

Matemaatiline analüüs II iseseisvad ülesanded

Ülesannetes 1. - 8. esitage funktsiooni määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage xy -tasandil.

1. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$

2. $z = \arcsin \frac{y+2}{x-1} + \ln y.$

3. $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}.$

4. $z = \ln x - \ln \sin y.$

5. $z = \sqrt{4 - x^2} + \ln(y^2 - 4)$

6. $z = \sqrt{\arcsin \frac{x}{y}}$

7. $z = (y + \sqrt{y})\sqrt{\cos x}$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - 2 \ln(9 - x^2 - y^2)$

9. Kas funktsioonid

$$z = \sqrt{x \sin y} \quad \text{ja} \quad z = \sqrt{x} \sqrt{\sin y}$$

on identsed? Miks?

10. Kas funktsioonid

$$z = \ln xy \quad \text{ja} \quad z = \ln x + \ln y$$

on identsed? Miks?

Leidke piirväärtus

11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y}{2x + y}.$

12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$
16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$

Ülesannetes 18. - 28. leidke antud funktsiooni osatuletised kõikide sõltumatute muutujate järgi.

18. $z = x^2 \sqrt[3]{y} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}$
19. $z = \ln \tan \frac{x}{y}$
20. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.
21. $z = \sin xy - \cos \frac{y}{x}$.
22. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
23. $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{x}}$.
24. $z = xy \ln(x + y)$.
25. $w = \ln(xy + \ln z)$
26. $w = \tan(x^2 + y^3 + z^4)$.
27. $w = x^{y^z}$.
28. $w = e^{2x} \cos(yz)$.
29. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ osatuletised punktis $(1; -2)$.
30. $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$. Arvutage $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $x = y = 0$.

31. $w = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. Leidke $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ punktis $x = y = z = 1$
32. $z = \ln(x^2 - y^2)$; tõestage, et $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2}{x + y} = 0$
33. On antud funktsioon $z = xy + x \arctan \frac{y}{x}$. Tõestage, et $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.
34. Leidke funktsiooni $z = \arcsin \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldis.
35. Leidke funktsiooni $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ täisdiferentsiaali avaldis.
36. Leidke funktsiooni $z = \ln \sin \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldis.
37. Leidke funktsiooni $w = x^{yz}$ täisdiferentsiaali avaldis.
38. Arvutage funktsiooni $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ täisdiferentsiaali väärtus, kui $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,01$ ja $\Delta y = 0,03$.
39. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x + y}{x - y}$ täismuudu Δz ja täisdiferentsiaali dz väärtused, kui $x = -3$, $y = 7$, $\Delta x = -\frac{1}{3}$ ja $\Delta y = \frac{1}{4}$.
40. Arvutage funktsiooni $z = xy + \frac{x}{y}$ täismuudu Δz ja täisdiferentsiaali dz väärtused, kui x muutub väärtusest -1 väärtuseks $-0,8$ ja y väärtusest 2 väärtuseks $2,2$.
41. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $1,96^3 \cdot 2,03^5$.
42. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\frac{\sqrt{82}}{\sqrt[3]{28}}$.
43. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\arcsin \frac{\sqrt{1,04}}{2,04}$.
44. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\ln(\sqrt[5]{0,98} + \sqrt[4]{1,04} - 1)$.
45. Leidke $\frac{dy}{dx}$, kui $x^2 y^2 - x^4 - y^4 = a^2$.

46. Leidke $\frac{dy}{dx}$, kui $2y^3 + 3x^2y + \ln x = 0$ ja arvutage selle väärtus, kui $x = 1$.
47. Leidke $\frac{dy}{dx}$, kui $y = \sqrt{x} \ln \frac{x}{y}$ ja arvutage selle väärtus punktis $(e^2; e)$.
48. Leidke $\frac{dy}{dx}$, kui $x^y = y^x$ ja arvutage selle väärtus punktis $(1; 1)$.
49. Leidke $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.
50. Leidke $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $z = \cos xy - \sin xz$ ning arvutage nende väärtused punktis $\left(\frac{\pi}{2}; 1; 0\right)$.
51. Leidke $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $xyz = e^z$ ning arvutage nende väärtused punktis $(e^{-1}; -1; -1)$.
52. Tõestage, et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, kui $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.
53. Leidke $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, kui $z = \arcsin(xy)$.
54. Leidke $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$, kui $w = e^{xyz}$.
55. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x}{y^2}$ kõik teist järku osatuletised punktis $(-1; -2)$.
56. Arvutage funktsiooni $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ kõik teist järku osatuletised punktis $(1; -2)$.
57. Arvutage
- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$
- punktis $(0; -2)$, kui $z = \frac{\cos x^2}{y}$.

