1.2 Piirväärtus

1.2.1 Jada piirväärtus

Reaalarvude hulga ja arvtelje punktide hulga vahel on üksühene vastavus. Edaspidi kasutame samas tähenduses mõisteid reaalarv a ja arvtelje punkt a. Kahe reaalarvu a ja b vaheliseks kauguseks on $|b-a|$. Samuti on $|b-a|$ arvtelje punktide a ja b vaheliseks kauguseks.

Definitsioon 1.1. Punkti a ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, st vahemikku, mis on punkti a suhtes sümmeetriline.

Olgu vaatluse all jada

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots,\ y_n,\ \dots. \tag{1.1}$$

Definitsioon 1.2. Reaalarvu b nimetatakse jada (1.1) piirväärtuseks, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral leidub niisugune jada indeks N, et niipea, kui $n > N$, siis $|y_n - b| < \varepsilon$.

Definitsiooni kohaselt on reaalarv b jada (1.1) piirväärtuseks, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral on võimalik leida niisugune jada liige, pärast mida on kõik jada liikmed reaalarvule b lähemal kui ε

Definitsioonis esitatud tingimuse $|y_n - b| < \varepsilon$ saab esitada $-\varepsilon < y_n - b < \varepsilon$ ehk

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Viimane tingimus on samaväärne sellega, et jada liige y_n kuulub b ümbrusesse, st $y_n \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$. Seega on võimalik jada piirväärtuse definitsioon 2 ümber sõnastada ümbruse mõistet kasutades.

Definitsioon 1.2'. Reaalarvu b nimetatakse jada (1.1) piirväärtuseks, kui iga ümbruse $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ korral leidub niisugune jada indeks N, et niipea kui $n > N$, siis $y_n \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$.

Viimase definitsiooni kohaselt on reaalarv b jada (1.1) piirväärtuseks, kui $\forall$ ümbruse $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ korral on võimalik leida niisugune jada liige, pärast mida kõik jada liikmed kuuluvad b ümbrusesse.

Näide 1.1. Vaadeldes jada

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \dots;\ \frac{n}{n+1};\ \dots,$$

paneme tähele, et mida kaugemale jadas minna, seda 1-le lähedasema suuruse saame.

Uurime, mitmendast liikmest alates on jada liikmed 1-le lähemal kui $\varepsilon = 0,01$, st $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0,01$.

Teisendades saame, et $\left|\dfrac{n-n-1}{n+1}\right| < 0,01$ ehk $\dfrac{1}{n+1} < 0,01$. Siit $n+1 > 100$, st $n > 99$.

Järelikult on pärast 99. liiget (st alates 100.-st liikmest) kõik vaadeldava jada liikmed 1-le lähemal kui 0,01.

Uurime, mitmendast liikmest alates on jada liikmed 1-le lähemal kui $\varepsilon = 0,001$, $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < 0,001$.

Juba vaadeldud teisenduste tulemusena saame, et $n > 999$, st pärast 999. liiget on jada liikmed ühele lähemal kui 0,001.

Täiesti suvalise $\varepsilon > 0$ korral

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

kui

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

st $n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ehk $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

Reaalarvu a täisosa tähistatakse $[a]$. Seda tähistust kasutades saame järeldada, et kõik jada liikmed, mis järgnevad liikmele indeksiga $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] - 1$, on 1-le lähemal kui ε.

Asjaolu, et antud jada piirväärtus võrdub 1-ga, kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Üldisemalt, kui jada (1.1) piirväärtus on b, siis kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Jada piirväärtuse leidmisel on seega küsimus püstitatud ühtemoodi: missugusele reaalarvule hakkavad lähenema jada liikmed minnes selles jadas üha kaugemale (suurematele indeksitele).

Näide 1.2. Tüüpiliseks jadaks, millel piirväärtus puudub, on

$$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots\ ;\ (-1)^{n+1};\ \ldots \tag{1.2}$$

Siin paarituarvulise indeksiga jada liikmed on 1 ja paarisindeksiga jada liikmed on -1.

Kui nüüd oletada, et jada (1.2) piirväärtus on näiteks kahe järjestikuse liikme aritmeetiline keskmine, st 0, siis jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt peaks $\forall\ \varepsilon > 0$ korral alates teatud jada liikmest kehtima tingimused $|1-0| < \varepsilon$ ja $|-1-0| < \varepsilon$, mis aga on võimatu juba näiteks $\varepsilon = 0,5$ puhul. Järelikult jadal (1.2) piirväärtust ei eksisteeri.

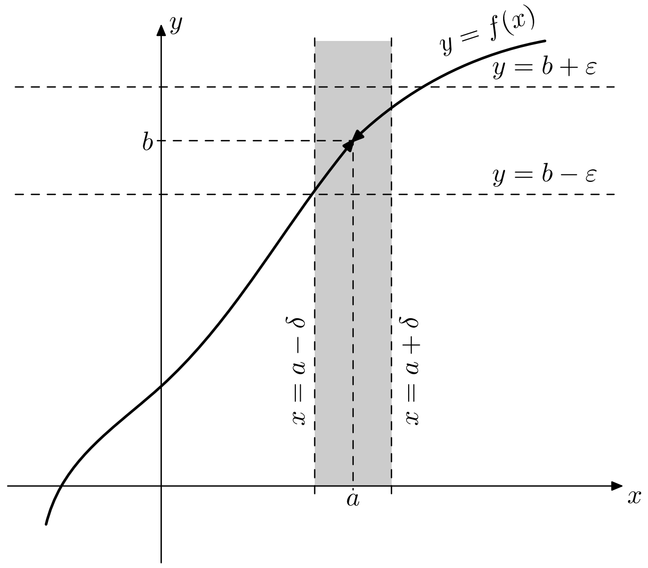
1.2.2 Funktsiooni piirväärtus

Jada piirväärtuse korral saame rääkida ainult ühest piirprotsessist $n \to \infty$. Funktsiooni $f(x)$ piirväärtust võib defineerida suvalise piirprotsessi $x \to a$, sealhulgas ka piirprotsessi $x \to \pm\infty$ korral.

Funktsiooni piirväärtuse defineerimisel kasutame kaht (väikest) positiivset suurust ε ja δ.

Definitsioon 2.1. Reaalarvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks piirprotsessis $x \to a$, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Teiste sõnadega, reaalarvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks piirprotsessis $x \to a$, kui funktsiooni $f(x)$ väärtused on arvule b kuitahes lähedal (lähemal kui ε) võttes argumendi x väärtused a-le piisavalt lähedalt (lähemalt kui δ). Etteantud ε põhjal on võimalik leida δ.



