

Kõrgem matemaatika II iseseisvad ülesanded

1. Kirjutage rea $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \dots$ üldliikme avaldis.
2. Kirjutage rea $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$ üldliikme avaldis.
3. Kasutades võrdust $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, leidke rea $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots$ n -es osasumma ja summa.
4. Leidke rea $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{3k(3k+3)} + \dots$ n -es osasumma ja summa.
5. Leidke rea $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ n -es osasumma ja summa.
6. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5+3^k}$ koonduvust võrdlustunnuse abil.
7. Uurige rea $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^3-1)^{\frac{1}{3}}}$ koonduvust võrdlustunnuse abil.
8. Uurige rea $1 + \frac{3}{2!} + \frac{6}{3!} + \frac{12}{4!} + \dots + \frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n!} + \dots$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
9. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
10. Uurige rea $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(3k+1)!}$ koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
11. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{2k-1}{4k+3}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.
12. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^k \frac{2k+3}{k+1}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.

13. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{-k^2}$ koonduvust Cauchy tunnuse abil.

14. Uurige rea $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ koonduvust Leibnizi tunnuse abil.

15. Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k^3}$ koonduvust Leibnizi tunnuse abil.

16. Kas rida

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

17. Kas rida

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

18. Kas rida

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

Ülesannetes 21. -24. leidke astmerea koonduvusraadius ja koonduvuspiirkond.

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{3^k}$

22. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(x+3)^k}{k!}$

Ülesannetes 25. 30. arendage funktsioon astmerekaks x astmete järgi ja määrake saadud rea koonduvuspiirkond.

$$23. f(x) = \frac{1}{10+x}$$

$$24. f(x) = e^{-x}$$

$$25. f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$26. f(x) = \operatorname{sh} x$$

$$27. f(x) = \cos^2 x$$

$$28. f(x) = \arctan x \text{ (Märkus: integreerige ülesande 27. tulemust rajades 0-st } x\text{-ni)}$$

Ülesannetes 31. - 35. arendage etteantud poollõigul defineeritud 2π -perioodiline funktsioon Fourier' reaks.

$$29. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$30. f(x) = x, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi$$

$$31. f(x) = x^2, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi$$

$$32. f(x) = \sin ax, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi$$

$$33. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \text{ kui } 0 < x \leq 2\pi$$

Ülesannetes 36. - 42. arvutage päratu integraal või tõestage selle hajuvus

$$34. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

$$35. \int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

$$36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$$

$$37. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$38. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$39. \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$$

$$40. \int_0^{\infty} x \sin x dx$$

$$41. \text{ Uurige rea } \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \dots \text{ koonduvust integraaltunnuse abil.}$$

$$42. \text{ Uurige rea } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \text{ koonduvust integraaltunnuse abil.}$$

Ülesannetes 43. - 46. leidke funktsiooni Fourier' teisendus.

$$43. \text{ Heaviside'i ühikfunktsioon } H(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0 \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

$$44. \text{ Ristkülikukujuline impulss } f(x) = \begin{cases} A, & \text{kui } |x| \leq 2 \\ 0, & \text{kui } |x| > 2 \end{cases}$$

$$45. \text{ Kahepoolne eksponentsiaalne impulss}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{kui } x \leq 0 \\ e^{-ax}, & \text{kui } x > 0 \end{cases} \quad \text{eeldusel, et } (a > 0)$$

$$46. f(x) = \begin{cases} \sin ax, & \text{kui } |x| \leq \frac{\pi}{a} \\ 0, & \text{kui } |x| > \frac{\pi}{a} \end{cases}$$

Ülesannetes 47. - 54. kujutage xy -tasandil kahe muutuja funktsiooni määramispiirkond

$$47. z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

$$48. z = \arcsin \frac{y+2}{x-1} + \ln y.$$

$$49. z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}.$$

50. $z = \ln x - \ln \sin y.$

51. $z = \sqrt{4 - x^2} + \ln(y^2 - 4)$

52. $z = \sqrt{\arcsin \frac{x}{y}}$

53. $z = (y + \sqrt{y})\sqrt{\cos x}$

54. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - 2 \ln(9 - x^2 - y^2)$

55. Kas funktsioonid

$$z = \sqrt{x \sin y} \quad \text{ja} \quad z = \sqrt{x} \sqrt{\sin y}$$

on identsed? Miks?