58. On antud funktsioon $z = \ln(e^x + e^y)$. Tõestge, et $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ja

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

59. Tõestage, et funktsioon $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ rahuldab võrrandit

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

60. Leidke funktsiooni $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ gradient punktis $(3; 4)$.

61. Leidke punktid, milles skalaarvälja $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ gradiendiks on vektor $\vec{a} = \left(1; -\frac{16}{9}\right)$

62. Leidke funktsiooni $w = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ gradient punktis $(1; 1; 2)$.

63. Leidke funktsiooni $z = \arctan \frac{y}{x} - \frac{4y}{x}$ tuletis punktis $(1; \sqrt{3})$ suunas, mis viib sealt punkti $(2; 3\sqrt{3})$.

64. Leidke funktsiooni $w = xyz$ tuletis punktis $A(-2; 1; 3)$ vektori $\vec{s} = (4; 3; 12)$ suunas.

65. Leidke funktsiooni $w = x^2 y^2 - z^2 + 2xyz$ tuletis punktis $B(1; 1; 0)$ suunas, mis moodustab koordinaattelgedega vastavalt nurgad 60° , 45° ja 60° .

66. Leidke funktsiooni $z = \ln(x^2 + y^2)$ suurim kasvukiirus punktis $C(-3; 4)$

67. Leidke võrrandiga $x^2 + y^3 - z^2 - 1 = 0$ määratud funktsiooni tuletise suurim väärtus punktis $(3; 2; 4)$.

68. Leidke pinna $z = \arctan \frac{y}{x}$ suurim tõus punktis $(1; 1)$.

69. Millise vektori suunas muutub funktsioon $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ koordinaatide alguspunktis kõige kiiremini?

70. Leidke vektorvälja $\vec{F} = \left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}\right)$ divergents ja rootor.

71. Leidke vektorvälja $\vec{F} = (\ln(x^2 - y^2); \arctan(z - y); xyz)$ divergents ja rootor.
72. Leidke vektorvälja $\vec{F} = \text{grad } w$, kus $w = \ln(x + y - z)$, divergents ja rootor.
73. Leidke vektorvälja $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, kus $\vec{G} = (x^2y; y^2z; x^2z)$, divergents ja rootor.
74. Leidke funktsiooni $z = 4x^2 - xy + 9y^2 + x - y$ lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
75. Leidke funktsiooni $z = x^3y^2(12 - x - y)$ lokaalsed ekstreemumpunktid, mis rahuldavad tingimusi $x > 0$ ja $y > 0$ ja määrake ekstreemumi liik.
76. Leidke funktsiooni $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
77. Leidke funktsiooni $z = e^x(x^2 + y^2)$ lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
78. Leidke funktsiooni $z = x^3 + y^3 - 3xy$ lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
79. Leidke funktsiooni $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ekstremaalsed väärtused lisatingimusel $x + y = 2$.
80. Leidke funktsiooni $z = a \cos^2 x + b \cos^2 y$ ekstreemumpunkt lisatingimusel $y - x = \frac{\pi}{4}$.
81. Leidke funktsiooni $w = x + y + z$ ekstreemumpunktid lisatingimusel $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.
82. Risttahuka ühte tippu läbivate servade summa on 1 m. Leidke risttahuka mõõtmed, et selle ruumala oleks maksimaalne.
83. Arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kui D on ruut $0 \leq x \leq 1$ ja $1 \leq y \leq 2$.
84. Arvutage kahekordne integraal $\iint_D \frac{dx dy}{(x + y)^2}$, kui D on ruut $1 \leq x \leq 2$ ja $3 \leq y \leq 4$.

