h$, kusjuures $\delta f(x,1) = f'(x)$.

Näide 1. Olgu $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \mathbf{R} = \mathbf{K}$ ja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ning $h = (h_1, \ldots, h_n)$, kus $\|h\| = 1$. Leiame $\delta f(x,h)$ ja $\delta f\left(x, \left(0; \ldots; 0; \underset{k}{1}; 0; \ldots\right)\right)$ $(k = 1; 2; \ldots; n)$.

Kuna

$$\begin{aligned}\delta f(x,h) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1+th_1, \ldots, x_n+th_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t} = \\ &= f_{x_1}(x)\; h_1 + \ldots + f_{x_n}(x)\; h_n = (\operatorname{grad} f)\cdot h,\end{aligned}$$

siis

$$\delta f\left(x, \left(0; \ldots; 0; \underset{k}{1}; 0; \ldots\right)\right) = f_{x_k}(x)\cdot 1 = f_{x_k}(x).$$

Seega toodud tingimustel on $\delta f(x,h)$ funktsiooni f suunatuletis punktis x vektori h suunas ja $\delta f\left(x, \left(0; \ldots; 0; \underset{k}{1}; 0; \ldots\right)\right)$ selle funktsiooni osatuletis punktis x muutuja x_k järgi. $\diamondsuit$

Ülesanne 2. Olgu $X = Y = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ja $x = (x_1, x_n)$ ning $h = (h_1, h_2)$. Leidke $\delta f(x,h)$.

Näide 2. Olgu $x = (0;0;0)$ ja $h = (1;1;1)$. Veendume, et kuigi funktsioonil

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 0, \text{ kui } (x_1,x_2,x_3) = (0;0;0), \\ \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \text{ kui } (x_1,x_2,x_3) \neq (0;0;0) \end{cases}$$

eksisteerivad osatuletised f_{x_k} punktis $(0;0;0)$, ei ole see funktsioon nõrgalt diferentseeruv punktis x suunas h.

Saame

$$\left.\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\right|_{x=\theta} = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(0+h_1;0;0)-f(0;0;0)}{h_1} = $$
$$= \lim_{h_1\to 0}\frac{\dfrac{h_1\cdot 0+0\cdot 0+h_1\cdot 0}{h_1^2+0^2+0^2}-0}{h_1} = 0.$$

Analoogiliselt leiame $\left.\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\right|_{x=\theta} = \left.\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\right|_{x=\theta} = 0$. Teisalt

$$\delta f(0,(1;1;1)) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cdot 1,0+t\cdot 1,0+t\cdot 1)-f(0,0,0)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^2+t^2+t^2}{t^2+t^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t},$$

st funktsioon f ei ole nõrgalt diferentseeruv punktis x suunas h. ♢

Ülesanne 3. Olgu $x=(0;0;0;0)$ ja $h=(1;1;1;1)$. Tõestage, et funktsioonil

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} 0, \text{ kui } (x_1,x_2,x_3)=(0;0;0), \\ \dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \text{ kui } (x_1,x_2,x_3)\neq(0;0;0). \end{cases}$$

eksisteerivad osatuletised f_{x_k} punktis $(0;0;0)$, kuid see funktsioon ei ole nõrgalt diferentseeruv punktis x suunas h.

Näide 3. Olgu funktsioon $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ antud järgnevalt:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 1, \text{ kui } x_2=x_1^3 \wedge x_1\neq 0, \\ 0, \; x_1x_2\text{-tasandi ülejäänud punktides.} \end{cases}$$

Veendume, et kuigi f on katkev punktis $(0;0)$, on f nõrgalt diferentseeruv selles punktis, isegi igas suunas $h=(h_1,h_2)$.

Kahe muutuja funktsiooni pidevuse definitsiooni põhjal on f katkev punktis $(0;0)$. Samas

$$\delta f(0,h) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+th_1,0+th_2)-f(0,0)}{t} =$$
$$= \left[\begin{array}{c}\text{piisavalt väikese}\\ t \text{ korral}\end{array}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

Seega ei järeldu funktsiooni nõrgalt diferentseeruvusest punktis funktsiooni pidevus selles punktis. $\diamondsuit$

Ülesanne 4. Olgu funktsioon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ antud järgnevalt:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ kui } x_2 = x_1^4 \wedge x_1 \neq 0, \\ 0, \ x_1 x_2\text{-tasandi ülejäänud punktides.} \end{cases}$$

Tõestage, et f on katkev punktis $(0;0)$ ja nõrgalt diferentseeruv selles punktis, igas suunas $h = (h_1, h_2)$.

4.2 Tugev diferentseeruvus

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ja U ruumi X lahtine hulk.

Definitsioon 1. Kui operaatori $f : U \to Y$ korral leidub selline pidev lineaarne operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, et

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = \theta, \tag{4.2.1}$$

siis öeldakse, et operaator f on *(tugevalt) diferentseeruv* (*Fréchet' mõttes diferentseeruv*) punktis $x \in U$.

Tähistuse $\alpha(x, h) = f(x+h) - f(x) - Ah$ korral on tingimus (4.2.1) esitatav kujul

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\alpha(x, h)}{\|h\|} = 0$$

ehk $\alpha(x, h) = o(\|h\|) \ \ (h \to \theta)$..

Lause 1. Kui operaator $f : U \to Y$ on tugevalt diferentseeruv punktis $x \in U$, siis ta on ka nõrgalt diferentseeruv punktis x, kusjuures $\delta f(x, h) = Ah$.

Tõestus. Kuna

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{\alpha(x, th) + Ath}{t} = Ah + \frac{\alpha(x, th)}{\|th\|} \frac{|t| \|h\|}{t},$$

siis

$$\delta f(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(Ah + \frac{\alpha(x, th)}{\|th\|} \frac{|t| \|h\|}{t} \right) = Ah. \quad \square$$

Lause 2. Kui operaator $f : U \to Y$ on tugevalt diferentseeruv punktis $x \in U$, siis tingimust (4.2.1) rahuldav operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on määratud üheselt.

Tõestus. Olgu lisaks tingimust (4.2.1) rahuldavale operaatorile $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ veel teine seda tingimust rahuldav operaator $B \in \mathcal{L}(X,Y)$. Lausest 1 järeldub, et

$$\delta f(x,h) = Ah = Bh \quad (\forall h \in X).$$

Kuna

$$(Ah = Bh \quad (\forall h \in X)) \Rightarrow A = B,$$

siis tingimust (4.2.1) rahuldav $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ on üheselt määratud. $\square$

Definitsioon 2. Tingimust (4.2.1) rahuldavat operaatorit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ nimetatakse operaatori $f : U \to Y$ *(Frechet') tuletiseks* punktis x ja ruumi Y elementi

$$d\,f(x,h) \overset{\text{def.}}{=} Ah$$

nimetatakse operaatori f *(tugevaks) diferentsiaaliks* ehk *Frechet' diferentsiaaliks* punktis x, mis vastab argumendi juurdekasvule h.

Operaatorit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tähistatakse $f'(x)$.

Ülesanne 1. Näidake, et kui operaator $f : U \to Y$ on tugevalt diferentseeruv punktis $x \in U$, siis $d\,f(x,h) = \delta\,f(x,h)$.

Lause 3. Kui operaator $f : U \to Y$ on tugevalt diferentseeruv punktis x, siis operaator f on pidev punktis x.

Tõestus. Olgu $x \in U$ ja $h \in X$. Et

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(x,h)$$

ja

$$h \to \theta \Rightarrow (Ah \to \theta \wedge \alpha(x,h) = o(\|h\|) \to \theta),$$

siis

$$h \to \theta \Rightarrow f(x+h) \to f(x),$$

st operaator f on pidev punktis x. $\square$

Näide 1. Kui konstantne operaator $f : X \to Y$ on defineeritud seosega $f(x) = y_0$ $(\forall x \in X)$, siis $f'(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ nullopraator, st $f'(x) = \theta$.

Et $\forall x \in X$ korral $f(x+h) - f(x) = y_0 - y_0 = \theta$, siis tingimus (4.2.1) omandab kuju

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\theta - Ah}{\|h\|} = \theta.$$

Seega

$$\|h\| \to 0 \Rightarrow A\frac{h}{\|h\|} \to \theta \Rightarrow A = \theta. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 2. Näidake, et kui $f : X \to Y$ on pidev lineaarne operaator, st $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis $f'(x) = f \ (\forall x \in X)$.

Näide 2. Näitame, et kui $f : U \to \mathbf{R}$ ja $U \subset \mathbf{R}^n$, siis operaatori f tuletis $f'(x)$ kuulub ruumi $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = (\mathbf{R}^n)^*$, kusjuures $f'(x) = \operatorname{grad} f(x)$.

Kui $x = (x_1; \ldots; x_n)$ ja $h = (h_1; \ldots; h_n)$, siis mitme muutuja funktsiooni diferentsiaalarvutuse abil saame

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1 + h_1; \ldots; x_n + h_n) - f(x_1; \ldots; x_n) = \\ &= f_{x_1}(x)h_1 + \ldots + f_{x_n}(x)h_n + \alpha(x, h), \end{aligned}$$

kus

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\alpha(x, h)}{\|h\|} = 0.$$

Seega

$$f'(x)\, h = f_{x_1}(x)h_1 + \ldots + f_{x_n}(x)h_n,$$

kus

$$f'(x) = (f_{x_1}, \ \ldots, \ f_{x_n}) = \operatorname{grad} f(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = (\mathbf{R}^n)^*$$

ja operaatori $f'(x)$ rakendamine elemendile h on määratud vektorite $\operatorname{grad} f(x)$ ja h skalaarkorrutise abil. $\diamondsuit$

Ülesanne 3. Uurige Näite 2 erijuhtu $n = 1$ korral.

Näide 3. Olgu $U \subset \mathbf{R}^n$. Leiame operaatori $f : U \to \mathbf{R}^m$ korral tuletise $f'(x)$.

Esitame operaatori f kujul

$$f(x) = (f_1(x), \ \ldots, f_m(x))^T, \tag{4.2.2}$$

kus

$$f_k : U \to \mathbf{R} \ \ (k = 1; \ldots; m).$$

Et $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, siis saame operaatorit $f'(x)$ vaadelda maatriksoperaatorina, st operaatori f diferentseeruvuse korral punktis $x \in U$ leidub selline mn-maatriks $A = (a_{ki})$, et

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(x, h), \tag{4.2.3}$$

kus $\alpha(x, h) = o(\|h\|)$. Seostest (4.2.3) ja (4.2.2) järeldub, et

$$f_k(x+h) - f(x) = a_{k1}h_1 + \ldots + a_{kn}h_n + \alpha_k(x, h) \quad (k = 1; \ldots; m),$$

kus

$$\alpha(x,h) = (\alpha_1(x,h); \ldots; \alpha_m(x,h)).$$

Et

$$\alpha(x,h) = o(\|h\|) \Leftrightarrow (\alpha_k(x,h) = o(\|h\|) \quad (k = 1; \ldots; m)),$$

operaatori f diferentseeruvus on samaväärne tema kõigi koordinaatide f diferentseeruvusega ja kuna Näite 2 põhjal

$$f_k'(x) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x)\right) = \operatorname{grad} f_k(x),$$

siis

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x) \\ \cdots \\ \operatorname{grad} f_m(x) \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 4. Uurige Näite 3 erijuhtu $n = 1$ korral.

Ülesanne 5. Tõestage, et kui operaatorid $f : U \to Y$ ja $g : U \to Y$ on diferentseeruvad punktis $x \in U$, siis

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

ja

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x) \quad (\lambda \in \mathbf{K}).$$

Lause 4. Kui X, Y ja Z on normeeritud ruumid ning operaator $f : U \to Y$ on diferentseeruv punktis $x \in U \subset X$, $f(U) \subset V \subset Y$ ja operaator $g : V \to Z$ on diferentseeruv punktis $f(x)$, siis operaator $g\,f : U \to Z$ on diferentseeruv punktis x ning

$$(gf)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Tõestus. Operaatori f diferentseeruvus punktis $x \in U$ tähendab, et

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \alpha(x,h),\ \alpha(x,h) = o(\|h\|),\ f'(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$$

ja operaatori g diferentseeruvus punktis $y \in V$ tähendab, et

$$g(y+l) - g(y) = g'(y)\,l + \beta(y,l), \quad \beta(y,l) = o(\|l\|),\ g'(y) \in \mathcal{L}(Y,Z).$$

Seega

$$(gf)(x+h)-(gf)(x)=g(f(x+h))-g(f(x))=$$

$$=g(f(x)+f'(x)h+\alpha(x,h))-g(f(x))=$$

$$=g'(f(x))(f'(x)h+\alpha(x,h))+\beta(f(x),f'(x)h+\alpha(x,h))=$$

$$=g'(f(x))f'(x)h+\gamma(x,h),$$

kus

$$\gamma(x,h)=g'(y)\alpha(x,h)+\beta(y,l),\ l=f'(x)h+\alpha(x,h).$$

Näitame, et $\gamma(x,h)=o(\|h\|)$. Et

$$\alpha(x,h)=o(\|h\|)\ \Rightarrow\ g'(y)\alpha(x,h)=o(\|h\|),$$

piisab tõestada, et $\beta(y,l)=o(\|h\|)$. Kuna

$$\|\beta(y,l)\|=\frac{\|\beta(y,l)\|}{\|l\|}\cdot\frac{\|l\|}{\|h\|},$$

siis piisab tõestada, et $\|l\|/\|h\|$ on tõkestatud. Saame

$$\begin{aligned}\frac{\|l\|}{\|h\|} &= \frac{\|f'(x)h+\alpha(x,h)\|}{\|h\|}\leq\frac{\|f'(x)\|\,\|h\|+\|\alpha(x,h)\|}{\|h\|}=\\ &= \|f'(x)\|+\frac{\|\alpha(x,h)\|}{\|h\|}=O(1)+o(1)=O(1).\end{aligned}$$

Seega Lause 4 väide on õige. $\diamondsuit$

Ülesanne 6. Uurige Lause 4 erijuhtu, kui $f\in\mathcal{L}(X,Y)\wedge g\in\mathcal{L}(Y,Z)$.

4.3 Kõrgemat järku tuletised

Kui X ja Y normeeritud ruumid üle $\mathbf{K}$ ning U lahtine hulk ruumis X. Kui $f:X\to Y$ on diferentseeruv operaator iga $x\in U$ korral, siis saab uurida operaatorit

$$f':U\to\mathcal{L}(X,Y),$$

mis igale $x\in U$ seab vastavusse $f'(x)\in\mathcal{L}(X,Y)$.

Definitsioon 1. Kui operaator $f' : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ on pidev punktis $x \in U$, siis opraatorit f nimetatakse *pidevalt diferentseeruvaks* selles punktis.

Definitsioon 2. Kui operaator f' on diferentseeruv punktis x, siis öeldakse, et operaator f on *kaks korda diferentseeruv* punktis x, kusjuures tuletist $(f')'(x)$ nimetatakse *operaatori teiseks tuletiseks* ja tähistatakse $f''(x)$.

Operaatori $f : X \to Y$ kahekordne diferentseeruvus punktis x tähendab, et leidub selline $f''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$, et

$$f'(x+h) - f'(x) = f''(x)h + \beta(x,h), \tag{4.3.1}$$

kus $\beta(x,h) = o(\|h\|)$, kui $h \to \theta$. Tingimus (4.3.1) tähendab, et

$$f'(x+h)l - f'(x)l = f''(x)hl + \beta(x,h)\,l \quad (\forall l \in X).$$

Ülesanne 1. Leidke operaatori $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ teine tuletis.

Saab tõestada järgmise väite.

Lause 1. Kui operaator $f : U \to Y$ on kaks korda diferentseeruv punktis $x \in U$, siis $f''(x)hl$ on sümmeetriline h ja l suhtes, st

$$f''(x)hl = f''(x)hl \quad (\forall h, l \in X).$$

Analoogiliselt operaatori $f : U \to Y$ teise tuletisega defineeritakse selle operaatori kõrgemat järku tuletised.

Ülesanne 2. Olgu X normeeritud ruum ja $U \subset X$ lahtine hulk. Defineerige operaatori $f : U \to Y$ kolmandat järku tuletis.

5 Üldistatud funktsioonid

Matemaatilise analüüsi erinevate küsimuste käsitlemisel esitatakse vaadeldavatele funktsioonidele erinevaid nõudeid: kord vaadeldakse tõkestatud funktsioone, kord pidevaid funktsioone, kord diferentseeruvaid funktsioone, kord lõpmata arv kordi diferentseeruvaid funktsioone. Mõningatel juhtudel meie tavaline funktsiooni mõiste jääb kitsaks vaadeldava probleemi kirjeldamisel. Selles peatükis me käsitleme üht funktsiooni mõiste üldistamise võimalust, vaatleme nn üldistatud funktsioone

5.1 Põhifunktsioonide ruum

Definitsioon 1. Hulga, millel funktsiooni väärtused on nullist erinevad, sulundit nimetatakse selle *funktsiooni kandjaks.*

Seega funktsiooni $\varphi(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ kandja $\operatorname{supp} x$ avaldub kujul

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{t : \varphi(t) \neq 0\}}.$$

Definitsioon 2. Funktsiooni, mille kandja on tõkestatud hulk, nimetatakse *finiitseks funktsiooniks* ehk *tõkestatud kandjaga funktsiooniks.*

Definitsioon 3. Iga reaalse argumendiga lõpmata arv kordi diferentseeruvat finiitset funktsiooni nimetatakse *põhifunktsiooniks.*

Kui põhifunktsioonide liitmine ja reaalarvuga korrutamine defineerida tavalisel viisil, siis saame kõigi põhifunktsioonide vektorruumi, mida tähistame sümboliga $\mathcal{D}$. Vektorruumis $\mathcal{D}$ ei õnnestu meile sobival viisil defineerida normi. Jada koonduvuse mõiste ruumis $\mathcal{D}$ toome sisse järgneval viisil.

Definitsioon 4. Jada $\{\varphi_n(x)\}$, kus $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}$ nimetatakse *koonduvaks* funktsiooniks $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, kui
1) leidub lõik, millest väljapool kõik funktsioonid $\varphi_n(x)$ võrduvad nulliga;
2) tuletiste $\varphi_n^{(k)}(x)$ jada $\left\{\varphi_n^{(k)}(x)\right\}$ koondub sel lõigul ühtlaselt funktsiooniks $\varphi^{(k)}(x)$ ja seda iga $k \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ korral.

Sellist koonduvust tähistame lühidalt $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

Definitsioon 5. Vektorruumi $\mathcal{D}$, milles jada koonduvus on antud Definitsiooniga 4, nimetatakse *põhiruumiks.*

5.2 Üldistatud funktsiooni mõiste

Definitsioon 1. *Üldistatud funktsiooniks* ehk *distributsiooniks* nimetatakse iga pidevat lineaarset funktsionaali T ruumis $\mathcal{D}$.

Seejuures lineaarset funktsionaali T me nimetame pidevaks ruumis $\mathcal{D}$, kui

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \;\Rightarrow\; T(\varphi_n) \to T(\varphi). \tag{5.2.1}$$

Märgime, et iga lõigul integreeruva funktsiooni $g(t)$ abil saame mingi üldistatud funktsiooni

$$T_g : \mathcal{D} \to \mathbf{R},$$

kus

$$T_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt \quad (\varphi \in \mathcal{D}). \tag{5.2.2}$$

Märkus 1. Meenutame, et funktsionaal $f \in (C[a,b])^*$ parajasti siis, kui funktsionaal f on esitatav kujul

$$f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dg(t) \quad (\varphi \in C[a,b]),$$

kus g on mingi lõigul $[a, b]$ tõkestatud muuduga $V_a^b\, g$ funktsioon, mis on funktsionaaliga f üheselt määratud. Seejuures

$$\|f\| = V_a^b\, g \overset{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \\ n\in N}} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

ja integraali

$$\int_a^b \varphi(t)dg(t) = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_k)\Delta g(t_k),$$

kus $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ \Delta g(t_k) = g(t_k) - g(t_{k-1}),\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ja $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, nimetatakse funktsiooni φ *Stieltjesi integraaliks* funktsiooni g järgi lõigul $[a, b]$.

