8 Read

8.1 Rida. Rea summa

Reaks nimetatakse lõpmatut summat

$$u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_k + \ \dots \ = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{8.1}$$

Liidetavaid selles summas nimetatakse rea liikmeteks ja liiget u_k rea *üldliikmeks*. Üldliikmest saame indeksile k väärtusi andes konkreetsed liikmed.

Kui rea liikmed on reaalarvud, nimetatakse rida *arvreaks*. Kui aga liikmed on muutuja x funktsioonid, st $u_k = u_k(x)$, $k = 1, \ 2, \ \dots$, nimetatakse rida *funktsionaalreaks*. Esmalt vaatleme arvridu.

Tuntumad arvread on geomeetriline rida

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ \dots \ + a_1 q^k + \ \dots \ = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 q^k \tag{8.2}$$

ja harmooniline rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots \ + \frac{1}{k} + \ \dots \ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{8.3}$$

Rea n-ndaks osasummaks S_n nimetatakse esimese n liikme summat, st

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Osasummadest

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

....

$$S_n = u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_n$$

....

tekib rea osasummade jada

$$S_1, \ S_2, \ \dots, \ S_n, \ \dots \tag{8.4}$$

Definitsioon. Rida (8.1) nimetatakse *koonduvaks*, kui osasummade jadal (8.4) on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Seda piirväärtust S nimetatakse rea *summaks* ja kirjutatakse

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Kui osasummade jadal (8.4) piirväärtust ei eksisteeri või piirväärtus on lõpmatu, nimetatakse rida (8.1) *hajuvaks.*

Lõpliku arvu liikmete ärajätmine rea algusest ei mõjuta selle koonduvust. Kui koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

siis iga fikseeritud n väärtuse korral koondub ka

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

ja vastupidi.

Näide 1. Geomeetrilist jada (8.2) nimetatakse hääbuvaks, kui $|q| < 1$. Selle jada n-is osasumma on

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

ja summa

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q},$$

sest tingimuse $|q| < 1$ tõttu

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Näide 2. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

osasummade jada üldliikme S_n leidmiseks kasutame osamurdudeks lahutust

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

mille põhjal

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Rea summa

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Näide 3. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k+1} + \ldots$$

osasummade jada paarisarvuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n} = 0,$$

sest nendes osasummades on liidetavaid 1 ja -1 võrdselt. Osasummade jada paarituarvuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n-1} = 1,$$

sest liidetavaid 1 on ühe võrra rohkem. Järelikult osasummade jadal

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

piirväärtus puudub, st rida on hajuv.

8.2 Rea koonduvuseks tarvilik tingimus

Oletame, et rida (8.1) koondub ja selle summa on S, st

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Kirjutades n-ndas osasummas viimase liikme eraldi, saame

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n$$

ehk

$$S_n = S_{n-1} + u_n,$$

millest

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Eelduse kohaselt rida koondub, järelikult

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Sellega oleme saanud olulise tulemuse, nn *rea koonduvuseks tarviliku tingimuse.*

Teoreem 1. Kui rida (8.1) koondub, siis rea üldliikme piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{8.5}$$

Tarvilik on see tingimus selle tõttu, et ilma selle tingimuse täidetuseta rida koonduda ei saa.

Eelmise punkti näites 3 vaadeldud rida on ka selle tingimuse järgi hajuv, sest üldliikme $u_k = (-1)^{k+1}$ piirväärtus piirprotsessis $k \to \infty$ puudub.

Tuleb rõhutada, et tingimus (8.5) on rea koonduvuseks tarvilik, aga mitte piisav, st selle täidetusest ei järeldu rea koonduvus. Näiteks harmoonilise rea (8.3) korral on koonduvuseks tarvilik tingimus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

täidetud, kuid ometi on võimalik tõestada, et harmooniline rida on hajuv.

8.3 Positiivsete liikmetega ridade koonduvustunnused

Käesolevas punktis vaatleme positiivsete liikmetega arvridu, st ridu (8.1), mille liikmed

$$u_k > 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Olgu lisaks reale (8.1) antud veel teine positiivsete liikmetega arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{8.6}$$

Matemaatiline analüüs I kursuses esines teoreem, millest järeldub, et monotoonselt kasvaval tõkestatud jadal on olemas (lõplik) piirväärtus. Kehtib ka vastupidine, jada

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

piirväärtus on definitsiooni kohaselt S, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists N$, et kui $n \geq N$, siis

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$-\varepsilon < S_n - S < \varepsilon$$

ehk

$$S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon,$$

st vaadeldav jada on tõkestatud. Seega kehtib.

Teoreem 1. Monotoonselt kasvaval jadal on lõplik piirväärtus parajasti siis, kui jada on tõkestatud.

Positiivsete liikmetega arvridade osasummade jadad on kasvavad, sest $S_n = S_{n-1} + u_n$ ja et $u_n > 0$, siis $S_n > S_{n-1}$.

Teoreem 2 (võrdlustunnus). Kui alates indeksist k_0, st $k \geq k_0$ korral on täidetud tingimus

$$u_k \leq v_k, \tag{8.7}$$

siis

1) rea (8.6) koonduvusest järeldub rea (8.1) koonduvus ja

2) rea (8.1) hajuvusest järeldub rea (8.6) hajuvus.

Tõestus. Lõpliku arvu liikmete lisamine või ärajätmine rea koonduvust ei mõjuta, seepärast võime üldsust kitsendamata eeldada, et tingimus (8.7) on täidetud ka indeksite $1 \leq k \leq k_0 - 1$ korral. Tähistame rea (8.1) osasummad

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ja rea (8.6) osasummad

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Kui rida (8.6) koondub, siis osasummade jadal

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \ \ldots, \ \sigma_n, \ \ldots, \tag{8.8}$$

on olemas piirväärtus. Teoreemi 1 järgi on see jada tõkestatud ehk $\sigma_n \leq M$. Aga siis (8.7) tõttu on tõkestatud ka rea (8.1) osasummade jada (8.4) ja teoreemi 1 kohaselt on sellel jadal olemas piirväärtus, st rida (8.1) koondub.

Vastupidi, kui (8.1) hajub, peab selle osasummade jada olema tõkestamata, millest tingimuse (8.7) tõttu on tõkestamata ka rea (8.6) osasummade jada (8.8) ja teoreemi 1 põhjal ei saa sellel olla lõplikku piirväärtust.

Näide 1. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ \ldots \ + \frac{1}{k^2} + \ \ldots \ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

koondub.

Punkti 8.1 näites 2 tõestasime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$$

koonduvuse. Iga $k = 2, \ 3, \ \ldots$ korral kehtiva võrratuse

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

tõttu järeldub teoreemist 2 vaadeldava rea koonduvus.

Näide 2. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ \ldots \ + \frac{1}{\sqrt{k}} + \ \ldots \ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

hajub.

Iga $k > 1$ korral $\sqrt{k} < k$ ehk

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

Harmooniline rida (8.3) hajub, seega teoreemi 2 põhjal hajub ka vaadeldav rida.

Teoreem 3 (D'Alemberti tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = D$$

Kui $D < 1$, siis rida (8.1) koondub. Kui $D > 1$, siis rida (8.1) hajub. Kui $D = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Tõestus. Olgu piirväärtus $D < 1$ ja rahuldagu reaalarv q tingimust $D < q < 1$. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub selline $N > 0$, et kui $k \geq N$, siis

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} - D \right| < q - D,$$

millest

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < q$$

ehk $u_{k+1} < qu_k$, st $u_{k+i} < q^i u_k$ ja $q < 1$ tõttu

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{k+i} < u_k \sum_{i=0}^{\infty} q^i = u_k \frac{1}{1-q}$$

Seega rida

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_k q^i$$

koondub ja võrdlustunnuse põhjal koondub ka

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{k+i}$$

ning selle põhjal, et lõplik arv liikmeid rea koonduvust ei mõjuta, koondub ka (8.1).

Kui $D > 1$, siis $1 < q < D$ korral

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} - D \right| < D - q,$$

tõttu

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - D > q - D,$$

ehk

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > q,$$

millest $u_{k+1} > qu_k$ ja rea koonduvuseks tarvilik tingimus ei ole täidetud. Järelikult kui $D > 1$, siis rida (8.1) hajub.

Teoreem 4 (Cauchy tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = C$$

Kui $C < 1$, siis rida (8.1) koondub. Kui $C > 1$, siis rida (8.1) hajub. Kui $C = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Tõestus on sarnane D'Alemberti tunnuse tõestusega.

Näide 3. Uurime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

koonduvust.

Kõigepealt kasutame koonduvuse uurimiseks D'Alemberti tunnust. Üldliige $u_k = \dfrac{k^2}{2^k}$, seega

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} : \frac{k^2}{2^k} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2}{2}$$

ja

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Tulemusest $D = \dfrac{1}{2} < 1$ järeldame, et rida koondub.

Uurime sama rea koonduvust ka Cauchy tunnuse abil. Selleks leiame $\sqrt[k]{u_k} = \dfrac{\sqrt[k]{k^2}}{2}$ ja arvutame piirväärtuse

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} k^{\frac{2}{k}}$$

Tegemist on ∞^0 tüüpi määramatusega, seega piirväärtuse arvutamiseks kasutame L'Hospitali reeglit ja leiame

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \ln k^{\frac{2}{k}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} \ln k \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{(2\ln k)'}{k'} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0 \end{aligned}$$

ja

$$C = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} < 1$$

Sellega on vaadeldava rea koonduvus tõestatud ka Cauchy tunnuse abil.