56. Kas funktsioonid

$$z = \ln xy \quad \text{ja} \quad z = \ln x + \ln y$$

on identsed? Miks?

Ülesannetes 57. - 68. leidke antud funktsiooni osatuletised kõikide sõltumatute muutujate järgi.

57. $z = x^2 y^3 - 2xy^4 + 5x - \frac{y}{3} + 1$

58. $z = x^2 \sqrt[3]{y} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}$

59. $z = \ln \tan \frac{x}{y}$

60. $z = e^{-\frac{x}{y}}.$

61. $z = \sin xy - \cos \frac{y}{x}.$

62. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

63. $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{x}}.$

64. $z = xy \ln(x + y).$

65. $w = \ln(xy + \ln z)$

66. $w = \tan(x^2 + y^3 + z^4)$.
67. $w = x^{y^z}$.
68. $w = e^{2x} \cos(yz)$.
69. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ osatuletised punktis $(1; -2)$.
70. $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$. Arvutage $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $x = y = 0$.
71. $w = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. Leidke $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ punktis $x = y = z = 1$
72. $z = \ln(x^2 - y^2)$; tõestage, et $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2}{x + y} = 0$
73. On antud funktsioon $z = xy + x \arctan \frac{y}{x}$. Tõestage, et $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.
74. Leidke funktsiooni $z = \arcsin \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldis.
75. Leidke funktsiooni $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ täisdiferentsiaali avaldis.
76. Leidke funktsiooni $z = \ln \sin \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldis.
77. Leidke funktsiooni $w = x^{yz}$ täisdiferentsiaali avaldis.
78. Arvutage funktsiooni $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ täisdiferentsiaali väärtus, kui $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,01$ ja $\Delta y = 0,03$.
79. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x + y}{x - y}$ täismuudu Δz ja täisdiferentsiaali dz väärtused, kui $x = -3$, $y = 7$, $\Delta x = -\frac{1}{3}$ ja $\Delta y = \frac{1}{4}$.
80. Arvutage funktsiooni $z = xy + \frac{x}{y}$ täismuudu Δz ja täisdiferentsiaali dz väärtused, kui x muutub väärtusest -1 väärtuseks $-0,8$ ja y väärtusest 2 väärtuseks $2,2$.
81. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $1,96^3 \cdot 2,03^5$.

82. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\frac{\sqrt{82}}{\sqrt[3]{28}}$.
83. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\arcsin \frac{\sqrt{1,04}}{2,04}$.
84. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu $\ln(\sqrt[5]{0,98} + \sqrt[4]{1,04} - 1)$.
85. Tõestage, et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, kui $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.
86. Leidke $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, kui $z = \arcsin(xy)$.
87. Leidke $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$, kui $w = e^{xyz}$.
88. Arvutage funktsiooni $z = \frac{x}{y^2}$ kõik teist järku osatuletised punktis $(-1; -2)$.
89. Arvutage funktsiooni $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ kõik teist järku osatuletised punktis $(1; -2)$.
90. Arvutage
- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$
- punktis $(0; -2)$, kui $z = \frac{\cos x^2}{y}$.
91. On antud funktsioon $z = \ln(e^x + e^y)$. Tõestage, et $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ja
- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$
92. Tõestage, et funktsioon $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ rahuldab võrrandit
- $$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$
93. Arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kui D on ruut $0 \leq x \leq 1$ ja $1 \leq y \leq 2$.

94. Arvutage kahekordne integraal $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, kui D on ruut $1 \leq x \leq 2$ ja $3 \leq y \leq 4$.

95. Arvutage kahekordne integraal $\int_1^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} xy dy$.

96. Arvutage kahekordne integraal $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x+1} (xy + y) dy$.

97. Arvutage kahekordne integraal $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy$.

98. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dxdy$, kui D on joontega $y = 0$ ja $y = 1 - x^2$ piiratud piirkond.

99. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dxdy$, kui D on sirgetega $y = 0$, $y = a$, $y = x$ ja $y = x - 2a$ piiratud piirkond.

100. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x; y) dxdy$, kui D on joontega $y = \frac{2}{1+x^2}$ ja $y = x^2$ piiratud piirkond.

101. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x; y) dy$.

102. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x; y) dy$.

103. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda

kahekordses integraalis $\int_{-2}^2 dy \int_{y^2-2}^{\frac{y^2}{2}} f(x; y) dx.$

104. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda

kahekordses integraalis $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{x^2+2} f(x; y) dy.$

105. Muutes integreerimise järjekorda, esitage ühe kahekordse integraali abil

summa $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x; y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x; y) dx.$

106. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x-2y) dx dy$, kui piirkond D on määratud võrratustega $-1 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq x^2 + 1$.

107. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$, ku D on sirgetega $y = x$, $x+y = 2a$ ja $x = 0$ piiratud piirkond.

108. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D xy dx dy$, ku D on vähim segmentidest, milleks sirge $x+y = 2$ jaotab ringi $x^2 + y^2 \leq 2y$.

109. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal $\iint_D e^{x+y} dx dy$, ku D on joontega $y = e^x$, $x = 0$ ja $y = 2$ piiratud piirkond.

110. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\iint_D f(x; y) dx dy$, kui integreerimispiirkond D on määratud võrratustega $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ja $y \geq 0$.

111. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\iint_D f(x; y) dx dy$,
 kui integreerimispiirkond D on piiratud ringjoontega $x^2 + y^2 = 4x$ ja $x^2 + y^2 = 8x$ ning sirgetega $y = x$ ja $y = 2x$.
112. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal $\int_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x; y) dx$.
113. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$.
114. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$,
 kui D on määratud tingimustega $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
115. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$
116. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy$,
 kui D on ring $x^2 + y^2 \leq Rx$
117. Arvutage kolmekordne integraal $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz$
118. Arvutage kolmekordne integraal $\iiint_V 2x dx dy dz$, kui V on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + 3y + z = 6$ piiratud piirkond.
119. Arvutage kolmekordne integraal $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, kui V on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ piiratud piirkond.
120. Arvutage kolmekordne integraal $\iiint_V xyz dx dy dz$, kui V on pindadega $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ ja $z = 0$ piiratud piirkond.

Ruumala kahekordse integraali abil

121. Arvutage koordinaattasanditega ja tasanditega $x+y=2$ ning $x+y+z=3$ piiratud kujundi ruumala.
122. Arvutage pinnaga $z = \cos x \cdot \cos y$, koordinaattasanditega ja tasandiga $x+y = \frac{\pi}{2}$ piiratud piirkonna ruumala.
123. Arvutage silindriga $x^2 + y^2 = 4$ ja tasanditega $z = 0$ ning $z = x + y + 5$ piiratud piirkonna ruumala.
124. Arvutage silindriga $x^2 + y^2 = 2y$ ning tasanditega $z = 0$ ja $z = y$ piiratud kujundi ruumala.

Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika

125. Kui suur on tõenäosus, et tähtede A, A, A, M, N ja P juhuslikul rittaladumisel saadakse sõna PANAMA?
126. Üheksaliikmeline seltskond istub juhuslikul viisil ümber ümmarguse laua. Kui suur on tõenäosus, et Mari ja Jüri satuvad kõrvuti istuma?
127. Puuviljakorvis on 5 õuna, 6 apelsini ja 4 pirni. Korvist võetakse juhuslikult kolm puuvilja. Kui suur on tõenäosus, et
- (a) need on erinevad;
 - (b) need on õunad;
 - (c) need on ühesugused;
 - (d) nende hulgas on 2 õuna ja üks pirn?
128. Üheksakorruselise maja lifti astus esimesel korrusel kolm inimest. Iga reisija tõenäosus väljuda mis tahes korrusel (alates teisest) on sama. Leidke tõenäosus, et
- (a) kõik reisijad väljuvad viiendal korrusel;
 - (b) kõik reisijad väljuvad ühel ja samal korrusel;
 - (c) iga reisija väljub erineval korrusel.
129. Ringi on joonestatud ruut, mille tipud asuvad ringjoonel. Kui suur on tõenäosus, et ringis juhuslikult valitud punkt asub ruudus?
130. Lõigul AB valitakse kaks punkti L ja M . Kui suur on tõenäosus, et punkt L asub punktile M lähemal kui punktile A ?