Joonis 1.1: Funktsiooni piirväärtus

Funktsiooni piirväärtust on ka võimalik defineerida ümbruste kaudu.

Definitsioon 2.1'. Reaalarvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks piirprotsessis $x \to a$, kui iga b ümbruse $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ korral leidub a niisugune ümbrus $(a - \delta; a + \delta)$, et kui $x \in (a - \delta; a + \delta)$, siis $f(x) \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon)$.

Kirjutatakse sel puhul

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Piirprotsessis $x \to \infty$ on funktsiooni piirväärtuse definitsioon sisuliselt jada piirväärtuse definitsiooni kordus. Ainsaks erinevuseks on see, et jada piirväärtuse puhul on n täisarvuline muutuja, aga funktsiooni piirväärtuse korral on x reaalarvuline muutuja.

Definitsioon 2.2. Reaalarvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks piirprotsessis $x \to \infty$, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $N > 0$, et kui $x > N$, siis $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Definitsioon 2.3. Reaalarvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks piirprotsessis $x \to -\infty$, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $N > 0$, et kui $x < -N$, siis $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks on ∞ piirprotsessis $x \to a$, kui $\forall\ N > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $f(x) > N$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Definitsioon 2.5. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks on $-\infty$ piirprotsessis $x \to a$, kui $\forall\ N > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $f(x) < -N$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Olgu $N > 0$. Lõpmatuse ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku $(N; \infty)$ ja $-\infty$ ümbruseks suvalist vahemikku $(-\infty; -N)$.

Definitsioonid 2, 3, 4 ja 5 on samuti võimalik sõnastada ümbruste kaudu. Näiteks definitsiooni 4 ümbersõnastus oleks järgmine.

Definitsioon 2.4'. Öeldakse, et funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks on ∞ piirprotsessis $x \to a$, kui iga lõpmatuse ümbruse $(N; \infty)$ korral leidub niisugune a ümbrus $(a - \delta; a + \delta)$, et kui $x \in (a - \delta; a + \delta)$, siis $f(x) \in (N; \infty)$.

1.2.3 Ühepoolsed piirväärtused

Punkti a vasakpoolseks ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku $(a - \varepsilon; a)$ ja punkti a parempoolseks ümbruseks suvalist vahemikku $(a; a + \varepsilon)$

Definitsioon 3.1. Reaalarvu b_1 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ vasakpoolseks piirväärtuseks piirprotsessis $x \to a$, kui $\forall\ b_1$ ümbruse $(b_1 - \varepsilon; b_1 + \varepsilon)$ korral $\exists\ a$ vasakpoolne ümbrus $(a - \delta; a)$, et kui $x \in (a - \delta; a)$, siis $f(x) \in (b_1 - \varepsilon; b_1 + \varepsilon)$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b_1.$$

Definitsioon 3.2. Reaalarvu b_2 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ parempoolseks piirväärtuseks piirprotsessis $x \to a$, kui $\forall$ b_2 ümbruse $(b_2 - \varepsilon; b_2 + \varepsilon)$ korral $\exists$ a parempoolne ümbrus $(a; a + \delta)$, et kui $x \in (a; a + \delta)$, siis $f(x) \in (b_2 - \varepsilon; b_2 + \varepsilon)$.

Tähistatakse

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b_2.$$

Teoreem 3.1. Kui funktsioonil on olemas piirväärtus piirprotsessis $x \to a$, siis on olemas ka mõlemad ühepoolsed piirväärtused ja need on võrdsed.

Tõestus. Oletame, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Definitsiooni kohaselt $\forall$ b ümbruse $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ korral leidub selline a ümbrus $(a-\delta; a+\delta)$, et kui $x \in (a-\delta; a+\delta)$, siis $f(x) \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$. Aga nii juhul $x \in (a-\delta; a)$ kui ka juhul $x \in (a; a+\delta)$ $x \in (a - \delta; a + \delta)$. Seega $\forall$ b ümbruse $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ korral leidub selline a vasakpoolne ümbrus $(a - \delta; a)$, et kui $x \in (a - \delta; a)$, siis $f(x) \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ ja leidub a parempoolne ümbrus $(a; a + \delta)$, et kui $x \in (a; a + \delta)$, siis $f(x) \in (b - \varepsilon; b + \varepsilon)$, st

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b$$

ja

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Teoreem 3.2. Kui funktsioonil on mingis piirprotsessis olemas ühepoolsed piirväärtused ja need on võrdsed, siis on funktsioonil olemas piirväärtus selles piirprotsessis.

Kui ühepoolsed piirväärtused ei ole võrdsed, siis funktsioonil vaadeldavas piirprotsessis piirväärtust ei ole.

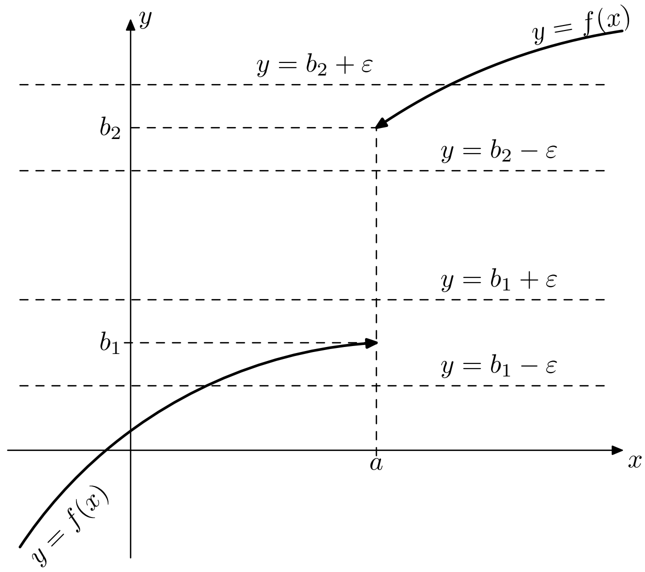
Näide 3.1. Leiame $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{|x|}{x}$ ja $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|}{x}$.