Definitsioon 2. Üldistatud funktsiooni T, mille korral leidub selline igal lõigul integreeruv funktsioon g, et $T(\varphi) = T_g(\varphi)$, kus $T_g(\varphi)$ on esitatud kujul (5.2.2), nimetatakse *regulaarseks üldistatud funktsiooniks* ja üldistatud funktsiooni, mis ei ole esitatav kujul (5.2.2), nimetatakse *singulaarseks üldistatud funktsiooniks.*

Singulaarse üldistatud funktsiooni korral on kuju (5.2.2) kasutamine formaalne.

Näide 1. Kontrollime, et deltafunktsioon

$$\delta : \mathcal{D} \to \mathbf{R},$$

kus

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}) \tag{5.2.3}$$

on on üldistatud funktsioon.

Tõesti tegemist on lineaarse funktsionaaliga ruumis $\mathcal{D}$ (kontrollige!) ja tingimuse (5.2.1) põhjal on see funktsionaal on ka pidev, sest

$$\left(\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi\right) \Rightarrow (\varphi_n(0) \to \varphi(0)) \Leftrightarrow \delta(\varphi_n) \to \delta(\varphi).$$

Järelikult δ on üldistatud funktsioon. Saab näidata, et δ on singulaarne üldistatud funktsioon, st ei leidu sellist lõigul integreeruvat funktsiooni $g(t)$, et

$$T_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt = \varphi(0) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}).$$

Seost (5.2.3) esitatakse sageli formaalsel kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}) . \tag{5.2.4}$$

Sageli üldistatud funktsiooni δ all mõeldakse funktsiooni, mis võrdub nulliga kõikjal, välja arvatud punkt 0, milles δ-funktsiooni väärtuseks võetakse ∞. Lisaks nõutakse tingimuse $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ täidetust. $\diamondsuit$

Ülesanne 1. Kontrollige, et nihkega deltafunktsioon δ_a, kus

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}) , \tag{5.2.5}$$

on üldistatud funktsioon, kusjuures seost (5.2.5) võib formaalselt esitada kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D})$$

ja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1.$$

Ülesanne 2. Kontrollige, kas

$$\varphi \to -\varphi'(0) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}) . \tag{5.2.6}$$

on üldistatud funktsioon. Miks seosega (5.2.6) esitatud üldistatud funktsiooni nimetatakse deltafunktsiooni tuletiseks $\delta'(t)$ kusjuures seost (5.2.6) võib formaalselt esitada kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)dt = -\varphi'(0) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D})?$$

Miks seosega

$$\varphi \to -\varphi'(a) \qquad (\varphi \in \mathcal{D})$$

esitatud üldistatud funktsiooni nimetatakse nihkega deltafunktsiooni tuletiseks $\delta'(t-a)$, kusjuures seda seost (5.2.6) formaalselt esitada kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t-a)dt = -\varphi'(a) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}) .$$

Definitsioon 3. Päratule integraalile $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ teatava üheainsa piirprotsessi abil omistatavat väärtust nimetatakse selle *integraali Cauchy peaväärtuseks,* näiteks

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} f(t)dt$$

või

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{A\to 0} \left(\int_a^{c-A} f(t)dt + \int_{c+A}^b f(t)dt \right) \quad (a < c < b)\,,$$

kus $c \in (a, b)$ on funktsiooni f katkevuspunkt.

Näide 2. Funktsioon $1/t$ ei ole integreeruv üheski lahtises vahemikus, mis sisaldab nullpunkti. Näitame, et iga $\varphi \in \mathcal{D}$ korral eksisteerib integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi(t)dt$$

Cauchy peaväärtus ja see on lõplik.

Tõesti. Kui (a, b) on vahemik, milles sisaldub $\operatorname{supp}\varphi$, ja $0 \in (a, b)$ siis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t} = \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t} = \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt + \int_a^b \frac{\varphi(0)dt}{t}.$$

Et

$$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) \stackrel{\varphi\in\mathcal{D}}{\Rightarrow} \exists \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt$$

ja

$$\int_a^b \frac{\varphi(0)dt}{t} = \lim_{c\to 0+} \left(\int_a^{0-c} \frac{\varphi(0)dt}{t} + \int_{0+c}^b \frac{\varphi(0)dt}{t} \right),$$

st integraal $\int_a^b \frac{\varphi(0)dt}{t}$ on Cauchy peaväärtuse mõttes lõplik, siis $1/t$ on funktsionaal ruumis $\mathcal{D}$. Näidake, et

$$\varphi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t} \quad (\varphi \in \mathcal{D})$$

on pidev ja lineaarne, st $1/t$ on üldistatud funktsioon. Kas $1/t$ on regulaarne või singulaarne üldistatud funktsioon? $\diamondsuit$

Ülesanne 3. Näidake, et funktsioon $1/(2t)$ ei ole integreeruv üheski lahtises vahemikus, mis sisaldab nullpunkti, kuid iga $\varphi \in \mathcal{D}$ korral eksisteerib integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)dt}{2t}$$

Cauchy peaväärtus ja see on lõplik.

5.3 Tehted üldistatud funktsioonidega

Kuna üldistatud funktsioonid on pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumis $\mathcal{D}$, siis kõigi üldistatud funktsioonide hulk on lineaarne ruum, ruumi $\mathcal{D}$ kaasruum, st $\mathcal{D}^*$. Seega on loomulikul viisil defineeritud üldistatud funktsioonide liitmine ja korrutamine arvukorpuse R elemendiga..

Definitsioon 1. Öeldakse, et üldistatud funktsioonide jada $\{T_n\}$, kus $T_n \in \mathcal{D}^*$, koondub üldistatud funktsiooniks $T \in \mathcal{D}^*$, kui

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}).$$

Seega üldistatud funktsioonide jada koonduvus on punktiviisi koonduvus.

Definitsioon 2. Kui $\gamma(t)$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv funktsioon, siis funktsiooni γ ja üldistatud funktsiooni T korrutise defineerime seosega

$$(\gamma T)(\varphi) \overset{\text{def.}}{=} T(\gamma\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}).$$

Definitsioonis 2 esinev suurus $T(\gamma\varphi)$ on määratud, kuna

$$(\varphi \in \mathcal{D}) \Rightarrow (\gamma\varphi \in \mathcal{D}).$$

Märgime, et mõistlikul viisil ei õnnestu defineerida kahe üldistatud funktsiooni korrutist.

Tava mõttes diferentseeruva funktsiooni $g(t)$ korral saame regulaarse üldistatud funktsiooni T_g, kus

$$T_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt.$$

Üldistatud funktsiooni T_g tuletise $\frac{dT_g}{dt}$ defineerime loomulikul viisil

$$\frac{dT_g}{dt}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)dt.$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)dt &= \left[\begin{array}{ccc} du = g'(t)dt & \vdots & u = g(t) \\ v = \varphi(t) & \vdots & dv = \varphi'(t)dt \end{array}\right] = \\
&= (g(t)\varphi(t))|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi'(t)dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(-\varphi'(t)\right)dt,
\end{aligned}$$

siis

$$\frac{dT_g}{dt}(\varphi) = -T_g(\varphi').$$

Definitsioon 3. Üldistatud funktsiooni T tuletis $\dfrac{dT}{dt}$ defineeritakse seosega

$$\frac{dT}{dt}(\varphi) = -T(\varphi') \quad (\forall\varphi \in \mathcal{D}).$$

Ülesanne 1. Tõestage, et üldistatud funktsioon on lõpmata arv kordi diferentseeruv, kusjuures iga $k \in N$ korral

$$\frac{d^kT}{dt^k}(\varphi) = (-1)^k T(\varphi^{(k)}) \quad (\forall\varphi \in \mathcal{D}).$$

Ülesanne 2. Tõestage, et üldistatud funktsioonide jada $\{T_n\}$, kus $T_n \in \mathcal{D}^*$, punktiviisi koonduvusest üldistatud funktsiooniks $T \in \mathcal{D}^*$ järeldub üldistatud funktsiooni jada $\left\{\dfrac{dT_n}{dt}\right\}$ punktiviisi koonduvus üldistatud funktsiooniks $\dfrac{dT}{dt}$.

Näide 1. Heaviside'i funktsioon

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \geq 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}$$

määrab ära üldistatud funktsiooni

$$H(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt \quad (\forall\varphi \in \mathcal{D}).$$

Uurime selle funktsiooni tuletist.

Lähtudes Definitsioonist 3 saame

$$\frac{d\,H}{d\,t}(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = -\varphi(t)|_0^{+\infty} = \varphi(0) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}),$$

st

$$\left(\frac{d\,H}{d\,t}(\varphi) = \delta\,(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D})\right) \Rightarrow \frac{d\,H}{d\,t} = \delta. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 3. Uurige üldistatud funktsiooni $\delta' = \dfrac{d\,\delta}{d\,t}$ (esimest järku Diraci impulssfunktsiooni).

Ülesanne 4. Uurige üldistatud funktsiooni $\delta^{(k)} = \dfrac{d^{\,k}\delta}{d\,t^k}$ (k-ndat järku Diraci impulssfunktsiooni).

Ülesanne 5. Avaldis Heaviside'i funktsioonidest $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\,(t - t_k)$ määrab ära üldistatud funktsiooni. Uurige selle üldistatud funktsiooni tuletist.

Näide 2. Rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n}$ summa $f(t)$ on 2π-perioodiline funktsioon, kusjuures lõigul $[-\pi, \pi]$ saame

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, \text{ kui } 0 < t \leq \pi, \\ \dfrac{\pi + t}{2}, \text{ kui } -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

Käsitleme funktsiooni f kui üldistatud funktsiooni. Selle funktsiooni esituseks kogu reaalteljel Heaviside'i funktsioonide abil on

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi - (t - 2k\pi)}{2}\,(H(t - 2k\pi) - H(t - 2\,(k+1)\,\pi)).$$

Leiame tuletise

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H(t - 2k\pi) - H(t - (2k+1)\,\pi)) + \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi - t + 2k\pi}{2}\,(\delta(t - 2k\pi) - \delta(t - 2\,(k+1)\,\pi)) = \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi - t + 2k\pi}{2}\delta(t - 2k\pi) - \\ &\quad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi - t + 2k\pi}{2}\delta(t - 2\,(k+1)\,\pi). \end{aligned}$$

Kui võtta viimases reas $k+1=m$, st $k=m-1$, siis saame

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi-t+2k\pi}{2}\delta(t-2k\pi)- \\ &\quad -\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\pi-t+2\,(m-1)\,\pi}{2}\delta(t-2m\pi) \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi-t+2k\pi}{2}\delta(t-2k\pi)- \\ &\quad -\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-\pi-t+2k\pi}{2}\delta(t-2k\pi)= \\ &= -\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi-t+2k\pi+\pi+t-2k\pi}{2}\delta(t-2k\pi)= \\ &= -\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k\pi). \end{aligned}$$

Seega $f'(t)$ on üldistatud funktsioon, mille rakendamisel suvalisele finiitsele funktsioonile $\varphi(x)$ saame vaid lõpliku arvu liidetavaid. Teisalt rea $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{n}$ liikmeti diferentseerimisel saame hajuva rea $\sum_{k=1}^{\infty}\cos nt$. Üldistatud funktsioonide mõttes see rida koondub üldistatud funktsiooniks

$$-1/2+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k\pi).$$

Lisame ühe tulemuse diferentsiaalvõrrandi lahendamisest üldistatud funktsioonide hulgal.

Lause 1. Võrrand $y'=f$ omab lahendit iga üldistatud funktsiooni $f\in\mathcal{D}^*$ korral.

5.4 Maatriksargumendiga funktsioonide lihtsamad arvutusvõtted

Olgu antud maatriks $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja kompleksmuutuja funktsioon

$$f(z), \quad f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

On palju võimalusi maatriksargumendiga funktsiooni $f(A)$ defineerimiseks, lähtudes kompleksmuutuja funktsioonist $f(z)$.
1° Lihtsaim neist võimalustest tundub olema muutuja "z" vahetu asendamine muutujaga "A".

Näide 1. Leiame funktsiooni $f(z) = z^2 + 3z - 7$ väärtuse kohal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Et

$$f(z) = z^2 + 3z - 7 \Rightarrow f(A) = A^2 + 3A - 7I,$$

siis

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 26 & 42 & 51 \\ 78 & 89 & 114 \\ 123 & 150 & 170 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Näide 2. Leiame $f(z) = (4 + 5z) \,/\, (3 - 8z)$ väärtuse kohal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Et

$$f(z) = \frac{4+5z}{3-8z} \Rightarrow f(A) = (4I + 5A)(3I - 8A)^{-1},$$

siis

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \begin{pmatrix} 9 & 10 & 15 \\ 20 & 29 & 30 \\ 35 & 40 & 49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -16 & -24 \\ -32 & -37 & -48 \\ -56 & -64 & -69 \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 10 & 15 \\ 20 & 29 & 30 \\ 35 & 40 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{173}{1503} & -\frac{16}{167} & \frac{40}{1503} \\ -\frac{160}{1503} & \frac{317}{67} & -\frac{176}{1503} \\ \frac{8}{1503} & -\frac{64}{501} & \frac{109}{1503} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{77}{1503} & -\frac{94}{167} & \frac{235}{1503} \\ -\frac{940}{1503} & \frac{113}{167} & -\frac{1034}{1503} \\ \frac{47}{1503} & -\frac{376}{501} & -\frac{299}{1503} \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

Ülesanne 1. Leidke $f(z) = (2 - 3z + 4z^2)\,/\,(3 - z + z^2)$ väärtus kohal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2° Lõpmata arv kordi diferentseeruvate funktsioonide korral on võimalus rakendada funktsiooni arendust Taylori (Maclaurini) ritta:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \to e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \to \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}\,,$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \to \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} \to \ln(I+A) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k}.$$

Näide 3. Leiame e^A, kui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{N})\,,$$

siis

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Leidke e^A, $\sin A$, $\cos A$ ja $\ln(I + A)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

5.5 Cauchy integraalvalemi analoogi rakendamine

Paljude probleemide lahendamisel ei ole eelnev lähenemine otstarbekas. Vaatleme erijuhtu funktsiooni väärtuse arvutamisest juhul kui argumendiks on pidev lineaarne operaator. Antud rakendus on seotud pideva lineaarse operaatori *resolvendi* mõistega, millest täpsemalt leiate monograafiast [2], lk 605-617 .

Meenutame mõningaid mõisteid kompleksmuutuja funktsioonide teooriast, millel baseerub järgnev esitus.

Lause 1 (*Cauchy-Riemanni* tingimused). Tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

on tarvilikud ja piisavad funktsiooni $w = f(z) = u + iv$ tuletise $f'(z)$ olemasoluks punktis $z = x + iy$.

Definitsioon 1. Kui funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv punktis z ja selle punkti mingis ümbruses, siis seda funktsiooni nimetatakse *analüütiliseks* punktis z. Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline piirkonna $\mathfrak{D}$ igas punktis, siis seda funktsiooni nimetatakse analüütiliseks piirkonnas $\mathfrak{D}$.

Definitsioon 2. Kompleksmuutuja funktsiooni $f(z)$ integraaliks üle joone Γ nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k) \, \Delta z_k = \int_{\Gamma} f(z) dz,$$

kusjuures joon Γ on punktidega z_k $(k = 0; 1; \dots; n)$ jaotatud n osakaareks ja k-ndal osakaarel on valitud punkt ς_k.

Lausest 1 ja Definitsioonist 1 järeldub järgmine väide.

Lause 2 (*Cauchy teoreem*). Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas $\mathfrak{D}$, siis

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

iga piirkonda $\mathfrak{D}$ kuuluva kinnise joone Γ korral.

Lause 3 (*Cauchy valem*). Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas $\mathfrak{D}$ ja kinnine joon selles piirkonnas, siis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta \tag{6.2.1}$$

iga z korral, mis kuulub joone Γ poolt hõlmatavasse piirkonda.

Definitsioon 3. Punkti, milles funktsioon $f(z)$ ei ole analüütiline, nimetatakse selle funktsiooni *iseäraseks punktiks.*

Definitsioon 4. Kui c on funktsiooni $f(z)$ iseärane punkt ja $f(z)$ on analüütiline rõngas $0 < |z - c| < r$, siis $f(z)$ on selles rõngas ühesel viisil arendatav (*Laurent*'*i*) ritta kujul

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - c)^k .$$

Definitsioon 5. Kui funktsiooni $f(z)$ arenduses Laurent'i ritta rõngas $0 < |z - c| < r$ on vaid lõplik arv $z - c$ negatiivseid astmeid, siis punkti c nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *pooluseks* ja maksimaalset negatiivse astme astmenäitajat nimetatakse selle *pooluse järguks.*

Definitsioon 6. Kui punkt c on funktsiooni $f(z)$ iseärane punkt ja $f(z)$ on analüütiline rõngas $0 < |z - c| < r$ ning $0 < \rho < r$, siis integraali

$$\oint_{|z-c|=\rho} f(z)dz$$

nimetatakse funktsiooni $f(z)$ resiidiks punktis c ja tähistatakse $\operatorname*{res}_{z=c} f(z)$.

Lause 4. Kui c on funktsiooni $f(z)$ esimest järku poolus, siis

$$\operatorname*{res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \to c} (z - c)\, f(z). \tag{6.2.2}$$

Lause 5. Kui c on funktsiooni $f(z)$ esimest järku poolus ja $f(z)$ on esitatav kujul

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

kusjuures $f_1(c) \neq 0$ ja $f_2(c) = 0$, siis

$$\operatorname*{res}_{z=c} f(z) = \frac{f_1(c)}{f_2'(c)}. \tag{6.2.3}$$

Lause 6. Kui c on funktsiooni $f(z)$ n-ndat järku poolus, siis

$$\operatorname*{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to c} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-c)^n f(z) \right]. \tag{6.2.4}$$

Lause 7. Kui funktsioon on analüütiline joonega Γ piiratud tõkestatud piirkonnas $\mathfrak{D}$ ja rajajoone punktides, välja arvatud lõplik arv iseäraseid punkte $z_1, \ldots, z_n$ selles piirkonnas, siis

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{6.2.5}$$

Lause 8. Kui $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ja $f(z)$ on analüütiline lahtises piirkonnas $\mathfrak{D}$ ning Γ on kinnine lihtne joon (ei lõika iseennast) piirkonnas $\mathfrak{D}$ ja maatriksi A spekter $\lambda(A)$ sisaldub joone Γ poolt hõlmatavas piirkonnas $\mathfrak{D}_{\Gamma}$, siis

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz\,, \tag{6.2.6}$$

kusjuures integraali rakendatakse maatriksile elementide kaupa.

Näide 1. Olgu $f(z) = e^z$ ja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Leiame e^A.