85. Arvutage kahekordne integraal $\int_1^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} xy dy$.
86. Arvutage kahekordne integraal $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x+1} (xy + y) dy$.
87. Arvutage kahekordne integraal $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy$.
88. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui D on joontega $y = 0$ ja $y = 1 - x^2$ piiratud piirkond.
89. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui D on sirgetega $y = 0$, $y = a$, $y = x$ ja $y = x - 2a$ piiratud piirkond.
90. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui D on joontega $y = \frac{2}{1+x^2}$ ja $y = x^2$ piiratud piirkond.
91. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x; y) dy$.
92. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x; y) dy$.
93. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_{-2}^2 dy \int_{y^2-2}^{\frac{y^2}{2}} f(x; y) dx$.

94. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{x^2+2} f(x; y) dy$.
95. Muutes integreerimise järjekorda, esitage ühe kahekordse integraali abil summa $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x; y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x; y) dx$.
96. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x - 2y) dx dy$, kui piirkond D on määratud võrratustega $-1 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq x^2 + 1$.
97. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, ku D on sirgetega $y = x$, $x + y = 2a$ ja $x = 0$ piiratud piirkond.
98. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D xy dx dy$, ku D on vähim segmentidest, milleks sirge $x + y = 2$ jaotab ringi $x^2 + y^2 \leq 2y$.
99. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D e^{x+y} dx dy$, ku D on joontega $y = e^x$, $x = 0$ ja $y = 2$ piiratud piirkond.
100. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui integreerimispiirkond D on määratud võrratustega $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ja $y \geq 0$.
101. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui integreerimispiirkond D on piiratud ringjoontega $x^2 + y^2 = 4x$ ja $x^2 + y^2 = 8x$ ning sirgetega $y = x$ ja $y = 2x$.

102. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\int_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x; y) dx$.
103. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$.
104. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$,
kui D on määratud tingimustega $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
105. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$.
106. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy$,
kui D on ring $x^2 + y^2 \leq Rx$.
107. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\iint_D x \sqrt{x^2+y^2} dx dy$,
kui D on lemniskaadiga $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ piiratud piirkond, kus $x \geq 0$.
108. Arvutage kolmekordne integraal $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz$.
109. Arvutage kolmekordne integraal $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, kui V on tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$ ja $x+y+z=1$ piiratud piirkond.
110. Arvutage kolmekordne integraal $\iiint_V xyz dx dy dz$, kui V on pindadega $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$ ja $z=0$ piiratud piirkond.
111. Teisendage silinderkoordinaatidesse kolmekordne integraal $\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz$,
kui piirkond V on piiratud pindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=4$ ja $z=x^2+y^2$.

112. Arvutage silinderkoordinaatide abil kolmekordne integraal

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

113. Arvutage silinderkoordinaatide abil kolmekordne integraal $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$,
kui piirkond V on määratud võrratustega $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ ja
 $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$.

114. Arvutage joontega $xy = 4$ ja $x + y = 5$ piiratud piirkonna pindala.

115. Eeldusel, et a on positiivne konstant, arvutage joontega $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$,
 $x = 2y$ ja $x = 0$ piiratud piirkonna pindala.

116. Arvutage tasanditega $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ ja $x = 2$ ning pöördparaboloidiga $z = x^2 + y^2$ piiratud keha ruumala.

117. Arvutage hüperboolse paraboloidiga (sadulpinnaga) $z = x^2 - y^2$ ning tasanditega $z = 0$ ja $x = 3$ piiratud keha ruumala.

118. Arvutage pindadega $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$ ja $y^2 = x$ piiratud keha ruumala.

119. Arvutage sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ja pöördparaboloidiga $3z = x^2 + y^2$ piiratud keha ruumala.

120. Arvutage võrratustega $y \geq 0$, $y \leq x$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ja $0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1$ määratud kujundi ruumala.

121. Arvutage joonintegraal $\int_L (x^2 + y^2) ds$, kui L on punkte $A(1; 1)$ ja $B(4; 4)$ ühendav sirglõik.

122. Arvutage $\int_L y^2 ds$, kui L on punktide $O(0; 0)$ ja $C(2a\pi; 0)$ vaheline tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaar.

