

1 Mitme muutuja funktsioonid

Reaalarvude järjestatud paaride (x, y) hulga ja tasandi punktide hulga vahel on üksühene vastavus, st igale paarile vastab üks kindel punkt tasandil ja igale tasandi punktile vastavad selle koordinaadid ehk üks reaalarvude järjestatud paar. Piirkonnaks nimetatakse (x, y) -tasandi punktide alamhulka. Tasandilisi piirkondi hakkame tähistama sümboliga D . Näiteks piirkond

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

on tasandi niisuguste punktide hulk, mis asuvad koordinaatide alguspunktist mitte kaugemal kui üks ühik ehk ühikulise raadiusega ring koos seda ümbritseva ringjoonega.

Piirkonda piiravat joont nimetatakse piirkonna rajajooneks ja rajajoone punkte piirkonna rajapunktideks. Rajajoonel mitte asuvaid punkte nimetatakse piirkonna sisepunktideks.

Piirkonda nimetatakse kinniseks, kui see sisaldab kõiki oma rajapunkte, st sisaldab rajajoont.

Piirkonda nimetatakse lahtiseks, kui see ei sisalda ühtegi rajapunkti.

Edaspidi kujutame joonistel kinnise piirkonna rajajoont pideva joonega ja lahtise piirkonna rajajoont katkendliku joonega.

Punkti ümbruseks tasandil nimetatakse lahtist ringi, mille keskpunktiks on punkt ise, kuid millest keskpunkt on välja arvatud. Kui $\delta > 0$ on suvaline reaalarv, siis punkti (x_0, y_0) δ -ümbruseks on lahtine ring ilma keskpunktita

$$U_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

Reaalarvude kolmikute (x, y, z) ja ruumi punktide hulga vahel on korraldatav üksühene vastavus. Ruumiliseks piirkonnaks on kogu ruumi alamhulk.

Ruumilist piirkonna eraldab kogu ruumist mingisugune pind, mida nimetatakse piirkonna rajapinnaks ehk rajaks. Rajapinna punkte nimetatakse piirkonna rajapunktideks ja rajapinnal mitte asuvaid punkte piirkonna sisepunktideks.

Kui piirkond sisaldab kõiki oma rajapunkte, nimetatakse piirkonda kinniseks.

Kui piirkond ei sisalda ühtegi oma rajapunkti, nimetatakse piirkonda lahtiseks.

Seega, kinnine piirkond on piirkond koos seda ümbritseva rajapinnaga, lahtine piirkond on piirkond ilma seda ümbritseva rajapinnata.

Ruumi punkti (x_0, y_0, z_0) δ -ümbruseks nimetatakse lahtist kera

$$U_\delta(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) | 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\},$$

st kera keskpunktiga (x_0, y_0, z_0) ja raadiusega δ , millest keskpunkt on välja jäetud.

1.1 Kahe muutuja funktsiooni mõiste

Olgu D tasandiline piirkond, mis võib olla ka kogu xy -tasand.

Definitsioon 1. Kui igale $(x, y) \in D$ on vastavusse seatud muutuja z kindel väärtus, siis muutujat z nimetatakse kahe muutuja x ja y funktsiooniks ja tähistatakse

$$z = f(x, y).$$

Veel on kasutusel tähistused $z = g(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ või $z = z(x, y)$.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikule kuulub ruumiline punkt koordinaatidega $(x, y, f(x, y))$. Kõikide niisuguste punktide hulk moodustab ruumis pinna. Seega on kahe muutuja funktsiooni graafikuks pind ruumis.

Näide 1. Kahe muutuja funktsiooni $z = 1 - x - y$ graafikuks on tasand.

Näide 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = x^2 + y^2$ graafikuks on pöördparaboloid, mis tekib parabooli $z = y^2$ pöörlemisel ümber z -telje.

Kui kahe muutuja funktsioon ei ole ühene, kasutatakse selle esitamiseks ilmutamata kuju.

Näide 3. Ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ graafikuks on sfäär keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega r . Kui avaldada sellest võrdusest muutuja z , saame kaks ühest kahe muutuja funktsiooni $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ja $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Nendest esimese graafikuks on sfääri ülemine pool ja teisel alumine pool.

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnaks nimetatakse niisugust järjestatud paaride (x, y) (tasandi punktide) hulka, millele antud eeskirja kohaselt on võimalik vastavusse seada muutuja z väärtust.

Näide 4. Leiame funktsiooni $z = \ln(8 - x^2 - y^2) + \sqrt{2y - x^2}$ määramispiirkonna ja kujutame selle xy -tasandil

Funktsioon on määratud, kui on täidetud tingimused

$$\begin{cases} 8 - x^2 - y^2 > 0 \\ 2y - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Esimesest tingimusest $x^2 + y^2 < 8$ ja teiset $y \geq \frac{x^2}{2}$. Esimest tingimust rahuldavad xy -tasandi punktid mis kuuluvad ringi keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega $2\sqrt{2}$. Et tingimuses võrdust 8-ga pole, siis ringi ümbritsev ringjoon hulka ei kuulu ja joonisel kujutame ringjoone katkendliku joonega.

Teist tingimust rahuldavad xy -tasandi punktid, mis jäävad paraboolist $y = \frac{x^2}{2}$ kõrgemale. Antud tingimuses on võrdus lubatud, seega parabool kuulub hulka ja joonisel kujutame selle pideva joonega.

1.2 Kahe muutuja funktsiooni graafiku tasandilõiked ja nivoojooned

Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (st paralleelne ühega koordinaattasanditest). yz -tasandi võrrand on $x = 0$, xz -tasandi võrrand on $y = 0$ ja xy -tasandi võrrand $z = 0$.

Tasand $x = a$ on x -teljega risti, st yz -tasandiga paralleelne. Tasand $y = b$ on y -teljega risti ehk xz -tasandiga paralleelne. Tasand $z = c$ on z -teljega risti ehk xy -tasandiga paralleelne.