Teoreem 5 (integraaltunnus). Olgu $u(x)$ poollõigul $[1;\infty)$ monotoonselt kahanev funktsioon, mille väärtusteks täisarvuliste argumentide korral on rea (8.1) liikmed, st $u(k) = u_k$. Siis rida (8.1) koondub parajasti siis, kui koondub päratu integraal

$$\int_1^\infty u(x)dx$$

Tõestus. Eelduse järgi päratu integraal

$$\int_1^\infty u(x)dx$$

koondub, st on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N u(x)dx$$

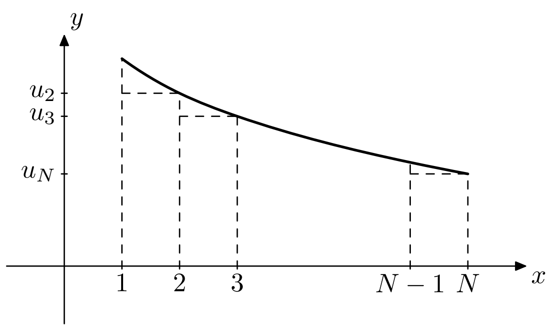
Jättes reas (8.1) ära esimese liikme, saame rea

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k$$

mille n-is osasumma on

$$S_n = \sum_{k=2}^{N} u_k \tag{8.9}$$

Joonisel 8.1 on kõvertrapetsi, mis ülalt on piiratud $u = u(x)$ graafikuga,



Joonis 8.1.

sisse kujutatud $N - 1$ ristkülikut, mille kõikide alused on 1 ühik ja kõrgused u_2, u_3, ... , u_N. Nende ristkülikute pindalade summa on osasumma (8.9), mis ilmselt on väiksem kui kõvertrapetsi pindala, st

$$S_n \leq \int_1^\infty u(x)dx$$

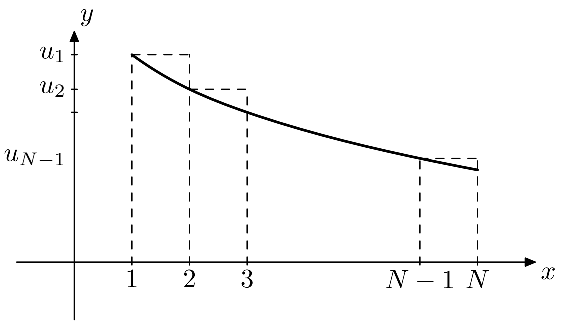
ehk osasummade jada (8.9) on tõkestatud ja rea liikmete positiivsuse tõttu kasvav. Järelikult on sellel jadal teoreemi 1 põhjal olemas lõplik piirväärtus, st rida

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k$$

koondub. Et ühe liikme lisamine rea koonduvust ei mõjuta, siis koondub ka

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Vastupidi, koondugu rida (8.1).



Joonis 8.2.

Kõvertrapetsi pindala

$$\int_1^N u(x)dx$$

on väiksem kui $N-1$ ristküliku pindalade summa

$$u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + ... + u_{N-1} \cdot 1 = S_{N-1}$$

ja, arvestades, et $u_N > 0$, siis ka

$$\int_1^N u(x)dx \leq S_N$$

Kuid siis ka piirväärtuse omaduse tõttu

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N u(x)dx \leq \lim_{N\to\infty} S_N$$

Eelduse tõttu

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N u(x)dx \leq S$$

st päratu integraal

$$\int_{1}^{\infty} u(x)dx$$

koondub.

Näide 4. Uurime harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

koonduvust.

Integraaltunnuse kasutamiseks vaatleme funktsiooni $u(x) = \frac{1}{x}$, sest sel juhul

$$u_k = u(k) = \frac{1}{k}$$

Aga päratu integraal

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

hajub, sest nimetajas on muutuja x astendaja 1. Järelikult hajub integraaltunnuse põhjal ka harmooniline rida.

8.4 Vahelduvate märkidega read. Leibnizi tunnus

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k, \tag{8.10}$$

kus $u_k > 0, \ \ k = 1, \ 2, \ \ldots$

Teoreem 1. (Leibnizi tunnus) Kui

1) $u_k > u_{k+1}$, $k = 1, \ 2, \ \ldots$ ja

2) $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, siis vahelduvate märkidega rida (8.10) koondub.

Tõestus. Vaatleme osasummade osajada

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} u_k$$

Selles jadas võtame liikmed paarikaupa järgmisel viisil

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Esimese tingimuse tõttu on kõik liikmed selles avaldises positiivsed ja ühe liikme lisamine suurendab summat, st jada on kasvav. Teiseks, kirjutades

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - u_{2n},$$

näeme, et osasummad S_{2n} on tõkestatud, sest $S_{2n} < u_1$.

Seega on jada, mille üldliige on S_{2n} kasvav ja tõkestatud, järelikult koonduv, st $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

Paarituarvulise indeksiga osasummade jada liige $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ ja teoreemi teise eelduse tõttu

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S$$

Aga siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, mis tähendabki, et rida (8.10) koondub.

Näide. Rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

rahuldab mõlemat teoreemi 1 eeldust, sest

$$1 > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} > \ldots$$

ja $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ ning järelikult on koonduv.

8.5 Muutuvate märkidega read. Absoluutne ja tingimisi koonduvus

Selles punktis loobume eeldusest, et rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{8.11}$$

liikmed on positiivsed. Märkide jaotus reas võib olla ükskõik missugune. Niisugust rida nimetatakse *muutuvate märkidega reaks.* Vahelduvate märkidega rida on muutuvate märkidega rea erijuht.

Definitsioon. Rida (8.11) nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub rida

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

Teoreem 1. Rea (8.11) absoluutsest koonduvusest järeldub selle koonduvus.

Tõestus. Tähistame absoluutväärtustest moodustatud rea n-nda osasumma

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

Eelduse järgi on rida absuluutselt koonduv, seega osasummade jada on tõkestatud, st

$$\sigma_n \leq \sigma$$

Olgu rea (8.11) n-ndas osasummas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

l positiivset liiget v_1, ..., v_l ja $n - l$ negatiivset liiget w_1, ... , w_{n-l}. Siis

$$S_n = V_l + W_{n-l}$$

kus

$$V_l = \sum_{k=1}^{l} v_k$$

on osasummas S_n esinevate positiivsete liikmete summa ja

$$W_{n-l} = \sum_{k=1}^{n-l} w_k$$

negatiivsete liikmete summa. Sel juhul

$$|V_l| + |W_{n-l}| = \sum_{k=1}^{l} |v_k| + \sum_{k=1}^{n-l} |w_k| = \sigma_n$$

millest järeldub, et osasummadest $|V_l|$ moodustatud jada on kasvav ja tõkestatud ning osasummadest $|W_{n-l}|$ moodustatud jada on kasvav ja tõkestatud. Punkti 8.3 teoreemi 1 põhjal eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{l\to\infty} |V_l|$$

ja

$$\lim_{(n-l)\to\infty} |W_{n-l}|$$

Kuid siis eksisteerivad ka piirväärtused

$$\lim_{l\to\infty} V_l$$

ja

$$\lim_{(n-l)\to\infty} W_{n-l}$$

ning ka

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{l\to\infty} V_l + \lim_{(n-l)\to\infty} W_{n-l}$$

st rida (8.11) koondub.

Teoreemi 1 järgi rea absoluutsest koonuvusest järeldub alati selle koonduvus. Vastupidine väide ei kehti. Rida võib olla koonduv, kuid mitte absoluutselt. Eelmise punkti näites vaadeldud vahelduvate märkidega rida on koonduv, kuid absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

on harmooniline rida, mis hajub.

Definitsioon. Koonduvat rida, mis absoluutselt ei koondu, nimetatakse *tingimisi koonduvaks* reaks.

Eeltoodut arvesse võttes saame öelda, et eelmise punkti näites vaadeldud rida on tingimisi koonduv rida.

Kui positiivsete liikmetega rea koonduvus ehk muutuvate märkidega rea absoluutne koonduvus leiab aset liikmete piisavalt kiire kahanemise tõttu, siis tingimisi koonduvus leiab aset selle tõttu, et rea erinevate märkidega liikmed koondavad üksteist.

8.6 Funktsionaalread

Funktsionaalreaks nimetatakse rida, mille liikmed on funktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{8.12}$$

Kui fikseerida argumendi x väärtus x_0, omandavad funktsioonid $u_k(x)$ kindlad arvulised väärtused $u_k(x_0)$, st väärtuse x_0 korral saame reast (8.12) arvrea.

Näide. Vaatleme funktsionaalrida

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{8.13}$$

Andes selles reas muutujale x väärtuse $x = \frac{1}{2}$, saame geomeetrilise rea,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

mille tegur on $\frac{1}{2}$ ja seega koondub.

Andes reas (8.13) muutujale x väärtuse $x = 1$, saame arvrea

$$1 + 1 + 1 + \ldots,$$

st arvrea, mille üldliikme piirväärtus on 1, st ei ole 0 ja mis järelikult hajub.

Andes reas (8.13) muutujale x väärtuse $x = -1$, saame arvrea

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^k + \ldots,$$

mis hajub.