123. Arvutage $\int_L (x^2 + y^2 + z) ds$ mööda krüvijoont $x = a \cos t$, $y = a \sin t$,
 $z = bt$ punktist, milles $t = 0$ punktini, milles $t = 2\pi$

124. Arvutage $\int_L xyz ds$, kui L on veerand ringjoont $x = \frac{R}{2} \cos t$, $y = \frac{R}{2} \sin t$, $z = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, mis asub esimeses oktandis.
125. Arvutage $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, kui L on sirge $y = x$ lõik punktist $(1; 1)$ punktini $(2; 2)$.
126. Arvutage $\int_L \arctan \frac{y}{x} dy - dx$, kui L on parabooli $y = x^2$ kaar punktist $O(0; 0)$ punktini $A(1; 1)$.
127. Arvutage $\int_{AB} (x+y) dx + (x-y) dy$ üle ellipsi $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ kaare punktist $A(a; 0)$ punktini $B(0; b)$.
128. Arvutage $\int_L x dy - y dx$, kui L on astroidi $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ kaar punktist, kus $t = 0$ punktini, kus $t = \frac{\pi}{2}$.
129. Arvutage $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{dy}{y-1}$, kui L on tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ kaar punktist $t = \frac{\pi}{6}$ punktini $t = \frac{\pi}{3}$.
130. Arvutage $\int_{AB} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ punktist $A(1; 1; 1)$ punktini $B(4; 4; 4)$ tõmmatud sirglõiku mööda.
131. Arvutage $\int_L yz dx + xz dy + xy dz$, kui L on krüvijoone $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ kaar parameetri t muutumisel 0-st 2π -ni.
132. Teisendage Greeni valemi abil joonintegraal $\oint_L (1-x^3)y dx + x(1+y^3) dy$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D , kui L positiivses suunas läbitav kinnine sile joon, mis piirab piirkonda D .

133. Teisendage Greeni valemi abil joonintegraal $\oint_L e^x(1-\cos y)dx + e^x(\sin y + y)dy$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D , kui L positiivses suunas läbitav kinnine sile joon, mis piirab piirkonda D .
134. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_L (x+y^2)dx + (x+y)^2dy$, kui L on kolmnurga ABC kontuur tippudega $A(1;0)$, $B(1;1)$ ja $C(0;1)$.
135. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_L (5x-3y)dx + (x-4y)dy$, kui L on positiivses suunas läbitav ringjoon $x^2 + y^2 = 1$.
136. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_L 2xydx + x^2dy$, kui L on positiivses suunas läbitav ruudu $|x| + |y| = 1$ rajajoon.
137. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_L xy^2dy - x^2ydx$, kui L on positiivses suunas läbitav ringjoon $x^2 + y^2 = 5$.
138. Arvutage $\int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2dy$.
139. Arvutage $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy$.
140. Arvutage $\int_{(1;1)}^{(2;2)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
141. Arvutage $\iint_S (x+y+z)d\sigma$, kui S on esimeses oktandis paiknev tasandi $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z = 1$ osa.
142. Arvutage $\iint_S (x^2 + y^2)d\sigma$, kui S on koonuse $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tükk, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

143. Arvutage $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, kui S on poolsfäär $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
144. Arvutage $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} d\sigma$, kui S on sadulpinna $z = xy$ see tükk, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = 1$.
145. Arvutage $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, kui S on tasandi $x + y + z = 1$ esimeses oktantis paiknev osa, kus normaal moodustab koordinaattelgedega teravnurgad.
146. Arvutage $\iint_S x^2 y^2 z dxdy$, kui S on poolsfääri $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ülemine pinnapool.
147. Arvutage $\iint_S xyz dzdy$, kui S on tasandi poolsfääri $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ alumine pinnapool.
148. Arvutage $\iint_S xz dxdy + xy dydz + yz dxdz$, kui S on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ määratud püramiidi seesmine pinnapool.
149. Kirjutage rea $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \dots$ üldliikme avaldis.
150. Kirjutage rea $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$ üldliikme avaldis.
151. Kasutades võrdust $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, leidke rea $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots$ n -es osasumma ja summa.
152. Leidke rea $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{3k(3k+3)} + \dots$ n -es osasumma ja summa.
153. Leidke rea $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ n -es osasumma ja summa.

154. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5+3^k}$ koonduvust võrdlustunnuse abil.
155. Uurige rea $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^3-1)^{\frac{1}{3}}}$ koonduvust võrdlustunnuse abil.
156. Uurige rea $1 + \frac{3}{2!} + \frac{6}{3!} + \frac{12}{4!} + \dots + \frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n!} + \dots$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
157. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
158. Uurige rea $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(3k+1)!}$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
159. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{2k-1}{4k+3}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.
160. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^k \frac{2k+3}{k+1}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.
161. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{-k^2}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.
162. Uurige rea $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \dots$ koonduvust integraaltunnuse abil.
163. Uurige rea $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ koonduvust integraaltunnuse abil.
164. Uurige rea $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ koonduvust Leibnizi tunnuse abil.
165. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k^3}$ koonduvust Leibnizi tunnuse abil.
166. Kas rida

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

167. Kas rida

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{(2)^n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

168. Kas rida

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

Ülesannetes 178. - 181. leidke astmerea koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond.

169.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k+1)}$$

170.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$$

171.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{3^k}$$

172.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(x+3)^k}{k!}$$

Ülesannetes 182. - 187. arendage funktsioon astmerekaks x astmete järgi ja määrake saadud rea koonduvuspiirkond.

173.
$$f(x) = \frac{1}{10+x}.$$

174.
$$f(x) = e^{-x}.$$

175.
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

176.
$$f(x) = \operatorname{sh} x.$$

177.
$$f(x) = \cos^2 x.$$

178. $f(x) = \arctan x$ (Märkus: integreerige ülesande 184. tulemust rajades 0-st x -ni).

Ülesannetes 188. - 192. arendage etteantud poollõigul defineeritud 2π -perioodiline funktsioon Fourier' reaks.

$$179. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$180. f(x) = x, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$181. f(x) = x^2, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$182. f(x) = \sin ax, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$183. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \text{ kui } 0 < x \leq 2\pi.$$

Ülesannetes 193. - 196. leidke funktsiooni Fourier' teisendus.

$$184. \text{ Heaviside'i ühikfunktsioon } H(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0 \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

$$185. \text{ Ristkülikukujuline impulss } f(x) = \begin{cases} A, & \text{kui } |x| \leq 2 \\ 0, & \text{kui } |x| > 2 \end{cases}$$

186. Kahepoolne eksponentsiaalne impulss

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{kui } x \leq 0 \\ e^{-ax}, & \text{kui } x > 0 \end{cases} \quad \text{eeldusel, et } (a > 0)$$

$$187. f(x) = \begin{cases} \sin ax, & \text{kui } |x| \leq \frac{\pi}{a} \\ 0, & \text{kui } |x| > \frac{\pi}{a} \end{cases}$$

Vastused

9. Ei ole, sest esimene on määratud ka juhul $x \leq 0$ ja $\sin y \leq 0$. **10.**

Ei ole, sest esimene on määratud ka juhul $x < 0$ ja $y < 0$. **11.** Ei ek-

sisteeri. **12.** 2 **13.** 0. **14.** Ei eksisteeri. **15.** $\frac{0}{\sqrt{x}}$ **16.**

Ei eksisteeri. **17.** 0 **18.** $2x\sqrt[3]{y} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt[4]{y}}; \frac{x^2}{3\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt[4]{y}}$ **19.**

$\frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}; -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$ **20.** $-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}; \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$ **21.** $y \cos xy - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x};$