Pinna $z = f(x, y)$ tasandilõigeteks tasanditega $x = a$ erinevate a väärtustega korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = a, \end{cases}$$

pinna $z = f(x, y)$ tasandilõigeteks tasanditega $y = b$ erinevate b väärtustega korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases}$$

ja pinna $z = f(x; y)$ tasandilõigeteks tasanditega $z = c$ erinevate c väärtuste korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c, \end{cases}$$

Viimaste projektsioone xy -tasandil nimetatakse pinna $z = f(x, y)$ *nivoo-joonteks*.

Näide 1. Joonestame pinna $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, kasutades selleks lõikeid tasanditega $z = 0$, $z = \pm 1$ ja $z = \pm 2$ ning lõiget tasandiga $x = 0$.

Lõigates pinda tasandiga xy -tasandiga $z = 0$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$ ehk koordinaatide alguspunkti, sest $x^2 + y^2 = 0$ ainult juhul, kui $x = 0$ ja $y = 0$.

Lõigates pinda tasandiga $z = 1$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = 1$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = -1$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 1$, $z = -1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = -1$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = 2$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = 2$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = -2$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 4$, $z = -2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = -2$ keskpunktiga z -teljel. Joonestame need lõiked ruumilisse teljestikku (joonis 6.6).

Kui lõigata pinda tasandiga $x = 0$, saame lõikejoonteks $z^2 = y^2$ ehk kaks ristuvat sirget $z = y$ ja $z = -y$, mis asuvad yz -tasandil. Kui lisada need sirged teljestikku, on ilmne, et vaadeldav pind on koonus, mille tipp asub koordinaatide alguspunktis.

Funktsiooni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ teisendamisel ilmutatud kujule saame kaks ühest haru $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, mille graafikuteks on vastavalt koonuse ülemine ja koonuse alumine pool.

Koonuse nivoojoonteks on joonte

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = c, \end{cases}$$

projektsioonid xy -tasandil ja need on kontsentrilised ringjooned $x^2 + y^2 = c^2$ keskpunktiga $(0; 0)$ ja raadiusega $|c|$. Joonisel 6.8 on koonuse nivoojooned $c = \pm 1$, $c = 2$ ja $c = \pm 3$ korral.

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ graafiku *nivooindadeks* nimetatakse pindu

$$\begin{cases} w = f(x, y, z) \\ w = c. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemist saame, et $f(x, y, z) = c$, st ilmutamata kujul kahe muutuja funktsiooni, mille graafikuks on pind ruumis.

Näide 3. Kolme muutuja funktsiooni $w = x^2 + y^2 + z^2$ nivooindadeks on pinnad $x^2 + y^2 + z^2 = c$, kus $c > 0$. Nendeks pindadeks on sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguses, raadiusega $\sqrt{c}$.

1.3 Funktsiooni osamuut ja täismuut

Fikseerime kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas D ühe punkti $M(x, y)$.

Jättes muutuja y konstantseks, muudame sõltumatut muutujat x suuruse Δx võrra. Funktsiooni osamuuduks x järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (1.1)$$

Jättes muutuja x konstantseks, muudame sõltumatut muutujat y suuruse Δy võrra. Funktsiooni osamuuduks y järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1.2)$$

Muutes argumenti x suuruse Δx ja argumenti y suuruse Δy võrra, liigume xy -tasandi punktist $M(x, y)$ punkti $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Funktsiooni täismuuduks nimetatakse vahet

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1.3)$$

Üldjuhul funktsiooni osamuutude summa ei võrdu täismuuduga, st $\Delta z \neq \Delta x + \Delta y$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = xy$ osamuutude summa ja täissmuudu, kui $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0,2$ ja $\Delta y = 0,1$.

Osamuut x järgi $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.

Osamuut y järgi $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y = 2 \cdot 0,1 = 0,2$. Seega $\Delta_x z + \Delta_y z = 0,8$.

Täissmuut $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,82$.

Samasugusel viisil defineeritakse kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ osamuudud sõltumatute muutujate x , y ja z järgi ning täissmuut.

$$\begin{aligned}\Delta_x w &= f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z), \\ \Delta_y w &= f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z), \\ \Delta_z w &= f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z), \\ \Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).\end{aligned}$$

1.4 Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Kahe muutuja funktsiooni korral on piirprotsessiks punkti $P(x, y)$ lähenemine punktile $P_0(x_0, y_0)$, mida märgitakse $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ või $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$.

Punkt P võib punktile P_0 läheneda mööda suvalist trajektoori: mööda sirget, murdjoont, parabooli kaart jne. Sõltumata lähenemise trajektoorist jõuab punkt P igasse P_0 ümbrusse $U_\delta(x_0, y_0)$ olgu $\delta > 0$ kui tahes väike.

Definitsioon 1. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks piirprotsessis $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, kui $\forall \varepsilon > 0$ korral leidub selline ümbrus $U_\delta(x_0, y_0)$, et niipea kui $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$, on

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Teiste sõnadega, reaalarv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks piirprotsessis $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, kui funktsiooni väärtus $f(x, y)$ on reaalarvule A kui tahes lähedal, võttes punkti $P(x, y)$ punktile $P_0(x_0, y_0)$ piisavalt lähedal.

Seda tähistatakse

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse pidevaks punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui

1. $\exists f(x_0, y_0)$,
2. $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$,

$$3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Definitsioon 3. Funktsiooni nimetatakse pidevaks piirkonnas D , kui funktsioon on pidev selle piirkonna igas punktis.

Tähistades $x = x_0 + \Delta x$ ja $y = y_0 + \Delta y$, saame, et $x \rightarrow x_0$ ja $y \rightarrow y_0$ parajasti siis, kui $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$. Pidevuse 3. tingimuse saame nüüd kirjutada

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

ehk

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \quad (1.4)$$

Tähistame $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Siis

$$\Delta \rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0 \text{ ja } \Delta y \rightarrow 0.$$

Tingimusest (4.7) saame kahe muutuja pidevuseks punktis $P_0(x_0, y_0)$ tarviliku ja piisava tingimuse

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (1.5)$$

Näide 1. Arvutame piirväärtuse $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

Kasutades tähistust $\rho^2 = x^2 + y^2$ on ilmne, et $x \rightarrow 0$ ja $y \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ kui $\rho^2 \rightarrow 0$ ning

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho^2 \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1$$

Näide 2. Näitame, et funktsioonil $f(x, y) = \frac{2x - 3y}{x + y}$ puudub piirväärtus piirprotsessis $(x, y) \rightarrow (0; 0)$.