131. Tasapinnale on tõmmatud parallelsed sirged vahekaugustega 1 ja 8 cm. Tasapinnale visatakse juhuslikult münt dimeetriga 3 cm. Kui suur on tõenäosus, et münt ei löiku ühegi sirgega?
132. Tõenäosus, et Miku lahendab tõenäosusteooria ülesande, on 0,75. Tõenäosus, et Manni lahendab sama ülesande, on 0,8. Leidke tõenäosus, et
- (a) ülesande lahendavad mõlemad;
 - (b) kumbki ei lahenda ülesannet;
 - (c) vähemalt üks lahendab ülesande.
133. Kahel laskuril on märklaua tabamise tõenäosused vastavalt 0,7 ja 0,8. Leidke tõenäosus, et
- (a) mõlemad tabavad esimese lasuga;
 - (b) mõlemad lasevad mööda;
 - (c) tabab üks laskudest;
 - (d) tabab vähemalt üks laskudest.
134. Tõenäosus, et üliõpilane sooritab kontrolltöö esimesel katsel, on 0,7, teisel katsel 0,8. Arvutage kontrolltöö sooritamise tõenäosus, kui üliõpilasel lubatakse sooritada kaks katset.
135. Kolm arvutioperaatorit, preili Nirk, proua Mägi ja preili Mutt pidid arvutisse sisestama 100-leheküljelise aruande. Preili Nirk sisestas 50 lehekülge, proua Mägi 20 lehekülge ja preili Mutt 30 lehekülge. On teada, et preili Nirk teeb trükivea pooltel lehekülgedel, proua Mägi igal kümnendal, preili Mutt aga neljal leheküljel viiest. Kui tõenäoline on, et juhuslikult valitud lehekülg on trükiveaga?
136. Esimeses turismigrupis on 6 inglise keele ja 4 saksa keele oskajat, teises grupis 8 inglise keele ja 2 saksa keele oskajat. Esimesest grupist valiti juhuslikult üks turist ja saadeti teise gruppi. Leidke tõenäosus, et pärast seda teisest grupist valitud turist on inglise keele oskaja.
137. Tenniseväljaku ääres on 4 ühesugust kasti. Neist kolmes on 20 valget ja 5 kollast tennisepalli, neljandas aga 5 valget ja 20 kollast tennisepalli. Juhuslikult valitud karbist võeti juhuslik pall, mis osutus kollaseks. Kui suur on tõenäosus, et see võeti kastist, kus kollaseid palle on rohkem?