Andes reas (8.13) muutujale x väärtuse $x > 1$, saame arvrea, mille üldliikme

$$u_k(x) = x^k$$

piirväärtus

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \infty$$

Andes reas (8.13) muutujale x väärtuse $x < -1$, saame arvrea, mille üldliikme piirväärtus puudub.

Seega ilmneb, et on muutuja x väärtusi, mille korral funktsionaalrida koondub ja on väärtusi, mille korral funktsinaalrida hajub.

Rea (8.12) osasummad

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

on samuti muutuja x funktsioonid, mis moodustavad funktsionaaljada

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{8.14}$$

Definitsioon. Argumendi x väärtuste hulka X, mille korral osasummade jada (8.14) koondub, st $\exists$

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x), \tag{8.15}$$

nimetatakse funktsionaalrea (8.12) koonduvuspiirkonnaks.

Sellisel juhul öeldakse, et $S(x)$ on funktsionaalrea (8.12) summa ja kirjutatakse

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Viimase võrduse asemel võime kirjutada

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Summas esinevat teist liiget

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

nimetatakse funktsionaalrea jääkliikmeks ja rea summa

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

8.7 Majoreeruv rida

Definitsioon. Funktsionaalrida (8.12) nimetatakse *majoreeruvaks* hulgal X, kui leidub selline positiivsete liikmetega koonduv arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tag{8.16}$$

et $\forall\, x \in X$ korral

$$|u_k(x)| \leq \alpha_k$$

Rida (8.16) nimetatakse *majorantreaks.*

Näide. Funktsionaalrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{1+k^2}$$

on majoreeruv kogu reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$, sest iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\left|\frac{\sin kx}{1+k^2}\right| \leq \frac{1}{1+k^2},$$

aga rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

koondub võrdlustunnuse põhjal, sest

$$\frac{1}{1+k^2} < \frac{1}{k^2}.$$

Teoreem 1. Kui funktsionaalrida (8.12) on majoreeruv hulgal X, siis $\forall$ $x \in X$ korral on selle funktsionaalrea jääkliikme piirväärtus 0, st

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Tõestus. Majorantrida (8.16) on koonduv positiivsete liikmetega arvrida. Tähistame selle rea osasummad

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

ja summa

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

Piirväärtuse mõiste kohaselt $\forall\, \varepsilon > 0$ korral leidub selline $N > 0$, et niipea kui $n \geq N$, siis

$$|\sigma - \sigma_n| < \varepsilon.$$

Aga

$$|\sigma - \sigma_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k\right|$$

Tähistades

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$$

saame, et $\forall\ \varepsilon > 0$ korral leidub selline $N > 0$, et niipea kui $n \geq N$, siis

$$r_n < \varepsilon.$$

Majoreeruvuse tõttu $\forall\ x \in X$ korral $|u_k(x)| < \alpha_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, seega

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = r_n < \varepsilon$$

st, niipea kui $n > N$, siis $\forall\ x \in X$ korral

$$|R_n(x)| < \varepsilon \tag{8.17}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Definitsioon. Kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ selline N, et niipea kui $n > N$, siis $\forall\ x \in X$ korral on täidetud (8.17), siis nimetatakse funktsionaalrida (8.12) *ühtlaselt koonduvaks* hulgal X.

Järeldus. Viimase teoreemi saab sõnastada: hulgal X majoreeruv funktsionaalrida (8.12) on ühtlaselt koondus hulgal X.

Allpool näeme, et paljud lõplike summade korral kehtivad omadused ei ole üle kantavad ridadele. Kuid lõplike summade omadused jäävad kehtima hulgal X, kui eeldada sellel hulgal rea ühtlast koonduvust.

Reeglina on lihtsam tõestada rea majoreeruvust, kui selle ühtlast koonduvust. Majoreeruvusest hulgal järeldub ühtlane koonduvus sellel hulgal. Seega kõik allpool tõestatud teoreemid, kus on eeldatud rea ühtlast koonduvust, jäävad kehtima, kui eeldada rea majoreeruvust.

8.8 Funktsionaalrea summa pidevus

Lõpliku arvu pidevate funktsioonide summa on pidev funktsioon. Lõpmatu arvu pidevate funktsioonide summa, st rea, puhul ei pruugi see nii olla. Selle kinnituseks vaatleme lõigul $[0; 1]$ rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^{k-1}(1-x) + \ldots$$

Kui $x = 1$, koosneb rida nullidest ja summa $S(x) = 0$. Kui $x < 1$, siis hääbuva geomeetrilise rea summa valemi põhjal

$$S(x) = (1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\ldots+x^{k-1}(1-x)+\ldots = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1$$

Punktis $x = 1$ on rea summa seega katkev funktsioon, vaatamata sellele, et rea liikmed on kogu reaalarvude hulgal, kaasa arvatud lõigul $[0; 1]$ pidevad.

Teoreem. Kui hulgal X pidevatest funktsioonidest $u_k(x)$ moodustatud rida (8.12) on ühtlaselt koonduv hulgal X, siis rea summa on sellel hulgal pidev.

Tõestus. Olgu $S(x)$ funktsionaalrea (8.12) summa. Näitame, et pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta S = 0, \tag{8.18}$$

kus

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + R_n(x + \Delta x) - S_n(x) - R_n(x),$$

on täidetud. Absoluutväärtuse omaduse tõttu

$$|\Delta S| \leq |S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| + |R_n(x + \Delta x)| + |R_n(x)| \tag{8.19}$$

Eelduse kohaselt on rida ühtlaselt koonduv hulgal X. Eelmise punkti teoreem 1 järgi $\forall\, \varepsilon > 0$ korral leidub selline $N > 0$, et kui $n \geq N$, siis $\forall\, x, x+\Delta x \in X$ korral

$$|R_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ja

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Rea (8.12) n-is osasumma kui lõpliku arvu pidevate funktsioonide summa on pidev funktsioon, seega pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus on täidetud, st $\forall\, \varepsilon > 0$ korral $\exists$ selline $\delta > 0$, et kui $|\Delta x| < \delta$, siis

$$|\Delta S_n| = |S_n(x + \Delta x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tingimusest (8.19) saame, et $\forall\, \varepsilon > 0$ korral $\exists$ selline $\delta > 0$, et kui $|\Delta x| < \delta$, siis

$$|\Delta S| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

mis tähendabki, et tingimus (8.18) on täidetud, st rea (8.12) summa $S(x)$ on pidev.

8.9 Rea liikmeti integreerimine ja diferentseerimine

Lõigul integreeruvate funktsioonide lõplikku summat on võimalik liikmeti integreerida. Ridade puhul kehtib teoreem.

Teoreem 1. Kui funktsioonid $u_k(x)$ on pidevad lõigul $[a;b]$ ja rida (8.12) on ühtlaselt koonduv sellel lõigul, siis

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

, st rida (8.12) võib lõigul $[a;b]$ liikmeti integtreerida.

Tõestus. Kõigepealt eelmise punkti teoreemi järgi on

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

pidev lõigul $[a;b]$, seega eksisteerib

$$\int_a^b S(x)dx$$

Tõestuseks tuleb näidata, et rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

osasummade jada koondub väärtuseks $\int\limits_a^b S(x)dx$ st, et

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx$$

Selleks hindame vahet

$$\left| \int_a^b S(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx \right| = \left| \int_a^b \left[S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| dx = \int_a^b |R_n(x)|\, dx$$

Kuid rea (8.12) ühtlase koonduvuse tõttu $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ selline N, et kui $n \ge N$, siis

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

mistahes $x \in [a;b]$ korral. Seega

$$\int_a^b |R_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

mida oligi tarvis tõestada.

Järeldus 2. Kui $a \le x_0 < x \le b$ ja (8.12) rahuldab teoreemi 1 eeldusi, siis

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(x)$$

Järeldus on ilmne, sest kui funktsioonid $u_k(x)$ $k = 1,\ 2,\ ...$ on pidevad lõigul $[a;b]$, siis on need pidevad ka lõigul $[x_0;x]$ ja kui rida (8.12) koondub ühtlaselt lõigul $[a;b]$, siis koondub see ühtlaselt ka lõigul $[x_0;x]$.

Teoreem 3. Kui rida (8.12) koondub lõigul $[a;b]$ Funktsiooniks $S(x)$ ja realiikmete tuletistest moodustatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

koondub lõigul $[a;b]$ ühtlaselt funktsiooniks $\sigma(x)$, siis $S'(x) = \sigma(x)$ ehk

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

st funktsionaalrida (8.12) saab liikmeti diferentseerida.

Tõestus. Järelduse 2 põhjal, eeldusel, et $a \le x \le b$, saame

$$\int_a^x \sigma(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k'(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x) - u_k(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a)$$

ehk

$$\int_a^x \sigma(x)dx = S(x) - S(a)$$

ja võttes viimase võrduse mõlemalt poolt tuletise x järgi $\sigma(x) = S'(x)$.

8.10 Astmeread

Astmereaks nimetatakse funktsionaalrida, mille liikmed on astmefunktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \tag{8.20}$$

või üldisemalt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-a)^k \tag{8.21}$$

Nende ridade omaduste uurimine on sarnane, seepärast piirdume ridadega (8.20).

Näide 1. Rida

$$1 + x + x^2 + \ \ldots \ + x^k + \ \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

on iga x väärtuse korral geomeetriline rida, mis koondub, kui $|x| < 1$. Seega on selle rea koonduvuspiirkonnaks vahemik $X = (-1; 1)$ ning rea summa selles vahemikus

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{8.22}$$

Selgub, et astmeridade koonduvuspiirkonnad ongi sellise lihtsa struktuuriga.