Et

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases},$$

siis Lause 8 tingimusi rahuldavaks jooneks Γ sobib ringjoon $|z| = 2$. Valemi (6.2.6) rakendamiseks leiame esiteks

$$zI - A = z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix}$$

ja

$$
\begin{aligned}
(zI-A)^{-1} &= \frac{1}{\det(zI-A)}\begin{pmatrix} z-1 & 1\\ -1 & z-1\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} & \dfrac{1}{z^2-2z+2}\\ -\dfrac{1}{z^2-2z+2} & \dfrac{z-1}{z^2-2z+2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Valemi (6.2.6) abil saame

$$
\begin{aligned}
e^A &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} e^z \begin{pmatrix} \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} & \dfrac{1}{z^2-2z+2}\\ -\dfrac{1}{z^2-2z+2} & \dfrac{z-1}{z^2-2z+2}\end{pmatrix} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \begin{pmatrix} \dfrac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} & \dfrac{e^z}{z^2-2z+2}\\ -\dfrac{e^z}{z^2-2z+2} & \dfrac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2}\end{pmatrix} dz = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\dfrac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2} & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^2-2z+2}\\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^2-2z+2} & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\dfrac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Kuna

$$
\begin{aligned}
&\oint_{|z|=2}\frac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2} \overset{(6.2.5)}{=} \\
&= 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1+i}\frac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} + \operatorname*{res}_{z=1-i}\frac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2}\right) \overset{(6.2.3)}{=} \\
&= 2\pi i\left(\left.\frac{(z-1)\,e^z}{2z-2}\right|_{z=1+i} + \left.\frac{(z-1)\,e^z}{2z-2}\right|_{z=1-i}\right) = \\
&= 2\pi i\left(\frac{e^{1+i}+e^{1-i}}{2}\right) = 2\pi i\, e\frac{e^i+e^{-i}}{2} = 2\pi i\, e\cos 1
\end{aligned}
$$

ja

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-2z+2} \overset{(6.2.5)}{=} \\
=\ & 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=1+i} \frac{e^z}{z^2-2z+2} + \operatorname*{res}_{z=1-i} \frac{e^z}{z^2-2z+2} \right) \overset{(6.2.3)}{=} \\
=\ & 2\pi i \left(\left.\frac{e^z}{2z-2}\right|_{z=1+i} + \left.\frac{e^z}{2z-2}\right|_{z=1-i} \right) = \\
=\ & 2\pi i \left(\frac{e^{1+i}-e^{1-i}}{2i} \right) = 2\pi i\, e \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 2\pi i\, e \sin 1,
\end{aligned}$$

siis

$$e^A = e \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

Ülesanne 1. Leidke Lause 8 abil $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 2. Leidke Lause 8 abil e^A, $\cos A$, $\sin A$ ja $\ln(I+A)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} .1 & .1 \\ -.1 & .2 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 3. Leidke Lause 8 abil e^A, $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6 Maatriksi lahutuse rakendamine

Oletame, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ on maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused ja neile vastavad omavektorid $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ on lineaarselt sõltumatud. Moodustame $n \times n$ ruutmaatriksi X, valides esimeseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_1$, teiseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, n-ndaks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_n$, st

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}. \tag{6.3.1}$$

Tähistame

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{array} \right). \tag{6.3.2}$$

Lause 1. Kui maatriksil $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ on n lineaarselt sõltumatut omavektorit $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, siis maatriks A on esitatav kujul

$$A = X\Lambda X^{-1}, \tag{6.3.3}$$

kus maatriksid X ja Λ on määratud vastavalt seostega (6.3.1) ja (6.3.2) .

Tõestuseks piisab näidata, et

$$AX \;=\; X\Lambda.$$

Et $A\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k \;\; (1 \le k \le n)$, siis

$$AX = A\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} A\mathbf{x}_1 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{array}\right].$$

ja

$$X\Lambda = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{array}\right].$$

Järelikult kehtib seos (6.3.3) paika ja ka seos

$$\Lambda \;=\; X^{-1}AX. \qquad \Box$$

Lause 2. Kui $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on maatriksi A omaväärtused ja neile vastavad omavektorid $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ on lineaarselt sõltumatud ning $f(z)$ on analüütiline lahtisel hulgal, mis sisaldab maatriksi A spektrit, siis

$$f(A) = X\,\mathrm{diag}(\,f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))\,X^{-1}\,, \tag{6.3.4}$$

kus maatriks X on määratud seosega (6.3.1).

Tõestus. Et

$$A^k = \left(X\Lambda X^{-1}\right)^k = X\Lambda X^{-1}X\Lambda X^{-1}\cdots X\Lambda X^{-1} = X\Lambda^k X^{-1},$$

siis

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}A^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(X\Lambda X^{-1}\right)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}X\Lambda^k X^{-1} = X\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Lambda^k\right)X^{-1} = \\ &= X\,f\left(\Lambda\right)\,X^{-1}. \end{aligned}$$

Kuna (miks?)

$$(zI-\Lambda)^{-1} = \operatorname{diag}\left((z-\lambda_1)^{-1}, (z-\lambda_2)^{-1}, \ldots, (z-\lambda_2)^{-1}\right),$$

siis kasutades valemit (6.2.6) saame

$$\begin{aligned} f\left(\Lambda\right) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)(zI-\Lambda)^{-1}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\operatorname{diag}\left((z-\lambda_1)^{-1}, \ldots, (z-\lambda_n)^{-1}\right)dz = \\ &= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda_1}dz, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda_n}dz\right) = \\ &= \operatorname{diag}\left(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\right). \end{aligned}$$

Seega

$$f(A) = X\,f\left(\Lambda\right)\,X^{-1} = X\operatorname{diag}\left(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\right)\,X^{-1}$$

ja kehtib seos (6.3.4).

Järeldus 1. Kui $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on maatriksi A omaväärtused ja neile vastavad omavektorid $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ on lineaarselt sõltumatud, siis

$$\begin{gathered} \exp A = X\operatorname{diag}(\exp\lambda_1, \ldots, \exp\lambda_n)\,X^{-1} = X\,(\exp\Lambda)\,X^{-1}, \\ \cos A = X\operatorname{diag}(\cos\lambda_1, \ldots, \cos\lambda_n)\,X^{-1} = X\,(\cos\Lambda\,)\,X^{-1}, \\ \sin A = X\operatorname{diag}(\sin\lambda_1, \ldots, \sin\lambda_n)\,X^{-1} = X\,(\sin\Lambda\,)\,X^{-1}, \end{gathered}$$

kusjuures

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \exp\Lambda = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp\lambda_n \end{bmatrix},$$

$$\cos\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\lambda_n \end{bmatrix}, \quad \sin\Lambda = \begin{bmatrix} \sin\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Näide 1. Olgu $f(z) = e^z$ ja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Leiame e^A.

Lahendame antud maatriksile vastava karakteristliku võrrandi:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1+i, \\ \lambda_2 = 1-i \end{cases}$$

Leiame vastavad omavektorid:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1+i \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1-(1+i) & 1 & 0 \\ -1 & 1-(1+i) & 0 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right) \overset{II+I\cdot i}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow -i\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi_1 = 1 \wedge \xi_2 = i \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 1-i \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1-(1-i) & 1 & 0 \\ -1 & 1-(1-i) & 0 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right) \overset{II-I\cdot i}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow i\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi_1 = 1 \wedge \xi_2 = -i \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seega seose (6.3.1) põhjal saame

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

, inverse: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$ Et

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ja

$$\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}\right) = \begin{pmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{pmatrix},$$

siis valemi (6.3.4) põhjal saame

$$\begin{aligned} e^A &= X \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}\right) X^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{1+i} + \frac{1}{2}e^{1-i} & -\frac{1}{2}ie^{1+i} + \frac{1}{2}ie^{1-i} \\ \frac{1}{2}ie^{1+i} - \frac{1}{2}ie^{1-i} & \frac{1}{2}e^{1+i} + \frac{1}{2}e^{1-i} \end{pmatrix} = \\ &= e \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Näide 2. Leiame $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

siis

$$(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = 0,$$

mille lahendeiks on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 3$. Leiame omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid. Kuna $\lambda_1 = 0$ korral

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1-0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1-0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1-0 & \vdots & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right),$$

siis sõltumatuid võrrandeid jääb üks

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

ja süsteemi vabadusastmete arv on 2 ning süsteemi üldlahendiks on

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q-p \\ q \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus p ja q suvalised reaalarvud. Järelikult, omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid $\mathbf{x}$ moodustavad ruumi $\mathbf{R}^3$ kahemõõtmelise alamruumi, mille baasivektoreiks võime valida vektorid $\mathbf{x}_1 = [-1 \;\; 0 \;\; 1]^T$ ja vektorid $\mathbf{x}_2 = [-1 \;\; 1 \;\; 0]^T$. Omaväärtuse $\lambda_3 = 3$ korral

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1-3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & \vdots & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right).$$

Selle süsteemi vabadusastmete arv on 1 omaväärtusele $\lambda_3 = 3$ vastavad omavektorid avalduvad kujul

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja moodustavad ruumis $\mathbf{R}^3$ ühemõõtmelise alamruumi, baasivektoriga $\mathbf{x}_3 = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$. Vastavalt seosele (6.3.1) saame

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et (kontrollige)

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

siis valemi (6.3.4) põhjal saame

$$\begin{aligned} f(A) &= X \operatorname{diag}(\sin 0, \sin 0\,, \sin 3)\, X^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sin 3 & \sin 3 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 3 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 3 & \sin 3 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Ülesanne 1. Leidke Lause 2 abil e^A, $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 2. Leidke Lause 2 abil e^A, $\cos A$, $\sin A$ ja $\ln(I + A)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 3. Leidke Lause 2 abil e^A, $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.7 Sylvesteri teoreemi rakendamine

Lause 1 (*Cayley-Hamiltoni* teoreem vt [7] , lk 76-78). Kui $A \in C^{n\times n}$ ja

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

on maatriksi A karakteristlik polünoom, siis $p(A) = \theta$, st maatriks A rahuldab oma karakteristlikku võrrandit.

Lause 2 (*Sylvesteri* teoreem**).** Kui maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kõik omaväärtused λ_k on erinevad, siis

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\frac{\Pi_{i\neq k}(A - \lambda_i I)}{\Pi_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)} \tag{6.4.1}$$

või

$$f(A) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k A^{k-1}, \tag{6.4.2}$$

kus Δ_k $(k = 1; 2; \ldots; n)$ on determinant, mis on saadud *Vandermonde'i* determinandist

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

asendades k-nda reavektori

$$(\lambda_1^{k-1}\, \lambda_2^{k-1}\, \ldots\, \lambda_1^{k-1})$$

vektoriga

$$(f(\lambda_1)\ \ f(\lambda_2)\ \ \ldots\ \ f(\lambda_n)).$$

Näide 1. Leida $\exp A$, kui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Leiame kõigepealt maatriksi A omaväärtused

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

ja siis kasutame valemit (6.4.1)

$$\begin{aligned}\exp A &= \frac{A-(1-i)I}{1+i-1+i}e^{1+i}+\frac{A-(1+i)I}{1-i-1-i}e^{1-i}= \\ &= \frac{e^{1+i}}{2i}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i\end{pmatrix}+\frac{e^{1-i}}{-2i}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i\end{pmatrix}=\end{aligned}$$

$$= e\cdot\begin{pmatrix} (e^i+e^{-i}))/2 & (e^i-e^{-i}))/2i \\ -(e^i-e^{-i}))/2i & (e^i+e^{-i}))/2\end{pmatrix} = e\cdot\begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}$$

ning kasutates valemit (6.4.2)

$$\begin{aligned}\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix} &= \left(1/\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}\right)\left[I\det\begin{pmatrix} e^{1+i} & e^{1-i} \\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}+\right. \\ &\left.+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{1+i} & e^{1-i}\end{pmatrix}\right]=\end{aligned}$$

$$=\frac{e}{-2i}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}[(1-i)e^i-(1+i)e^{-i}]+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}[e^{-i}-e^i]\right\}=$$

$$=\frac{e}{-2i}\begin{pmatrix} -ie^i-ie^{-i} & e^{-i}-e^i \\ -e^{-i}+e^i & -ie^i-ie^{-i}\end{pmatrix}=e\cdot\begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

6 Ortogonaalread

6.1 Skalaarkorrutis

Definitsioon 1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ üle korpuse $\mathbf{K}$ nimetatakse *skalaarkorrutamisega ruumiks*, kui igale elemendipaarile $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ on vastavusse seatud kindel, vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ *skalaarkorrutiseks* nimetatav, arv $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \mathbf{K}$ nii, et on täidetud tingimused (skalaarkorrutise aksioomid):

1. $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$; $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \overline{\langle\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}$, kus $\overline{\langle\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}$ on suuruse $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ kaaskompleks;
3. $\langle\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle\mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle$ (aditiivsus esimese teguri suhtes);
4. $\langle\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ (homogeensus esimese teguri suhtes).

Kui $\mathbf{X}$ on vektorruum üle $\mathbf{R}$, siis definitsiooni põhjal $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{R}$ ja tingimus 1 omandab kuju $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, st sel juhul on skalaarkorrutis kommutatiivne.

Näide 1. Defineerime ruumis $\mathbf{C}^n$ vektorite

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T \wedge \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T$$

skalaarkorrutise valemiga

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} \ .$$

Kontrollime tingimuste 1-4 täidetust:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \geq 0, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 0 \ \Rightarrow \ \xi_k = 0 \quad (k = 1 : n) \ \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}; \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} \eta_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \eta_k \overline{\xi_k}} = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}; \\
\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k) \overline{\varsigma_k} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\varsigma_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \overline{\varsigma_k} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle; \\
\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \lambda \xi_k \overline{\eta_k} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Näide 2. Vaatleme kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ (Lebesgue'i mõttes) integreeruva ruuduga funktsioonide vektorruumi $\mathbf{L}_2[\alpha, \beta]$. Defineerime selliste funktsioonide skalaarkorrutise seosega

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}(t) \overline{\mathbf{y}(t)} dt.$$

Veenduge, et on täidetud skalaarkorrutamise aksioomid 1-4.

Ülesanne 1. Näidake, et skalaarkorrutamisel $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ on järgmised omadused:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ (aditiivsus teise teguri suhtes);

2. $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ (kaashomogeensus teise teguri suhtes);

3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{y}\rangle = 0 \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$;

4. $\langle \lambda\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}\rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

Lause 1 (Cauchy- Schwartzi võrratus). Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ mistahes vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ korral kehtib võrratus

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}.$$

Tõestus. Kui $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, siis skalaarkorrutise definitsiooni tingimuse 1 põhjal peab võrratus paika. Vaatleme järgnevalt juhtu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \neq 0$. Defineerime abifunktsiooni

$$\varphi(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}\rangle.$$

Kuna $\lambda \in \mathbf{R}$ korral

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}\rangle + \langle \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}, \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{y}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \lambda\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \lambda^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \\
&= \lambda^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + 2\lambda |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^4 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

Viimane võrratus on samaväärne võrratusega $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$ ja see Cauchy-Schwartzi võrratusega. Cauchy-Schwartzi võrratus võimaldab defineerida nurga kahe vektori vahel skalaarkorrutisega vektorruumis. □

Definitsioon 2. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ mistahes vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ vaheline nurk määratakse seosega

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle / (\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}).$$

Ülesanne 2. Näidake, et iga kahe komplekse vektori $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ korral kehtib võrdus

$$\langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}}\rangle = \overline{\langle \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{y}\rangle}.$$

Ülesanne 3. Kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ määratud reaalsete kordajatega ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n[\alpha, \beta]$ on skalaarkorrutis defineeritud vale-
miga

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \int_\alpha^\beta \mathbf{x}(t) y(t) dt.$$

Leidke polünoomide $\mathbf{x} = t - 1$ ja $\mathbf{y} = t^2 + 1$ vaheline nurk.

Ülesanne 4. Näidake, et skalaarkorrutisega ruum $\mathbf{X}$ on normeeritud ruum normiga

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Lause 2. Skalaarkorrutisega normeeritud ruumis kehtib *rööpküliku reegel*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Tõestus. Vahetu kontrolliga saame, et

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2). \qquad \square$$

6.2 Ortogonaalsed vektorid

Definitsioon 1. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektoreid $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ nimetatakse *ortogonaalseteks*, kui $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ja tähistatakse $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorit $\mathbf{x}$ nimetatakse *ortogonaalseks hulgaga* $Y \subset \mathbf{X}$, kui $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in Y$.

Ülesanne 1. Leidke kõik vektorid, mis on ortogonaalsed nii vektoriga

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

kui ka vektoriga

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Definitsioon 2. Öeldakse, et vektorruumi $\mathbf{X}$ *hulgad* Y ja Z *on ortogonaalsed,* kui $\mathbf{y} \perp \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{y} \in Y \ \wedge \forall \mathbf{z} \in Z$.

Ülesanne 2. Näidake, et jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektoreist $\mathbf{x}^{(k)}$ on Cauchy jada, kui vastavalt igale etteantud arvule $\epsilon > 0$ leidub naturaalarv n_0 nii, et mistahes $m \in N$ ja $n > n_0$ korral

$$||\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)}, \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)} \rangle} < \varepsilon.$$

Et skalaarkorrutamisega vektorruum on normeeritud ruum, siis skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ on täielik, kui temas iga Cauchy jada on koonduv selle ruumi $\mathbf{X}$ punktiks.

Definitsioon 3. *Hilberti ruumiks* $\mathbf{H}$ nimetatakse komplekset skalaarkorrutamisega vektorruumi, mis osutub normi $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ järgi koondumise mõttes täielikuks.

Ülesanne 3. Näidake, et ruum $\mathbf{C}^n$ skalaarkorrutamisega

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k$$

on Hilberti ruum.

Ülesanne 4. Näidake, et lõigul $[\alpha, \beta]$ integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $\mathbf{L}_2[\alpha, \beta]$, skalaarkorrutisega

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \overline{y(t)} dt,$$

on Hilberti ruum.

Lause 1. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite ortogonaalsusel on järgmised omadused (1-4):

1. $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$;
3. $\mathbf{x} \perp \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\} \Rightarrow \mathbf{x} \perp (\mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k)$;
4. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \perp \lambda \mathbf{y} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$;

ja Hilberti ruumi vektorite ortogonaalsusel on täiendavalt omadus:

5. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}_n \ \ (n = 1; 2; 3; \ldots) \ \wedge \ \mathbf{y}_n \to \mathbf{y} \ \ \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Tõestame need väited:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{x} & \perp & \mathbf{x} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};\\
\mathbf{x} & \perp & \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x};\\
\mathbf{x} & \perp & \{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k\} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x} \perp \mathbf{y}_k \Leftrightarrow\\
 & \Leftrightarrow & \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_1\rangle = 0 \wedge \ldots \wedge \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_k\rangle = 0 \Rightarrow\\
 & \Rightarrow & \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_1\rangle + \ldots + \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k\rangle = 0 \Leftrightarrow\\
 & \Leftrightarrow & \mathbf{x} \perp (\mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k);\\
\mathbf{x} & \perp & \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\lambda}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0 \ \ \forall\lambda \in \mathbf{K} \Leftrightarrow\\
 & \Leftrightarrow & \langle \mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = 0 \quad \forall\lambda \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \lambda\mathbf{y};\\
\mathbf{x}\perp\mathbf{y}_n\,\forall n & \in & \mathbf{N} \ \wedge\ \mathbf{y}_n \to \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_n\rangle = 0 \wedge\ \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \to 0 \Rightarrow\\
 & \Rightarrow & \langle \mathbf{x},\mathbf{y}_n\rangle = 0 \wedge |\langle \mathbf{x},\mathbf{y}_n\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| = |\langle \mathbf{x},\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\rangle| \le\\
 & \le & \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \to 0 \Rightarrow \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}\perp\mathbf{y}. \qquad \square
\end{array}$$

Definitsioon 4. Hulga $Y \subset \mathbf{X}$ *ortogonaalseks täiendiks* nimetatakse hulka $Y^{\perp}$ ruumi $\mathbf{X}$ kõigist vektoritest, mis on ortognaalsed hulgaga Y, s.t.

$$Y^{\perp} = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} \in \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in Y)\}.$$

Ülesanne 5. Olgu $U = span\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right\} \subset \mathbf{R}^3$. Leidke hulga U ortogonaalne täiend.

Lause 2. Kui $\mathbf{X}$ on skalaarkorrutamisega vektorruum, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $Y \subset \mathbf{X}$ ja $\mathbf{x} \perp Y$, siis $\mathbf{x} \perp \operatorname{span} Y$. Kui lisaks $\mathbf{X}$ on täielik, st on Hilberti ruum, siis $\mathbf{x} \perp \overline{\operatorname{span} Y}$.

Tõestus. Lause 1 väidete 3 ja 4 põhjal $\mathbf{x} \perp \operatorname{span} Y$. Kui $\mathbf{y} \in \overline{\operatorname{span} Y}$, s.t. $\exists \mathbf{y}_n \in \operatorname{span} Y$, selline, et $\mathbf{y}_n \to y$, siis arvestades ortogonaalsust $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}_n$ ja Lause 1 väidet 5, saame $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, s.t. $\mathbf{x} \perp \overline{\operatorname{span} Y}$. $\square$

Ülesanne 6. Näidake, et hulga $Y \subset \mathbf{X}$ ortogonaalne täiend $Y^{\perp}$ on ruumi $\mathbf{X}$ alamruum ja hulga $Y \subset \mathbf{H}$ ortogonaalne täiend $Y^{\perp}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, st $Y^{\perp}$ on ruumi $\mathbf{H}$ alamruum, mis sisaldab kõik oma rajapunktid.

Ülesanne 7. Näidake, et kui Y on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, siis iga $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ esitub ühesel viisil summana $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{z} \in Y^{\perp}$.