138. Toodangu kontrollijale saabuvatest detailidest on 96% standardsed. Kontrollija tunnistab standardse toote kvaliteetseks tõenäosusega 0,98 ja mittestandardse tõenäosusega 0,05. Kui suur on tõenäosus, et kontrollija poolt kvaliteetseks tunnistatud detail on standardne?
139. Kontrollitöös on viis ülesannet. Tõenäosus, et üliõpilane lahendab mis tahes ülesande õigesti, on 0,8. Leidke tõenäosus, et üliõpilane lahendab vähemalt neli ülesannet õigesti.
140. Tõenäosus, et kaugushüppaja sooritab määrustepärase hüppe, on 0,75. Kui suur on tõenäosus, et viiest niisugusest kaugushüppajast neli sooritab määrustepärase hüppe?
141. Kas võrdse vastasega kabet mängides on tõenäosem võita kolm partiid viiest või neli partiid seitsmest?
142. Lattu saabus 60 kasti klaastooteid. Tõenäosus, et transportimisel jäävad kastis kõik klaasesemed terveks, on 0,95. Leidke tõenäoseim kastide arv, milles kõik esemed on terved.
143. Teatud maakohas tehtud pikaajaliste vaatluste tulemusena on täheldatud, et 1. juulil sajab seal vihma tõenäosusega $\frac{4}{17}$. Leidke tõenäoseim vihmaste 1. juulide arv lähima 50 aasta jooksul.
144. Puuviljakorvis on 4 õuna ja 5 pirni. Korvist võetakse huupi kolm puuvilja. Koostage nende hulka sattunud õunte arvu kui juhusliku suuruse jaotusseadus.
145. Münti vistatakse kuni esimese vapi tulekuni. Koostage visete arvu kui juhusliku suuruse jaotusseadus.
146. Urnis on 5 valget ja 10 musta kuuli. Urnist võetakse kuule kuni esimese valge kuuli tulekuni. Koostage välja võetud mustade kuulide arvu kui juhusliku suuruse jaotusseadus.
147. Kontrollitöös on 6 ülesannet. Tõenäosus, et üliõpilane lahendab ülesande õigesti, on iga ülesande puhul 0,7. Koostage õigesti lahendatud ülesannete hulga kui juhusliku suuruse jaotusseadus.
148. Juhusliku suuruse X jaotuseadus on

x_i	1	2	3	5	10
p_i	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

Koostage juhusliku suuruse $X^2 + X$ jaotuseadus ning arvutage $E(X^2 + X)$ ja $D(X^2 + X)$.

149. Juhuslike suuruste X ja Y jaotuseadused on

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

y_i	1	2	2
p_i	0,2	0,4	0,4

Eeldades, et X ja Y on sõltumatud, koostage summa $Z = X + Y$ jaotuseadus ning arvutage Z keskväärtus.

150. Juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{kui } x \geq 0 \end{cases}$$

Leidke juhusliku suuruse X jaotustihedus ja arvutage $P(|X| \leq 1)$.

151. Juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on $F(x) = a + b \arctan x$. Määrake konstandid a ja b ning arvutage tõenäosus $P(|X| \leq 1)$.

152. Juhusliku suuruse X jaotustihedus on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } |x| > 1 \\ a(1 - x^2) & \text{kui } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Määrake konstant a , leidke juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon ja arvutage $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$.

153. Juhusliku suuruse X jaotustihedus on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{kui } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Leidke juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon $F(x)$ ja arvutage $P\left(-\frac{1}{2} \leq X < 2\right)$.

Ülesannetes 154 - 156 kasutage Poissoni jaotust.

154. Ühesuguste detailide partiis on 300 detaili. Tõenäosus, et detail on praak, on 0,01. Kui suur on tõenäosus, et partiis on 4 praakdetaili?
155. Teduskonnas on 500 üliõpilast. Kui suur on tõenäosus, et neist vähemalt kahel on täna sünnipäev?
156. Järves on 200 kala. Tõenäosus, et tunniajase õngitsemise tagajärjel ei saada kätte ühtegi kala, on 0,5. Kui suur on ühe kala jaoks tõenäosus, et ta tunni aja jooksul kinni püütakse?

157. Juhuslik suurus X on normaaljaotusega keskvaartusega $a = 2$ ja standardhällbega $\sigma = 3$. Arvutage tõenäosused $P(0 \leq X \leq 1)$ ja $P(|X - a| < 0,1)$.
158. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskvaartus on 40 ja dispersioon 200. Leidke tõenäosus, et juhusliku suuruse mõõdetav väärtus on vahemikus (30; 80).
159. Kahe objekti vahelise kauguse mõõtmisel tekkiv viga allub normaaljaotusele. Keskvaartus on 10 meetrit ja standardhälve 10 meetrit. Arvutage tõenäosus, et mõõdetud kauguse väärtus erineb tõelisest väärtusest mitte rohkem kui 15 meetrit.
160. Teatud automudeli läbisõit allub normaaljaotusele keskvaartusega 300000 km ja standardhällbega 30000 km. Kui suur on tõenäosus, et ostetud auto läbisõit on piirides 250000 km kuni 330000 km?
Ülesannetes 161 - 163 kasutage Moivre-Laplace'i integraalset piirteoreemi.
161. Sündmus esineb ühel katsel tõenäosusega 0,3. Kui suur on tõenäosus, et 100 katse korral on selle sündmuse suhteline sagedus vahemikus 0,2 kuni 0,4?
162. Automaatpingi toodangust on 90% defektideta. Kui suur on tõenäosus, et 300 sellel pingil toodetud detailidest defektideta 264 kuni 279?
163. Ühe lasuga on märgi tabamise tõenäosus 0,8. Kui suur on tõenäosus, et 100 lasu korral tabatakse märki 60 kuni 80 korda?
Ülesannetes 164 ja 165 on antud juhusliku vektori $(X; Y)$ jaotusseadus. Arvutage EX , DY ning suuruste X ja Y korrelatsioonikordaja.