Vaatleme kahte erinevat lähenemisviisi punktile $(0; 0)$, lähtudes suvalisest punktist (x, y) . Esimese lähenemisviisi korral jätame kõigepealt muutuja y konstantseks ja leiame funktsioonist piirväärtuse, kui $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3y}{x + y} = -\frac{3y}{y} = -3$$

ning seejärel leiame tuemusest piirväärtuse piirprotsessis $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (-3) = -3.$$

Seega

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3y}{x + y} = -3.$$

Teise lähenemisviisi korral jätame kõigepealt muutuja x konstantseks ja leiame funktsiooni piirväärtuse piirprotsessis $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x - 3y}{x + y} = \frac{2x}{x} = 2$$

ning tulemusest piirväärtuse piirprotsessis $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Seega

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x - 3y}{x + y} = 2.$$

Et aga mõlema lähenemisviisi korral me mingil hetkel siseneme punkti $(0; 0)$ igasse ümbrusse $U_\delta(0; 0)$, olgu $\delta > 0$ kui tahes väike, siis piirväärtuse definitsioonis esitatud tingimus ei ole täidetud.

1.5 Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Fikseerime kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas ühe punkti $P(x, y)$. Jättes muutuja y konstantseks, muudame muutujat x suuruse Δx võrra ja leiame funktsiooni osamuudu x järgi $\Delta_x z$.

Definitsioon 1. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (1.6)$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks x järgi.

Osatuletist x järgi tähistatakse veel z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Jättes muutuja x konstantseks, muudame muutujat y suuruse Δy võrra ja leiame funktsiooni osamuudu y järgi $\Delta_y z$.

Definitsioon 2. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (1.7)$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks y järgi.

Osatuletist y järgi tähistatakse veel $z'_y, f'_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$.

Kahe muutja funktsiooni osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y loetud konstantseks. Ainaks muutujaks selles definitsioonis on Δx . Samuti on osatuletise leidmisel y järgi loetud konstantseks muutuja x ja ainsaks muutujaks definitsioonis on Δy . Järelikult jäävad osatuletiste leidmisel kehtima kõik ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise reeglid, millele lisandub reegel, et *muutujat mille järgi osatuletist ei leita, vaadeldakse konstandina*.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^3y - x^2y^2$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y konstantne, seega diferentseerimisreeglite põhjal

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = y \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = y \cdot 3x^2 - y^2 \cdot 2x = 3x^2y - 2xy^2.$$

Osatuletise leidmisel y järgi on x konstantne. Diferentseerimisreeglite abil

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2) = x^3 \frac{\partial}{\partial y}(y) - x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = x^3 - x^2 \cdot 2y = x^3y - 2x^2y.$$

Kehtima jääb ka liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.

Näide 2. Leiame funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletis x järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Osatuletis y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ osatuletised muutujate x, y ja z järgi defineeritakse vastavalt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Osatuletiste leidmisel kehtib sama reegel, mis kahe muutuja funktsiooni osatuletiste leidmisel: kõiki muutujaid, va. muutjat, mille järgi osatuletist leitakse, vaadeldakse konstantidena.

Näide 3. Leiame funktsiooni $w = x^{y^z}$ osatuletised kõigi muutujate järgi.

Osatuletise leidmisel muutja x järgi on meil tegemist astmefunktsiooniga konstantse astendajaga y^z , seega

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutuja y järgi on tegemist eksponentfunktsiooniga, mille alus on x ja astendajaks astmefunktsioon y^z , seega

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutja z järgi on antud funktsioon eksponentfunktsioon alusega x . Astendaja y^z on samuti eksponentfunktsioon alusega y . Seega

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$$

1.6 Täismuut ja täisdiferentsiaal

Oletame, et kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev ja omab pidevaid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ning $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses.

Sellistel eeldustel on võimalik tõestada, et kahe muutuja funktsiooni täismuut on esitatav kui

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (1.8)$$

kus ε_1 ja ε_2 on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ lõpmatult kahanevad suurused.

Punktis 6.4 võtsime kasutusels tähistuse $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Tingimuste

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

ja

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

põhjal on need tõkestatud suurused. Seega $\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ ja $\varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta \rho}$ on lõpmatult kahanevad suurused kui lõpmatult kahanevate ja tõkestatud suuruste korrutised. Piirväärtus

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\Delta \rho} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \alpha \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \beta \frac{\Delta y}{\Delta \rho} = 0,$$

st $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ on $\Delta\rho$ suhtes st Δx ja Δy suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus.

Definitsioon. Kui täismuudu avaldises (1.8) esimene summa on Δx ja Δy suhtes lineaarne ja teine summa samade muutujate suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, siis lineaarsed osa nimetatakse kahe muutja funktsiooni $z = f(x, y)$ *täisdiferentsiaaliks*.

Täisdiferentsiaali tähistatakse dz . Seega definitsiooni kohaselt

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Funktsiooni $z = x$ korral $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ja $dz = dx = \Delta x$.

Funktsiooni $z = y$ korral $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ja $dz = dy = \Delta y$.

Järelikult sõltumatute muutujate x ja y jaoks langevad diferentsiaali ja muudu mõisted kokku ning täisdiferentsiaal on kirjutatav

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (1.9)$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Kasutades punkti 6.5 näites 2 leitud osatuletisi, saame

$$dz = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Näide 2. Arvutame funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ täismuudu ja täisdiferentsiaali väärtuse, kui $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0,2$ ja $\Delta y = 0,1$.