Ülesanne 8 (projektsioonide teoreem)**.** Näidake, et kui $\mathbf{Y}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, siis ruum $\mathbf{H}$ avaldub kinniste alamruumide $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{L}^{\perp}$ otsesummana $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^{\perp}$ ning $(\mathbf{L}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{L}$.

Definitsioon 5. Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ vektori $\mathbf{x}$ *kaugus alamruumist* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{H}$ defineeritakse valemiga

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

Lause 3. Kui $\mathbf{Y}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum ja $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, siis leidub selline üheselt määratud $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, et $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$.

Definitsioon 6. Lauses 3 esinevat vektorit $\mathbf{y}$ nimetatakse *vektori* $\mathbf{x}$ *ristprojektsiooniks alamruumile* $\mathbf{Y}$.

Definitsioon 7. *Vektorite süsteemi* $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ nimetatakse *ortogonaalseks*, kui $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \|\mathbf{x}_i\|^2 \delta_{ij}$ kus δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Vektorite süsteemi $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ nimetatakse *ortonormeerituks*, kui $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Näide 1. Vektorite süsteem $\{\mathbf{e}_k\}$ (k = 1 : n), kus

$$\mathbf{e}_k = [\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{k-1\, nulli}; 1; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n-k\ nulli}]^T ,$$

on ruumis $\mathbf{C}^n$ ortonormeeritud.

Näide 2. Vektorite süsteem

$$\{1/\sqrt{2\pi},\ (\cos t)/\sqrt{\pi},\ (\sin t)/\sqrt{\pi},\ (\cos 2t)/\sqrt{\pi},\ (\sin 2t)/\sqrt{\pi},\ \ldots\}$$

on ortonormeeritud süsteem ruumis $\mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$.

Näide 3. Vektorite süsteem $\{\exp(i2\pi kt)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ on ortonormeeritud süsteem ruumis $\mathbf{L}_2[0; 1]$. Tõesti

$$\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = \int_0^1 \exp(i2\pi kt)\overline{\exp(i2\pi jt)}dt = \int_0^1 \exp(i2\pi(k - j)t)dt =$$

$$= \begin{cases} (\exp(i2\pi(k - j)) - 1)/(i2\pi(k - j)) & = 0, \text{ kui } k \neq j; \\ 1 & , \quad \text{kui } k = j. \end{cases}$$

Lause 4. (Gram-Schmidti ortogonaliseerimisteoreem). Olgu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem skalaarkorrutisega vektorruumis $\mathbf{H}$, siis leidub selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, et $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$.

Tõestame selle väite matemaatilise induktsiooni meetodil. Juhul $k = 1$ defineerime $\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1/\|\mathbf{x}_1\|$ ja tõesti, $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1\}$. Induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Eeldame, et lause väide peab paika $k = i-1$ korral, s.t. leidub selline selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}\}$, et $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}\}$. Vaatleme vektorit

$$\mathbf{y}_i = \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\varepsilon_{i-1} + \mathbf{x}_i \ , \ \ \lambda_j \in \mathbf{K}.$$

Kordajad λ_ν (ν =1: i-1) valime nii, et $\mathbf{y}_i \perp \varepsilon_\nu$ (ν =1: i-1), st $\langle \mathbf{y}_i, \varepsilon_\nu \rangle = 0$. Saame $i-1$ tingimust:
$\lambda_\nu \langle \varepsilon_\nu, \varepsilon_\nu \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_\nu \rangle = 0$, ehk $\lambda_\nu = -\langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_\nu \rangle$ (ν =1: i-1). Seega,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \ldots - \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_{i-1} \rangle \varepsilon_{i-1}.$$

Valime $\varepsilon_i = \mathbf{y}_i / \|\mathbf{y}_i\|$. Kuna

$$\varepsilon_\nu \in \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}\} \, (\nu = 1\text{: i-1}),$$

siis vektorite $\mathbf{y}_i$ ja ε_i konstruktsiooni põhjal $\varepsilon_i \in \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}$. Seega

$$\operatorname{span}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\} \subset \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}.$$

Vektori $\mathbf{y}_i$ esitusest järeldub, et $\mathbf{x}_i$ on vektorite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$ lineaarne kombinatsioon. Järelikult,

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\} \subset \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\}.$$

Seega

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\}. \qquad \square$$

Näide 4. On antud ruumi $\mathbf{R}^4$ vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, kus

$$\mathbf{x}_1 = [1;0;1;0]^T, \ \mathbf{x}_2 = [1;1;1;0]^T, \ \mathbf{x}_3 = [0;1;0;1]^T.$$

Leiame sellise ortonormeeritud süsteemi $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, et

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Lause 1.6.8 tõestuses esitatud ortogonaliseerimisprotsessi rakendamiseks, esiteks, kontrollime, kas süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu (võib ka mitte kontrollida, see selgub ka ortogonaliseerimise käigus):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{II-I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{III-II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu. Leiame vektori

$$\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\| = [1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T.$$

Vektor $\mathbf{y}_2$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = [1; 1; 1; 0]^T - \sqrt{2}[1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T = [0; 1; 0; 0]^T.$$

Kuna $\|\mathbf{y}_2\| = 1$, siis $\varepsilon_2 = \mathbf{y}_2 / \|\mathbf{y}_2\| = [0; 1; 0; 0]^T$. Vektor $\mathbf{y}_3$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= [0; 1; 0; 1]^T - 0 \cdot [1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T - 1 \cdot [0; 1; 0; 0]^T = [0; 0; 0; 1]^T.$$

Seega,

$$\varepsilon_3 = \mathbf{y}_3 / \|\mathbf{y}_3\| = [0; 0; 0; 1]^T. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. On antud ruumi $\mathbf{L}_2[-1; 1]$ lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, kus $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$ ja $\mathbf{x}_3 = t^2$. Leida selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, et

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Veenduda, et süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu. Leiame vektori

$$\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\| = 1/\sqrt{2}.$$

Vektor $\mathbf{y}_2$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = t - \left(\int_{-1}^{1} t \cdot \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} dt\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = t - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t.$$

Seega,

$$\varepsilon_2 = \mathbf{y}_2 / \|\mathbf{y}_2\| = t / \sqrt{\int_{-1}^{1} t \cdot \bar{t} dt} = t / \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} t.$$

Vektor $\mathbf{y}_3$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= t^2 - \left(\int_{-1}^{1} t^2 \cdot \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} dt\right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} t^2 \overline{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right)} dt\right) \sqrt{\frac{3}{2}} t =$$

$$= t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 0 = t^2 - \frac{1}{3}\ .$$

Järelikult,

$$\varepsilon_3 = \mathbf{y}_3 / \|\mathbf{y}_3\| = (t^2 - \frac{1}{3}) / \sqrt{\int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3}) \overline{(t^2 - \frac{1}{3})} dt} =$$

$$= (t^2 - \frac{1}{3}) / \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (t^2 - \frac{1}{3}).$$

Funktsioonid $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ja ε_3 on normeeritud Legendre'i polünoomid lõigul $[-1; 1]$. $\diamondsuit$

Ülesanne 9. Näidake, et paarikaupa ortogonaalsete vektorite süsteem $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on lineaarselt sõltumatu.

6.3 Fourier' read

Olgu Hilberti ruumis H antud loenduv ortonormeeritud süsteem $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$.

Definitsioon 1. Rida kujul $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kus $c_k \in \mathbf{K}$, nimetatakse *ortogonaalreaks* ortonormeeritud süsteemi $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ järgi.

Definitsioon 2. Elemendi $x \in H$ *Fourier' kordajaks* süsteemi $\{x_k\}$ järgi nimetatakse arve

$$c_k = \langle x, x_k \rangle \ \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.3.1}$$

ja rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kus kordajad c_k on leitud valemi (7.3.1) abil, elemendi $x \in H$ *Fourier' reaks* süsteemi $\{x_k\}$ järgi.

Lause 1. Kui S_n on Fourier' rea (7.3.1) osasumma, siis $x - S_n \perp S_n$ ja

$$\|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|x\|^2 . \tag{7.3.2}$$

Tõestus. Kuna S_n on elementide x_k lineaarne kombinatsioon, siis ortogonaalsuseks $x - S_n \perp S_n$ piisab näidata, et

$$x - S_n \perp x_k \quad (k = 1; \ldots ; n) .$$

Et

$$\begin{aligned} \langle x - S_n, x_k \rangle &= \langle x, x_k \rangle - \langle S_n, x_k \rangle = c_k - \left\langle \sum_{m=1}^{n} c_m x_m, x_k \right\rangle = \\ &= c_k - \sum_{m=1}^{n} c_m \langle x_m, x_k \rangle = c_k - c_k = 0, \end{aligned}$$

siis $x - S_n \perp x_k$ $(k = 1; \ldots ; n)$ ja järelikult $x - S_n \perp S_n$. Seega esitusest

$$x = (x - S_n) + S_n,$$

kusjuures $x - S_n \perp S_n$, järeldub, et

$$\|x\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|c_k x_k\|^2 . \qquad \square \tag{7.3.3}$$

Lause 2. Kehtib *Besseli võrratus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{7.3.4}$$

Tõestus. Seosest (7.3.3) järeldub, et

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \|c_k x_k\|^2 \quad (\forall n \in \mathbf{N}) , \tag{7.3.5}$$

st rida $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k x_k\|^2$ on koonduv. Et

$$\|c_k x_k\| = |c_k| \, \|x_k\| = |c_k| ,$$

siis võrratusest (7.3.5) saame

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Järelikult rida $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ on koonduv ja kehtib Besseli võrratus (7.3.4). $\square$

Saab tõestada järgmise väite, mille tõestuse leiate saoovi korral õpikust [5] , lk 244-245.

Lause 3 (Rieszi teoreem). Kui H on Hilberti ruum, siis iga pideva lineaarse funktsionaali $f \in H^*$ korral leidub parajasti üks element $y \in H$, et

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad (\forall x \in H) ,$$

kusjuures $\|f\| = \|y\|$.

Lause 4. Kui süsteem $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ on ortonormeeritud, siis $x_k \xrightarrow{w} \theta$.

Tõestus. Et

$$x_k \xrightarrow{w} \theta \;\Leftrightarrow\; f(x_k) \to 0 \;\; (\forall f \in H^*)$$

ja Lause 3 põhjal

$$f(x_k) \to 0 \ (\forall f \in H^*) \ \Leftrightarrow \ \langle x_k, y \rangle \to 0 \ (\forall y \in H),$$

siis

$$x_k \xrightarrow{w} \theta \Leftrightarrow \langle x_k, y \rangle \to 0 \ (\forall y \in H).$$

Olgu $\langle x_k, y \rangle = c_k$. Lause 2 põhjal saame $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$. Seega

$$\langle x_k, y \rangle \to 0 \ (\forall y \in X). \qquad \square$$

Lause 4. Iga Hilberti ruumi H elemendi x Fourier' rida koondub. Kui tähistada

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \tag{7.3.6}$$

siis y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile $\overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$.

Tõestus. Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ koondub. Olgu y selle rea summa. Näitame, et y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$. Kuna $y \in L$ ja $x = y + (x - y)$, siis ülesande 7.2.8 põhjal piisab näidata, et $(x - y) \perp L$. Selleks näitame, et $(x - y) \perp x_k \ (\forall k \in \mathbf{N})$ korral. Tõesti,

$$\begin{aligned} \langle x - y, x_k \rangle &= \langle x, x_k \rangle - \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} c_m x_m, x_k \right\rangle = \left[\begin{array}{c} \text{kasutame skalaar-} \\ \text{korrutise pidevust} \end{array} \right] = \\ &= c_k - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle x_m, x_k \rangle = c_k - c_k = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Lause 5. Elemendi x Fourier' rida koondub elemendiks x parajasti siis, kui x korral kehtib *Parsevali võrdus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2, \tag{7.3.7}$$

kus $c_k = \langle x, x_k \rangle \ (k \in \mathbf{N})$.

Tõestus. Et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x \;\Leftrightarrow\; S_n \to x \;\Leftrightarrow\; \|S_n - x\|^2 \to 0,$$

siis seoste (7.3.3) ja $\|c_k x_k\| = |c_k|$ põhjal saame

$$\|S_n - x\|^2 \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 . \qquad \square$$

Lause 6. Iga elemendi $x \in H$ korral selle elemendi Fourier' rida ortonormeeritud süsteemi $\{x_k\}$ järgi koondub elemendiks x parajasti siis, kui süsteem $\{x_k\}$ on täielik.

Tõestus. Lause 4 põhjal saame $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = y$, kus y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$. Seega $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x$ parajasti siis, kui $L = H$, st süsteem $\{x_k\}$ on täielik. $\square$

Näide 1. Ortonormeeritud trigonomeetriline süsteem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

on ruumis $L(-\pi, \pi)$ täielik, kusjuures funktsiooni $x(t) \in L(-\pi, \pi)$ Fourier' rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

kordajad a_k $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ ja b_k $(k \in \mathbf{N})$ leitakse valemite

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt \, dt$$

põhjal.

Näide 2. Haari ortonormaalsete lainekeste süsteem

$$\psi_{j,k}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^j \psi\left(2^j x - k\right) \quad (j, k \in \mathbf{Z}),$$

kus

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } 0 \le x < 0.5, \\ -1, \text{ kui } 0.5 \le x < 1, \\ 0, \text{ kui } x \notin [0; 1), \end{cases}$$

on täielik ruumis $L^2(\mathbf{R})$.

7 Lisad

7.1 Lebesgue'i integraal

Matemaatilise analüüsi põhikursuses kasutame Riemanni integraali. Riemanni integraali korral jaotatakse lõik $[a,b]$ punktidega x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ n osalõiguks $[x_{k-1}, x_k]$, kusjuures $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_{n-1} < x_n = b$, ja igas osalõigus valitakse punkt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ja moodustatakse Riemanni integraalsumma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$, kus $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

mis ei sõltu lõigu $[a,b]$ osalõikudeks jagamise viisist ja punkti c_k valikust k-ndas osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks (Riemanni integraaliks) lõigul $[a,b]$ ja tähistatakse $\int_a^b f(x)dx$. Öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on integreeruv lõigul $[a,b]$ (Riemanni mõttes). Selleks, et summa piirväärtus ei sõltuks punktide ξ_k valikust, peab ξ_k lähedastele väärtustele vastama ka $f(\xi_k)$ lähedased väärtused. Selline olukord on pidevate funktsioonide korral, kuid paljude praktikas kasutatavate funktsioonide korral see nii ei ole.

Näide 1. Uurime Dirichlet funktsiooni

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}, \end{cases}$$

kus $\mathbf{Q}$ on kõigi ratsionaalarvude hulk, integreeruvust lõigul $[0;1]$ Riemanni mõttes. Kui $\xi_k \in \mathbf{Q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, siis $\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\, \Delta x_k = 1$ ja kui $\xi_k \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, siis $\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\, \Delta x_k = 0$. Seega sõltub vaadeldav piirväärtus punktide ξ_k valikust, st funktsioon $D(x)$ ei ole integreeruv lõigul $[a,b]$ Riemanni mõttes.

Järgnevas esitame Lebesgue'i integraali elementaarse käsitluse. Saab tõestada järgmised väited hulga $\mathbf{R}$ lahtiste ja kinniste alamhulkade struktuuri kohta.

Lause 1. Iga lahtine hulk $G \subset \mathbf{R}$ avaldub üheselt lõpliku või loenduva hulga J ühisosata vahemike (a_k, b_k) ühendina $G = \bigcup_{k \in J} (a_k, b_k)$.

Lause 2. Iga tõkestatud kinnine hulk $F \subset \mathbf{R}$ avaldub üheselt määratava vähima lõigu $[a,b]$ ja lõpliku või loenduva hulga J ühisosata vahemike (a_k, b_k)

ühendi $G = \bigcup_{k \in J} (a_k, b_k)$ vahena, st

$$F = [a, b] \setminus \bigcup_{k \in J} (a_k, b_k) .$$

Definitsioon 1. Nii vahemiku (α, β) kui ka lõigu $[\alpha, \beta]$ *Lebesgue'i mõõduks* nimetatakse arvu $\beta - \alpha$.

Definitsioon 2. Arvu $\mu(G) = \sum_{k \in J} (b_k - a_k)$ nimetatakse tõkestatud lahtise hulga $G = \bigcup_{k \in J} (a_k, b_k)$, kus vahemikud (a_k, b_k) $(k \in J)$ on ühisosata, Lebesgue'i mõõduks.

Definitsioon 3. Arvu $\mu(F) = b - a - \sum_{k \in J} (b_k - a_k)$ nimetatakse tõkestatud kinnise hulga $F = [a, b] \setminus \bigcup_{k \in J} (a_k, b_k)$, kus vahemikud (a_k, b_k) $(k \in J)$ on ühisosata, Lebesgue'i mõõduks.

Kehtivad järgmised väited.

Järeldus 1. Kui $F = \{a\}$, siis $\mu(F) = 0$.

Järeldus 2. Kui F on lõplik või loenduv hulk, siis $\mu(F) = 0$.

Definitsioon 4. Mis tahes tõkestatud hulka $A \subset \mathbf{R}$ nimetatakse Lebesgue'i mõttes mõõtuvaks, kui

$$\inf_{G \supset A} \mu(G) = \sup_{F \subset A} \mu(F) ,$$

ja suurust $\mu(A) = \inf_{G \supset A} \mu(G) = \sup_{F \subset A} \mu(F)$ nimetatakse tõkestatud hulga A Lebesgue'i mõõduks.

Järeldus 3. Kui tõkestatud hulgad A ja $B \subset A$ on mõõtuvad, siis on seda ka $A \backslash B$, kusjuures $\mu(B) + \mu(A \backslash B) = \mu(A)$.

Järeldus 4. Tühja hulga Lebesgue'i mõõt on null.

Definitsioon 5. Funktsiooni f, mis on defineeritud hulgal $X \subset \mathbf{R}$, nimetatakse (Lebesgue'i mõttes) mõõtuvaks hulgal X, kui:

- X on mõõtuv;
- $\{x \mid x \in X \ \wedge \ f(x) > a\}$ on mõõtuv kui iga $a \in \mathbf{R}$ korral.

Järeldus 5. Kui f on mõõtuv hulgal X, siis iga lõigu $I \subset \mathbf{R}$ korral on hulk $X \cap f^{-1}(I)$ mõõtuv.

Lebesgue'i mõttes mõõtuvavate funktsioonide seost pidevate funktsioonidega iseloomustab järgmine N. Luzini teoreem.

Lause 3. Kui f on hulgal X defineeritud mõõtuv ja peaaegu lõplik funktsioon, siis mis tahes $\varepsilon > 0$ puhul leidub selline hulgal X pidev funktsioon φ, et

$$\mu(\{x \mid \ f(x) = \varphi(x)\}) < \varepsilon$$

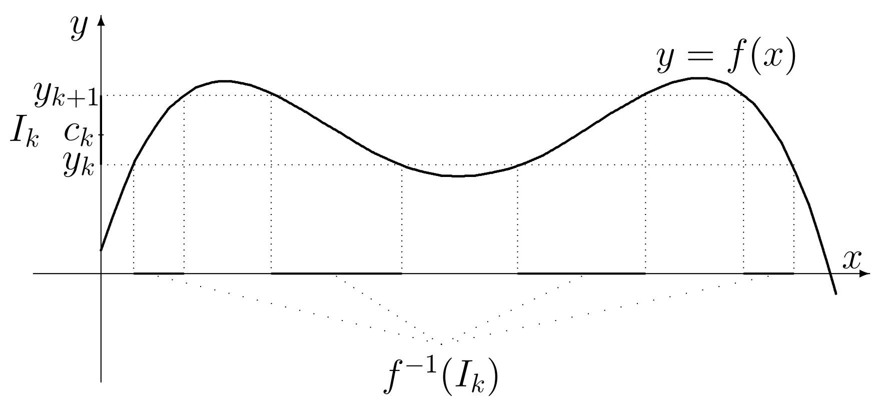
Lebesgue'i integraali korral eeldatakse funktsiooni $f(x)$ mõõtuvust hulgal E. Tuleb eristada kaht juhtu:

- $f(x)$ on tõkestatud hulgal E;
- $f(x)$ on tõkestamata hulgal E.