Teoreem 1 (Abeli teoreem). Kui astmerida (8.20) koondub agumendi väärtuse x_0 korral, siis koondub see rida absoluutselt iga tingimust $|x| < |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Vastupidi, kui astmerida (8.20) hajub agumendi väärtuse x_0 korral, siis hajub see ka iga tingimust $|x| > |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Tõestus. Kõigepealt tõestame esimese väite. Eelduse kohaselt arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_0^k$$

on kooduv, seega selle üldliikme piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} c_k x_0^k = 0$$

Kuid koonduv jada on tõkestatdud, st $\exists$ selline positiivne konstant K, et

$$|c_k x_0^k| < K$$

Tähistades $q = \dfrac{x}{x_0}$, on tingimuse $|x| < |x_0|$ tõttu $|q| < 1$ ja seega

$$|c_k x^k| = |c_k x_0^k \cdot \frac{x^k}{x_0^k}| < Kq^k$$

Geomeetriline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} Kq^k$$

on koonduv, seega võrdlustunnuse põhjal koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$$

st rida (8.20) koondub absoluutselt.

Teoreemi teise poole tõestuseks eeldame väite vastaselt, et rida (8.20) koondub mingi $|x| > |x_0|$ korral. Kuid siis tõestuse esimese poole põhjal peaks rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_0^k$$

koonduma absoluutselt, mis on aga eeldusega vastuolus. Seega ei saa rida (8.20) koonduda.

Abeli teoreemi tõttu eksisteerib selline reaalarv R, et $|x| < R$ korral rida (8.20) koondub ja $|x| > R$ korral (8.20) hajub. Sellist reaalarvu R nimetatakse rea (8.20) *koonduvusraadiuseks* ja vahemikku $(-R; R)$ selle rea *koonduvusvahemikuks.*

Märkus. Koonduvusvahemiku otspunktides, st $x = R$ ja $x = -R$ korral tuleb rea (8.20) koonduvust eraldi uurida. Allpool esitatavas näites veendume, et koonduvusvahemiku otspunktides võib rida olla hajuv, tingimisi koonduv või absoluutselt koonduv.

Ühe võimaluse koonduvusraadiuse R leidmiseks annab järgmine teoreem.

Teoreem 2. Kui astmerea (8.20) kordajad c_k ei võrdu nulliga ja $\exists$

$$d = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

siis $R = d$.

Tõestus. Kasutades rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$$

koonduvuse uurimiseks D'Alemberti tunnust, saame

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}x^{k+1}|}{|c_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{|x|}{d}$$

Seega D'Alemberti tunnuse kohaselt vaadeldav rida koondub, kui $\dfrac{|x|}{d} < 1$, st $|x| < d$, ja hajub, kui $\dfrac{|x|}{d} > 1$, st $|x| > d$, mille tõttu $R = d$ ehk

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \tag{8.23}$$

Näide. Leiame ridade $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k}$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k^2}$ koonduvuspiirkonnad.

Kõigi kolme rea koonduvusraadiused võrduvad 1-ga, sest esimesel real $c_k = 1$ ja

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

teisel real $c_k = \dfrac{1}{k}$ ja

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

kolmandal $c_k = \dfrac{1}{k^2}$ ja

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Seega on kõigi kolme rea koonduvusvahemikud $(-1;1)$.

Esimese rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $1^k = 1$, selle piirväärtus on $1 \neq 0$, st rida hajub. Vasakpoolses otspunktis on üldliige $(-1)^k$, millel puudub piirväärtus, kui $k \to \infty$, st rida hajub ning esimese rea koonduvuspiirkond on vahemik $(-1;1)$

Teise rea üldliige on koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis $\dfrac{1}{k}$, st teine rida on parempoolses otspunktis harmooniline rida, mis hajub. Vasakpoolses otspunktis on teise rea üldliige $\dfrac{(-1)^k}{k}$, st teine rida on vasakpoolses otspunktis vahelduvate märkidega rida, mis Leibnizi tunnuse põhjal koondub. Niisiis on teise rea koonduvuspiirkond poollõik $[-1;1)$

Kolmanda rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $\dfrac{1}{k^2}$ ja vasakpoolses otspunktis $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$, mõlema absoluutväärtused $\dfrac{1}{k^2}$. Punkti 8.3 näite 1 põhjal rida $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ koondub, seega kolmas rida koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis koondub ja vasakpoolses otspunktis koondub absoluutselt, st kolmanda rea koonduvuspiirkond on lõik $[-1;1]$

8.11 Astmeridade ühtlane koonduvus

Teoreem. Astmerida koonuvusraadiusega R on ühlaselt koonduv igas lõigus $[a;b] \subset (-R;R)$.

Tõestus. Kui tähistada $r = \max\{|a|, |b|\}$, siis

$$[a;b] \subset [-r;r] \subset (-R;R)$$

Selle tõttu, et r on koonduvusvahemiku sisepunkt, on rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$$

Abeli teoreemi põhjal absoluutselt koonuv, st

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k$$

on positiivsete liikmetega koonduv arvrida. Kuid iga $x \in [a; b]$ korral

$$|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$$

so (8.20) on majoreeruv lõigul $[a; b]$ seega alampunkti 8.7 järelduse põhjal ka ühtlaselt koonduv lõigul $[a; b]$.

Sellest teoreemist saame kolm järeldust

Järeldus 1. Astmerea (8.20) koonduvusraadiusedga R summa on pidev igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Alampunkti 8.8 Teoreemi tõttu on see järeldus ilmne.

Järeldus 2. Astmerida (8.20) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti integreerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Alampunkti 8.9 Teoreemi 1 tõttu on seegi järeldus ilmne.

Järeldus 3. Astmerida (8.20) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti diferentseerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Tõestus. Diferentseerides artmerida (8.20) liikmeti saame

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k x^{k-1}$$

Vastavalt alampunkti 8.9 Teoreemile 2 peame näitama, et saadud rea koonduvusraadius on endiselt R. Leiame saadud rea koonduvusraadiuse R' valemi (8.23) abil

$$R' = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{k c_k}{(k+1) c_{k+1}} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} \cdot \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = 1 \cdot R$$

mida oligi tarvis tõestada.

Toetudes geomeetrilise rea (8.22) summale ning järeldustele 2 ja 3, saame leida paljude funktsioonide arendusi astmereaks.

Näide 1. Korrutades võrduse (8.22) mõlemat poolt teguriga x, saame rea

$$\frac{x}{1-x} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$$

mille koonduvusraadius on endiselt 1. On lihtne kontrollida, et

$$\left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Kasutades liikmeti diferentseerimist, saame selle tuletise astmerea

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1})' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

ja saadud rea koonduvusraadius on ikka 1.

Näide 2. Asendades võrduses (8.22) muutuja x muutujaga $-x^2$, saame

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

ning see rida koondub kui $|-x^2| < 1$, mis on võrdväärne tingimusega $|x| < 1$.

Arvestades seda, et

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

saame funktsiooni $\arctan x$ arenduse astmereaks integreerides viimast rida liikmeti lõigul $[0; x]$ eeldusel $|x| < 1$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Saadud rea koonduvusraadius on taas 1, so koonduvusvahemik $(-1; 1)$. Uurime saadud rea koonduvust kooduvusvahemiku otspunktides.

Koonduvusvahemiku vasakpoolses otspunktis $x = -1$ saame arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ja parempoolses otspunktis $x = 1$ arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Mõlemad saadud arvread on vahelduvate märkidega read, mis koonduvad Leibnizi tunnuse põhjal, so funktsiooi $\arctan x$ arendud astmereaks koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis, st koonduvuspiirkonnaks on lõik $[-1; 1]$.

Seega on võimalik, et liikmeti integreerimise tagajärjel saadud rida koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis vaatamata sellele, et esialgne rida on mõlemas otspunktis hajuv.

8.12 Taylori ja Maclaurini rida

Oletame et funktsioon $f(x)$ on punkti a ümruses lõpmatu arv kordi diferentseeruv. Kui astmereas

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

kordajad c_k leitakse valemi

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \tag{8.24}$$

põhjal, siis saadud rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{8.25}$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks punkti a ümbruses või funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks $x-a$ astmete järgi ja kordajaid (8.24) funktsiooni $f(x)$ Taylori kordajateks. Selle rea n-es osasumma on Taylori polünoom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylori valemi põhjal avaldub funktsioon $f(x)$ summana

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

so Taylori polünoomi ja jääkliikme summana.

On tõestatud, et Taylori valemi jääkliige avaldub

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))$$

kus $0 < \Theta < 1$

Kui

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

siis

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

so Taylori rea osasummade jada koondub funktsiooniks $f(x)$.

Kokku võttes saab väita, et Taylori rida (8.25) esitab funktsiooni $f(x)$ ainult siis, kui jääkliikme piirväärtus võrdub nulliga. Kui $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, siis funktsiooni $f(x)$ Taylori rida võib küll koonduda, kuid see ei esita funktsiooni $f(x)$.

Taylori rida $a = 0$ ümbruses ehk Taylori rida x astmete järgi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{8.26}$$

nimetatakse Maclaurini reaks.