Täismuudu valemi (1.3) abil

$$\Delta z = \sqrt{3,2^2 + 4,1^2} - \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{27,05} - \sqrt{25} = 0,20096.$$

Täisdiferentsiaali arvutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Siis

$$dz = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0,2 + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0,1 = \frac{0,6}{5} + \frac{0,4}{5} = 0,2.$$

Tehtud arvutustest nähtub, et täismuut ja täisdiferentsiaal erinevad vähem kui 0,001 võrra, st suuruse võrra, mis on kaks suurusjärku väiksem kui Δx ja Δy .

Seda asjaolu arvestades saab täisdiferentsiaali kasutada kahe muutuja funktsiooni väärtuste ligikaudsel arvutamisel. Kui Δx ja Δy on piisavalt väikesed, siis Δz ja dz erinevad teineteisest suuruse võrra, mis on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, kui Δx ja Δy . Seega võime kirjutada

$$\Delta z \approx dz$$

ehk

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Siit saame ligikaudse arvutamise valemi funktsiooni täisdiferentsiaal abil

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (1.10)$$

Näide 3. Arvutame täisdiferentsiaali abil ligikaudu $2,03^3 \cdot 0,96^2$.

Siin valime $f(x, y) = x^3 y^2$, $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,03$ ja $\Delta y = -0,04$. Osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y.$$

Funktsiooni väärtus $f(2, 1) = 8 \cdot 1 = 8$ ja osatuletiste väärtused $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$. Valemist (1.10)

$$(2 + 0,03)^3 \cdot (1 - 0,04)^2 \approx 8 + 12 \cdot 0,03 - 16 \cdot 0,04 = 7,72.$$

Kui kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ ja $\frac{\partial w}{\partial z}$ on pidevad punktis $P(x, y, z)$ ja selle mingis ümbruses, siis sarnaselt valemile (1.8) on võimalik näidata, et täismuut

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (1.11)$$

kus $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$ on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus kui $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Funktsiooni w täisdiferentsiaaliks nimetatakse avaldist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \quad (1.12)$$

Viimases langevad sõltumatute muutujate muudud ja diferentsiaalid kokku, st $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ ja $dz = \Delta z$.

Näide 4. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = x^{y^z}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Toetudes punkti 6.5 näite 3 tulemustele, kirjutame

$$\begin{aligned} dw &= y^z x^{y^z-1} dx + x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1} dy + x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y = \\ &= y^z x^{y^z} \left(\frac{dx}{x} + \frac{z \ln x dy}{y} + \ln x \ln y \right). \end{aligned}$$

1.7 Ilmutamata funktsiooni osatuletised

Olgu antud pidev funktsioon ilmutamata kujul

$$F(x, y) = 0 \quad (1.13)$$

See võrdus määrab muutuja y muutuja x (reeglina mitte ühese) funktsioonina. Selle ühe muutuja funktsiooni graafikuks on joon tasandil.

Eeldame, et funktsioonil $F(x, y)$ eksisteerivad punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised F'_x ja F'_y ning et $F'_y(x, y) \neq 0$. Tuletame valemi $\frac{dy}{dx}$ leidmiseks kahe muutuja funktsiooni $F(x, y)$ osatuletiste abil.

Fikseerime funktsiooni graafikuks oleval joonel punkti $P(x, y)$. Selle koordinaadid rahuldavad võrrandit (3.12). Muudame x muudu Δx võrra ja leiame punktile $x + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y + \Delta y$. Et $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ on samuti funktsiooni graafiku punkt, rahuldavad selle punkti koordinaadid joone võrrandit

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \quad (1.14)$$

Lahutades võrrandist (1.14) võrrandi (3.12), saame

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Viimase võrduse vasak pool on funktsiooni $F(x, y)$ täismuut, st

$$\Delta F = 0.$$

Tehted eelduste tõttu saame funktsiooni täismuudu avaldise (1.8) põhjal

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0,$$

millest

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta \right) \Delta y = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x$$

ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}.$$

Leiame tekkinud võrduse mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$. Vasaku poole piirväärtus on funktsiooni tuletise definitsiooni kohaselt $\frac{dy}{dx}$. Funktsiooni pidevuse tõttu ka $\Delta y \rightarrow 0$. Et α ja β on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ lõpmatult kahanevad suurused, siis $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ ja $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0$ ning pärast parema poole piirväärtuse leidmist saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Seega saab ühe muutuja ilmutamata funktsiooni tuletise leidmiseks kasutada ka valemit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (1.15)$$

Näide 1. Leiame ilmutamata funktsiooni $x^4 + y^4 - a^2x^2y^2 = 0$ tuletise $\frac{dy}{dx}$.

Siin $F(x, y) = x^4 + y^4 - a^2x^2y^2$, seega $F'_x = 4x^3 - 2a^2xy^2$ ja $F'_y = 4y^3 - 2a^2x^2y$. Valemi (1.15) järgi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 2a^2xy^2}{4y^3 - 2a^2x^2y} = -\frac{x(2x^2 - a^2y^2)}{y(2y^2 - a^2x^2)}.$$

Vaatleme ilmutamata pidevat funktsiooni $F(x, y, z) = 0$. See võrrand määrab muutja z kahe muutja x ja y funktsioonina. Eeldame, et funktsioonil $F(x, y, z)$ eksisteerivad punktis $P(x, y, z)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$ ning $F'_z(x, y, z) \neq 0$.

Funktsiooni z osatuletise leidmisel x järgi vaatleme muutajat y konstandina. Siis on võrrandis $F(x, y, z) = 0$ ainult kaks muutjat x ja z ning (1.15) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}. \quad (1.16)$$

Samasuguse arutluse korral muutuja y jaoks

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (1.17)$$

Näide 2. Leiame ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Selleks leiame $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$ ja $F'_z = 2z$. Valemi (1.16) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

ja valemi (1.17) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

1.8 Liitfunktsiooni osatuletised

Olgu z kahe muutuja u ja v funktsioon $z = f(u, v)$ ning u ja v omakorda kahe muutja x ja y funktsioonid $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$. Sellisel juhul z on liitfunktsioon muutjate x ja y suhtes, st

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y)$$

Eeldame, et funktsioonidel u ja v on punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ ning funktsioonil z vastavas punktis (u, v) ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Nendel eeldustel leitakse liitfunktsiooni $z = F(x, y)$ osatuletis x järgi valemi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.18)$$

abil ja osatuletis y järgi valemi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.19)$$

abil.