Käsitleme vaid esimest neist juhtudest (teisel juhul tuleb kasutada täiendavat piirväärtust). Kui $f(x)$ on tõkestatud hulgal E, siis leiduvad sellised arvud m ja M, et $m \leq f(x) \leq M \ \ (x \in E)$. Erinevalt Riemanni integraalist teostame Lebesgue'i integraali korral alajaotuse y-teljel

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M.$$

Tähistame $I_k = [y_{k-1}, y_k]$. Olgu $f^{-1}(I_k)$ kõigi hulga E punktide hulk, milles funktsiooni $f(x)$ väärtused kuuluvad lõiku I_k. Olgu $\mu\left(f^{-1}(I_k)\right)$ hulga $f^{-1}(I_k)$ Lebesgue'i mõõt



Definitsioon 6. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu\left(f^{-1}(I_k)\right),$$

mis ei sõltu lõigu $[m, M]$ jaotamisest osalõikudeks ja punkti $c_k \in [y_{k-1}, y_k]$ valikust, siis öeldakse, et tõkestatud funktsioon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *integreeruv Lebesgue'i mõttes* hulgal E.

Sarnaselt Riemanni integraaliga kasutame tähistust

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu\left(f^{-1}(I_k)\right).$$

Näites 1 esitatud Dirichlet funktsiooni $D(x)$ integreerimisel lõigul $E = [0;1]$ leiame, et $m = 0$ ja $M = 1$. Lõigu E jaotamisel osalõikudeks I_k saame

$$\begin{aligned} D^{-1}(I_1) &= \{x \mid x \in E \setminus \mathbf{Q}\}, \quad D^{-1}(I_k) = \emptyset \quad (1 < k < n), \\ D^{-1}(I_n) &= \{x \mid x \in E \cap \mathbf{Q}\}. \end{aligned}$$

Seega $\mu(D^{-1}(I_k)) = 0 \quad (1 < k < n)$. Järelduse 2 põhjal $\mu(D^{-1}(I_n)) = 0$ ja järelduse 3 põhjal $\mu(D^{-1}(I_0)) = 1$. Järelikult

$$\begin{aligned} \int\limits_{[0;1]} D(x)dx &= \lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k \mu\left(D^{-1}(I_k)\right) = \\ &= \lim_{\max \Delta y_k \to 0} ((c_1) \cdot 1 + 0 + (c_n) \cdot 0) = \\ &= \lim_{\max \Delta y_k \to 0} c_1 = 0. \end{aligned}$$

Lisaks paljudele Riemanni integraali juurest tuttavatele omadustele on Lebesgue'i integraalil kui Riemanni integraali üldistusel omadusi, mis võimaldavad tema rakendamist laiema funktsioonide klassi korral. Näiteks, iga hulgal E Lebesgue'i mõttes mõõtuv tõkestatud funktsioon on integreeruv sellel hulgal.

7.2 Kompleksarvud

Definitsioon 1. *Kompleksarvudeks* nimetatakse reaalarvude järjestatud paare (x, y), kusjuures nende paaride *võrdsus*, *liitmine* ja *korrutamine* on defineeritud järgmiselt:

1° $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$;

2° $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3° $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Kompleksarve (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) tähistame järgnevas z, z_1, z_2 ja z_3.

Ülesanne 1. Vahetu kontrollimisega näidake:

1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (liitmise kommutatiivsus);

2° $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (korrutamise kommutatiivsus);

3° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (liitmise assotsiatiivsus);

4° $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (korrutamise assotsiatiivsus);

5° $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (distributiivsus).

Kui kompleksarve $(0;0)$, $(x;0)$ ja $(0;y)$ tähistada lühidalt 0, x ja iy, siis

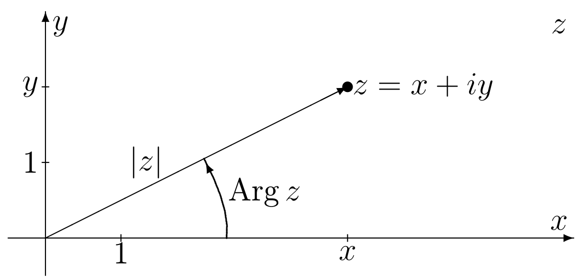
$$z = (x, y) = (x;0) + (0;1)\,(y;0) = x + iy.$$

Definitsioon 2. Kompleksarvu z esitust kujul $z = x + iy$ nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks, kusjuures arvu x nimetatakse *kompleksarvu reaalosaks* ja y *kompleksarvu imaginaarosaks* (täpsemini *imaginaarosa kordajaks*).

Kasutatakse tähistusi

$$x = \Re z = \Re z, \quad y = \Im z.$$

Arvu i nimetatakse *imaginaarühikuks.* Arvu $\overline{z} \overset{\text{def.}}{=} x - iy$ nimetatakse kompleksarvu $z = x + iy$ *kaaskompleksarvuks.* Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse tähega $\mathbf{C}$. Tasandit, mille igale punktile (x, y) on seatud vastavusse kompleksarv $z = x+iy$, nimetatakse *komplekstasandiks* (z-tasandiks),



x-telge *reaalteljeks* ja y-telge *imaginaarteljeks.* Rõhutame, et komplekstasandil z on x ja y reaalsed, st me vaid kasutame xy-tasandit kompleksarvude kujutamiseks. Komplekstasandil joonistame kompleksarvu z kohavektori. Arvu z kohavektori pikkust tähistatakse $|z|$ ja nimetatakse kompleksarvu z *mooduliks.* Nurka, mille kompleksarvu kohavektor moodustab reaaltelje positiivse suunaga, nimetatakse *kompleksarvu argumendiks* ja tähistatakse $\operatorname{Arg} z$. Kompleksarvu argument on määratud liidetava $2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ täpsusega, sest täispööre 2π võrra viib kompleksarvu kohavektori esialgsesse asendisse tagasi. Kompleksarvu argumendi $\operatorname{Arg} z$ väärtust, mis kuulub poollõiku $(-\pi, \pi]$, nimetatakse *kompleksarvu argumendi peaväärtuseks* ja tähistatakse $\arg z$, st $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Seega

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})\,, \tag{1}$$

kus

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Kehtivad seosed

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

ja

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x)\,, \text{ kui } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, \text{ kui } x < 0 \,\wedge\, y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, \text{ kui } x < 0 \,\wedge\, y < 0, \\ \pi/2, \text{ kui } x = 0 \,\wedge\, y > 0, \\ -\pi/2, \text{ kui } x = 0 \,\wedge\, y < 0. \end{cases} \tag{3}$$

NB! Mõningates raamatutes kasutatakse argumendi peaväärtuse jaoks mõnda teist poollõiku pikkusega 2π, näiteks $[0; 2\pi)$.

Näide 1. Leiame kompleksarvu $-\sqrt{3} - i$ mooduli, argumendi peaväärtuse ja argumendi.

Valemite (2), (3) ja (1) abil saame vastavalt

$$\left|-\sqrt{3} - 1 \cdot i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2},$$

$$\begin{aligned} \arg\left(-\sqrt{3} - 1 \cdot i\right) &= \left[-\sqrt{3} < 0 \;\wedge\; -1 < 0\right] = \\ &= \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

ja

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \left(2k - \frac{5}{6}\right)\pi \quad (k \in \mathbf{Z})\,. \qquad \diamondsuit$$

Kui tähistada $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ja kasutada polaarkoordinaate punkti asukoha määramiseks xy-tasandil, siis saame *kompleksarvu trigonomeetrilise kuju*

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

ja *kompleksarvu eksponentkuju*

$$z = |z|\; e^{i\varphi}, \tag{5}$$

kus

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{6}$$

on *Euleri valem.*

Kuna funktsioonid $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ ning (tõesta, et $e^{2\pi i} = 1!$) $e^{i\varphi}$ on 2π-perioodilised, siis võime valemeis (4) ja (5) võtta $\varphi = \arg z$.

Näide 2. Leiame kompleksarvu $-\sqrt{3} - i$ trigonomeetrise kuju ja eksponentkuju.

Kuna $\left|-\sqrt{3} - i\right| = 2$ ja $\arg\left(-\sqrt{3} - i\right) = -5\pi/6$, siis valemite (4) ning (5) abil saame vastavalt

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-5\pi/6\right) + i\sin\left(-5\pi/6\right)\right)$$

ja

$$-\sqrt{3} - i = 2\,e^{i(-5\pi/6)} = 2\,e^{-5\pi i/6}. \qquad \diamondsuit$$

Komplekstasandit täiendatakse *lõpmatuspunktiga* ∞, kompleksarvuga, mille moodul on $+\infty$, st $|\infty| = +\infty$. Lõpmatuspunkti reaal- ja imaginaarosa ning argumenti ei defineerita. Lõpmatuspunktiga täiendatud komplekstasandit nimetatakse *laiendatud komplekstasandiks*.

7.3 Tehted kompleksarvudega

Kompleksarvude $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ liitmine ja korrutamine on eelnevalt defineeritud. Esitame need definitsioonid algebralisel kujul esitatud kompleksarvude $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ korral:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,, \quad z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Kahe kompleksarvu z_1 ja z_2 *vahe* $z_1 - z_2$ ja *jagatis* z_1/z_2 defineeritakse vastavalt kui võrrandi $z_1 = z + z_2$ ja võrrandi $z_1 = zz_2$ lahend. Leiame, et

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

Osutub, et kompleksarve on tihti otstarbekas liita ja lahutada algebralisel kujul, aga korrutada, astendada ning jagada eksponentkujul. Saame

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1|\,|z_2|\;e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{|z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}{|z_2|^2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Seega

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,e^{i(\arg z_1+\arg z_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\arg z_1-\arg z_2)},\\ z^n &= |z|^n(\cos(n\arg z)+i\sin(n\arg z))=|z|^n\,e^{i\,n\arg z}. \end{aligned}$$

Kompleksarvu ja kaaskompleksi moodulil ning argumendil on järgmised omadused:

1° $|z|\ge 0$; 2° $|-z|=|\overline{z}|=|z|$; 3° $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

4° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 5° $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

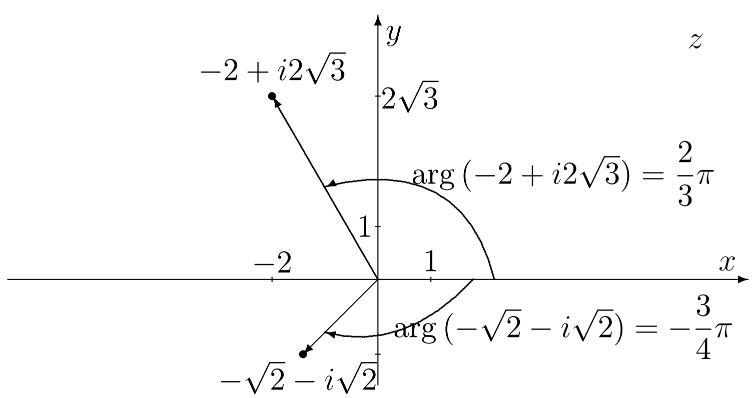
6° $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$; 7° $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$; 8° $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$;

9° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; 10° $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$; 11° $\Re z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$;

12° $\Im z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

Näide 1. Arvutame $\left(\dfrac{-2+i2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^9$.

Kujutame arvud $-2+i2\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ komplekstasandil ning määrame nende mooduli ja argumendi



Leiame:

$$\begin{aligned}
\left|-2+i2\sqrt{3}\right| &\overset{(2)}{=} \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} &=& \ 4;\\
\arg\left(-2+i2\sqrt{3}\right) &\overset{(3)}{=} \begin{bmatrix} -2<0, \\ 2\sqrt{3}\geq 0 \end{bmatrix} &=& \ \arctan\frac{2\sqrt{3}}{-2}+\pi=\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{2\pi}{3}\\
\left|-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right| &\overset{(2)}{=} \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} &=& \ 2;\\
\arg\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) &\overset{(3)}{=} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}<0, \\ -\sqrt{2}<0 \end{bmatrix} &=& \ \arctan\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}-\pi=\\
& &=& \ -\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Seega

$$-2+i2\sqrt{3}=4\,e^{i2\pi/3},\quad -\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\,e^{-i3\pi/3}$$

ja

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-2+i2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^9 &= \left(\frac{4\,e^{i2\pi/3}}{2\,e^{-i3\pi/4}}\right)^9=\left(2\,e^{i\,17\pi/12}\right)^9=2^9e^{i51\pi/4}=\\
&= 2^9e^{i51\pi/4}=2^9e^{i(48\pi+3\pi)/4}=2^9e^{i12\pi}\cdot e^{i3\pi/4}=\\
&= \left[e^{i2k\pi}\overset{k\in\mathbf{Z}}{=}1\right]=2^9e^{i3\pi/4}=2^9\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\\
&= 2^9\left(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2\right)=-256\sqrt{2}+256i\sqrt{2}. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Definitsioon 1. Võrrandi

$$w^n=z \quad (n\in\{2;3;4;\ldots\}) \tag{1}$$

iga lahendit w nimetatakse kompleksarvu z n-ndaks juureks ja tähistatakse $w=\sqrt[n]{z}$.

Kuna on tegemist muutuja w suhtes n-ndat järku algebralise võrrandiga, siis algebra põhiteoreemi kohaselt on sel võrrandil kompleksarvude hulgal täpselt n lahendit. Kui esitada z ja w eksponentkujul $z=|z|\;e^{i\arg z}$ ning $w=|w|\;e^{i\arg w}$, siis saame võrrandile (1) kuju

$$|w|^n\;e^{in\arg w}=|z|\;e^{i\arg z}.$$

Kaks kompleksarvu, esitatuna eksponentkujul, on võrdsed parajasti siis, kui on võrdsed nende moodulid ja teiseks nende argumendid. Suurus $n \arg w$ võib erineda kompleksarvu z peaväärtusest $\arg z$ arvu 2π mingi kordse $2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ võrra. Seega

$$|w|^n = |z| \ \wedge \ n \arg w = \arg z + 2k\pi \ \ (k \in \mathbf{Z})\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt[n]{|z|} \qquad \text{(tegemist on juba reaalmuutuja juurega),} \\ \arg w &= (\arg z + 2k\pi)\,/n \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

ja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} \quad (k \in \mathbf{Z})\,.$$

Kuna $e^{i2\pi} = 1$, siis $\sqrt[n]{z}$ erinevaid väärtusi on vaid n tükki ja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)\,. \tag{2}$$

Osutub, et $\sqrt[n]{z}$ väärtused asetsevad z-tasandil korrapärase n-nurga, mille keskpunkt on nullpunkt, tippudes.

Näide 2. Leiame $\sqrt[3]{-8}$ kõik väärtused ja kujutame nad z-tasandil.

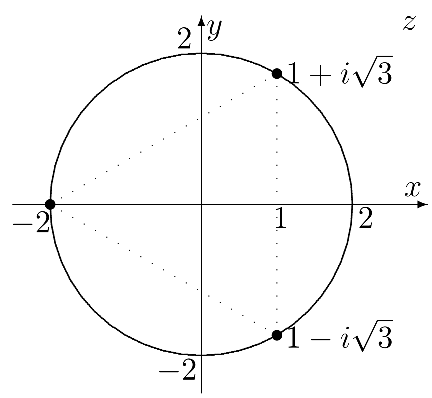
Kuna $|-8| = 8$ ja $\arg(-8) = \pi$, siis valemi (2) põhjal

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{|-8|} e^{i(\arg(-8) + 2k\pi)/3} = 2\, e^{i(\pi + 2k\pi)/3} \quad (k = 0; 1; 2)$$

ning

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=0} &= 2\, e^{i\pi/3} = 2\,(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 1 + i\sqrt{3}, \\ \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=1} &= 2\, e^{i\pi} = 2\,(\cos \pi + i \sin \pi) = -2, \\ \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=2} &= 2\, e^{i5\pi/3} = 2\,(\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3)) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Teeme joonise



♢

Näide 3. Leiame kompleksarvu z kõigi n-ndate juurte summa.

Valemi (2) põhjal saame

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z)/n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2k\pi/n} = \left[\begin{array}{c} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, \\ q = e^{i2\pi/n} \end{array} \right] = \\ &= \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z)/n} \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i2\pi/n}} = \left[e^{i2\pi} = 1 \right] = 0. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

7.4 Joon, piirkond ja raja

Definitsioon 1. *Jooneks* ehk *Jordani jooneks* komplekstasandil z nimetatakse punktide, mis on määratud võrrandiga

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [\alpha, \beta]\,,$$

kus $x(t)$ ja $y(t)$ on pidevad reaalmuutuja funktsioonid lõigul $[\alpha, \beta]$, hulka, kusjuures

$$t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; z(t_1) \neq z(t_2)\,,$$

st joonel pole kordseid punkte. Erandiks võivad olla vaid punktid $z(\alpha)$ ja $z(\beta)$. Kui $z(\alpha) = z(\beta)$, siis joont nimetatakse *kinniseks*. Joont nimetatakse *siledaks*, kui funktsioonid $x'(t)$ ja $y'(t)$ on pidevad lõigul $[\alpha, \beta]$. Joont nimetatakse *tükati siledaks*, kui ta koosneb lõplikust arvust siledatest osadest.

Näide 1. Olgu joon antud võrrandiga

$$z(t) = a\cos t + i\ b\sin t \quad (t \in [0, 2\pi])\,. \tag{1}$$

Kuna funktsioonid $x(t) = a\cos t$ ja $y(t) = b\sin t$ on pidevad lõigul $[0, 2\pi]$ ja

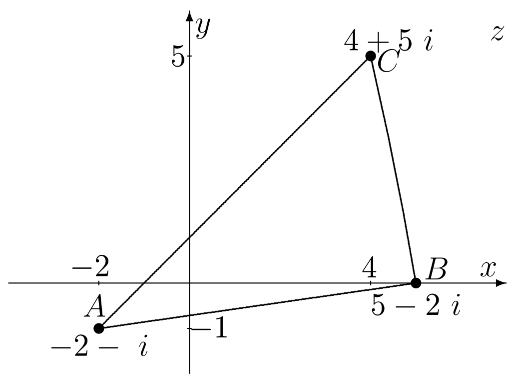
$$t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; z(t_1) \neq z(t_2)\,,$$

välja arvatud punktid $t_1 = 0$ ja $t_2 = 2\pi$, siis on tegamist Jordani joonega. Funktsioonid $x'(t) = -a\sin t$ ja $y'(t) = b\cos t$ on pidevad lõigul $[0, 2\pi]$. Tegemist on seega sileda joonega. Et

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = \frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1 \quad (t \in [0, 2\pi])\,,$$

siis võrrand (1) esitab komplekstasandil ellipsi, mille keskpunkt on nullpunktis ja teljed paralleelsed koordinaattelgedega, telgedega a ja b. $\diamondsuit$

Näide 2. Olgu z-tasandil antud kolmnurk ABC



Leiame tema rajajoone võrrandid ja uurime selle joone siledust.

Veenduge, et lõikudel AB, BC ja AC on vastavalt võrrandid

$$\begin{aligned}
AB &: \quad z(t) = -2 - i + t\,(7 - i) \quad (t \in [0;1])\,,\\
BC &: \quad z(t) = 5 - 2i + t\,(-1 + 7i) \quad (t \in [0;1])\,,\\
AC &: \quad z(t) = -2 - i + t\,(6 + 6i) \quad (t \in [0;1])\,.
\end{aligned}$$

Kontrollige, et vastavad tuletised on pidevad lõigul $[0;1]$. Seega rajajoon (murdjoon) ABC on tükati sile, koosnedes kolmest siledast tükist. $\diamondsuit$

Definitsioon 2. *Hulga rajapunktiks* nimetatakse punkti, mille igas ümbruses leidub nii sellesse hulka kuuluvaid kui ka sinna mittekuuluvaid punkte.

Definitsioon 3. *Hulga rajaks* nimetatakse selle hulga kõigi rajapunktide hulka.

Definitsioon 4. Hulka, mis ei sisalda ühtki oma rajapunkti, nimetatakse *lahtiseks hulgaks.*

Definitsioon 5. Hulka, mis sisaldab kõik oma rajapunktid, nimetatakse *kinniseks hulgaks.*

Definitsioon 6. *Sidusaks hulgaks* nimetatakse hulka, mille iga kaht punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva Jordani joonega.

Definitsioon 7. *Piirkonnaks* nimetatakse lahtist sidusat hulka.

Definitsioon 8. *Kinniseks piirkonnaks* nimetatakse kinnist sidusat hulka.