164.

$Y \setminus X$	1	2	3	4
2	0,2	0,1	0	0,3
5	0,1	0	0,2	0,1

165.

$Y \setminus X$	1	4	5	6
2	0,2	0,3	0,1	0,1
3	0	0,1	0	0,2

166. Juhusliku vektori $(X; Y)$ jaotustihedus ruudus $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ on $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ ja väljaspool seda ruutu $f(x, y) = 0$. Leidke vektori $(X; Y)$ jaotusfunktsioon, EX ja DY .

167. Juhusliku vektori $(X; Y)$ jaotustihedus kolmnurgas $x + y \leq 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ on $f(x, y) = 24xy$ ja väljaspool seda kolmnurka $f(x, y) = 0$. Leidke EY ja DX ja $\text{cov}(X; Y)$.
168. Juhusliku suuruse sõltumatute mõõtmiste tulemused on 8; 7; 8; 11; 4; 8; 9; 7; 10; 8; 12; 3; 9; 7; 9; 12; 5; 13; 8; 7; 8; 10; 12. Koostage empiirilise jaotustabel, arvutage empiirilise jaotuse keskväärtus, dispersioon ja juhusliku suuruse dispersiooni nihutamata hinnang.
169. Normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersioon on 0,16. Mitu mõõtmist tuleb vähemalt teha, et mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine ei erineks tõenäosusega 0,99 juhusliku suuruse keskväärtusest rohkem kui 0,2 võrra?
170. Normaaljaotusega juhusliku suuruse keskväärtus on m ja dispersioon $D^*X = 36$. Leidke usaldusnivoole 0,90 vastav keskväärtuse m usaldusvahemik, kui selle juhusliku suuruse 100 vaatlustulemuse aritmeetiline keskmine on 132.
171. Normaaljaotusega juhusliku suuruse X dispersiooni hinnang $D^*X = 10$. Leidke tõenäosus, et selle juhusliku suuruse dispersiooni nihutamata hinnang $\bar{s}^2$ tuleb väisem kui 20 kui $n = 13$.
172. Leidke tõenäosus, et 10 vaatluse puhul normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersiooni nihutamata hinnang $\bar{s}^2$ tuleb suurem kui 10, kui $D^*X = 30$.
173. On antud normaaljaotusega juhusliku suuruse X 25 sõltumatu vaatluse tulemused 5,87; 5,36; 5,28; 5,68; 5,01; 6,60; 4,62; 4,95; 6,72; 5,67; 5,71; 4,55; 6,03; 4,88; 4,84; 6,14; 5,69; 6,57; 3,45; 5,76; 6,28; 3,89; 6,19; 5,12; 5,20. Arvutage selle juhusliku suuruse keskväärtuse hinnang ja leidke keskväärtuse usaldusvahemik, mis vastab usaldusnivoole 0,95.
174. Leidke eelmise ülesande andmetel juhusliku suuruse X dispersiooni nihutamata hinnang ja usaldusvahemik, mis vastab usaldusnivoole 0,95.

Vastused

1. $\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$. 2. $(-1)^k \frac{k}{6k-5}$. 3. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; $S = 1$. 4. $S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9(n+1)}$; $S = \frac{1}{9}$. 5. $1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$; $1 - \sqrt{2}$.
6. Koondub. 7. Hajub. 8. Koondub. 9. Koondub. 10.