8.13 Funktsioonide e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ arendamine Maclaurini reaks

Matemaatiline analüüs I kursuses on Maclaurini valemit käsitlevas teemas tõestatud, et funktsiooni e^x n-ndat järku Maclaurini valem avaldub

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

kus jääkliikme piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0$$

iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral. Järelikult esitab funktsiooni e^x Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x korral, st

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Samuti on tõestatud, et funktsiooni $\sin x$ $2n+1$ järku Maclaurini valem on

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

mille jääkliige avaldub

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\pi\right)$$

Et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$$

esitab funktsiooni $\sin x$ Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Lisaks on tõestatud, et funktsiooni $\cos x$ $2n$ järku Maclaurini valem on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

jääkliikmega

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Jälle on teada, et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$$

st funktsiooni $\cos x$ Maclaurini rida esitab seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

8.14 Trigonomeetriline funktsioonide süsteem

Funktsioonide süsteemi

$$\{1;\ \sin x;\ \cos x;\ \sin 2x;\ \cos 2x;\ \ldots;\ \sin kx;\ \cos kx;\ \ldots\} \tag{8.27}$$

nimetetakse *trigonomeeetriliseks funktsioonide süsteemiks.* Leiame selle süsteemi funktsioonide korrutiste integraalid lõigul $[-\pi;\pi]$. Integreerimisel kasutame kolme trigonomeetria valemit

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \tag{8.28}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \tag{8.29}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \tag{8.30}$$

Esiteks leiame kahe siinusfunktsiooni $\sin kx$ ja $\sin nx$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots,$ $n = 1,\ 2,\ \ldots$) korrutise integraali. Valemi (8.30) põhjal

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-n)x - \cos(k+n)x]dx$$

Kui $n \neq k$, siis

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \frac{1}{2(k-n)}\sin(k-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(k+n)}\sin(k+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Kui $n = k$, siis

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4k}\sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Trigonomeetrilise süsteemi esimest funktsioni saab vaadelda kui $1 = \cos 0x$. Leiama kahe koosinusfuntsiooni $\cos kx$ ja $\cos nx$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) korrutise integraali. Valemi (8.29) abil leiame

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x]dx$$

Kui $n \neq k$, siis

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2(k+n)}\sin(k+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(k-n)}\sin(k-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Kui $n = k \neq 0$, siis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2kx + 1)dx = \frac{1}{4k}\sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Kui $n = k = 0$, siis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+1)dx = 2\pi$$

Kolmandaks leiame funktsioonide $\sin kx$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots$) ja $\cos nx$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) korrutise integraali, kasutedes valemit (8.28

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+n)x + \sin(k-n)x]dx$$

Kui $n \neq k$, siis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = -\frac{1}{2(k+n)}\cos(k+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(k-n)}\cos(k-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Kui $n = k$, siis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx d(\sin kx) = \frac{1}{k}\cdot\frac{\sin^2 kx}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Järelikult võrdub kahe erineva trigonomeetrilise süsteemi funktsioonide korrutise integraal lõigul $[-\pi;\pi]$ alati 0-ga. Trigonomeetrilise süsteemi funktsioonide ruutude integraalid lõigul $[-\pi;\pi]$ võrduvad π-ga. Erandiks on esimene funktsioon 1, mille ruudu integraal lõigul $[-\pi;\pi]$ on 2π. Kokku võttes saame

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n \neq k \\ \pi & \text{if} \quad n = k \neq 0 \end{cases} \tag{8.31}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{kui} \quad n \neq k \\ \pi & \text{kui} \quad n = k \neq 0 \\ 2\pi & \text{kui} \quad n = k = 0 \end{cases} \tag{8.32}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \text{ iga } k \text{ and } n \text{ korral} \tag{8.33}$$

Tingimusi (8.31) - (8.33) nimetatakse trigonomeetrilise funktsioonide süsteemi ortogonaalsuse tingimusteks. Trigonomeetriline funktsioonide süsteem on *ortogonaalne süsteem* lõigul $[-\pi;\pi]$.

8.15 2π-perioodiliste funktsioonide Fourier' read

Meeldetuletuseks: funktsiooni $f(x)$ nimetatakse 2π-perioodiliseks, kui iga $x, x+2\pi \in X$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

mis tähendab, et funktsiooni väärtused korduvad iga 2π järel.

Oletame, et 2π-perioodiline funktsioon $f(x)$ on arendatav ühtlaselt koonduvaks trigonomeetriliseks reaks

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{8.34}$$

Vabaliige on sobilik kirjutada $\frac{a_0}{2}$, mitte a_0, sest siis saab vabaliiget a_0 arvutada sama valemi järgi nagu ülejäänud kordajaid a_k.

Rea (8.34) ühtlane koondumine on tagatud, kui koondub positiivsete liikmetega arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$$

sest iga reaalarvulise x väärtuse korral

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \le |a_k| + |b_k|$$

mis tähendab, et (8.34) on majoreeruv ja seega alapunki 8.7 Teoreem 1 põhjal ka ühtlaselt koonduv kogu reaalarvude hulgal. Alapunkti 8.9 Teoreem 1 põhjal saab rida 8.7 (8.34) liikmeti integreerida lõigul $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx$$

Iga $k = 1,\ 2,\ \ldots$ korral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx = 0$$

ja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx = 0$$

seega

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$$

järelikult

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{8.35}$$

Reaksarenduse (8.34) kordajate a_k korrutame selle võrduse mõlemaid pooli funktsiooniga $\cos nx$, eeldades et $n \geq 1$:

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx)$$

Saadud rida on ühtlaselt koonduv, sest

$$|a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx| \leq |a_k \cos kx + b_k \sin kx|$$

ja seda saab liikmeti integreerida lõigul $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx)$$

Võrduse paremal pool olev esimene integral võrdub 0-ga. Ortogonaalsuse tingimustest (8.32) ja (8.33) saame, et ainus liidetav lõpmatus summas, mis on nullist erinev ja võrdub π-ga on liidetav, kus $k = n$, järelikult

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \cdot \pi$$

millest saame, et (võttes n asemel jälle k)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.36}$$

Samasugusel viisil, korrutades võrduse (8.34) mõlemaid pooli funktsiooniga $\sin nx$, eeldusel et $n \geq 1$, saame

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.37}$$

Kordajaid a_0, a_k ja b_k, mis on defineeritud vastavalt võrdustega (8.35), (8.36) ja (8.37), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' kordajateks* ja nende kordajatega trigonomeetrilist rida (8.34) funktsiooni $f(x)$ *Fourier' reaks.*

Me leidsime Fourier' kordajad eeldades, et trigonomeetriline rida on kogu reaalarvude hulgal ühtlaselt koonduv. Kuid arvutades kordajad valemite (8.35), (8.36) ja (8.37) abil ning koostades nende kordajatega Fourier' reaks arenduse

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ei saa me olla kindlad, kas saadud Fourier' rida koondub, ja kui see koondub, kas siis ta koondub väärtuseks $f(x)$. Hetkel saame väita, et lähtudes funktsioonist $f(x)$ lõigul $[-\pi;\pi]$ on leitud reaks arendus, mida nimetatakse Fourier' reaks ja kirjutatakse

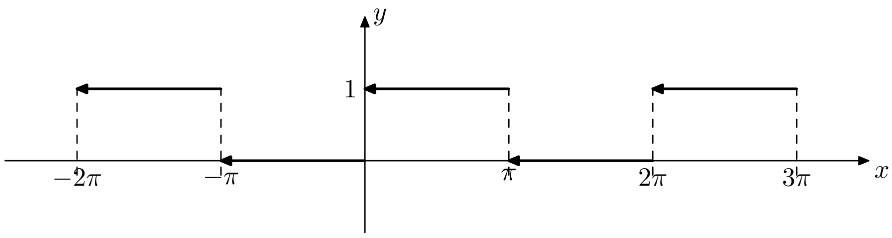
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{8.38}$$

Märgi $\sim$ võime kirjutada $=$ alles siis, kui oleme tõestanud, et Fourier reaks arendus koondub funktsiooniks $f(x)$.

Näide 1. Arendame Fourier' reaks ristkülikukujulise lainefunktsiooni, mis on defineeritud kui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kui} \quad -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{kui} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases} \qquad \text{and} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Antud funktsioon $f(x)$ on 2π-perioodiline, ja selle graafik on joonisel 8.3. Fourier' kordajad leiame valemite (8.35), (8.36) ja (8.37) abil. Esiteks



Joonis 8.3.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

teiseks

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k\pi}\sin kx\Big|_0^{\pi} = 0$$

ja kolmandaks

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{kui } k \text{ on paaris} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{kui } k \text{ on paaritu} \end{cases}$$

Seega $a_k = 0$ iga $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ korral ja $b_{2k} = 0$ iga $k = 1,\ 2,\ \ldots$ korral. Antud funktsiooni arendus Fourier' reaks on

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \ldots$$

ehk

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$$

Järgmine teoreem annab piisavad tingimused Fourier' rea koonduvuseks. Koonduvus punktis x tähendab endiselt seda, et rea (8.38) osasummade

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

jada koondub funktsiooni $f(x)$ väärtuseks punktis x, st

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

Teoreem (Dirichlet' teoreem). Kui $f(x)$ on tõkestatud 2π-perioodiline funktsioon, millel on ühes perioodis lõplik arv lokaalseid maksimume ja miinimume ning lõplik arv esimest liiki katkevuspunkte, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$ kõikides funktsiooni $f(x)$ pidevuspunktides ning fuktsiooni $f(x)$ vasak- ja parempoolse piirväärtuse aritmeetiliseks keskmiseks funktsionoi $f(x)$ katkevuspunktides.