Kui $x \to 0-$, siis $x < 0$ ja $|x| = -x$, st $\dfrac{|x|}{x} = -1$. Konstantse suuruse piirväärtus on võrdne selle suurusega, seega

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Kui $x \to 0+$, siis $x > 0$ ja $|x| = x$, st $\dfrac{|x|}{x} = 1$. Seega

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1.$$



Joonis 1.2: Ühepoolsed piirväärtused

Ühepoolsete piirväärtuste erinevusest järeldub, et ei ole olemas piirväätrust

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Näide 3.2. Leiame $\lim\limits_{x \to 0-} \arctan \dfrac{1}{x}$ ja $\lim\limits_{x \to 0+} \arctan \dfrac{1}{x}$.

Kui $x \to 0-$, siis $\dfrac{1}{x} \to -\infty$, seega

$$\lim_{x \to 0-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Kui $x \to 0+$, siis $\dfrac{1}{x} \to \infty$, seega

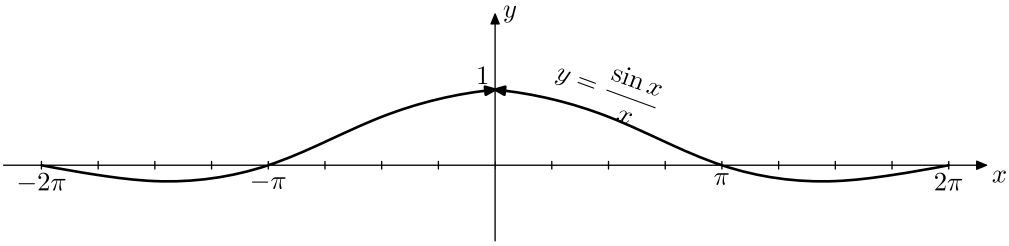
$$\lim_{x \to 0-} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Siit teeme järelduse, et pole olemas piirväärtust $\lim\limits_{x \to 0} \arctan \dfrac{1}{x}$.

Näide 3.3. Funktsioon $\dfrac{\sin x}{x}$ ei ole määratud, kui $x \neq 0$.

On võimalik tõestada, et $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Seega $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Joonis 1.3: Funktsioon $y = \dfrac{\sin x}{x}$

1.2.4 Lõpmatult suured ja lõpmatult väikesed suurused

Vaatleme funktsiooni ehk muutuvat suurust $y = y(x)$ piirprotsessis $x \to a$ (sh $x \to \pm\infty$).

Definitsioon 4.1. Muutuvat suurust y nimetatakse lõpmatult suureks piirprotsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} |y| = \infty,$$

st $\lim\limits_{x \to a} y = \infty$ või $\lim\limits_{x \to a} y = -\infty$

Näide 4.1. Funktsioon $y = \dfrac{1}{x}$ on lõpmatult suur piirprotsessis $x \to 0$, sest

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Näide 4.2. Funktsioon $y = \ln x$ on lõpmatult suur piirprotsessis $x \to 0+$, sest

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty,$$

ja piirprotsessis $x \to \infty$, sest

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

Definitsioon 4.2. Muutuvat suurust $\alpha = \alpha(x)$ nimetatakse piirprotsessi $x \to a$ lõpmatult väikeseks, kui $\lim\limits_{x \to a} \alpha = 0$.

Teoreem 4.1. Muutuva suuruse y piirväärtus on b parajasti siis, kui see muutuv suurus avaldub b ja lõpmatult väikese suuruse α summana, st

$$\lim_{x \to a} y = b \iff y = b + \alpha$$

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et $\lim_{x \to a} y = b$, st $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|y - b| < \varepsilon$.

Tähistades $\alpha = y - b$ saame, et $y = b + \alpha$ ja $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|\alpha| < \varepsilon$. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt $\lim_{x \to a} \alpha = 0$, st α on lõpmatult väike suurus.

Piisavus tõestatakse sarnaselt.

Teoreem 4.2. Kahe lõpmatult väikese suuruse summa on lõpmatult väike suurus, st kui α ja β on lõpmatult väikesed suurused, siis ka $\alpha + \beta$ on lõpmatult väike suurus.

Tõestus. Muutuv suurus α on piirprotsessis $x \to a$ lõpmatult väike suurus, seega $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta_1 > 0$, et kui $|x - a| < \delta_1$, siis

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Suurus β on piirprotsessis $x \to a$ lõpmatult väike suurus, seega $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta_2 > 0$, et kui $|x - a| < \delta_2$, siis

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Valides suuruseks δ suurustest δ_1 ja δ_2 vähima, st $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ saame, et kui $|x - a| < \delta$, siis

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ehk valides x väärtuse a-le piisavalt lähedase, on$\alpha + \beta$ kui tahes väike, st $\alpha + \beta$ on lõpmatult väike suurus.

Märkus. Teoreem 4.2 kehtib ka kolme, nelja või enama lõpmatult kahaneva liidetava korral.

Definitsioon 4.3. muutuvat suurust y nimetatakse *tõkestatuks* punkti a ümbruses $(a - \delta; a + \delta)$ kui $\exists$ niisugune konstant $N > 0$, et $\forall\ x \in (a - \delta; a + \delta)$ korral

$$|y| < N$$

Teoreem 4.3. Tõkestatud suuruse y ja lõpmatult väikese suuruse α korrutis αy on lõpmatult väike suurus.

Tõestus. Eelduse kohaselt $\exists$ selline $N > 0$, et punkti a ümbruses $|y| < N$. Et α on lõpmatult väike suurus, siis $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{N}$. Aga siis

$$|\alpha y| = |\alpha||y| < \frac{\varepsilon}{N} \cdot N = \varepsilon,$$

st αy on lõpmatult väike suurus.

Järeldus 4.4. Konstantse suuruse ja lõpmatult väikese suuruse korrutis on lõpmatult väike suurus.

See järeldub vahetult eelmisest järeldusest, sest konstantne suurus on tõkestatud.

Järeldus 4.5. Kahe lõpmatult väikese suuruse korrutis on lõpmatult väike suurus, st kui α ja β on lõpmatult väikesed suurused, siis ka $\alpha\beta$ on lõpmatult väike suurus.

Tõestus järeldub sellest, et iga piirprotsessis $x \to a$ lõpmatult väike suurus on a ümbruses tõkestatud (ja tõkestatud väikese suurusega ε).

Teoreem 4.6. Lõpmatult väikese suuruse ja nullist erinevat piirväärtust omava suuruse jagatis on lõpmatult väike suurus, st kui α on lõpmatult väike suurus ja $\lim\limits_{x\to a} y = b$ ning $b \neq 0$, siis $\dfrac{\alpha}{y}$ on lõpmatult väike suurus.