Definitsioon 9. Piirkonda nimetatakse *ühelisidusaks,* kui selle piirkonna raja on sidus.

Definitsioon 10. Piirkonda nimetatakse *mitmelisidusaks,* kui selle piirkonna raja ei ole sidus, vaid koosneb mitmest sidusast osast.

Ülesanne 1. Olgu vaadeldavaks hulgaks ring $|z-1+i|<\sqrt{2}$. Kas see hulk on kinnine või lahtine? Kas see hulk on piirkond? Milline on selle hulga raja? Kas tegemist on üheli- või mitmelisidusa piirkonnaga?

Ülesanne 2. Olgu vaadeldavaks hulgaks rõngas $1<|z-1+i|<\sqrt{2}$. Kas see hulk on kinnine või lahtine? Kas see hulk on piirkond? Milline on selle hulga raja? Kas tegemist on üheli- või mitmelisidusa piirkonnaga?

7.5 Kompleksmuutuja funktsioon

Olgu D hulk komplekstasandil või laiendatud komplekstasandil.

Definitsioon 1. Kui hulga D igale elemendile z on vastavusse seatud mingi kindel kompleksarv w, siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud kompleksmuutuja funktsioon ehk kujutus $w=f\left(z\right).$

Definitsioon 2. Hulka D nimetatakse *funktsiooni f määramispiirkonnaks* ja hulka $f\left(D\right)=\left\{w\,|\,\left(z\in D\right)\wedge\left(w=f\left(z\right)\right)\right\}$ *funktsiooni f väärtuste piirkonnaks.*

Definitsioon 3. Funktsiooni $z=f^{-1}\left(w\right)$ nimetatakse funktsiooni $w=f\left(z\right)$ *pöördfunktsiooniks*, kui hulga $f(D)$ iga element on ainult ühe hulga D elemendi kujutiseks.

Definitsioon 4. Funktsiooni, mille argumendi mõnele väärtusele määramispiirkonnast vastab vähemalt kaks funktsiooni väärtust, nimetatakse *mitmeseks funktsiooniks.*

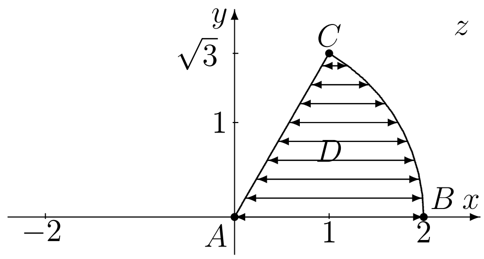
Definitsioon 5. Suurusi $u=\Re w$ ja $v=\Im w$ nimetatakse vastavalt kompleksmuutuja funktsiooni $w=f\left(z\right)$ *reaal-* ja *imaginaarosaks.*

Kuna $z=x+iy=z\left(x,y\right)$ ja $w=f(z)=u+iv$, siis funktsiooni $f(z)$ defineerimine on samaväärne vastavas xy-tasandi piirkonnas kahe reaalsete väärtustega kahe muutuja funktsiooni $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ defineerimisega.

Kompleksmuutuja funktsiooni f(z) graafik paikneb (neljamõõtmelises) korrutisruumis $D\times f\left(D\right).$

Näide 1. Leiame piirkonna $D=\left\{z\,|\,\left(|z|<2\ \wedge\ \left(0<\arg z<\pi/3\right)\right)\right\}$ kujutise funktsiooni $w=z^3$ abil.

Skitseerime piirkonna D



Esitame piirkonna D rajajoone ABC osade võrrandid

$$\begin{aligned} AB &: \quad z = \rho\, e^{i\cdot 0} \ \ (0 \le \rho \le 2)\,; \\ BC &: \quad z = 2\, e^{i\cdot\varphi} \ \ (0 \le \varphi \le \pi/3)\,; \\ CA &: \quad z = \rho\, e^{i\cdot\pi/3} \ \ (0 \le \rho \le 2)\,. \end{aligned}$$

Uurime, milleks teisenevad need rajajoone osad kujutamisel funktsiooniga $w = z^3$. Esiteks leiame lõigu AB kujutise $A'B'$

$$A'B' : \ w = \rho^3\, e^{3i\cdot 0} \ \ (0 \le \rho \le 2)$$

ehk

$$A'B' : \ w = r\, e^{i\cdot 0} \ \ (0 \le r \le 8)\,.$$

Analoogiliselt saame

$$B'C' : \ w = 2^3\, e^{3i\cdot\varphi} \ \ (0 \le \varphi \le \pi/3)$$

ehk

$$B'C' : \ w = 8\, e^{i\cdot\psi} \ \ (0 \le \psi \le \pi)$$

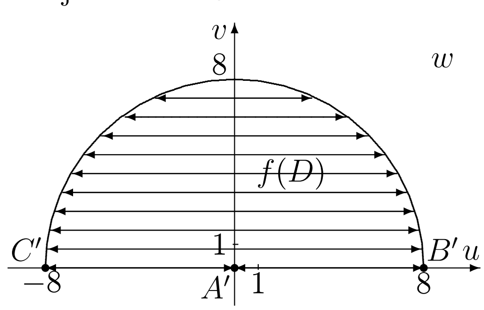
ja

$$C'A' : \ w = \rho^3\, e^{3i\cdot\pi/3} \ \ (0 \le \rho \le 2)$$

ehk

$$C'A' : \ w = r\, e^{i\cdot\pi} \ \ (0 \le r \le 8)\,.$$

Skitseerime w-tasandil joone $A'B'C'$:



Osutub, et $f(D)$ on lahtine poolring w-tasandil. Veenduge, et nii piirkonna D kui ka piirkonna $f(D)$ rajajoon on tükati sile. $\diamondsuit$

Definitsioon 6. Kompleksarvu c nimetatakse *funktsiooni $f(z)$ piirväärtuseks* piirprotsessis $z \to z_0$, kui $\forall\varepsilon > 0$ korral $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ selline, et

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Definitsioon 7. Kompleksmuutuja funktsiooni $f(z)$ nimetatakse *pidevaks* punktis z_0, kui

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

7.6 Kompleksmuutuja funktsiooni tuletis

Argumendi z muudule Δz vastavaks *funktsiooni $w = f(z)$ muuduks* Δw nimetatakse vahet $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Definitsioon 1. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df}{dz} \tag{1}$$

nimetatakse *funktsiooni tuletiseks* punktis z.

Kui funktsioonil $f(z)$ on tuletis punktis z, siis öeldakse, et funktsioon $f(z)$ on *diferentseeruv* punktis z.

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse *analüütiliseks punktis z*, kui $f(z)$ on diferentseeruv punktis z ja mingis selle punkti ümbruses.

Definitsioon 3. Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse *analüütiliseks piirkonnas*, kui $f(z)$ on analüütiline selle piirkonna igas punktis.

Definitsioon 4. Punkti, milles funktsiooni $f(z)$ ei ole analüütiline, nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *iseäraseks punktis.*

Näide 1. Leiame $(z^3)'$.

Definitsiooni 1 põhjal saame

$$\begin{aligned}\left(z^3\right)' &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left(3z^2 + 3z\Delta z + (\Delta z)^2\right) = 3z^2. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Analoogiliselt reaalmuutuja funktsioonidega on kompleksmuutuja funktsioonidel järgmised tehetega seotud omadused.

Lause 1. Kehtivad seosed:

- $(c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))' = c_1 f_1'(z) + c_2 f_2'(z)$;
- $(f_1(z) f_2(z))' = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$;
- $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{{f_2}^2(z)}$.

Kui punktis z diferentseeruv funktsioon $w = f(z)$ on punkti z ümbruses pööratav, st $\exists\, f^{-1}(w)$, siis

$$\begin{aligned}
\frac{d\, f^{-1}(w)}{dw} &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{f^{-1}(w + \Delta w) - f^{-1}(w)}{\Delta w} \overset{\Delta w \to 0 \Leftrightarrow \Delta z \to 0}{=} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\dfrac{df}{dz}},
\end{aligned}$$

st

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}. \tag{2}$$

Uurime tuletise $f'(z)$ eksisteerimise tingimusi. Kuna $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, siis

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Suuruse $\dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$ piirväärtus ei tohi sõltuda piirpunktile lähenemise viisist $(\Delta x, \Delta y) \to (0; 0)$. Kui $\Delta y = 0$, siis

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui $\Delta x = 0$, siis

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Seega

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Lause 2 (Cauchy-Riemanni tingimused). Kui funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv punktis z, siis selles punktis on rahuldatud *Cauchy-Riemanni tingimused*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{3}$$

Cauchy-Riemanni tingimused on järelikult tarvilikud tuletise $f'(z)$ olemasoluks punktis $z = x + iy$. Tõestage, et funktsioonide $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ diferentseeruvuse korral punktis (x, y) on Cauchy-Riemanni tingimused ka piisavad tuletise $f'(z)$ olemasoluks punktis $z = x + iy$.

Näide 2. Leiame funktsiooni $w = z^3$ diferntseeruvuse piirkonna.

Kuna

$$w = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3,$$

siis $u = x^3 - 3xy^2$ ja $v = 3x^2y - y^3$. Seega

$$u_x = 3x^2 - 3y^2,\ u_y = -6xy,\ v_x = 6xy,\ v_y = 3x^2 - 3y^2$$

ja Cauchy-Riemanni tingimused (3) omandavad kuju

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2, \\ -6xy = -6xy. \end{cases}$$

Järelikult on funktsiooni $w = z^3$ korral Cauchy-Riemanni tingimused täidetud komplekstasandi igas punktis. Kuna funktsioonid $u = x^3 - 3xy^2$ ja $v = 3x^2y - y^3$ on diferentseeruvad komplekstasandi igas punktis, siis funktsioon $w = z^3$ on diferentseeruv komplekstasandi igas punktis z. Lisaks

$$\left(z^3\right)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3\left(x + iy\right)^2. \qquad \diamondsuit$$

Kui funktsiooni $w = f(z)$ reaal- ja imaginaarosal $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on pidevad teist järku osatuletised, siis Cauchy-Riemanni esimesest tingimusest saame $u_{xx} = v_{yx}$ ja teisest $u_{yy} = -v_{xy}$ ning

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Analoogiliselt jõuame tulemuseni

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Funktsiooni $r = r(x, y)$, mis rahuldab seost (*Laplace'i võrrandit*)

$$r_{xx} + r_{yy} = 0,$$

nimetatakse *harmooniliseks funktsiooniks*.

Kui direntseeruva funktsiooni $w = f(z)$ reaal- ja imaginaarosal $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on pidevad teist järku osatuletised, siis $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on harmoonilised funktsioonid. Sel korral nimetatakse funktsioonide paari $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ *kaasharmooniliste paariks*.

Näide 3. On teada analüütilise funktsiooni $w = f(z) = -(x + iy)^2 + i(x + iy) : \ -x^2 + y^2 - y$ imaginaarosa $v = x - 2xy$. Leiame $f(z)$, kui $f(1) = 2 + i$.

Kuna $v_x = 1 - 2y$ ja $v_y = -2x$, siis Cauchy-Riemanni esimese tingimuse põhjal

$$u_x = -2x,$$

millest

$$\begin{aligned} u &= \int (-2x)\, dx = \left[\begin{array}{c} \text{võttes osatuletist muutuja } x \text{ järgi} \\ \text{muutujat } y \text{ käsitletakse kui konstanti} \end{array} \right] = \\ &= -x^2 + \varphi(y), \end{aligned}$$

kus $\varphi(y)$ on suvaline muutuja y funktsioon. Seega $u_y = \varphi'(y)$ ja Cauchy-Riemanni teise tingimuse põhjal

$$\varphi'(y) = -1 + 2y,$$

millest

$$\varphi(y) = \int (-1 + 2y)\, dy = .$$

Järelikult $u = -x^2 + y^2 - y + C$ ning

$$\begin{aligned} w &= f(z) = u + iv = -x^2 + y^2 - y + C + i(x - 2xy) = \\ &= i(x + iy) - (x + iy)^2 + C = iz - z^2 + C. \end{aligned}$$

Kuna $f(1) = 2 + i$, siis

$$i - 1 + C = 2 + i \Rightarrow C = 3$$

ja $f(z) = iz - z^2 + 3$. $\diamondsuit$

7.7 Arvread

Definitsioon 1. Avaldist

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k + \ldots,$$

kus $c_k = a_k + ib_k$ on kompleksarvud, nimetatakse kompleksarvuliseks arvreaks.

Definitsioon 2. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nimetatakse *koonduvaks*, kui

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

ja *hajuvaks,* kui

$$\nexists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Tõestage iseseisvalt järgmine väide.

Lause 1. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kus $c_k = a_k + ib_k$, on koonduv parajasti siis, kui read $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on koonduvad.

Definitsioon 3. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ on koonduv.

Definitsioon 4. Koonduvat rida, mis ei ole absoluutselt koonduv, nimetatakse *tingimisi koonduvaks.*

Tõestage iseseisvalt järgmine väide.

Lause 2. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kus $c_k = a_k + ib_k$, on absoluutselt koonduv parajasti siis, kui read $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on absoluutselt koonduvad.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\sqrt{k} + i\sqrt[3]{k^4}}{k^2}$ koonduvust.

Nii reaalosadest koostatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3/2}$$

kui ka imaginaarosadest koostatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[3]{k^4}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-2/3}$$

on Leibnizi tunnuse põhjal koonduvad. Seega Lause 1 põhjal on koonduv uuritav rida. Kuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \, k^{-3/2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$$

on koonduv (miks?) ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \, k^{-2/3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3},$$

on hajuv (miks?), siis Lause 2 põhjal on uuritav rida tingimisi koonduv.

7.8 Funktsionaalread

Definitsioon 1. Avaldist kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) = u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_k(z) + \ldots,$$

kus $u_k(z)$ on kompleksmuutuja funktsioonid, nimetatakse *funktsionaalreaks.*

Fikseeritud z korral saame sellest avaldisest arvrea. Kui eksisteerib osasummade

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$$

jada piirväärtus $n \to \infty$ korral, siis öeldakse, et rida *koondub* punktis z. Piirväärtust $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$ nimetatakse *rea summaks.* Kõigi punktide z hulka, kus funktsionaalrida koondub, nimetatakse rea *koondumispiirkonnaks.* Vahet

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$$

nimetatakse rea *jääkliikmeks.* Ilmselt

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(z, \varepsilon) \in \mathbf{N} : \; n > n_0 \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon.$$

Kui rea koondumispiirkonna teatud osa kõigi punktide korral naturaalarvu n_0 valik sõltub vaid arvust ε, st $n_0(z, \varepsilon) = n_0(\varepsilon)$, siis öeldakse, et funktsionaalrida koondub selles osas ühtlaselt.

7.9 Astmeread

Definitsioon 1. Funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{1}$$

kus c_k on konstandid, nimetatakse *astmereaks*.

Astmerea (1) koonduvuspiirkond ei ole tühi hulk, sest sisaldab vähemalt nullpunkti.

Tõestage Abeli teoreem.

Lause 1 (Abeli teoreem). Kehtivad väited:

- Kui astmerida (1) koondub punktis z_0, siis (1) koondub absoluutselt igas punktis z, mis rahuldab võrratust $|z| < |z_0|$;
- Kui astmerida (1) hajub punktis z_0, siis (1) hajub igas punktis z, mis rahuldab võrratust $|z| > |z_0|$;
- Kui astmerida (1) koondub punktis z_0, siis (1) koondub ühtlaselt hulgal $|z| \leq q < |z_0|$.

Definitsioon 2. Suurust

$$R = \sup_{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in c} |z|$$

nimetatakse *astmerea koonduvusraadiuseks*.

Lause 2. Kui eksisteerib piirväärtus (lõplik või lõpmatu)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \quad \text{või} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_k|}},$$

siis see piirväärtus on võrdne rea (1) koonduvusraadiusega R.

Näide 1. Leiame rea $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k / e^k$ koonduvusraadiuse R.

Tegemist on astmereaga, kus $c_k = k^3/e^k$. Kuna $c_{k+1} = (k+1)^3/e^{k+1}$, siis

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^3/e^k}{(k+1)^3/e^{k+1}} \right| = e \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+1/k)^3} = e. \qquad \diamondsuit$$

Lause 3. Kui rea

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{2}$$

koonduvusraadius on R, siis

- rea (2) summa $S(z)$ on ringis $|z-a|<R$ pidev funktsioon,
- rida (2) on liikmeti integreeritav piki suvalist joont, mis kuulub piirkonda $|z-a|<R$,
- rea (2) summa $S(z)$ on ringis $|z-a|<R$ analüütiline funktsioon,
- rida (2) on liikmeti mis tahes arv kordi diferentseeruv ringis $|z-a|<R$ ja

$$S^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\, c_k\, (z-a)^{k-m},$$

kusjuures saadud rea koonduvusraadius on samuti R.

Defineerime mõningad kompleksmuutuja funktsioonid astmerea summana. *Eksponentfunktsiooniks* $e^z \equiv \exp(z)$ nimetatakse funktsiooni

$$e^z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Veenduge, et selle rea korral $R=\infty$ ja $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$. Seega suvalise $z=x+iy$ korral

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}.$$

Defineerime kompleksmuutuja z korral

$$\cos z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

kusjuures mõlema rea korral $R=\infty$. Tõestage, et nii $\cos z$ kui ka $\sin z$ on analüütilised komplekstasandi igas punktis.

Lause 4 (Euleri valem). Kehtib seos

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{3}$$

Tõestus. Saame

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} = 1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{(iz)^k}{k!}+\ldots= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos z+i\sin z. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Seosest (3) järeldub

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z.$$

Seega

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= \cos z + i\sin z + \cos z - i\sin z = 2\cos z, \\ e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z + i\sin z - \cos z + i\sin z = 2i\sin z \end{aligned}$$

ja

$$\cos z = \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)/2 \tag{4}$$

ning

$$\sin z = \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)/(2i) \tag{5}$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $w = e^z$ analüüütilisuse piirkonna.
Kuna

$$\begin{aligned} w &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \overset{(3)}{=} e^x(\cos y + i\sin y) = \\ &= e^x\cos y + ie^x\sin y = u + iv, \end{aligned}$$

siis $u = e^x\cos y$ ja $v = e^x\sin y$ ning

$$u_x =, \quad u_y = -e^x\sin y, \quad v_x = e^x\sin y, \quad v_y =$$

ja Cauchy-Riemanni tingimused on kujul

$$\begin{cases} e^x\cos y = e^x\cos y, \\ -e^x\sin y = -e^x\sin y. \end{cases}$$

Järelikult on funktsioon $w = e^z$ analüütiline komplekstasandi igas punktis. $\diamondsuit$

Näide 3. Leiame $\cos(4i)$.
Valemi (4) abil saame

$$\cos(4i) = \left(e^{i\cdot 4i} + e^{-i\cdot 4i}\right)/2 = \left(e^4 + e^{-4}\right)/2 \approx 27.308. \qquad \diamondsuit$$

Definitsioon 3. Võrrandi

$$e^w = z \tag{6}$$

kõigi lahendite hulka nimetatakse kompleksmuutuja *naturaallogaritmiks* $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Kui $w = u + iv$ ja $z = |z|\, e^{i \arg z}$, siis saame võrrandile (6) kuju

$$e^{u+iv} = |z|\, e^{i \arg z}$$

ehk

$$e^{u} \cdot e^{iv} = |z|\, e^{i \arg z},$$

millest kahe kompleksarvu võrdsuse tingimuse põhjal

$$\begin{cases} e^{u} = |z|\,, \\ v = \arg z + 2\pi \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} u = \ln |z|\,, \\ v = \operatorname{Arg} z. \end{cases}$$

Seega saame lõpmata mitmese funktsiooni

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i\,(\arg z + 2k\pi) \quad (k \in \mathbf{Z})\,. \tag{7}$$

Täisarvu k fikseerimisel $k = 0$ saame ühese kompleksmuutuja funktsiooni

$$\ln z = \operatorname{Ln} z\,|_{k=0} = \ln |z| + i \arg\, z,$$

mida nimetatakse *naturaallogaritmi peaharuks.*

Näide 4. Leiame $\operatorname{Ln}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ ja $\ln\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

Kuna $\left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$ ja $\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\pi/3$, siis

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}\left(1 - i\sqrt{3}\right) &= \ln 2 + i\,(2k\pi - \pi/3) \quad (k \in \mathbf{Z})\,, \\ \ln\left(1 - i\sqrt{3}\right) &= \ln 2 - i\pi/3. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Definitsioon 4. Funktsiooni

$$w = z^{c} \overset{\text{def.}}{=} e^{c \operatorname{Ln} z}, \tag{8}$$

kus c on kompleksarv, nimetatakse kompleksmuutuja *üldiseks astmefunktsiooniks.*

Näide 5. Leiame i^{i}.