Ristkülikukujulisel lainefunktsioonil on poollõigul $(-\pi;\pi]$ üks lokaalne maksimum, mis võrdub 1-ga, ja üks lokaalne miinimum, mis võrdub 0-ga ning kaks katkevuspunkti 0 ja π. Seega vahemikes, kus funktsioon on pidev, so vahemikes $(-\pi;0)$ ja $(0;\pi)$ selle funktsiooni Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$. Punktis 0 on funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus $f(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$ ja parempoolne piirväärtus $f(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus punktis π on $f(\pi-) = \lim\limits_{x\to\pi-} f(x) = 1$ ja parempoolne piirväärtus $f(\pi+) = \lim\limits_{x\to\pi+} f(x) = 0$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Seega katkevuspunktides koondub ristkülikukujulise lainefunktsiooni Fourier' rida väärtuseks $\frac{1}{2}$.

Seda saab kinnitada vahetu arvutamise teel, sest iga täisarvulise k korral $\sin((2k+1)\cdot 0) = 0$ ja $\sin((2k+1)\pi) = 0$, seega

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)0) = \frac{1}{2}$$

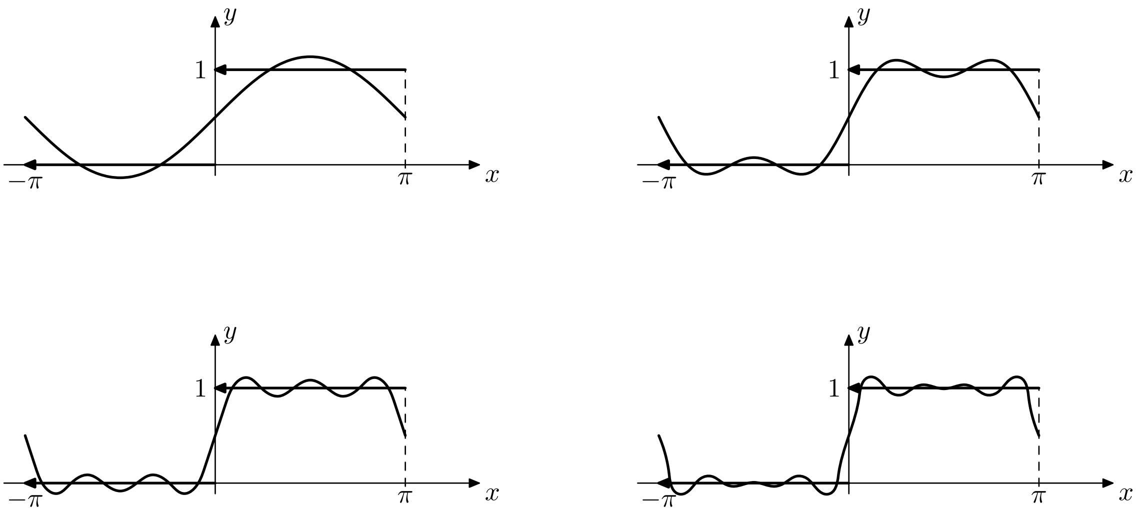
ja

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi)=\frac{1}{2}$$

Joonisel 8.4 on esitatud leitud Fourier' rea osasummade

$$S_{2n+1}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\ldots+\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x$$

graafikuid $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ korral.



Joonis 8.4. Ristkülikukujulise lainefunktsiooni Fourier' rea osasummad

8.16 2π-perioodiliste funktsioonide Fourier' siinus- ja koosinusrida

Nagu eespool veendusime, võivad osa Fourier' kordajaid olla võrdsed nulliga. Nende nulliga võrduvate kordajate leidmise võib integraale arvutamata vahele jätta, omades teadmisi paaris- ja paaritutest funktsioonidest.

Lause 1. Kui funktsioon $f(x)$ on paaris, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ja kui $f(x)$ on paaritu, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

Tõestus. Määratud integraali aditiivsuse omaduse põhjal

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Võürduse paremal pool olevas esimeses liidetavas teeme muutuja vahetuse $x = -t$, mille korral $dx = -dt$. Kui $x = 0$, siis $t = 0$, ja kui $x = -a$, siis $t = a$. Seega

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ja tähistades esimeses liidetavas integreerimismuutuja taas x-ga, saame

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$$

Kui siin $f(x)$ on paaris, siis $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, ja kui $f(x)$ on paaritu, siis $f(-x) + f(x) = 0$.

Tuletagem veel meelde Matemaatiline anlüüs I kursuses õpitud kolme väidet paaris- ja paaritute funktsioonide kohta:

- kahe paarisfunktsiooni korrutis on paarisfunktsioon;
- kahe paaritu funktsiooni korrutis on paarisfunktsioon;
- paarisfunktsiooni ja paaritu funktsiooni korrutis on paaritu funktsioon.

Oletame, et $f(x)$ on 2π-perioodiline paarisfunktsioon. Sel juhul iga täisarvulise $k \geq 1$ korral on korrutis $f(x)\cos kx$ paaris- ja korrutis $f(x)\sin kx$ paaritu funktsioon. Lause 1 põhjal saame nüüd funktsiooni $f(x)$ Fourier' kordajate arvutamiseks valemid

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k \geq 1$$

ja

$$b_k = 0, \quad k \geq 1$$

Järelikult on paarisfunktsiooni $f(x)$ Fourier' reaks arenduses ainult koosinustega liikmed

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

Saadud rida nimetatakse *Fourier' koosinusreaks.*

Järgmiseks oletame, et $f(x)$ on paaritu 2π-perioodiline funktsioon. Siis iga täisarvulise $k \geq 1$ korral on korrutis $f(x)\cos kx$ paaritu ja korrutis $f(x)\sin kx$ paarisfunktsioon. Jälle saame lause 1 abil Fourier' kordajate lihtsustatud arvutusvalemid

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0, \quad k \geq 1$$

ja

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k \geq 1$$

Järelikult on paaritu funktsiooni $f(x)$ Fourier' reaks arenduses ainult siinustega liikmed

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

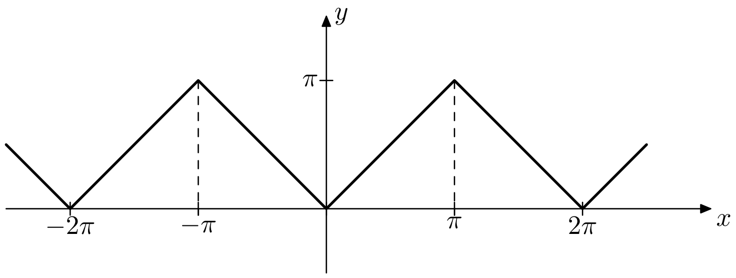
ja saadud rida nimetatakse *Fourier' siinusreaks.*

Näide 1. Leiame funktsiooni, mis on defineeritud kui

$$f(x) = |x|, \text{ kui} - \pi < x \leq \pi \quad \text{ja} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

arenduse Fourier' reaks.

Selle 2π-perioodilise funktsiooni graafik on joonisel 8.5.



Joonis 8.5.

Funktsioon on paaris ja lõigul $[0;\pi]$ muutuja x absuluutväärtus $|x| = x$. Seega on teada, et Fourier' kordjad $b_k = 0$ kõikide $k \geq 1$ korral. Arvutame

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

ning kui $k \geq 1$, siis integreerime ositi

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2\cdot(-1)^k}{\pi k^2} - \frac{2}{\pi k^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{if } k \text{ is odd} \\ 0, & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases} \end{aligned}$$

Antud funktsiooni arendus Fourier' koosinusreaks on

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x - \dots$$

ehk

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Antud funktsioon on pidev ja sellel on poollõigul $(-\pi;\pi]$ üks lokaalne maksimum ja üks lokaalne miinimum. Seega Dirichlet koonduvusteoreemi põhjal Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$ iga reaalarvulise x korral ja nüüd võime kirjutada

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Juhul kui $-\pi < x \leq \pi$, siis

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Võttes viimases võrduses $x = 0$, saame

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

ehk

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

millest

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Viimane tähendab, et kõikide paaritute naturaalarvude ruutude pöördväärtuste summa on $\frac{\pi^2}{8}$. Toetudes sellele saame leida ka kõikide naturaalarvude ruutude pöördväärtuste summa

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Kirjutame selle summa kahe summa summana

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\ldots= \\ &= 1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\cdot S \end{aligned}$$

Siit saame, et

$$\frac{3}{4}\cdot S=\frac{\pi^2}{8}$$

ehk

$$S=\frac{\pi^2}{6}$$

Järelikult on kõikide naturaalarvude ruutude pöördväärtuste summa

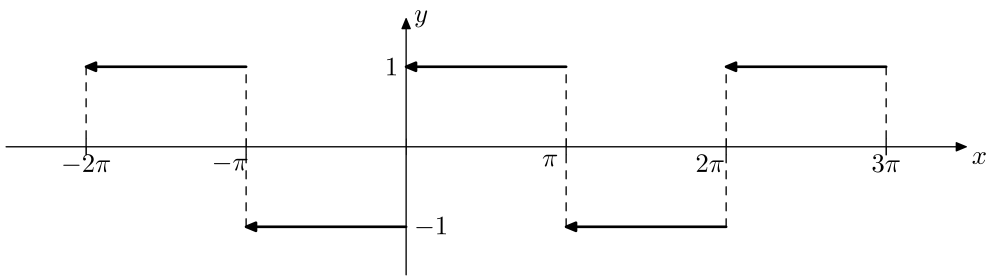
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Koonduvate Fourier' ridade abil on võimalik leida mitmeid taolisi summasid.