Tõestus.* Tõestuses kasutame reaalarvude absoluutväärtuse omadust $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Kui $\lim\limits_{x\to a} y = b$ siis $\forall\ \varepsilon > 0$ korral $\exists$ niisugune $\delta > 0$, et kui $|x - a| < \delta$ siis $|y - b| < \varepsilon$.

Mainitud absoluutväärtuse omaduse põhjal $||y| - |b|| < \varepsilon$
ehk $-\varepsilon < |y| - |b| < \varepsilon$, st

$$|b| - \varepsilon < |y| < |b| + \varepsilon$$

Siis pöördväärtuste korral on täidetud tingimus

$$\frac{1}{|b| + \varepsilon} < \frac{1}{|y|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon}$$

Et ε on suvaline positiivne suurus, siis võime valida $\varepsilon = 0,1|b|$, mille korral

$$\frac{1}{1,1|b|} < \frac{1}{|y|} < \frac{1}{0,9|b|},$$

st $\dfrac{1}{y}$ on tõkestatud suurus ja

$$\frac{\alpha}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{y}$$

kui lõpmatult väikese suuruse ja tõkestatud suuruse korrutis on teoreemi 4.3 põhjal lõpmatult väike suurus.

Märkus. Kahe lõpmatult väikese suuruse jagatist vaatleme põhjalikumalt alampunktis 1.2.7.

1.2.5 Piirväärtusteoreemid

Piirväärtusteoreemid võib jaotada kahte klassi. Esiteks tehetega seotud piirväärtusteoreemid ja teiseks nn järjestusega seotud piirväärtusteoreemid.

Alustame tehetega seotud piirväärtusteoreemidest. Selleks vaatleme piirprotsessis $x \to a$ kahte muutuvat suurust $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Teoreem 5.1. Kahe muutuva suuruse summa piirväärtus on võrdne nende suuruste piirväärtuste summaga:

$$\lim_{x \to a}(y + z) = \lim_{x \to a} y + \lim_{x \to a} z.$$

Tõestus. Tähistame

$$\lim_{x \to a} y = b_1$$

ja

$$\lim_{x \to a} z = b_2$$

Teoreemi 4.1 põhjal eksisteerivad niisugused lõpmatult väikesed suurused α ja β, et $y = b_1 + \alpha$ ja $z = b_2 + \beta$. Järelikult $y + z = b_1 + b_2 + \alpha + \beta$.

Teoreemi 4.2 põhjal on $\alpha + \beta$ lõpmatult väike suurus, seega, rakendades veel kord teoreemi 4.1, saame, et

$$\lim_{x \to a}(y + z) = b_1 + b_2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Teoreem 5.2. Kahe muutuva suuruse korrutise piirväärtus on võrdne nende suuruste piirväärtuste korrutisega:

$$\lim_{x \to a} yz = \lim_{x \to a} y \cdot \lim_{x \to a} z.$$

Tõestus. Tähistame jälle

$$\lim_{x \to a} y = b_1$$

ja

$$\lim_{x \to a} z = b_2$$

Teoreemi 4.1 põhjal eksisteerivad niisugused lõpmatult väikesed suurused α ja β, et $y = b_1 + \alpha$ ja $z = b_2 + \beta$. Järelikult $yz = (b_1 + \alpha)(b_2 + \beta)$, st $yz = b_1 b_2 + b_1\beta + \alpha b_2 + \alpha\beta$.

Järelduse 4.4 põhjal on $b_1\beta$ ja αb_2 lõpmatult väikesed suurused. Järelduse 4.5 põhjal on $\alpha\beta$ lõpmatult väike suurus. Teoreemi 4.2 põhjal on $\gamma = b_1\beta + \alpha b_2 + \alpha\beta$ lõpmatult väike suurus. Seega

$$yz = b_1 b_2 + \gamma,$$

kus γ on lõpmatult väike suurus ja teoreemist 4.1 järeldame, et

$$\lim_{x\to a} yz = b_1 b_2,$$

mida, arvestades tähistusi, oligi tarvis tõestada.

Järeldus 5.3. Konstantse suuruse saab tuua piirväärtuse ette, st kui c on konstant, siis

$$\lim_{x\to a} cy = c \lim_{x\to a} y$$

Tõestus järeldub eelmisest teoreemist

$$\lim_{x\to a} cy = \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} y$$

ja sellest, et konstantse suuruse piirväärtus võrdub konstandi endaga $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Järeldus 5.4. Kahe muutuva suuruse vahe piirväärtus on võrdne nende suuruste piirväärtuste vahega, st

$$\lim_{x\to a}(y - z) = \lim_{x\to a} y - \lim_{x\to a} z.$$

Tõestuseks kirjutame

$$\lim_{x\to a}(y - z) = \lim_{x\to a}(y + (-1)z)$$

Teoreemi 5.1 põhjal

$$\lim_{x\to a}(y + (-1)z) = \lim_{x\to a} y + \lim_{x\to a}(-1)z$$

ja järelduse 5.3 põhjal

$$\lim_{x\to a} y + \lim_{x\to a}(-1)z = \lim_{x\to a} y - \lim_{x\to a} z$$

Teoreem 5.5. Kahe muutuva suuruse jagatise piirväärtus on võrdne nende suuruste piirväärtuste jagatisega, kui nimetaja piirväärtus ei võrdu 0-ga, st

$$\lim_{x\to a} \frac{y}{z} = \frac{\lim\limits_{x\to a} y}{\lim\limits_{x\to a} z},$$

kui $\lim\limits_{x\to a} z \neq 0$.

Tõestus.* Tõestuseks tähistame taas

$$\lim_{x\to a} y = b_1$$

ja
$$\lim_{x\to a} z = b_2 \neq 0$$

Teoreemi 4.1 põhjal eksisteerivad niisugused lõpmatult väikesed suurused α ja β, et $y = b_1 + \alpha$ ja $z = b_2 + \beta$.