- Koondub. **11.** Koondub. **12.** Koondub. **13.** Koondub. **14.**
Koondub. **15.** Koondub. **16.** Koondub absoluutselt. **17.** Koon-
dub absoluutselt. **20.** Koondub tingimisi. **18.** $-2 < x < 2$. **19.**
 $R = 1; -1 \leq x \leq 1$. **20.** $R = 1; -1 \leq x < 1$. **21.** $R = 3;$
 $-1 < x < 5$. **22.** $-\infty < x < \infty$. **23.** $\frac{1}{10} - \frac{x}{100} + \frac{x^2}{10^3} - \frac{x^3}{10^4} + \dots$,
koondub, kui $-10 < x < 10$. **24.** $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$, koondub, kui
 $-\infty < x < \infty$. **25.** $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$, koondub, kui $-1 < x < 1$. **26.**
 $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$, koondub, kui $-\infty < x < \infty$. **27.** $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$,
koondub, kui $-\infty < x < \infty$. **28.** $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, koondub, kui
 $-1 \leq x \leq 1$. **29.** $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. **30.** $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$. **31.**
 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$. **32.** $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{a^2 - k^2} \sin kx$. **33.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$.
34. 2. **35.** $\frac{1}{2}$. **36.** Hajub. **37.** Hajub. **38.** π . **39.** $\frac{1}{2}$.
40. Hajub. **41.** Hajub. **42.** Koondub. **43.** $\frac{1}{i\omega}$ **44.** $\frac{2A}{\omega} \sin 2\omega$
45. $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ **46.** $\frac{2ia \sin \frac{\pi\omega}{a}}{\omega^2 - a^2}$. **55.** ei ole, sest esimene on määratud
ka juhul $x \leq 0$ ja $\sin y \leq 0$. **56.** ei ole, sest esimene on määratud ka juhul
 $x < 0$ ja $y < 0$. **57.** $2xy^3 - 2y^4 + 5; 3x^2y^2 - 8xy^3 - \frac{1}{3};$ **58.** $2x\sqrt[3]{y} +$
 $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt[4]{y}}; \frac{x^2}{3\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt[4]{y}}$. **59.** $\frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}; -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$. **60.** $-\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}};$
 $\frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$. **61.** $y \cos xy - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}; x \cos xy + \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$. **62.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^x}};$
 $\frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^x})\sqrt{x^2 + y^x}}$. **63.** $-\frac{y}{2\sqrt{x}(x + y^2)}; \frac{\sqrt{x}}{x + y^2}$. **64.** $y \ln(x +$
 $y) + \frac{xy}{x + y}; x \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}$. **65.** $\frac{y}{xy + \ln z}; \frac{x}{xy + \ln z}; \frac{1}{z(xy + \ln z)}$.
66. $\frac{2x}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}; \frac{3y^2}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}; \frac{4z^3}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}$. **67.** $y^z x^{y^z-1};$
 $x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}; x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y$. **68.** $2e^{2x} \cos(yz); -ze^{2x} \sin(yz); -ye^{2x} \sin(yz)$
69. $\frac{4}{5\sqrt{5}}; \frac{2}{5\sqrt{5}}$. **70.** 1; -1. **71.** $\frac{3}{2}$. **74.** $dz = \frac{ydx - xdy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}$. **75.**

$$dz = \left(x^2 \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + y^2 \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} \right) \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} \quad 76. \quad dz = \frac{ydx - xdy}{y^2 \tan \frac{x}{y}}.$$

$$77. \quad dw = x^{yz} \left(\frac{yzdx}{x} + z \ln x dy + y \ln x dz \right). \quad 78. \quad \frac{1}{36}. \quad 79. \quad \Delta z = \frac{19}{635};$$

$$dz = \frac{19}{600}. \quad 80. \quad \Delta z \approx 0,3764; dz = 0,35. \quad 81. \quad 259,84. \quad 82. \quad 2\frac{53}{54}.$$