$x \cos xy + \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$ **22.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^x}}; \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^x})\sqrt{x^2 + y^x}}$ **23.**
 $-\frac{y}{2\sqrt{x}(x + y^2)}; \frac{\sqrt{x}}{x + y^2}$ **24.** $y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}; x \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$ **25.**
 $\frac{y}{xy + \ln z}; \frac{x}{xy + \ln z}; \frac{1}{z(xy + \ln z)}$ **26.** $\frac{2x}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}; \frac{3y^2}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)};$
 $\frac{4z^3}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}$ **27.** $y^z x^{y^z-1}; x^{y^z} \ln x \cdot zy^{z-1}; x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$ **28.**
 $2e^{2x} \cos(yz); -ze^{2x} \sin(yz); -ye^{2x} \sin(yz)$ **29.** $\frac{4}{5\sqrt{5}}; \frac{2}{5\sqrt{5}}$ **30.** 1; -1
31. $\frac{3}{2}$ **34.** $dz = \frac{ydx - xdy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}.$ **35.** $dz = \left(x^2 \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + y^2 \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}\right) \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$
36. $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2 \tan \frac{x}{y}}$ **37.** $dw = x^{yz} \left(\frac{yzdx}{x} + z \ln x dy + y \ln x dz\right)$ **38.**
 $\frac{1}{36}$ **39.** $\Delta z = \frac{19}{635}; dz = \frac{19}{600}$ **40.** $\Delta z \approx 0,3764; dz = 0,35$ **41.**
259,84. **42.** $2\frac{53}{54}$ **43.** $\frac{\pi}{6}.$ **44.** 0,006. **45.** $\frac{x(2x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2y^2)}$ **46.**
 $-\frac{1}{3}$ **47.** $\frac{3}{4e}$ **48.** 1 **49.** $\frac{2-x}{z+1}; \frac{2y}{z+1}$ **50.** $-\frac{2}{2+\pi}; -\frac{\pi}{2+\pi}$
51. $\frac{e}{2}; -\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}; \frac{x^3y}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}; \frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}$
54. $e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$ **55.** $0; \frac{1}{4}; -\frac{3}{8}$ **56.** $-\frac{4}{25}; \frac{3}{25}; \frac{4}{25}$ **57.**
0 **60.** $\left(2; -2\frac{1}{4}\right)$ **61.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ **62.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$
63. $-\frac{15}{4}\sqrt{\frac{3}{13}}$ **64.** $-\frac{30}{13}$ **65.** $2 + \sqrt{2}$ **66.** 0,4; **67.** $\frac{3\sqrt{5}}{4};$
68. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **69.** (0; -1; 0) **70.** $\text{div } \vec{F} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}; \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{y}{z^2}; \frac{z}{x^2}; \frac{x}{y^2}\right)$
71. $\text{div } \vec{F} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{1}{1 + (z - y)^2} + xy; \text{rot } \vec{F} = \left(xz - \frac{1}{1 + (z - y)^2}; -yz; \frac{2y}{x^2 - y^2}\right)$
72. $\text{div } \vec{F} = -\frac{3}{(x + y - z)^2}; \text{rot } \vec{F} = \vec{\Theta}$ **73.** $\text{div } \vec{F} = 0; \text{rot } \vec{F} =$
 $(2x; 2x; 2y - 2z)$ **74.** Punktis $\left(-\frac{17}{143}; \frac{7}{143}\right)$ lokaalne miinimum. **75.**
Punktis (6; 4) lokaalne maksimum $z_{\max} = 6912$ **76.** Punktis $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$
lokaalne miinimum $z_{\min} = 3\sqrt[3]{3}$ **77.** Punktis (-2; 0) ekstreemumit

- ei ole, punktis $(0;0)$ lokaalne miinimum. **78.** Punktis $(0;0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, punktis $(1;1)$ lokaalne miinimum. **79.** $z(1;1) = 2$
- 80.** $\left(-\frac{1}{2} \arctan \frac{b}{a}; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{b}{a}\right)$ **81.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **82.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{3}$
- m **83.** $\frac{8}{3}$ **84.** $\ln \frac{25}{24}$ **85.** $3\frac{3}{4}$ **86.** $\frac{19}{12}$ **87.** $\frac{6}{35}$ **88.**
- 89.** $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x; y) dy$ **90.** $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x; y) dy$
- 91.** $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx$ **92.** $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx + \int_0^2 dy \int_{y-1}^1 f(x; y) dx$
- 93.** $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x; y) dy - \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy$
- 94.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x; y) dx + \int_1^3 dy \int_{-1}^1 f(x; y) dx - \int_2^3 dy \int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} f(x; y) dx$ **95.**
- $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x; y) dy$ **96.** $-10\frac{7}{20}$ **97.** $\frac{4}{3}a^4$ **98.** $\frac{1}{4}$ **99.** e **100.**
- $\int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ **101.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$
- 102.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{R}{2 \sin \varphi}}^{2R \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ **103.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1)$ **104.** π
- 105.** $\frac{\pi}{4} [(1 + R^2) \ln(1 + R^2) - R^2]$ **106.** $\frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3}\right)$ **107.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$
- 108.** $\frac{a^{11}}{110}$ **109.** $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$ **110.** $\frac{1}{96}$ **111.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) \rho dz$
- 112.** $\frac{4}{3}\pi$ **113.** 8 **114.** $\frac{1}{2}(15 - 16 \ln 2)$ **115.** $a^2(\pi - 1)$ **116.**
- $\frac{16}{3}$ **117.** 27 **118.** $\frac{3}{35}$ **119.** $\frac{19}{6}\pi$ **120.** $\frac{21\pi}{16}$ **121.**