Siis
$$\frac{y}{z} = \frac{b_1+\alpha}{b_2+\beta} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_1+\alpha}{b_2+\beta} - \frac{b_1}{b_2}$$

Viies kaks viimast murdu ühisele nimetajale, saame
$$\frac{y}{z} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_1b_2+\alpha b_2 - b_1b_2 - \beta b_1}{b_2(b_2+\beta)} = \frac{b_1}{b_2} + \frac{\alpha b_2 - \beta b_1}{b_2(b_2+\beta)} \tag{1.3}$$

Viimases jagatises on lugeja $\alpha b_2 + (-b_1)\beta$ järelduse 4.4 ja teoreemi 4.2 põhjal lõpmatult väike suurus. Nimetaja $b_2^2 + b_2\beta$ avaldub konstandi b_2^2 ja lõpmatult väike suuruse $b_2\beta$ summana. Teoreemi 4.1 põhjal on nimetaja piirväärtus $b_2^2 \neq 0$. Jagatis
$$\frac{\alpha b_2 - \beta b_1}{b_2(b_2+\beta)}$$
kui lõpmatult väikese suuruse ja nullist erinevat piirväärtust omava suuruse jagatis on teoreemi 4.6 põhjal lõpmatult väike suurus. Järelikult võrduses (1.3) avaldub suhe $\frac{y}{z}$ konstandi $\frac{b_1}{b_2}$ ja lõpmatult väikese suuruse $\frac{\alpha b_2 - \beta b_1}{b_2(b_2+\beta)}$ summana. Teoreemi 4.1 põhjal
$$\lim_{x\to a} \frac{y}{z} = \frac{b_1}{b_2},$$
mida oligi tarvis tõestada.

Jätkame nn järjestusega seotud piirväärtusteoreemidega.

Teoreem 5.6. Mittenegatiivse suuruse piirväärtus antud piirprotsessis on mittenegatiivne, st kui muutuv suurus $y \geq 0$ punkti a mingis ümbruses ja $\exists \lim\limits_{x\to a} y = b$, siis $b \geq 0$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $\lim\limits_{x\to a} y = b < 0$. Kui $y \geq 0$ ja $b < 0$, siis $|y-b| > |b|$. Kui valida positiivne ε nii, et $\varepsilon < |b|$, siis tingimus $|y-b| < \varepsilon$ ei saa olla täidetud, ükskõik kui a-le lähedase x väärtuse me ka ei valiks, st tekib vastuolu eeldusega $\lim\limits_{x\to a} y = b$. Vastuolu tekkis oletusest $b < 0$, järelikult $\lim\limits_{x\to a} y = b \geq 0$

Teoreem 5.7. Kui punkti a mingis ümbruses $y \geq z$ ja on olemas piirväärtused $\lim\limits_{x\to a} y$ ning $\lim\limits_{x\to a} z$, siis $\lim\limits_{x\to a} y \geq \lim\limits_{x\to a} z$.

Tõestus. Kui $y \geq z$, siis $y - z \geq 0$ ja teoreemi 5.6 põhjal ka $\lim\limits_{x\to a}(y-z) \geq 0$. Aga siis järelduse 5.4 põhjal $\lim\limits_{x\to a} y - \lim\limits_{x\to a} z \geq 0$, mis tõestabki väite.

Järgmise teoreemi jaoks vaatleme piirprotsessis $x \to a$ kolme muutuvat suurust $u = u(x)$, $v = v(x)$ ja $w = w(x)$.

Teoreem 5.8. Kui punkti a mingis ümbruses $u \le w \le v$ ja $\exists$ võrdsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to a} u = b$ ning $\lim\limits_{x\to a} v = b$, siis ka $\lim\limits_{x\to a} w = b$

Tõestus. Kui $u \le w$ ja $w \le v$, siis teoreemi 5.7 põhjal $\lim\limits_{x\to a} u \le \lim\limits_{x\to a} w$ ja $\lim\limits_{x\to a} w \le \lim\limits_{x\to a} v$. Eelduse järgi $\lim\limits_{x\to a} u = b$ ning $\lim\limits_{x\to a} v = b$, seega

$$b \le \lim_{x\to a} w \le b,$$

järelikult $\lim\limits_{x\to a} w = b$, mida oligi tarvis tõestada.

Teoreem 5.9. Piirprotsessis $x \to a$ monotoonselt kasvaval (kahaneval) tõkestatud suurusel on olemas lõplik piirväärtus selles protsessis.

Näide 5.1. Funktsioon $y = \arctan x$ on kasvav piirprotsessis $x \to \infty$, samuti tõkestatud, sest $\forall x \in \mathbb{R}$ korral $|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$. On olemas piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

1.2.6 Piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Teoreemi 5.8 abil tõestame valemi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.4}$$

Kõigepealt eeldame, et $x > 0$. Piirprotsessi $x \to 0$ tõttu võime piirduda juhuga, kus x on teravnurk, st $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ Joonestame ühikringjoone, selles kolmnurga OPQ teravnurgaga x, sektori OPQ kesknurgaga x ja täisnurkse kolmnurga OPR teravnurgaga x (vt joonis 1.4). On ilmne, et kolmnurga OPQ, sektori OPQ ja täisnurkse kolmnurga OPR pindalad rahuldavad võrratusi

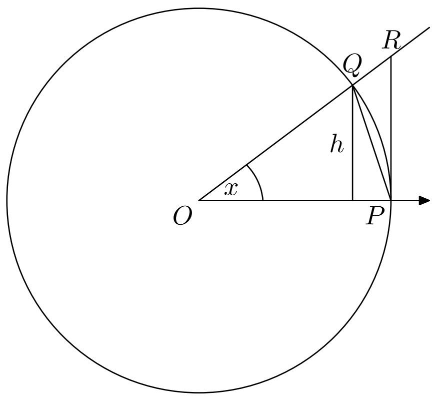
$$S_{\triangle OPQ} < S_{sektor OPQ} < S_{\triangle OPR}$$

Arvestades sellega, et tegemist on ühikringjoonega, st $OP = OQ = 1$, saame

$$\frac{1\cdot h}{2} < \frac{x\cdot 1^2}{2} < \frac{1\cdot PR}{2}$$

Aga $\sin x = \dfrac{h}{1}$ ja $\tan x = \dfrac{PR}{1}$, millest $h = \sin x$ ja $PR = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Asendades need võrratustesse, saame

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x}$$



Joonis 1.4:

ehk korrutamist 2-ga ja jagamist suurusega $\sin x > 0$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Minnes pöördväärtustele, saame viimastest võrratustest

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, siis teoreemi 5.8 tõttu ka

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Kui $x < 0$, siis $-x > 0$ ja tõestatu põhjal

$$\lim_{-x\to 0+} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1$$

Kuid $\sin(-x) = -\sin x$ ja kui $-x \to 0+$, siis $x \to 0-$, seega

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ühepoolsed piirväärtuste võrdsuse tõttu on valem (1.4) tõestatud.