$$83. \quad \frac{\pi}{6}. \quad 84. \quad 0,006. \quad 86. \quad \frac{xy^3}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}; \frac{x^3y}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}};$$

$$\frac{1}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2y^2}}; \quad 87. \quad e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2). \quad 88. \quad 0; \frac{1}{4}; -\frac{3}{8}.$$

$$89. \quad -\frac{4}{25}; \frac{3}{25}; \frac{4}{25}. \quad 90. \quad 0. \quad 93. \quad \frac{8}{3} \quad 94. \quad \ln \frac{25}{24} \quad 95. \quad \frac{15}{4} \quad 96. \quad \frac{19}{12}.$$

$$97. \quad \frac{6}{35}. \quad 98. \quad \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x; y) dy \quad 99. \quad \int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x; y) dx \quad 100.$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{\frac{2}{1+x^2}}^1 f(x; y) dy \quad 101. \quad \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx \quad 102. \quad \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx +$$

$$\int_0^2 dy \int_{y-1}^1 f(x; y) dx$$

$$103. \quad \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x; y) dy - \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy$$

$$104. \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x; y) dx + \int_1^3 dy \int_{-1}^1 f(x; y) dx - \int_2^3 dy \int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} f(x; y) dx$$

$$105. \quad \int_0^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x; y) dy \quad 106. \quad -10\frac{7}{20} \quad 107. \quad \frac{4}{3}a^4. \quad 108. \quad \frac{1}{4}. \quad 109.$$

$$e \quad 110. \quad \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad 111. \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

$$112. \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{R}{2 \sin \varphi}}^{2R \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad 113. \quad \frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1) \quad 114. \quad \pi.$$

115. $\frac{\pi}{4} [(1 + R^2) \ln(1 + R^2) - R^2]$ **116.** $\frac{R^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$ **117.** $\frac{a^{11}}{110}$
118. 9 **119.** $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$ **120.** $\frac{1}{96}$ **121.** $\frac{10}{3}$ **122.** $\frac{\pi}{4}$ **123.**
 20π **124.** π **125.** $\frac{1}{120}$ **126.** $\frac{1}{4}$ **127.** a) $\frac{24}{91}$; b) $\frac{2}{91}$; c) $\frac{34}{455}$;
d) $\frac{8}{91}$; **128.** a) $\frac{1}{512}$; b) $\frac{1}{64}$; c) $\frac{21}{32}$; **129.** $\frac{2}{\pi}$; **130.** $\frac{3}{4}$; **131.**
 $\frac{5}{9}$; **132.** a) 0,6; b) 0,05; c) 0,95; **133.** a) 0,56; b) 0,06; c) 0,38; d)
0,94; **134.** 0,94; **135.** 0,51; **136.** $\frac{43}{55}$; **137.** $\frac{4}{7}$; **138.**
0,998; **139.** 0,737; **140.** 0,3955; **141.** kolm viiest; **142.**
57; **143.** 11 või 12; **144.**

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

145.

X	1	2	3	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

146.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,3333	0,2381	0,1648	0,1099	0,0699	0,0420	0,0233	0,0117	0,0050	0,0017	0,0003

147.

$X^2 + X$	2	6	12	30	110
P	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

; $E(X^2 + X) = 18,4$; $D(X^2 +$
 $X) = 999,04$;
149.

Z	3	4	5	6	7	8
P	0,04	0,14	0,22	0,24	0,2	0,16

; $EZ = 5,9$;
150. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0 \\ e^{-x} & \text{kui } x \geq 0 \end{cases}$; $P(|X| \leq 1) = \frac{e-1}{e}$;
151. $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{\pi}$; $P(|X| \leq 1) = \frac{1}{2}$; **152.** $a = \frac{3}{4}$;
 $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 & \text{kui } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$; $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$;
153. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{kui } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{kui } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$; $P(-\frac{1}{2} \leq X < 2) = \frac{7}{8}$;
154. 0,168; **155.** 0,398; **156.** $\frac{\ln 2}{200}$ **157.** 0,119; 0,024; **158.**
0,759; **159.** 0,819; **160.** 0,796; **161.** 0,971; **162.** 0,833;
163. 0,5;