Näide 2. Arendame ristkülikukujulise lainefunktsiooni, mis on defineeritud kui

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{kui} \quad -\pi<x<0 \\ 1 & \text{kui} \quad 0<x<\pi \end{cases} \qquad \text{and} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

Selle 2π-perioodilise funktsiooni graafik on joonisel 8.6.



Joonis 8.6.

Antud funktsioon on paaritu, seega $a_k=0$ iga $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ korral ja

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx dx=-\frac{2}{k\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{k\pi}((-1)^k-1)=\begin{cases}\frac{4}{k\pi}, & \text{kui} \quad k \quad \text{on paaritu,} \\ 0, & \text{kui} \quad k \quad \text{on paaris}\end{cases}$$

Antud funktsiooni arendus Fourier reaks on

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+\ldots$$

ehk

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Dirichlet' koonduvusteoreemi järgi koondub see rida iga $x \in ((2k-1)\pi; 2k\pi)$ väärtuseks -1 ja iga $x \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$ korral väärtuseks 1. Katkevuspunktides $x = k\pi$ rida koondub väärtuseks $\dfrac{-1+1}{2} = 0$.

8.17 Mis tahes perioodiga funktsioonide Fourier' rida

Kui funktsiooni periood ei ole 2π, saame selle Fourier' rea leida lineaarse muutuja vahetuse abil. Oletame, et funktsioon $f(x)$ on perioodiline perioodiga T, st $f(x+T) = f(x)$ iga x korral. Sellisel juhul on funktsiooni $f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot x\right)$ periood 2π, sest

$$f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

Eelnevast teame, et 2π-perioodilise funktsiooni $f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ Fourier' rida on

$$f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) dx$$

ja $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ korral

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) \cos kx dx$$

ning

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) \sin kx dx$$

Kasutades muutuja vahetust $t = \dfrac{Tx}{2\pi}$, saame $x = \dfrac{2\pi t}{T}$ ja $dx = \dfrac{2\pi}{T} dt$. Kui $x = -\pi$, siis $t = -\dfrac{T}{2}$, ja kui $x = \pi$, siis $t = \dfrac{T}{2}$. Järelikult perioodilise funktsiooni $f(t)$ perioodiga T arendus Fourier' reaks on

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T}$$

kus Fourier' kordajad leitakse valemitega

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

ja $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ korral

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

ning

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt$$

Kui T on funktsiooni $f(x)$ periood, siis suhet $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *nurksageduseks* ehk lihtsalt *sageduseks*. Kui kasutada sagedust ω ja tähistada $f(x)$ arenduses Fourier' reaks muutuja uuesti x-ga, saame Fourier' rea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

mille kordajad arvutatakse valemitega

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

ja $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ korral

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k\omega x dx \quad \text{and} \quad b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin k\omega x dx$$

Loomulikult jääb Dirichlet' koonduvusteoreem kehtima ja funktsioonide puhul, mille periood T.

Funktsioonid $\cos k\omega x$ ja $\sin k\omega x$ kujutavad endast lihtsaid harmoonilisi võnkumisi, mille sagedus on $k\omega$. Seega Fourier' rea osasummad

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

on harmooniliste võnkumiste lineaarkombinatsioonid. Juhul kui Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$, st kehtib võrdus

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x$$

on funktsioon esitatav harmooniliste võnkumisete kaudu. See esitus on määratud Fourier' kordajatega a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ ...)$ ja b_k $(k=\ 1,\ 2,\ 3,\ ...)$.

Fourier' kordajate jada

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ ...$$

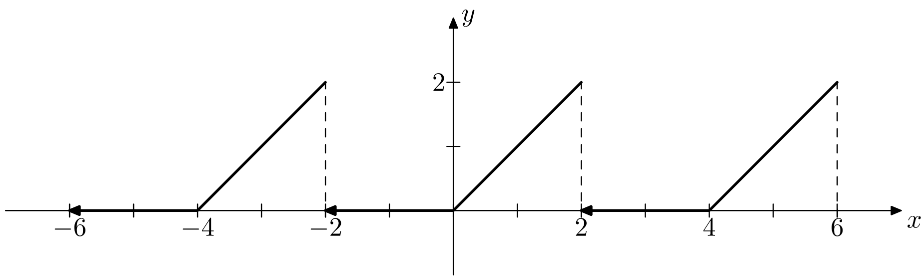
nimetatakse funktsiooni *spektraaljadaks* ehk *spektriks*. Seega on funktsiooni Fourier' kordajate arvutamine selle funktsiooni spektri leidmine ja funktsiooni arendus Fourier' reaks funktsiooni esitamine oma spektri kaudu.

Näide. Leidke funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } -2<x<0\\ x, & \text{if } \ 0\le x\le 2\end{cases}\quad \text{and}\quad f(x+4)=f(x)$$

arendus Fourier' reaks.

Antud funktsiooni graafik on joonisel 8.7. Funktsiooni periood $T=4$, so



Joonis 8.7.

sagedus $\omega=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$. Definitsiooni järgi vahemikus $(-2;0)$ võrdub funktsioon 0-ga, seega

$$a_0=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\cdot dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=1$$

Ositi integreerides saame Fourier' kordajad

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2^2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2\right] = \\
&= \frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1)
\end{aligned}
$$

Integreerides veel kord ositi, saame

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2\right] = \\
&= -\frac{2}{k\pi}(-1)^k = \frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k\pi}
\end{aligned}
$$

Järelikult on antud funktsiooni Fourier' reaks arendus

$$
f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos\frac{k\pi x}{2} + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}\right]
$$

Pannes tähele, et paarisarvuliste k väärtuste korral on koosinusfunktsioonide kordajate lugejad võrdsed 0-ga ja paarituarvuliste k väärtuste korral -2-ga, saame selle reaks arenduse kirjutada

$$
f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{2}
$$

8.18 Lõplikul lõigul defineeritud funktsiooni Fourier' rida

Kui perioodiline funktsioon perioodiga T on paaris, siis Fourier' kordajad $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ korral

$$
a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos k\omega x dx \tag{8.39}
$$

ja $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ korral

$$
b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin k\omega x dx = 0 \tag{8.40}
$$

Paarisfunktsiooni arendus Fourier' reaks on

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x \tag{8.41}$$

Kui perioodiline funktsioon perioodiga T paaritu, siis $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ korral on Fourier' kordajad

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k\omega x dx = 0 \tag{8.42}$$

ja $k = 1,\ 2,\ \ldots$ korral

$$b_k = \frac{4}{T} \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin k\omega x dx \tag{8.43}$$

Paaritu funktsiooni arendus Fourier' reaks on

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x \tag{8.44}$$

Oletame nüüd, et funktsioon ei ole defineeritud kogu poollõigul $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, vaid ainult poolel sellest, st poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$. Sellisel juhul of võimalik funktsiooni jätkata poollõigule $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ nii, et tulemuseks on paarisfunktsioon, aga ka nii, et tulemuseks on paaritu funktsioon. Seega on poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$ defineeritud funktsiooni võimalik arendada nii Fourier' koosinusreaks kui ka Foureir' siinusreaks.

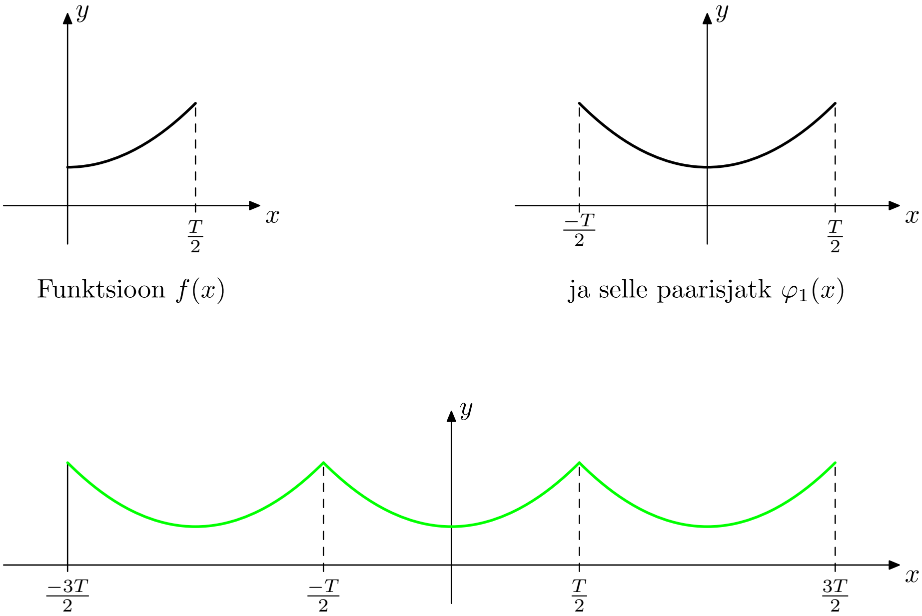
Oletame, et funktsioon $f(x)$ on defineeritud poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$. Defineerime selle paarisjätku $\varphi_1(x)$ järgmiselt

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in \left(0; \frac{T}{2}\right] \\ f(-x), & \text{kui } x \in \left(-\frac{T}{2}; 0\right] \end{cases} \tag{8.45}$$

Võrdusega $\varphi_1(x+T) = \varphi_1(x)$ defineerime selle paarisfunktsiooni perioodilise jätku kogu arvteljele. Tulemuseks on paarisfunktsioon, mis on perioodiline perioodiga T. Funktsioon $f(x)$, selle paarisjätk $\varphi_1(x)$ ning viimase perioodiline jätk on joonisel 8.8. Perioodilise jätku Fourier' koosinusrida on (8.41), mille kordajad leitakse valemite (8.39) abil. Poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$ on rida (8.41) ühtlasi funktsiooni $f(x)$ arenduseks Fourier' koosinusreaks.