Näide 6.1. Leiame $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

Kirjutades viimase piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}$, saame teoreemi 5.5 põhjal, et

$\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Näide 6.2. Leiame $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Olgu $t = \arcsin x$, siis sellest, et $x \to 0$ järeldub, et ka $t \to 0$ ja $x = \sin t$ ning näite 6.1 põhjal

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

Näide 6.3 Leiame $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

Jagades murru lugejat ja nimetajat suurusega x (seda võib teha, sest $x \to 0$, seega $x \neq 0$), saame

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}$$

Kui jagada lugejas oleva murru lugejat ja nimetajat 3-ga ja nimetajas oleva murru lugejat ja nimetajat 4-ga, siis

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin 3x}{3x}}{\frac{4\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}$$

Teoreemi 5.5 põhjal

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4}$$

sest kui $x \to 0$, siis ka $3x \to 0$ ja $4x \to 0$.

Näide 6.4 Leiame $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Korrutades lugejat ja nimetajat suurusega $1 + \cos x$, saame

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Kirjutades viimase murru kolme teguri korrutisena ja rakendades teoreemi 5.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

1.2.7 Arv e

Vaatleme jada, mille üldliige $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, st jada

$$2,\ \frac{9}{4},\ \frac{64}{27},\ \frac{625}{256},\ \ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots \tag{1.5}$$

Näitame, et see jada on tõkestatud ja kasvav. Newtoni binoomvalemi abil

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$
$$1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) + \ldots + \frac{1}{n^n} <$$
$$2+\frac{1}{2!}+\ldots\frac{1}{k!}+\ldots\frac{1}{n!}$$

Kui $k \geq 2$, siis $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, seega

$$y_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots\frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{n-1})}{\frac{1}{2}} < 3,$$

st jada on tõkestatud. Kasutades y_n jaoks tehtud teisendusi, saame

$$y_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\ldots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1})+\ldots+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Sellest, et $\frac{i}{n} > \frac{i}{n+1}$ $i = 1,\ldots,k-1$ järeldub, et $1-\frac{i}{n} < 1-\frac{i}{n+1}$. Seega ka

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) < \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1}),$$

st y_n arendis binoomvalemi järgi on vastav liige väiksem kui y_{n+1} arendis. Lisaks sellele on y_{n+1} arendis üks positiivne liige $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ rohkem, st $y_n < y_{n+1}$ ehk jada (1.5) on kasvav.

Järelikult on teoreemi 5.9 põhjal jadal (1.5) olemas piirväärtus. Seda piirväärtust nimetatakse Euleri arvuks ja tähistatakse

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Kui $x > 0$ on suvaline reaalarv, siis leidub niisugune naturaalarv n, et $n \leq x < n+1$, millest

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

ehk

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Siit saame, et

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{1.6}$$

Kui $n \to \infty$, siis tingimusest $n \leq x \leq n+1$ järeldub, et ka $x \to \infty$ ja $n+1 \to \infty$.

Leiame piirväärtused

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = e \cdot 1 = e$$

Tingimuse (1.6) täidetuse tõttu saame teoreemi 5.8 põhjal, et

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Leiame ka piirväärtuse $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Selleks teeme muutuja vahetuse $x = -1 - t$. Kui $x \to -\infty$, siis $t \to \infty$. Arvutame

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-1-t}\right)^{-1-t} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+t-1}{1+t}\right)^{-(1+t)} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1+t} = \lim_{t\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] = e$$

Järelikult mõlemas piirprotsessis $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$ on funktsiooni $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ piirväärtus võrdne arvuga e, st

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1.7}$$

Viimast valemit saab kasutada piirväärtuste arvutamiseks, kui on tegemist 1^∞-tüüpi määramatusega.

Näide 6.1. Leiame $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

Kasutame teisendusi $\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{2x-1+4}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1}=1+\frac{1}{\frac{2x-1}{4}}$ ja muutuja vahetust $t=\frac{2x-1}{4}$. Kui $x\to\infty$, siis $t\to\infty$ ja kui avaldada x uue muutuja t kaudu, saame $x=2t+\frac{1}{2}$. Seega

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=e^2$$

Näide 6.2. Leiame $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Kui $x\to 0+$, siis $\frac{1}{x}\to\infty$, ja kui $x\to 0-$, siis $\frac{1}{x}\to-\infty$. Seega (1.7) põhjal

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\frac{1}{x}\to\pm\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

1.2.8 Lõpmatult väikeste suuruste võrdlemine

Olgu $=\alpha(x)$ ja $\beta=\beta(x)$ lõpmatult väikesed suurused piirprotsessis $x\to a$. Kuigi mõlema suuruse piirväärtused võrduvad 0-ga, võib nende suuruste nullile lähenemise kiirus olla väga erinev. See tingib vajaduse võrrelda lõpmatult väikesi suurusi. Võrdlemine toimub nende suhte piirväärtuse

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

abil.

Definitsioon 7.1. Kui

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

siis öeldakse, et α on kõrgemat järku lõpmatult väike suurus kui β piirprotsessis $x\to a$.

Samuti öeldakse viimase tingimuse täidetuse korral, et β on madalamat järku lõpmatult väike suurus kui α.

Näide 7.1. Piirprotsessis $x\to 0$ on $\alpha=x^3$ kõrgemat järku lõpmatult väike suurus kui $\beta=x^2$, sest

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$$

Definitsioon 7.2. Kui

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$$

siis öeldakse, et α on madalamat järku lõpmatult väike suurus kui β piirprotsessis $x \to a$.

Definitsioon 7.3. Kui

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0,$$

siis öeldakse, et α ja β on sama järku lõpmatult väikesed suurused piirprotsessis $x \to a$.

Näide 7.2. Suurursed $\alpha = 1 - \cos x$ ja $\beta = x^2$ on sama järku lõpmatult väikesed suurused piirprotsessis $x \to 0$, sest näite 6.4 põhjal

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Definitsioon 7.4. Kui

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

siis öeldakse, et α ja β on ekvivalentsed lõpmatult väikesed suurused piirprotsessis $x \to a$ ja kirjutatakse

$$\alpha \sim \beta$$

Näide 7.3. Piirprotsessis $x \to 0$ on $\alpha = \sin x$ ja $\beta = x$ ekvivalentsed lõpmatult väikesed suurused, sest

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Näide 7.4. Piirprotsessis $x \to 0$ on $\alpha = \ln(1 + x)$ ja $\beta = x$ ekvivalentsed lõpmatult väikesed suurused, sest (näide 6.2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

1.2.9 Funktsiooni pidevuse mõiste

Definitsioon 8.1. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse pidevaks punktis a, kui on täidetud tingimused

1. $\exists\ f(a)$
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Definitsioon 8.2. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse pidevaks piirkonnas X, kui funktsioon on pidev selle piirkonna igas punktis.