Näide 1. Leiame $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$ ja $v = x^2 + y$.

Valemid (1.18) ja (1.19) sisaldavad kuut osatuletist. Leiame

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1;$$

Valemi (1.18) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x)$$

ja valemi (1.19) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (4uye^{x+y^2} + 1).$$

Märkus. Kui z on kolme muutja funktsioon $z = f(u, v, w)$ ja lisaks funktsioonidele u ja v on $w = \chi(x, y)$, siis liitfunktsiooni z osatuletised muutujate x ja y järgi leitakse valemite

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.20)$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.21)$$

abil.

Olgu nüüd z kolme muutja x , u ja v funktsioon $z = f(x, u, v)$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$. Siis z on ühe muutuja x liitfunktsioon

$$z = f(x, \varphi(x), \psi(x)),$$

mille tuletise $\frac{dz}{dx}$ leidmiseks saame valemi (1.20) abil. Et x tuletis x järgi $\frac{dx}{dx} = 1$ ja u ning v on ühe muutuja funktsioonid, siis

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (1.22)$$

Valemit (1.22) nimetatakse *täistuletise* valemiks.

Näide 2. Leiame $\frac{dz}{dx}$, kui $z = x^2 + \sqrt{y}$ ja $y = x^2 + 1$.

Antud juhul z on kahe muutuja x ja y funktsiooni, kus y on muutja x funktsioon. Antud olukorra jaoks annab täistuletise valem (1.22) tulemuse

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

1.9 Kõrgemat järku osatuletised

Näidetest on selgunud, et kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on üldiselt kahe muutuja funktsioonid. Seega on võimalik mõlemat diferentseerida kahe muutuja x ja y järgi.

Definitsioon 1. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (loetakse *de-ruut-dzett de-iks-ruut*) nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x ja y järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

Definitsioon 3. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y ja x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Definitsioon 4. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Kui diferentseeritud on erinevate muutujate järgi, siis teist järku osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

nimetatakse ka *segatuletisteks*.

Nende teist järku osatuletiste jaoks kasutatakse veel tähistusi vastavalt z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yx} ja z''_{yy} või $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ ja $f''_{yy}(x, y)$.

Saadud teist järku osatuletised on omakorda kahe muutuja x ja y funktsioonid. Seega saab kõigist neljast leida osatuletised x ja y järgi. ja nii saadakse kaheksa kolmandat järku osatuletist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Näide 1. Leiame kahe muutuja funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ teist järku osatuletised.

Punkti 6.5 näites 2 leidsime, et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Leiame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = y \left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = -x \left(-\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Esitatud näite põhjal võib püstitada küsimuse, kas teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

on alati võrdsed. Alati see nii ei ole, aga kui funktsioonil on piisavalt head omadused, siis segatuletised on võrdsed. Tõestuseta formuleerime teoreemi segatuletiste võrdsusest.

Teoreem. Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ on pidevad punktis P ja selle mingis ümbruses, siis punktis P

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Vajalike osatuletiste pidevuse korral ei sõltu ka kõrgemat järku osatuletised diferentseerimise järjekorrast, vaid ainult sellest, mitu korda on kummagi muutuja järgi diferentseeritud. Näiteks võime kõigi madalamat järku osatuletiste ja ka vaadeldavate osatuletiste pidevuse korral punktis ja selle ümbruses kirjutada

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2}$$

Samasugune teoreem kehtib ka kolme ja enam muutuja funktsiooni puhul.

Näide 2. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = e^x \sin(yz)$ kolmandat järku osatuletised $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ ja $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y}$.

Esimese kolmandat järku osatuletise jaoks leiame kõigepealt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x \sin(yz),$$

siis

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^x \cos(yz) \cdot z = ze^x \cos(yz)$$

ja kolmandaks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = e^x \cos(yz) + z(-e^x \sin(yz)) \cdot y = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)]$$

Teise kolmandat järku osatuletise jaoks leiame

$$\frac{\partial w}{\partial z} = ye^x \cos(yz)$$

seejärel

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = ye^x \cos(yz)$$

ja lõpuks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} = e^x \cos(yz) - ye^x \sin(yz) \cdot z = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)].$$

1.10 Tuletis antud suunas

Käesolevas punktis seame eesmärgiks leida mitme muutuja funktsiooni tuletis antud punktis mingi vektori suunas.

Alustame kahe muutja funktsioonist $z = f(x, y)$ ja tuletame valemi tuletise arvutamiseks punktis $P(x, y)$ vektori $\vec{s} = (\Delta x, \Delta y)$ suunas. Eeldame, et funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on pidevad punktis P ja selle mingi ümbruses.

Tähistame vektori $\vec{s}$ pikkuse $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Argumentide muutudele Δx ja Δy vastav täismuudu avaldis on (1.8) järgi

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

kus ε_1 ja ε_2 on piirprotsessis $\Delta s \rightarrow 0$ lõpmatult kahanevad suurused. Jagades viimase võrduse vektori $\vec{s}$ pikkusega, saame

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Suhted $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ ja $\frac{\Delta y}{\Delta s}$ on vektori $\vec{s}$ suunalise ühikvektori $\vec{s}^\delta$ koordinaadid. Kui tähistada vektori $\vec{s}$ ja koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisi nurki α ja β , on ilmne, et

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha \quad \text{ja} \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta$$

Seepärast nimetatakse neid suhteid, st vektori suunalise ühikvektori koordinaate, vektori $\vec{s}$ *suunakoosinusteks*.

Definitsioon. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

nimetatakse funktsiooni z tuletiseks punktis P vektori $\vec{s}$ suunas ja tähistatakse $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}$. Et

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} \right) = 0,$$

siis saame suunatuletise leidmiseks valemi

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \quad (1.23)$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ tuletised punktis $P(1; 1)$ vektorite $\vec{s}_1 = (1; 1)$ ja $\vec{s}_2 = (1; -1)$ suunas.