Olgu funktsioon $f(x)$ on jälle defineeritud poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$. Selle funktsiooni paaritu jätk $\varphi_2(x)$ on defineeritud kui

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in \left(0; \frac{T}{2}\right] \\ -f(-x), & \text{kui } x \in \left(-\frac{T}{2}; 0\right] \end{cases} \tag{8.46}$$



Funktsioon $f(x)$

ja selle paarisjatk $\varphi_1(x)$

Paarisfunktsiooni $\varphi_1(x)$ perioodiline jatk

Joonis 8.8.

Võrdusega $\varphi_2(x+T) = \varphi_2(x)$ defineerime selle paaritu funktsiooni perioodilise jätku kogu arvteljele. Funktsioon $f(x)$, selle paaritu jätk $\varphi_2(x)$ ning paaritu jätku perioodiline jätk on joonisel 8.9. Perioodiline jätk on paaritu perioodiline funktsioon, mille periood on T. Selle Fourier' siinusrida on (8.44), mille kordajad leitakse valemite (8.43) abil. Poollõigul $\left(0; \frac{T}{2}\right]$ on (8.44) ühtlasi funktsiooni $f(x)$ arenduseks Fourier siinusreaks.

Näide. Leiame funktsiooni, mis poollõigul $(0;1]$ on defineeritud kui $f(x) = 1 - x$ arenduse Fourier' koosinusreaks.

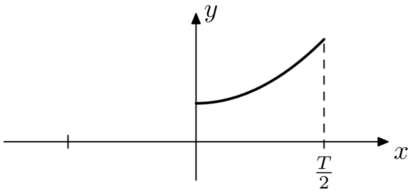
Antud juhul $f(-x) = 1 + x$ ehk (8.45) põhjal on selle funktsiooni paarisjätk poollõigule $(-1;1]$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{kui } x \in (0;1] \\ 1+x, & \text{kui } x \in (-1;0] \end{cases}$$

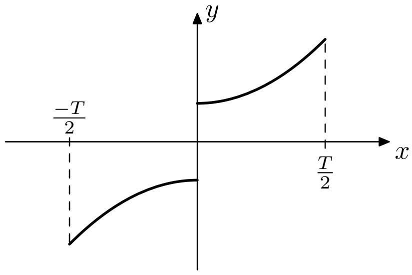
ja selle paarisfunktsiooni perioodiline jätk kogu arvteljele on defineeritud võrdusega

$$\varphi_1(x+2) = \varphi_1(x)$$

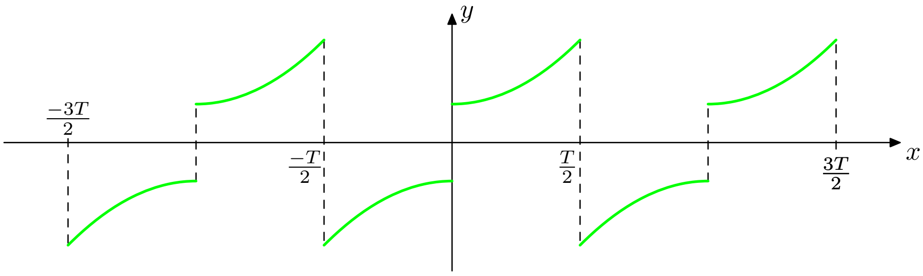
Joonisel 8.10 on antud funktsiooni graafik joonestatud punasega, paarisjätku graafik sinisega ja selle paarisjätku perioodilise jätku graafik rohelisega. Perioodilise jätku periood $T = 2$ ja sagedus $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. Esiteks



Funktsioon $f(x)$



ja selle paaritu jatk $\varphi_2(x)$



Funktsiooni $\varphi_2(x)$ perioodiline jatk

Joonis 8.9.

leiame valemi (8.39) abil

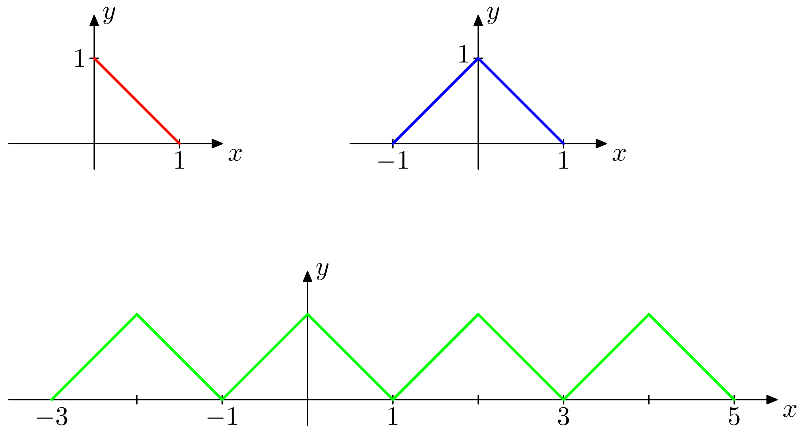
$$a_0 = \frac{4}{2}\int_0^1 (1-x)dx = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1$$

teiseks, integreerides ositi, leiame

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 (1-x)\cos k\pi x dx = \\ &= 2\left[(1-x)\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_0^1\right] = \\ &= -\frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} \dfrac{4}{k^2\pi^2}, & \text{kui } k \text{ on paaritu,} \\ 0, & \text{kui } k \text{ on paaris} \end{cases} \end{aligned}$$

Seega on funktsiooni $\varphi_1(x)$ arendus Fourier' koosinusreaks

$$\varphi_1(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$



Joonis 8.10.

ja poollõigul $(0;1]$ on see ka antud funktsiooni arenduseks Fourier' koosinus-reaks

$$1 - x \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

Võrduse $-f(-x) = -1 - x$ tõttu on (8.46) põhjal antud funktsiooni paarituks jätkuks $\varphi_2(x)$ poollõigule $(-1;1]$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kui } x \in (0;1] \\ -1 - x, & \text{kui } x \in (-1;0] \end{cases}$$

ja selle perioodiline jätk kogu arvteljele on defineeritud võrdusega

$$\varphi_2(x+2) = \varphi_2(x)$$

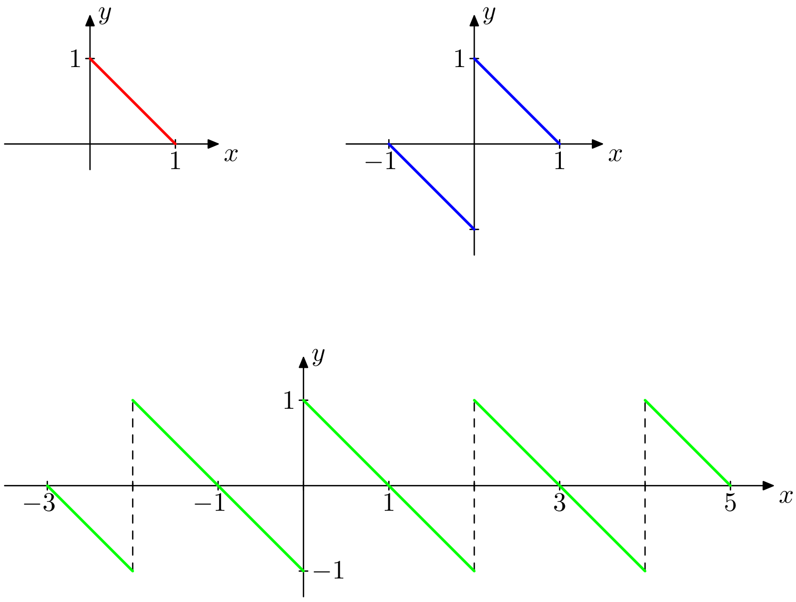
Joonisel 8.11 on antud funktsiooni graafik joonestatud punasega, paaritu jätku graafik sinisega ja selle paaritu jätku perioodilise jätku graafik rohelisega. Perioodilise jätku periood on endiselt $T = 2$, seega sagedus $\omega = \pi$.

Valemite (8.42) põhjal on paaritu perioodilise jätku Fourier' kordajad $a_k = 0$ iga $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ korral ja (8.43) põhjal (integreerime taas ositi)

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 (1-x)\sin k\pi x dx = \\ &= 2\left[-(1-x)\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^1\right] = \frac{2}{k\pi} \end{aligned}$$

iga $k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ korral. Seega on paaritu perioodilise jätku $\varphi_2(x)$ arendus Fourier' siinusreaks

$$\varphi_2(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}$$



Joonis 8.11.

ning poollõigul $(0;1]$ on see ühtlasi antud funktsiooni arenduseks Fourier' siinusreaks

$$1-x \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}$$