Tähistame edaspidi fikseeritud punkti x-ga ja muutuva punkti $x + \Delta x$-ga. Siis piirprotsess $x + \Delta x \to x$ on samaväärne piirprotsessiga $\Delta x \to 0$ ja pidevuse punktis x kolmas tingimus on $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Viimase tingimuse kirjutame $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ ehk arvestades, et x on fikseeritud punkt, st $f(x)$ on kostant

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

Definitsioon 8.3. Vahet $f(x+\Delta x)-f(x)$ nimetetakse funktsiooni muuduks ja tähistatakse Δy, st

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Kokkuvõtteks sõnastame teoreemi.

Teoreem 8.1. (Funktsiooni pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus) Funktsioon on pidev punktis x parajasti siis, kui funktsiooni muudu piirväärtus argumendi muudu lähenemisel 0-le võrdub 0-ga, st

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \tag{1.8}$$

1.2.10 Elementaarfunktsioonide pidevus

Tingimuse (1.8) abil saab kontrollida põhiliste elementaarfunktsioonide pidevust.

Alustame funktsioonist $y = x^2$. Fikseerime suvalise argumendi väärtuse $x \in \mathbb{R}$ ja anname argumendile muudu Δx. Funktsiooni muut, mis vastab sellele argumendi muudule, on

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x + \Delta x^2) = 0,$$

st pidevuseks tarvillik ja piisav tingimus on täidetud, ükskõik milline argumendi $x \in \mathbb{R}$ väärtus fikseerida. Järelikult on funktsioon $y = x^2$ pidev kogu määramispiirkonnas.

Teiseks kontrollime funktsiooni $y = \sin x$ pidevust. Siinusfunktsioon on samuti määratud kõikide reaalarvude hulgal. Fikseerime suvalise $x \in \mathbb{R}$, lähtudes sellest punktist anname argumendile muudu Δx ja leiame sellele vastava funktsiooni muudu

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)\end{aligned}$$

Kui $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, siis $|\sin x| < |x|$. Seega $\sin \frac{\Delta x}{2}$ on piirprotsessis $\Delta x \to 0$ lõpmatult väike suurus. $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ on tõkestatud suurus. Nende korrutis on seega lõpmatult väike suurus, järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

st siinusfunktsioon on pidev kogu oma määramispiirkonnas.

Niimoodi jätkates on võimalik näidata, et kõik põhilised elementaarfunktsioonid on oma määramispiirkonnas pidevad.

Teoreem 9.1. Kui funktsioonid $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on pidevad punktis x, siis

- summa $u(x) + v(x)$ on pidev punktis x
- vahe $u(x) - v(x)$ on pidev punktis x
- konstandi kordne $cu(x)$ on pidev punktis x
- korrutis $u(x)v(x)$ on pidev punktis x
- jagatis $\frac{u(x)}{v(x)}$ on pidev punktis x, kui $v(x) \neq 0$.
- (Liitfunktsiooni $y = f[\varphi(x)]$ pidevus). Kui $u = \varphi(x)$ on pidev punktis x ja $y = f(u)$ on pidev vastavas punktis u, siis liitfunktsioon $f[\varphi(x)]$ on pidev punktis x.

Tõestus. Tõestame esitatud väidetest esimese ja viimase. Esimese tõestamiseks tähistame summa $y = u(x) + v(x)$. Lähtudes fikseeritud punktist x muudame argumenti Δx võrra ja leiame vastava funktsiooni muudu

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - [u(x) + v(x)] = \Delta u + \Delta v$$

Funktsioonide u ja v pidevuse tõttu tingimusest (1.8) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ ja $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, aga siis ka piirväärtuse omaduse tõttu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

st summa jaoks on pidevuse tarvilik ja piisav tingimus punktis x täidetud.

Viimase väite tõestamiseks fikseerime jälle ühe argumendi väärtuse x ja lähtudes sellest muudame argumenti Δx võrra. Argumendi muudule Δx vastab funktsiooni $u = \varphi(x)$ muut

$$\Delta u = \varphi((x) + \Delta x) - \varphi(x),$$

mis ühtlasi kujutab endast argumendi muutu funktsiooni $y = f(u)$ jaoks. Sellele argumendi muudule vastab funktsiooni muut

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Eelduse kohaselt on funktsioon $u = \varphi(x)$ pidev punktis x, seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

Samuti on eelduse kohaselt pidev punktis u funktsioon $y = f(u)$, st

$$\lim_{\Delta u \to 0} \Delta y = 0$$

Järelikult ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

st liitfunktsiooni jaoks on pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus punktis x täidetud.

Märkus. Teoreemis 9.1 on võib olla fikseeritud argumendiks x ükskõik milline väärtus summa, vahe, jne määramispiirkonnast. Seega on pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis, jagatis ja pidevatest komponentidest koosnev liitfunktsioon pidev alati, kui see on määratud.

Elementaarfunktsioonideks on funktsioonid, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste operatsioonide ja liitfunktsioonide moodustamise teel. Põhiliste elementaarfunktsioonide pidevusest, teoreemist 9.1 ja sellele järgnevast märkusest teeme ühe olulise järelduse.

Teoreem 9.2. Kõik elementaarfunktsioonid on oma määramispiirkonnas pidevad.

1.2.11 Funktsiooni katkevuspunktid

Definitsioon 10.1 Funktsiooni *katkevuspunktiks* nimetatakse punkti, milles funktsioon ei ole pidev.

Pidevuse definitsioonist järeldub, et katkevuse põhjusteks punktis a võivad olla funktsiooni väärtuse puudumine punktis a, piirväärtuse puudumine punktis a, või mõlema olemasolu korral nende (st väärtuse ja piirväärtuse) erinevus.

Eristatakse esimest ja teist liiki katkevuspunkte.

Definitsioon 10.2 Öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on punktis a *esimest liiki katkevus*, kui on olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b_1$$

ja

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b_2$$

Öeldakse veel, et $x = a$ on funktsiooni $y = f(x)$ *hüppekohaks*, sest funktsiooni graafik teeb sellel kohal lõpliku hüppe.