Kuna $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$ ja

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,(\pi/2 + 2k\pi) = i\,(2k + 1/2)\,\pi,$$

siis valemi (5) põhjal

$$i^i = e^{i \cdot i(2k+1/2)} = e^{-(2k+1/2)\pi} \quad (k \in \mathbf{Z})\,. \qquad \diamondsuit$$

Definitsioon 5. Võrrandi

$$\sin w = z \tag{9}$$

kõigi lahendite hulka nimetatakse kompleksmuutuja *arkussiinuseks* $w = \mathrm{Arc}\sin\, z$.

Seose (5) abil saame võrrandile (9) kuju

$$\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) / \,(2i) = z,$$

millest

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

ehk

$$\begin{aligned} \left(e^{iw} - iz\right)^2 &= 1 - z^2 \;\Leftrightarrow\; e^{iw} - iz = \sqrt{1 - z^2} \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \;\Leftrightarrow\; iw = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; w = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \end{aligned}$$

st

$$\mathrm{Arc}\sin\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \tag{10}$$

Analoogiliselt saadakse avaldised

$$\mathrm{Arc}\cos\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{11}$$

$$\mathrm{Arc}\tan\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{12}$$

$$\mathrm{Arc}\cot\, z = \frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}. \tag{13}$$

Kui valemeis (10-13) kompleksmuutuja naturaallogaritm asendada naturaallogaritmi peaharuga, saadakse vastavalt $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$ ja $\mathrm{arc}\cot z$.

Näide 6. Leiame $\arctan(1+i)$.
Kuna $|1+i| = \sqrt{2}$ ja $\arg(1+i) = \pi/4$, siis

$$\begin{aligned}
\arctan(1+i) &= -\frac{i}{2}\ln\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\ln\frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2}\ln\frac{i(2+i)}{5} = \\
&= -\frac{i}{2}\ln\frac{-1+2i}{5} = -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 5 + i(\pi - \arctan 2)\right) = \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{i}{4}\ln 5. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Defineerime *hüperboolsed funktsioonid*

$$\cosh z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\tanh z \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z \overset{\text{def.}}{=} \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

ja *areafunktsioonid* $w = \mathrm{Ar}\cosh z$, $w = \mathrm{Ar}\sinh z$, $w = \mathrm{Ar}\tanh z$ ning $w = \mathrm{Ar}\coth z$ vastavalt võrrandite

$$\cosh w = z, \ \sinh w = z, \ \tanh w = z, \ \coth w = z$$

lahendeina. Nii $\cosh z$ kui ka $\sinh z$ korral $R = \infty$ Tõestage, et nii $\cosh z$ kui ka $\sinh z$ on analüütilised komplekstasandi igas punktis.

Lause 5. Kehtivad seosed

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ar}\cosh z &= Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \qquad \mathrm{Ar}\sinh z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \\
\mathrm{Ar}\tanh z &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}, \quad \mathrm{Ar}\coth z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\cosh(iz) &= \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z, \\
\cos(iz) &= \cosh z, \quad \sin(iz) = i\sinh z.
\end{aligned}$$

7.10 Kompleksmuutuja funktsiooni integraal

Olgu antud sile või tükati sile lõpliku pikkusega Jordani joon Γ

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ja sellel joonel pidev funktsioon $f(z)$. Lahtise joone Γ korral loeme positiivseks parameetri t kasvamisele vastavat suunda ja kinnise joone Γ korral suunda, milles liikudes jääb hõlmatav piirkond vasakule. Olgu $z(\alpha)$ joone alguspunkt ja $z(\beta)$ joone lõpppunkt. Jaotame joone punktidega z_k $(k = 0; 1; \ldots; n)$ n osaks, kusjuures $z_0 = z(\alpha)$ ja $z_n = z(\beta)$. Olgu $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ja ς_k olgu k-nda osakaare punkt.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty,\ \max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k,$$

mis ei sõltu joone Γ osakaarteks jaotamise viisist ja punktide ς_k valikust, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(z)$ integraaliks üle joone Γ.

Seega

$$\int_\Gamma f(z)dz \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty,\ \max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k. \tag{1}$$

Lause 1. Kui $w = f(z) = u + iv$, siis

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy. \tag{2}$$

Lause 2. Kui $w = f(z) = u + iv$ ja joon on antud kujul

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

siis

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta \left(u\left(x(t), y(t)\right) + iv\left(x(t), y(t)\right)\right)\left(x'(t) + iy'(t)\right) dt \tag{3}$$

ehk

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left(z\left(t\right)\right) z'\left(t\right) dt. \tag{4}$$

Näide 1. Leiame $\int_\Gamma (z^2-z)\,dz$, kus Γ on sirglõik punktist $z_\alpha = 1+i$ punkti $z_\beta = 3+4i$.

Kuna joon on esitatav parameetrilise võrrandiga

$$z = 1+i+t\,(2+3i) \quad (0 \le t \le 1)\,,$$

siis valemi (4) põhjal

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \left(z^2-z\right) dz &= \int_0^1 \left((1+i+t\,(2+3i))^2-(1+i+t\,(2+3i))\right)(2+3i)\,dt = \\ &= \int_0^1 (2+3i)\left(i-4t+7it-1-5t^2+12it^2\right)dt = 3i-209/6.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Tõestage järgmised väited.

Lause 3 (Cauchy teoreem). Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas D, siis

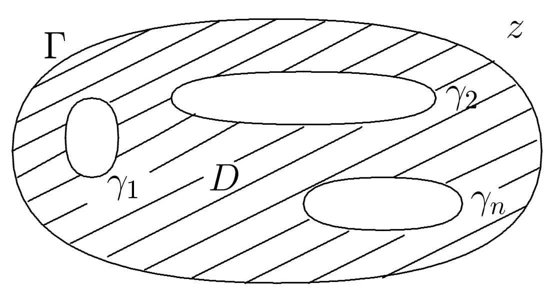
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \tag{5}$$

iga piirkonda D kuuluva kinnise joone Γ korral.

Näide 2. Leiame $\int_\Gamma \cos z\,dz$, kus $\Gamma : |z-2+3i| = 4$.

Kuna $\cos z$ on analüütiline kogu komplekstasandil, siis Lause 3 põhjal uuritav integraal võrdub nulliga. $\diamondsuit$

Lause 4 (Cauchy teoreem mitmelisidusa piirkonna jaoks). Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline mitmelisidusas piirkonnas D ja selle rajajoontel,



siis integraal üle välise rajajoone Γ võrdub integraalide summaga üle sisemiste rajajoonte γ_k $(k = 1;\ldots;n)$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{6}$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $F(z)$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *algfunktsiooniks* piirkonnas D, kui selle piirkonna igas punktis $F'(z) = f(z)$.

Lause 5 (Newton-Leibnizi valem). Kui $F(z)$ on piirkonnas D analüütilise funktsiooni $f(z)$ algfunktsioon ja $z_0, z \in D$, siis

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z}. \tag{7}$$

Näide 3. Leiame $\int_1^{2i} \cos z\, dz$.

Kuna $\cos z$ on analüütiline kogu komplekstasandil ja $(\sin z)' = \cos z$, siis valemi (7) põhjal

$$\int_1^{2i} \cos z\, dz = \sin z\Big|_1^{2i} = \cos(2i) - \cos 1 = \cosh 2 - \cos 1. \qquad \diamondsuit$$

Lause 5 (Cauchy integraalvalem). Kui $f(z)$ on analüütiline funktsioon ühelisidusas piirkonnas D ja Γ kinnine iseennast mittelõikav joon selles piirkonnas ning ς kuulub joone Γ poolt hõlmatavasse piirkonda, siis

$$f(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\varsigma}. \tag{8}$$

Näide 4. Leiame $\int_{|z|=4} \dfrac{\sin z}{z - i\pi/2}\, dz$.

Kuna $\sin z$ on analüütiline ringis $|z| < 4$ ja $\varsigma = i\pi/2$ kuulub sellesse ringi, siis valemi (8) põhjal

$$\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z - i\pi/2}\, dz = 2\pi i \sin\frac{i\pi}{2} = -2\pi \sinh\frac{\pi}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Lause 6 (Cauchy integraalvalem tuletiste korral). Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas D ja Γ kinnine iseennast mittelõikav joon selles piirkonnas ning ς kuulub joone Γ poolt hõlmatavasse piirkonda, siis funktsioon $f(z)$ on punktis ς lõpmata arv kordi diferentseeruv, kusjuures

$$f^{(n)}(\varsigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\varsigma)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{9}$$

Näide 5. Leiame $\int_{|z|=5} \dfrac{e^z}{(z+i\pi)^4}\, dz$.

Kuna e^z on analüütiline ringis $|z| < 5$ ja $\varsigma = -i\pi$ kuulub sellesse ringi, siis $n = 3$ korral saame valemi (9) abil

$$\begin{aligned}\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z+i\pi)^4}\,dz &= \frac{2\pi i}{3!}\left(e^{\varsigma}\right)'''\Big|_{\varsigma=-i\pi} = \frac{2\pi i}{3!}e^{-i\pi} = \\ &= \frac{\pi i}{3}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -\frac{i\pi}{3}. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Lause 7. Iga ringis $|z - c| < R$ analüütiline funktsioon $f(z)$ on selles ringis ühesel viisil arendatav astmeritta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-c)^k\,, \tag{10}$$

kus $c_k = f^{(k)}(c)/k!$

Näide 6. Leiame funktsiooni $f(z) = 2/(1+3z)$ arenduse astmeritta $z - i - 1$ astmete järgi ringis $|z - i - 1| < 5/3$.

Näidake, et $z = -1/3$ on selle funktsiooni ainus iseärane punkt. Kuna punkti $i + 1$ kaugus punktist $-1/3$ on

$$|i + 1 - (-1/3)| = |i + 4/3| = 5/3,$$

siis see funktsioon on analüütiline rõngas $|z - i - 1| < 5/3$ ja Lause 7 põhjal on see funktsioon ühesel viisil arendatav astmeritta $z - i - 1$ astmete järgi ringis $|z - i - 1| < 5/3$. Et

$$1/(1-q) \overset{|q|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

siis

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+3z} &= \frac{2}{4+3i+3(z-i-1)} = \\ &= \frac{2}{4+3i}\frac{1}{1-\dfrac{-3(z-i-1)}{4+3i}} = \left[\begin{array}{c}\left|\dfrac{-3(z-i-1)}{4+3i}\right| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z-i-1| < 5/3\end{array}\right] = \\ &= \frac{2}{4+3i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3(z-i-1)}{4+3i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2\cdot 3^k(z-i-1)^k}{(4+3i)^{k+1}}. \quad \diamondsuit\end{aligned}$$

Laurent'i rida

Definitsioon 1. Funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-c)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-c)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k$$

nimetatakse *Laurenti reaks* $z-c$ astmete järgi, kusjuures $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-c)^k$ nimetatakse *Laurent'i rea peaosaks* ja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k$ *Laurent'i rea korrapäraseks osaks*.

Lause 1. Rõngas $r < |z-c| < R$ analüütiline funktsioon $f(z)$ on selles rõngas ühesel viisil arendatav Laurent'i ritta kujul

$$f(z) \overset{r<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-c)^k .$$

NB! Erinevate rõngaste korral on üldjuhul Laurent'i rea kordajad erinevad.

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti c nimetatakse *isoleeritud iseäraseks punktiks*, kui leidub selline punkti c ümbrus, milles ei ole selle funktsiooni teisi iseärasid punkte.

Järgnevas käsitleme vaid isoleeritud iseäraseid punkte. Kui c on funktsiooni $f(z)$ isoleeritud iseärane punkt, siis leidub selline rõngas $0 < |z-c| < R$, milles $f(z)$ on analüütiline. Lause 1 põhjal on $f(z)$ selles rõngas arendatav Laurent'i ritta

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-c)^k . \tag{1}$$

Definitsioon 3. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti c nimetatakse *kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks*, kui arenduses (1) puuduvad $z-c$ negatiivsed astmed, st

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k .$$

Definitsioon 4. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti c nimetatakse *pooluseks*, kui arenduses (1) on $z-c$ negatiivseid astmeid vaid lõplik arv.

Definitsioon 5. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti c nimetatakse *m-ndat järku pooluseks*, kui arendus (1) on kujul

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-c)^k \quad (c_{-m} \neq 0) .$$

Definitsioon 6. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti c nimetatakse oluliselt iseäraseks punktiks, kui arenduses (1) peaosa liikmete arv on lõpmatu.

Näide 1. Leiame funktsiooni $f(z) = (\sin z)/z$ iseärase punkti $z = 0$ liigi.

Nii $\sin z$ kui ka z on analüütilised kogu komplekstasandil. Seega $(\sin z)/z$ on analüütiline kogu komplekstasandil, välja arvatud $z = 0$. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0 < |zc| < +\infty$:

$$\frac{\sin z}{z} \overset{|z|<\infty}{=} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!}{z} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Kuna $(\sin z)/z$ arenduses muutuja z astmete järgi puuduvad negatiivsed astmed, siis vastavalt Definitsioonile 3 on tegemist kõrvaldatava iseärase punktiga. $\diamondsuit$

Näide 2. Leiame funktsiooni $f(z) = (1 - \cos z)/z^4$ iseärase punkti $z = 0$ liigi.

Punkt $z = 0$ on selle funktsiooni iseärane punkt. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0 < |z| < +\infty$:

$$\frac{1-\cos z}{z^4} \overset{|z|<\infty}{=} \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/(2k)!}{z^4} \overset{0<|z|<+\infty}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-4}}{(2k)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \frac{1}{2!z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-4}}{(2k)!}.$$

Vastavalt Definitsioonile 5 on tegemist teist järku poolusega.

Näide 3. Leiame funktsiooni $f(z) = e^{1/(z-i)}$ iseärase punkti $z = i$ liigi.

Punkt $z = i$ on selle funktsiooni iseärane punkt. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0 < |z - i| < +\infty$:

$$e^{1/(z-i)} \overset{(1/|z-i|)<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/(z-i))^k}{k!} \overset{0<|z-i|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(z-i)^k}$$

Vastavalt Definitsioonile 6 on tegemist oluliselt iseärase punktiga. $\diamondsuit$

Lause 2. Funktsiooni $f(z)$ iseärase punkti c korral kehtivad väited:

- c on kõrvaldatav iseärane punkt parajasti siis, kui eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{z\to c} f(z)$;
- c on poolus parajasti siis, kui $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$;

- c on oluliselt iseärane punkt parajasti siis, kui ei eksisteeri lõplikku ega lõpmatut piirväärtust funktsioonist $f(z)$ piirprotsessis $z \to c$.

Lõpmatuspunkti ∞ loeme iga funktsiooni $f(z)$ korral iseäraseks punktiks.

Definitsioon 7. Kui leidub selline $r > 0$, et $f(z)$ on analüütiline rõngas $r < |z| < +\infty$, siis lõpmatuspunkti nimetatakse funktsiooni $f(z)$ isoleeritud iseäraseks punktiks.

Definitsioon 8. Kui arenduses

$$f(z) \overset{r<|z-c|<+\infty}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \tag{2}$$

puuduvad muutuja z positiivsed astmed, siis ∞ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks.

Definitsioon 9. Punkti ∞ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *prooluseks*, kui arenduses (2) on muutuja z positiiseid astmeid vaid lõplik arv.

Definitsioon 10. Punkti ∞ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ korral m-ndat järku pooluseks, kui arendus (2) on kujul

$$f(z) \overset{r<|z-c|<+\infty}{=} \sum_{k=-\infty}^{m} c_k z^k \quad (c_m \neq 0)\,.$$

Definitsioon 11. Punkti ∞ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ korral oluliselt iseäraseks punktiks, kui arendus (2) on muutuja z positiiseid astmeid lõpmata arv.

Näide 4. Leiame funktsiooni $f(z) = \cos z^2$ iseärase punkti $z = \infty$ liigi.
Kuna

$$\cos z^2 \overset{|z^2|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\left(z^2\right)^{2k}}{(2k)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{z^{4k}}{(2k)!},$$

siis $z = \infty$ on Definitsiooni 11 põhjal funktsiooni $\cos z^2$ oluliselt iseärase punkt. $\diamondsuit$

7.11 Resiidid

Kui c on funktsiooni $f(z)$ (isoleeritud) iseärane punkt, siis

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, (z-c)^k \,. \tag{1}$$

Definitsioon 1. Kordajat c_{-1} Laurent'i arenduses (1) nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *resiidiks* punktis c.

Funktsiooni $f(z)$ *resiidiks* punktis c tähistatakse

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) \text{ või } \operatorname{res}\,[f(z), c]\,.$$

Kuna funktsiooni $f\,(z)$ Laurent'i arenduses (1) kõrvaldatava iseärase punkti c ümbruses puubub Laurent'i rea peaosa, siis kehtib järgmine väide.

Järeldus 1. Funktsiooni $f(z)$ resiid kõrvaldatavas iseärases punktis c võrdub nulliga.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z^4 \sin(1/z)$ resiidi iseärases punktis 0.

Kuna

$$z^4 \sin(1/z) \overset{0\leq|z|}{=} z^4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k-3}} = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k-3}},$$

siis $\operatorname{res}_{z=0} z^4 \sin(1/z) = 1/5! = 1/120.$ $\diamondsuit$

Lause 1. Kehtib seos

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-c|=r} f(z)dz, \tag{2}$$

kus $0 < r < R$ ja $f\,(z)$ on analüütiline rõngas $0 < |z-c| < R$.

Tõestus. Saame

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-c|=r} f(z)dz \overset{f(z)\overset{0<|z-c|<R}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-c)^k}{=} \\
= \;& \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-c|=r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-c)^k\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_{|z-c|=r} (z-c)^k\,dz = \\
= \;& \left[\begin{array}{l} z = c + re^{i\varphi}\ (0 \le \varphi \le 2\pi)\,, \\ dz = rie^{i\varphi}d\varphi \end{array}\right] = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i r^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi}d\varphi = \\
= \;& \left[\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi}d\varphi = \left\{\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} e^{i0\varphi}d\varphi = 2\pi,\ \text{kui } k=-1, \\ \dfrac{e^{i(k+1)2\pi} - e^{i(k+1)0}}{i\,(k+1)} = 0,\ \text{kui } k \ne -1 \end{array}\right.\right] = \\
= \;& c_{-1} = \operatorname{res}_{z=c} f(z). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lause 2. Kui $f(z)$ on analüütiline joone Γ poolt piiratud piirkonnas ja rajajoonel Γ, välja arvatud lõplik arv asetsevaid punkte $c_k\ (k = 1; \ldots ; n)$, siis

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=c_k} f(z).$$

Lause 3. Kui c on funktsiooni $f(z)$ m-järku poolus, siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to c}\frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}}. \tag{3}$$

Kuna c on funktsiooni $f(z)$ n-järku poolus, siis

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k\,(z-c)^k \quad (c_{-m} \ne 0)\,.$$

Seega

$$f(z)\,(z-c)^m \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k\,(z-c)^{k+m}$$

ja

$$\frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$\overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$\overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-1}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1}$$

ning

$$\lim_{z\to c} \quad \frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$= \lim_{z\to c} \sum_{k=-1}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1} =$$
$$= \quad (m-1)\,(m-2)\cdots 1 c_{-1} = (m-1)!\operatorname{res}_{z=c} f(z). \qquad \square$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $e^{2z}/\,(z-1)^3$ resiidi iseärases punktis 1. Näidake, et punkt 1 on selle funktsiooni kolmandat järku poolus. Valemi (3) põhjal

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=c} f(z) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1} \frac{d^2\left[\left(e^{2z}/\,(z-1)^3\right)(z-1)^3\right]}{dz^2} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2 e^{2z}}{dz^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1} 4e^{2z} = 2e^2. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Järeldus 1. Kui c on funktsiooni $f(z)$ lihtne poolus, siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}\,\left[f(z)\,(z-c)\right] \tag{4}$$

Näide 3. Leiame funktsiooni $(\cos z)\,/\,(z-2)$ resiidi iseärases punktis 2. Näidake, et punkt 2 on selle funktsiooni lihtne poolus. Valemi (4) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=2}\frac{\cos z}{z-2} = \lim_{z\to 2}\,\left[\left((\cos z)\,/\,(z-2)\right)(z-2)\right] = \lim_{z\to 2}\cos z = \cos 2. \qquad \diamondsuit$$

Järeldus 2. Kui c on funktsiooni $f(z)$ lihtne poolus ja

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{5}$$

kusjuures $\varphi(c) \neq 0$, $\psi(c) = 0$ ning $\psi(c) \neq 0$ siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{\varphi(c)}{\psi'(c)}. \tag{6}$$

Tõestus. Seoste (4) ja (5) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-c)\right] = \frac{\lim_{z\to c}\varphi(z)}{\lim_{z\to c}\dfrac{\psi(z)-\psi(c)}{(z-c)}} = \frac{\varphi(c)}{\psi'(c)}. \quad \square$$

Näide 4. Leiame valemi (6) abil funktsiooni $(\cos z)/(z-2)$ resiidi iseärases punktis 2.