Kõigepealt arvutame funktsiooni osatuletised punktis P

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \Big|_P = 2$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \Big|_P = 2$$

Leides vektori $\vec{s}_1$ pikkuse $\Delta s_1 = \sqrt{2}$, saame suunakoosinusteks $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ja $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_1} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Leides vektori $\vec{s}_2$ pikkuse $\Delta s_2 = \sqrt{2}$, saame suunakoosinusteks $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ja $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Seega, lähtudes ühest ja samast punktist xy -tasandil saame erinevas suunas liikudes erinevad suunatuletiste väärtused. Suunatuletise väärtus iseloomustab funktsiooni kasvukiirust lähtudes antud punktist etteantud suunas.

Suunatuletis on osatuletiste x ja y järgi üldistuseks. Kui vektor $\vec{s}$ on x telje suunaline, siis $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = 1$ ja $\cos \beta = 0$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Kui vektor $\vec{s}$ on y telje suunaline, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, $\cos \alpha = 0$ ja $\cos \beta = 1$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Seega funktsiooni tuletis x -telje suunas on selle funktsiooni osatuletis x järgi ja y -telje suunas osatuletis y järgi.

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ tuletise leidmiseks punktis $P(x, y, z)$ vektori $\vec{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ suunas kehtib sarnane valem. Tähistagu α , β ja γ vastavalt nurki vektori $\vec{s}$ ja x -teje, vektori $\vec{s}$ ja y -telje ning vektori $\vec{s}$ ja z -telje vahel. Siis vektori $\vec{s}$ suunakoosinused on $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ ning suunatuletis leitakse valemist

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.24)$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $w = xy + xz + yz$ tuletise punktis $P(1; 1; 2)$ suunas, mis moodustab koordinaattalgedega nurga 60° , 60° ja 45° .

Arvutame osatuletised punktis P

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + z \Big|_P = 3, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x + z \Big|_P = 3$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x + y \Big|_P = 2$$

ning suunakoosinused

$$\vec{s} = (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \cos 45^\circ) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Valemi (3.9) järgi leiame

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{s}} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}.$$

1.11 Gradient

Kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ seab igale punktile $P(x, y)$ funktsiooni määramispiirkonnast D vastavusse muutuja z väärtuse ehk skalaari. Igale määramispiirkonnale punktile vastab skalaar. Seega saab kahe muutuja funktsioonist kõneleda kui *skalaarväljast*.

Kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$ seab igale ruumi punktile $P(x, y, z)$ funktsiooni määramispiirkonnast V vastavusse skalaari, st piirkonnas V tekitab kolme muutuja funktsioon skalaarvälja.

Definitsioon 1. Skalaarvälja $z = f(x, y)$ *gradientvektoriks* ehk *gradientiks* nimetatakse vektorit

$$\text{grad } z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (1.25)$$

Definitsioon 2. Skalaarvälja $w = f(x, y, z)$ gradientvektoriks ehk *gradientiks* nimetatakse vektorit

$$\text{grad } w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.26)$$

Esimesel juhul tekib tasandi mingis punktihulgas ja teisel juhul ruumi punktihulgas vektorväli, mida nimetatakse *gradientide väljaks*.

Arvestades sellega, et $\vec{s}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta)$, saab suunatuletise arvutamise valemi (1.23) kirjutada gradiendi ja vektori $\vec{s}^\circ$ skalaarkorrutisena

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \text{grad } z \cdot \vec{s}^\circ$$

Et $\vec{s}^\circ = \frac{\vec{s}}{\Delta s}$, siis

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \text{grad } z \cdot \frac{\vec{s}}{\Delta s} = |\text{grad } z| \frac{\text{grad } z \cdot \vec{s}}{|\text{grad } z| \Delta s},$$

kus $|\text{grad } z|$ on gradientvektori pikkus. Kui tähistada gradiendi ja vektori $\vec{s}$ vahelist nurka φ , siis

$$\cos \varphi = \frac{\text{grad } z \cdot \vec{s}}{|\text{grad } z| \Delta s}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = |\text{grad } z| \cos \varphi. \quad (1.27)$$

Tulemuse sõnastame teoreemina.

Teoreem 1. Funktsiooni $z = f(x, y)$ tuletis vektori $\vec{s}$ suunas võrdub gradientvektori projektsiooniga vektori $\vec{s}$ suunale.

Sellest teoreemist teeme kaks järeldust.

Järeldus 1. Tuletis gradiendiga ristavas suunas võrdub nulliga.

Järeldus on ilmne, sest antud juhul $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = 0$.

Järeldus 2. Tuletis on suurim gradiendi suunas ja arvuliselt võrdne gradiendi pikkusega.

Põhjenduseks piisab märkida, et koosinusfunktsioon saavutab oma maksimaalse väärtuse 1, kui $\varphi = 0$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ suurima kasvukiiruse punktis $P(1; 1)$.

Funktsiooni kasvukiirust iseloomustab funktsiooni tuletis. Seega on suurim kasvukiirus võrdne gradientvektori pikkusega. Leiame

$$\text{grad } z = (2x, 2y) \Big|_P = (2; 2)$$

ja selle pikkuse $|\text{grad } z| = 2\sqrt{2}$.

Tulemus ühtib eelmise punkti näites 1 leitud tuletisega vektori $\vec{s}_1$ suunas, mis on loomulik, sest vektor $\vec{s}_1 = (1; 1)$ on gradiendi suunaline.

Teoreem 2. Gradient on risti nivoojoone puutujaga.

Tõestus. Kahe muutuva funktsiooni $z = f(x, y)$ graafiku nivoojoone projektsioon xy -tasandil on $f(x, y) = c$. Nivoojoone puutuja suunaline vektor on $\vec{s} = \left(1; -\frac{f'_x}{f'_y}\right) = \frac{1}{f'_y}(f'_y, -f'_x)$ ja gradiendi ning puutuja suunalise vektori skalaarkorrutis $\text{grad } z \cdot \vec{s} = f'_x f'_y - f'_y f'_x = 0$, st gradient on nivoojoone puutujaga risti.

Järeldusest 1 saame nüüd.