$$\begin{array}{llll}
42\sqrt{2} & \mathbf{122.} \frac{256}{15}a^3 & \mathbf{123.} 2\pi\sqrt{a^2+b^2}(a^2+\pi b) & \mathbf{124.} \frac{R^4\sqrt{3}}{32} \\
\mathbf{125.} \ln 2 & \mathbf{126.} \frac{\pi}{2}-2 & \mathbf{127.} -\frac{a^2+b^2}{2} & \mathbf{128.} \frac{3\pi ab}{16} \quad \mathbf{129.} \\
\frac{\pi^2}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln 3 & \mathbf{130.} 3\sqrt{3} & \mathbf{131.} 0 & \mathbf{132.} \iint_D (x^3+y^3)dx dy \\
\mathbf{133.} \iint_D e^x y dx dy & \mathbf{134.} \frac{2}{3} & \mathbf{135.} 4\pi & \mathbf{136.} 0 \quad \mathbf{137.} \frac{25\pi}{2} \\
\mathbf{138.} 4 & \mathbf{139.} 8 & \mathbf{140.} \sqrt{2} & \mathbf{141.} \frac{\sqrt{21}}{3} \quad \mathbf{142.} \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad \mathbf{143.} \pi R^3 \\
\mathbf{144.} \frac{3\pi}{2} & \mathbf{145.} \frac{1}{2} & \mathbf{146.} \frac{2\pi R^7}{105} & \mathbf{147.} 0 \quad \mathbf{148.} -\frac{1}{8} \quad \mathbf{149.} \\
\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1} & \mathbf{150.} (-1)^k \frac{k}{6k-5} & \mathbf{151.} S_n = 1 - \frac{1}{n+1}; S = 1 & \\
\mathbf{152.} S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9(n+1)}; S = \frac{1}{9} & \mathbf{153.} 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}; 1 - \sqrt{2} & & \\
\mathbf{154.} \text{Koondub.} & \mathbf{155.} \text{Hajub.} & \mathbf{156.} \text{Koondub.} & \mathbf{157.} \text{Koondub.} \\
\mathbf{158.} \text{Koondub.} & \mathbf{159.} \text{Koondub.} & \mathbf{160.} \text{Koondub.} & \mathbf{161.} \text{Koondub.} \\
\mathbf{162.} \text{Hajub.} & \mathbf{163.} \text{Koondub.} & \mathbf{164.} \text{Koondub.} & \mathbf{165.} \text{Koondub.} \\
\mathbf{166.} \text{Koondub absoluutselt.} & \mathbf{167.} \text{Koondub absoluutselt.} & \mathbf{168.} \text{Koondub} & \\
\text{tingimisi.} & \mathbf{169.} R = 1; -1 \leq x \leq 1 & \mathbf{170.} R = 1; -1 \leq x < 1 & \mathbf{171.} \\
R = 3; -1 < x < 5 & \mathbf{172.} -\infty < x < \infty & \mathbf{173.} \frac{1}{10} - \frac{x}{100} + \frac{x^2}{10^3} - \frac{x^3}{10^4} + & \\
\dots, \text{koondub, kui } -10 < x < 10 & \mathbf{174.} 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \text{koondub, kui} & & \\
-\infty < x < \infty & \mathbf{175.} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \text{koondub, kui } -1 < x < 1 & \mathbf{176.} & \\
x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \text{koondub, kui } -\infty < x < \infty & \mathbf{177.} 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}, & & \\
\text{koondub, kui } -\infty < x < \infty & \mathbf{178.} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \text{koondub, kui} & & \\
-1 \leq x \leq 1 & \mathbf{179.} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} & \mathbf{180.} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx & \mathbf{181.} \\
\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx & \mathbf{182.} \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{a^2 - k^2} \sin kx & \mathbf{183.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} & \\
\mathbf{184.} \frac{1}{i\omega} & \mathbf{185.} \frac{2A}{\omega} \sin 2\omega & \mathbf{186.} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} & \mathbf{187.} \frac{2ia \sin \frac{\pi\omega}{a}}{\omega^2 - a^2}
\end{array}$$