Valime $\varphi(z) = \cos z$ ja $\psi(z) = z-2$. Et $\varphi(2) = \cos 2 \neq 0$ ja $\psi(2) = 0$ ning $\psi'(2) = 1 \neq 0$, siis valemi (6) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=2}\frac{\cos z}{z-2} = \frac{\cos 2}{1} = \cos 2. \qquad \diamondsuit$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(z)$ resiidiks punktis ∞ defineeritakse, kui

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} f(z)dz,$$

kus $0 < r < R$ ja $f(z)$ on analüütiline rõngas $r < |z-c| < +\infty$.

Tõestage järgmine väide.

Lause 3. Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline kogu laiendatud kompleks-tasandil, välja arvatud lõplik arv punkte c_k $(k = 1; \ldots; n)$, siis

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z=c_k} f(z) = 0.$$

7.12 Pideva lineaarse operaatori normi arvutamise näited

I Uurime diferentseerimisoperaatorit

$$D: \ C^1[a,b] \to C[a,b],$$

kus kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsiooonide ruum $C[a,b]$ on varustatud normiga

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x(t)|$$

ja kõigi lõigul $[a,b]$ diferentseeruvate funktsiooonide ruum $C^1[a,b]$ normiga

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x(t)| + \max_{a \le x \le b} |x'(t)|.$$

Ülesaanne 1. Tõestage, et D on lineaarne operaator.
Lause 1. Operaator D on tõkestatud ja pidev ning $\|D\| = 1$.
Tõestus. Et

$$\begin{aligned} \|Dx\|_{C[a,b]} &= \|x'(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x'(t)| \le \\ &\le \max_{a \le x \le b} |x(t)| + \max_{a \le x \le b} |x'(t)| \le 1 \cdot \|x\|_{C^1[a,b]}, \end{aligned}$$

siis D on tõkestatud. Iga lineaarne tõkestatud operaator on pidev. Et

$$\|Dx\|_{C[a,b]} \le 1 \cdot \|x\|_{C^1[a,b]},$$

siis $\|D\| \le 1$. Funktsioonide jada $\{e^{nt}\}$ korral $e^{nt} \in C^1[a,b]$, kusjuures

$$\begin{aligned} \left\|e^{nt}\right\|_{C^1[a,b]} &= \max_{a \le x \le b} \left|e^{nt}\right| + \max_{a \le x \le b} \left|ne^{nt}\right| = (n+1) \max_{a \le x \le b} e^{nt}, \\ \left(e^{nt}\right)' &= ne^{nt}, \ \left\|\left(e^{nt}\right)'\right\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} \left|ne^{nt}\right| = n \max_{a \le x \le b} e^{nt}. \end{aligned}$$

Seega

$$\frac{\|De^{nt}\|_{C[a,b]}}{\|e^{nt}\|_{C^1[a,b]}} = \frac{n}{n+1}$$

ja

$$\sup_n \frac{\|De^{nt}\|_{C[a,b]}}{\|e^{nt}\|_{C^1[a,b]}} = 1$$

ning $\|D\| \ge 1$. Järelikult $\|D\| = 1$. $\square$

II Uurime operaatorit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$

Lause 1. Kui $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ ja ruumides $\mathbf{R}^m$ ning $\mathbf{R}^n$ kasutada 2-normi, siis

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu \in \lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\| A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest.

Tõestus. Normi $\| A\|_2$ leidmiseks leiame esiteks $\| A\|_2^2$. Seega,

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \ \| A\|_2^2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}.$$

Olgu $A^T A = B \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Maatriks B on sümmeetriline maatriks, sest

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A.$$

Saame

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

ja

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1\,;\,1} & \cdots & b_{1\,;\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n\,;\,1} & \cdots & b_{n\,;\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{1\,;\,n}\xi_n \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ b_{n\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{n\,;\,n}\xi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\xi_1 \sum_{j=1}^{n} b_{1;\,j}\xi_j + \ldots + \xi_n \sum_{j=1}^{n} b_{n;\,j}\xi_j \right).$$

Seega $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$ on n muutuja $\xi_1, \ldots, \xi_n$ funktsioon ning

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}\right)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n} b_{j;\,i}\xi_j \overset{b_{i;\,j} = b_{j;\,i}}{=} 2\sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j = 2\left(A^T A\mathbf{x}\right)_i,$$

$$\frac{\partial(\,\mathbf{x}^T\mathbf{x})}{\partial \xi_i} = 2\xi_i = 2\left(\mathbf{x}\right)_i,$$

kus $(\mathbf{x})_i$ on vektori $\mathbf{x}$ i-s komponent. Ülesandeks on leida $\max \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$ lisatingimusel $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. See on tingliku ekstreemumi leidmise ülesanne. Selle lahendamiseks moodustame abifunktsiooni

$$\Phi(\xi_1; \ldots, \xi_n; \rho) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} + \mu\left(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}\right).$$

Funktsiooni Φ statsionaarsete punktide leidmiseks koostame võrrandisüsteemi:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} = 0 \ \ (i = 1:n) \ \ \wedge \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0$$

st

$$\begin{cases} 2\left(A^T A\mathbf{x}\right)_i - 2\mu\,(\mathbf{x})_i = 0 \ \ (i = 1:n) \\ 1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\,, \\ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\,. \end{cases}$$

Seega iga statsionaarne punkt tingliku ekstreemumi jaoks on maatriksi $A^T A$ omaväärtusele vastav normeeritud vektor $\mathbf{x}$. Avaldame seosest $A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ omaväärtuse μ . Saame, et $\mu = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$, kusjuures $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. Võrreldes saadud tulemust lähtevalemiga $\|A\|_2^2$ leidmiseks, näeme,et $\|A\|_2^2 = \max\limits_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu$.
Seega,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\| A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest.

Ülesanne 1. Leidke maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

norm $\|A\|_2$.

Ülesanne 2. Leidke maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

norm $\|A\|_2$.

Ülesanne 3.* Leidke maatriksi A norm $\|A\|_2$, kui

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.13 Omaväärtused ja omavektorid

Definitsioon 1. Kui

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{1}$$

kus $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ ja λ on arv, siis arvu λ nimetatakse maatriksi A *omaväärtuseks* ja vektorit x sellele omaväärtusele λ vastavaks maatriksi A *(parempoolseks) omavektoriks.*

Definitsioon 2. Vektorit $\mathbf{x}$ nimetatakse maatriksi A *vasakpoolseks omavektoriks*, kui $\mathbf{x}^H A = \lambda\mathbf{x}^H$, kus $\mathbf{x}^H$ on transponeeritud kaasmaatriks.

Lause 1. Kui $\mathbf{x}$ on omaväärtusele λ vastav maatriksi A vasakpoolne omavektor, siis see $\mathbf{x}$ on omaväärtusele $\overline{\lambda}$ vastav maatriksi A^H parempoolne omavektor.

Tõestus. Saame väidete ahela

$$\mathbf{x}^H A = \lambda\mathbf{x}^H \Leftrightarrow (\mathbf{x}^H A)^H = (\lambda\mathbf{x}^H)^H \Leftrightarrow A^H\mathbf{x} = \overline{\lambda}\mathbf{x}. \ \square$$

Nendime, et kui $\mathbf{x}$ on omaväärtusele λ vastav omavektor, siis on seda ka $c\mathbf{x}$, kus $c \in \mathbf{C}$. Seos (1) on esitatav kujul

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0, \tag{2}$$

kus I on $n\times n$ ühikmaatriks. Kuna omaväärtusprobleemil (1) on iga ruutmaatriksi A korral omavektoriks nullvektor, siis järgnevas piirdume vaid mittetriviaalsete omavektorite uurimisega. Seos (2) kujutab endast homogeenset lineaarset algebralist võrrandisüsteemi, millel on mittetriviaalseid lahendeid vaid siis, kui selle süsteemi maatriks $A - \lambda I$ on singulaarne, s.t.

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Võrrandit (3) nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks võrrandiks* ja polünoomi

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks polünoomiks.* Võrrand (3) on $n-$järku algebraline võrrand suuruse λ suhtes ning on kirja pandav kujul:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Algebra põhiteoreemi kohaselt on maatriksil $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ parajasti n omaväärtust, arvestades kordsust.

Definitsioon 3. Maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kõigi omaväärtuste hulka $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (siin võib olla võrdseid!) nimetatakse maatriksi A *spektriks* ja tähistatakse $\lambda(A)$.

Näide 1. Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

omaväärtused ja omavektorid.

Koostame antud maatriksile vastava karakteristliku võrrandi (3):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Arvutades determinandi, saame kuupvõrrandi

$$(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = 0,$$

mille lahendeiks on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 3$. Leiame omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid. Selleks paigutame süsteemi (2) suuruse λ väärtuse 0 ja lahendame saadud süsteemi:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1-0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sõltumatuid võrrandeid jääb üks,

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

ja süsteemi vabadusastmete arv on 2 ning süsteemi üldlahendiks on

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q-p \\ q \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kus p ja q suvalised reaalarvud. Järelikult, omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid $\mathbf{x}$ moodustavad ruumi $\mathbf{R}^3$ kahemõõtmelise alamruumi, mille baasivektoreiks võime valida vektorid $\mathbf{x_1} = [-1 \;\; 0 \;\; 1]^T$ ja vektorid $\mathbf{x_2} = [-1 \;\; 1 \;\; 0]^T$. Omaväärtusele $\lambda_3 = 3$ vastavate omavektorite leidmiseks tuleb võrrandisüsteemis (2) suurus λ asendada selle väärtusega 3. Tulemusena tuleb lahendada võrrandisüsteem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Selle süsteemi vabadusastmete arv on 1 ning maatriksi A omaväärtusele $\lambda_3 = 3$ vastavad omavektorid avalduvad kujul

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja moodustavad ruumis $\mathbf{R}^3$ ühemõõtmelise alamruumi, baasivektoriga $\mathbf{x_3} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

Ülesanne 1.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b)\; A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad c)\; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 2.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\; A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lause 2. Kui $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ on maatriksi A omaväärtused, siis

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Tõestus. Karakteristliku võrrandi (3) vasak pool, nullkohtadega $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on esitatav kujul

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n). \tag{6}$$

Võttes selles seoses $\lambda = 0$, saame lause väite. $\square$

Järeldus 1. Regulaarse maatriksi A ükski omaväärtus ei ole 0.

Lause 3. Kui $\mathbf{x}$ on regulaarse maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis sama vektor $\mathbf{x}$ on pöördmaatriksi A^{-1} omaväärtusele $1/\lambda$ vastav omavektor.

Tõestuseks korrutame seose (2) mõlemat poolt vasakult maatriksiga A^{-1}. Leiame, et $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x}$ ehk $A^{-1}x = (1/\lambda)\mathbf{x}$. $\square$

Lause 4. Kui $\mathbf{x}$ on maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis sama vektor $\mathbf{x}$ on maatriksi A^2 omaväärtusele λ^2 vastavaks omavektoriks.

Tõestus. See väide järeldub võrduste ahelast:

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}. \ \square$$

Ülesanne 3.* Olgu suurused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused. Tõestage, et suurused $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ on maatriksi A^k $(k \in N)$ omaväärtused.

Ülesanne 4.* Tõestage, et kui suurused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused, siis suurused $\lambda_1 \pm \mu, \ldots, \lambda_n \pm \mu$ on maatriksi $A \pm \mu I$ omaväärtused.

Lause 5. Maatriksi A jälg , st tema peadiagonaalil paiknevate elementide summa, võrdub maatriksi A kõigi omaväärtuste summaga.

Tõestuseks kasutame seost (6). Selle seose vasaku poole arenduses suuruse λ astmete järgi on astme λ^{n-1} kordajaks $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ ja paremas pooles $(-1)^{n+1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$. $\square$

Näide 2.* Olgu teada maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

kolm omaväärtust: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 6$. Leiame maatriksi A neljanda omaväär-
tuse ja determinandi.
Kuna maatriksi A jälg võrdub maatriksi A kõigi omaväärtuste summaga, siis

$$4 + 2 + 3 + 7 = 4 + 1 + 6 + \lambda_4 \;\Rightarrow\; \lambda_4 = 5.$$

Leiame maatriksi A determinandi

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 120.$$

Ülesanne 5.* On teada, et maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 67 & 266 & -30 & 64 \\ -24 & -91 & 12 & -20 \\ -6 & -42 & 10 & -12 \\ 42 & 126 & -21 & 21 \end{pmatrix}$$

kolm omaväärtust: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -7$, $\lambda_3 = 21$. Leidke maatriksi A neljas omaväär-
tus ja determinant.

Lause 6. Nii ülemise kui ka alumise kolmnurkse maatriksi omaväärtusteks on kõik peadiagonaali elemendid ja ainult need.

Tõestus. Vaatleme selle väite tõestust ülemise kolmnurkse maatriksi A korral. Koostame vastava karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinandi arendamine annab karakteristlikule võrrandile kuju

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0. \;\Box$$

Ülesanne 6.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b)\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lause 7. Maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. Olgu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ maatriksi A erinevatele omaväärtustele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ $(k = 2 : n)$ vastavad omavektorid. Näitame, et nende omavektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu. Lihtsuse mõttes viime selle tõestuse läbi vaid $k = 2$ korral. Oletame väitevastaselt, et vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ on lineaarselt sõltuv, st

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 = 0 \ \wedge \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0. \tag{7}$$

Korrutame seoses (7) esineva võrduse mõlemat poolt vasakult maatriksiga A. Saame,

$$\alpha_1 A \mathbf{x}_1 + \alpha_2 A \mathbf{x}_2 = 0 \tag{8}$$

ehk

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 = 0. \tag{9}$$

Korrutades seoses (7) esinevat võrdust suurusega λ_1 ja lahutades saadud tulemuse seosest (9), saame

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}_2 = 0.$$

Selle seose vasakus pooles saab nulliga võrduda vaid esimene tegur, $\alpha_2 = 0$. Analoogiliselt, korrutades seoses (7) esinevat võrdust suurusega λ_2 , jõuame võrduseni $\alpha_1 = 0$. Seega $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 0$, mis on vastuolus eeldusega (7). Järelikult, omavektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ on lineaarselt sõltumatu. $\square$

Oletame, et maatriksi A omavektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ on lineaarselt sõltumatu. Moodustame $n \times n$ ruutmaatriksi S, valides esimeseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_1$, teiseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, n-ndaks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_n$, st

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Tähistame

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Eelpool toodud näite 1 korral

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lause 8. Kui maatriksil A on n lineaarselt sõltumatut omavektorit $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, siis maatriks A on esitatav kujul

$$A = S\Lambda S^{-1}, \tag{12}$$

kus maatriksid S ja Λ on määratud vastavalt seostega (10) ja (11) .

Tõestuseks piisab näidata, et

$$AS \;=\; S\Lambda. \tag{13}$$

Lähtume seose (13) vasakust poolest:

$$AS = A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

Lähtume seose (13) paremast poolest:

$$S\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

Järelikult peab seos (13) paika, ja seega ka seos (12), aga samuti ka seos

$$\Lambda \;=\; S^{-1}AS. \;\square \tag{14}$$

Näide 3.* Leiame 3×3-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 3 \;\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = -2 \;\Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_3 = 1 \;\Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Kuna otsitav maatriks A on esitatav kujul $A = S\Lambda S^{-1}$, kus

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \;\wedge\; \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siis

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 4 & -6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 1 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 7.* Leiame 2×2-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;\wedge\; \lambda_2 = 2 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 8.* Leiame 3×3-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 3 \;\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = -3 \;\Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_3 = 5 \;\Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Näide 4.* Leiame maatriksid A^{100} ja A^{155}, kui

$$A = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ 56 & -41 \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$\begin{vmatrix} 41-\lambda & -30 \\ 56 & -41-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 1 = 0$$

ja

$$\lambda_1 = 1 \;\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;\wedge\; \lambda_2 = -1 \;\Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ning

$$A = S\Lambda S^{-1} \;\wedge\; \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\wedge\; S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \wedge\; S^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

siis

$$A^{100} = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^{100}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ja

$$A^{155} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{155} & 0 \\ 0 & (-1)^{155} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ 56 & -41 \end{pmatrix} = A.$$

Ülesanne 9.* Leidke maatriksid A^{100} ja A^{155}, kui

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -21 & 8 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} -20 & 42 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}.$$

Lause 9. Kui maatriksi A ja B kõik omaväärtused on ühekordsed ning maatriksid A ja B on kommuteeruvad, siis neil on ühised omavektorid.

Tõestame selle väite. Olgu $\mathbf{x}$ maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, st peab paika seos (2) . Korrutame seose (2) mõlemat poolt vasakult maatriksiga B ja arvestame eeldust, maatriksite A ja B kommuteeruvust. Tulemuseks saame seoste ahela:

$$A\mathbf{x} = \lambda x \ \Rightarrow\ B(A\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) \ \Leftrightarrow\ (BA)\mathbf{x} = \lambda(B\mathbf{x}) \ \Leftrightarrow\ A(B\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x}).$$

Seega, kui $\mathbf{x}$ on maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis ka $B\mathbf{x}$ on maatriksi A samale omaväärtusele λ vastav omavektor. Kuna maatriksi A ühekordsele omaväärtusele vastav omavektorite hulk on ruumi $\mathbf{R}^n$ ühemõõtmeline alamruum, siis vektorid $\mathbf{x}$ ja $B\mathbf{x}$ on kollineaarsed, s.t.

$$\exists\mu : B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}.$$

Järelikult, maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor x on ka maatriksi B omavektoriks, mis vastab maatriksi B omaväärtusele μ . Analoogiliselt saab näidata, et maatriksi B iga omavektor on ka maatriksi A omavektor. $\square$

Lause 10. Kui maatriksitel $A,\ B \in \mathbf{C}^{n\times n}$on n ühist lineaarselt sõltumatut omavektorit, siis need maatriksid on kommuteeruvad.

Tõestus. Lause 2.5.8 põhjal on need maatriksid esitatavad kujul

$$A = S\Lambda S^{-1}, \qquad B = S\Upsilon S^{-1}, \tag{15}$$

kus S on neist n omavektorist kui veeruvektorist moodustatud maatriks ja Λ on diagonaalmaatriks, mille peadigonaalil on maatriksi A omaväärtused ning
Υ on diagonaalmaatriks, mille diagonaalil on maatriksi B omaväärtused. Leiame korrutised AB ja BA, kasutades seoses (15) antud esitusi:

$$AB = S\Lambda S^{-1} S\Upsilon S^{-1} = S\Lambda\Upsilon S^{-1}$$

ja

$$BA = S\Upsilon S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Upsilon\Lambda S^{-1}.$$

Kuna diagonaalmaatriksid Λ ja Υ on kommuteeruvad, siis $AB = BA$, mida oligi vaja tõestada. $\square$

Lause 11 (Cayley-Hamiltoni teoreem)**.** Kui $A \in C^{n\times n}$ ja

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

siis $p(A) = 0$, st maatriks A rahuldab oma karakteristlikku võrrandit.