Näide 10.1. Kasutades näidet 3.1, saame järeldada, et funktsioonil $y = \dfrac{|x|}{x}$ on punktis $x = 0$ esimest liiki katkevus ($x = 0$ on funktisiooni $y = \dfrac{|x|}{x}$ hüppekohaks), sest

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

ja

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Esimest liiki katkevuse erijuhuks on *kõrvaldatav katkevus.*

Definitsioon 10.3. Öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on punktis $x = a$ kõrvaldatav katkevus, kui puudub väärtus $f(a)$, kuid $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Teoreemi 3.2 põhjal piirväärtus on olemas, kui $b_1 = b_2$.

Näide 10.2. Funktsioon $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ei ole määratud punktis $x = 0$, kuid eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Seega on sellel funktsioonil punktis $x = 0$ kõrvaldatav katkevus.

Terminit kõrvaldatav kasutatakse sellepärast, et defineerides punkti a puuduva väärtuse võrseks piirväärtusega, st defineerides funktsiooni

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ kui } x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), \text{ kui } x = a \end{cases}$$

saame pideva funktsiooni punktis a.

Definitsioon 10.4. Öeldakse, et funktsioonil $y = f(x)$ on punktis a *teist liiki katkevus*, kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest

$$\lim_{x \to a-} f(x) \quad \bigvee \quad \lim_{x \to a+} f(x)$$

on lõpmatu või seda ei eksisteeri.

Öeldakse veel, et $x = a$ on funktsiooni $y = f(x)$ *lõpmatuskohaks.*

Näide 10.3. Funktsioonil $y = \dfrac{1}{x}$ on punktis $x = 0$ teist liiki katkevus ($x = 0$ on funktsiooni $y = \dfrac{1}{x}$ lõpmatuskohaks), sest

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

Näide 10.4. Funktsioonil $y = \sin \dfrac{1}{x}$ on punktis $x = 0$ teist liiki katkevus, sest ei eksisteeri kumbagi ühepoolset piirvärtust

$$\lim_{x \to 0-} \sin \frac{1}{x}$$

ega

$$\lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$$

1.2.12 Lõigul pidevate funktsioonide omadused

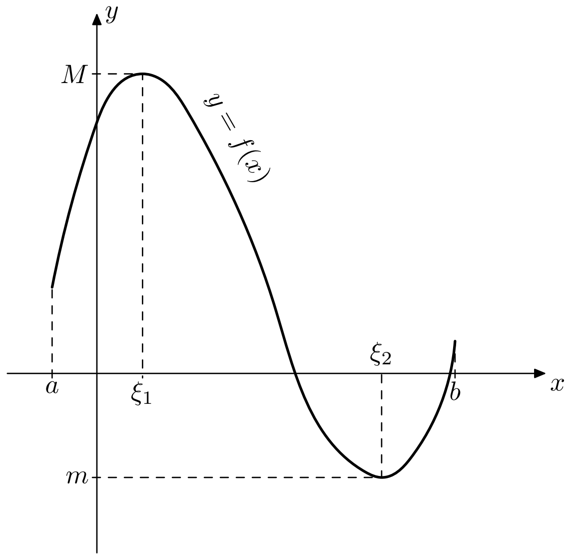
Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ ja lõiku $[a; b]$, mis kuulub selle funktsiooni määramispiirkonda.

Omadus 11.1. Lõigul $[a; b]$ pidev funktsioon $y = f(x)$ omab suurimat väärtust ja vähimat väärtust sellel lõigul.

Kui tähistada suurim väärtus M ja vähim väärtus m, siis omaduse 1 kohaselt leidub lõigul $[a; b]$ vähemalt üks punkt ξ_1, milles funktsioon omandab väärtuse M, st $f(\xi_1) = M$. Samuti leidub vähemalt üks $\xi_2 \in [a; b]$, milles $f(\xi_2) = m$.

Omadus 11.2. Lõigul $[a; b]$ pidev funktsioon $y = f(x)$ omab sellel lõigul kõiki väärtusi suurima ja vähim väärtuse vahel.

Kui μ on mingi väärtus vähima ja suurima väärtuse vahelt, st $m \leq \mu \leq M$, siis $\exists$ vähemalt üks selline $\xi \in [a; b]$, et $f(\xi) = \mu$.



Joonis 1.5: Lõigul pideva funktsiooni suurim ja vähim väärtus

Järeldus 11.3. Kui pidev funktsioon $f(x)$ omab lõigul $[a; b]$ negatiivseid ja positiivseid väärtusi, siis on sellel funtksioonil vähemalt üks nullkoht lõigul $[a; b]$.

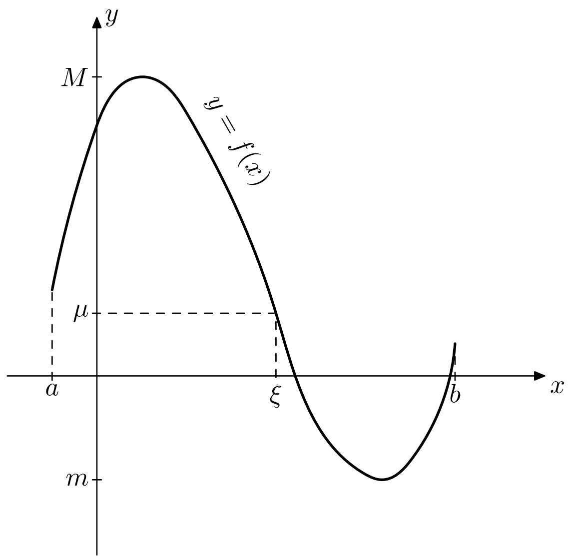
Tõepoolest, kui funktsioonil on negatiivseid väärtusi lõigul $[a; b]$, siis $m < 0$ ja kui on positiivseid väärtusi, siis $M > 0$. Järelikult $m < 0 < M$ ja omaduse 2 järgi $\exists$ vähemalt üks selline $\xi \in [a; b]$, et $f(\xi) = 0$.

Näide 11.1. Võrrandil

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

on lõigul $[0; 2]$ vähemalt üks lahend, sest funktsioon $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ on pidev kogu reaalarvude hulgal, kaasa arvatud lõigul $[0; 2]$ ja $f(0) = 2$ ning $f(2) = -2$.

Kuigi antud kontekstis pole see oluline, on lihtne kontrollida, et selleks lahendiks on $x = 1$.



Joonis 1.6: Väärtus suurima ja vähima vahel