Järeldus 3. Funktsiooni tuletis nivoojoone puutuja suunas võrdub nulliga.

Eelmise punkti näites 1 antud vektor $\vec{s}_2$ on nivoojoone puutuja suunaline, seega on loomulik, et tuletis selle vektori suunas võrdub nulliga.

1.12 Divergents ja rootor

Eelmises punktis vaadeldud gradientide väli on üks näide vektorväljast. Käesolevas punktis vaatleme mis tahes vektorvälja

$$\vec{F} = (X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z))$$

milles kõik koordinaadid on üldjuhul oma rakenduspunkti $P(x, y, z)$ funktsioonid. Tüüpilisteks vektorväljadeks on kiiruste väli, jõuväli ja magnetväli.

Definitsioon 1. Vektorvälja $\vec{F}$ divergentsiks punktis $P(x, y, z)$ nimetatakse skalaari

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (1.28)$$

Definitsioon 2. Vektorvälja $\vec{F}$ rootoriks punktis $P(x, y, z)$ nimetatakse vektorit

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \quad (1.29)$$

Divergents antud punktis on skalaarne suurus. Oletame, et antud ruumi-punktis on allikas. Divergents iseloomustab seda, kui palju vedelikku läbib ajaühikus selle ruumipunkti ümber asetatud lõpmatult väikese raadiusega sfääri.

Vektorvälja $\vec{F}$, mille igas punktis

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$

nimetatakse *allikavabaks* väljaks.

Oletame, et $\vec{F}$ on kiiruste väli voolavas vedelikus. Sellisel juhul $\operatorname{rot} \vec{F}$ iseloomustab vedeliku osakeste pöörlemist punktis $(x; y; z)$ ümber telje, mis on $\operatorname{rot} \vec{F}$ sihiline.

Vektorvälja $\vec{F}$, mille igas punktis $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ nimetatakse *keerisevabaks*.

Näide 1. Leiame vektorvälja $\vec{F} = \left(xyz; x^2 + z^2; \frac{xy}{z} \right)$ divergentsi ja rootori.

Antud näites $X = xyz$, $Y = x^2 + z^2$, $Z = \frac{xy}{z}$, seega $\frac{\partial X}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ ja $\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$ ning

$$\operatorname{div} \vec{F} = yz - \frac{xy}{z^2}$$

Edasi leiame rootorvektori koordinaadid

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{x}{z} - 2z$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = xy - \frac{y}{z}$$

ja

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 2x - xz$$

Seega

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{x}{z} - 2z; xy - \frac{y}{z}; 2x - xz \right)$$

Väljateoorias kasutatakse formaalset vektorit.

Definitsioon 3. *Hamiltoni nablavektoriks* ehk *Hamiltoni nablaoperaatoriks* nimetatakse vektorit

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Kasutades seda operaatorit tavalise vektorina, saame skalaarvälja $w = f(x, y, z)$ korral

$$\nabla w = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y}; \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} w$$

Nablavektori ja vektorvälja $\vec{F} = (X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z))$ skalaarkorrutis

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (X; Y; Z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \vec{F}$$

Nablavektori ja vektorvälja $\vec{F} = (X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z))$ vektorkorrutis

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (X; Y; Z) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{F}$$

Seega saame Hamiltoni nablooperaatori abil lühidalt kirjutada

$$\text{grad } w = \nabla w,$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

Oletame, et vektorvälja $\vec{F}$ koordinaadid $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ ja $Z(x, y, z)$ on piisavalt heade omadustega funktsionid, st nende osatuletised kuni teist järku segatuletisteni on pidevad. Siis punktis 1.9 esitatud teoreemi järgi on segatuletised võrdsed, st

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

ja

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{F} &= \nabla \cdot \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}$$

st rootorite väli on allikavaba väli.

Oletame, et skalaarvälja $w = f(x, y, z)$ teist järku segatuletised on pidevad. Siis jälle segatuletised ei sõltu osatuletiste leidmise järjekorrast ja

$$\begin{aligned} \text{rot grad } w &= \nabla \times \text{grad } w = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y}; \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}; \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}; \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = (0; 0; 0) = \vec{0} \end{aligned}$$

st gradientide väli on keerisevaba.

1.13 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 1. Öeldakse, et kahe muutuja funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $P_1(x_1, y_1)$ lokaalne maksimum, kui sellel punktil leidub niisugune ümbrus $U_\varepsilon(x_1, y_1)$, et iga $P(x, y) \in U_\varepsilon(x_1, y_1)$ on $f(x, y) < f(x_1, y_1)$.

Definitsioon 2. Öeldakse, et kahe muutuja funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis $P_2(x_2, y_2)$ lokaalne miinimum, kui sellel punktil leidub niisugune ümbrus $U_\varepsilon(x_2, y_2)$, et iga $P(x, y) \in U_\varepsilon(x_2, y_2)$ on $f(x, y) > f(x_2, y_2)$.

Näide 1. Definitsioon 2 järgi on kahe muutuja funktsioonil $z = x^2 + y^2$ punktis $P_0(0; 0)$ lokaalne miinimum, sest $f(0; 0) = 0$ ja mis tahes punktist P_0 erineva punkti $P(x, y)$ korral $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0$.

Näide 2. Funktsioonil $z = x^2 - y^2$ ei ole punktis $P_0(0; 0)$ lokaalset ekstreemumi, sest $f(0; 0) = 0$, aga igasugune $U_\varepsilon(0; 0)$ sisaldab nii x - kui ka y -telje punkte ning x -telje punktides $y = 0$ ja $z = x^2 > 0$, y -telje punktides $x = 0$ ja $z = -y^2 < 0$.

Kui kahe muutuja funktsioonil on punktis $P_0(x_0, y_0)$ lokaalne ekstreemum, siis on lokaalne ekstreemum ka kahe muutuja funktsiooni graafikuks oleva pinna tasandilõikel tasandiga $y = y_0$, st ühe muutuja funktsioonil $z = f(x, y_0)$. Sellisel juhul punktis P_0 kas $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ või puudub. Samuti on lokaalne ekstreemum tasandilõikel tasandiga $x = x_0$, st ühe muutja funktsioonil $z = f(x_0, y)$. Siis punktis P_0 kas $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ või puudub.

Definitsioon 3. Punkte, kus $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ või puudub ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ või puudub, nimetatakse kahe muutja funktsiooni *kriitilisteks punktideks*. Kokku võttes võime sõnastada teoreemi.

Teoreem 1. (Lokaalse ekstreemumi olemasoluks tarvilik tingimus) Kui kahe muutuja funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis P_0 lokaalne ekstreemum, siis punkt P_0 on selle kahe muutuja funktsiooni kriitiline punkt.

Viimane tingimus on tarvilik lokaalse ekstreemumi olemasoluks, st mujal kui kriitilises punktis kahe muutuja funktsioonil lokaalset ekstreemumi ei ole. Aga see tingimus ei ole piisav ekstreemumi olemasoluks. Näites 2 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 - y^2$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ võrduvad mõlemad 0-ga punktis $P_0(0; 0)$, aga nagu veendusime, selles punktis antud kahe muutuja funktsioonil lokaalset ekstreemumi ei ole.

Seega tekib probleem, kuidas teha kindlaks, kas kahe muutuja funktsioonil on kriitilises punktis lokaalset ekstreemumi ja kummaga on tegemist, kas lokaalse maksimumi või lokaalse miinimumiga.

Edaspidi vaatleme ainult niisuguseid kriitilisi punkte, kus mõlemad osatuletised võrduvad 0-ga, st kriitilisi punkte, mis on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

lahenditeks. Selliseid punkte nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ *statsionaarseteks punktideks*.

Olgu P_0 kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarne punkt. Arvutame teist järku osatuletiste väärtused punktis P_0 ja tähistame

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{P_0}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{P_0} \quad \text{ja} \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{P_0}.$$

Teoreem 2. (Piisavad tingimused kahe muutuja funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks) Olgu P_0 kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarne punkt.

1. Kui $AC - B^2 > 0$ ja $A < 0$, siis on kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalne maksimum.
2. Kui $AC - B^2 > 0$ ja $A > 0$, siis on kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalne miinimum.
3. Kui $AC - B^2 < 0$, siis kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalset ekstreemumi ei ole. Sellisel juhul nimetatakse punkti P_0 kahe muutuja funktsiooni *sadulpunktiks*.

Märkus Kui $AC - B^2 = 0$, siis kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi kindlakstegemisel on vaja täiendavaid vahendeid. Teoreem 2 jätab sellisel juhul küsimuse lahtiseks.

Näites 1 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 + y^2$ statsionaarse punkti $P_0(0; 0)$ saame võrrandisüsteemi (1.30)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

lahendina. Leiame

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ja

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Seega $AC - B^2 = 4 > 0$ ja $A > 0$. Järelikult on teoreemi 2 põhjal kahe muutuja funktsioonil $z = x^2 + y^2$ statsionaarses punktis $P_0(0; 0)$ lokaalne miinimum.

Näites 2 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 - y^2$ statsionaarse punkti $P_0(0; 0)$ saame võrrandisüsteemi (1.30)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

lahendina. Leiame

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ja

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Seega $AC - B^2 = -4 < 0$. Järelikult teoreemi 2 põhjal kahe muutuja funktsioonil $z = x^2 - y^2$ statsionaarses punktis $P_0(0; 0)$ lokaalset ekstreemumi ei ole.

1.14 Kahe muutuja funktsiooni tinglikud ekstreemumid

Kõigepealt vaatleme näidet, kuidas tekivad tingliku ekstreemumi ülesanded.

Näide. Plekitahvlist pindalaga $2a$ tuleb valmistada risttahukakujuline kinnine karp. Millised peavad olema selle karbi mõõtmed, mille korral ruumala oleks maksimaalne.

Tegemist on tüüpilise lisatingimusega ekstreemumülesandega. Olgu karbi mõõtmed x , y ja z . Siis tuleb leida ruumala $V = xyz$ maksimum, nii et oleks täidetud tingimus $2xy + 2xz + 2yz = 2a$

Selle näite juurde pöördume tagasi, kui on tehtud vastav teoreetiline ettevalmistus.

Olgu esiteks vaja leida kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$. Ekstreemumpunkte tuleb leida ainult nende hulgas, mis rahuldavad seda võrrandit. Viimane on ühe muutuja funktsiooni ilmutamata kujuks. Selle funktsiooni tuleks $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$.

Seega on z sisuliselt ühe muutuja x funktsioon. Täistuletise valemist (1.22) saame, et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Asendades sellesse $\frac{dy}{dx}$, saame

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \right).$$

Et ekstreemumpunktis $\frac{dz}{dx} = 0$, siis

$$f'_x = f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Eeldades, et $f'_y \neq 0$ saame lisatingimusega ekstreemumpunktide leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

See võrrandisüsteem sobib kahe muutuja funktsiooni ekstreemumpunktide leidmiseks ühe lisatingimuse korral. Laiematel juhtudel, kui tuleb leida kolme või enam muutuja funktsiooni ekstreemumpunkte teatud lisatingimusel või lisatingimustel, on vaja üldisemat lahenduseeskirja.

Üldisemat lahenduseeskirja vaatleme kõigepealt endise probleemi püstituse korral, st tuleb leida kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumpunktid lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$.

Toome sisse nõndanimetatud Lagrange'i kordaja λ ja koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Lisatingimusega ekstreemumpunktideks on selle kolme muutuja funktsiooni statsionaarsed punktid ehk võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

lahendid. Näitame, et viimane võrrandisüsteem on samaväärne võrrandisüsteemiga (1.31). Et $F'_\lambda = \varphi(x, y)$, on süsteemi viimaseks võrrandiks lisatingimus $\varphi(x, y) = 0$. Esimeseks võrrandiks on $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$ ja teiseks $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$. Nendest kahest võrrandist elimineerime λ . Esimesest $\lambda = -\frac{f'_x}{\varphi'_x}$ ja teisest

$\lambda = -\frac{f'_y}{\varphi'_y}$. Nendest kahest võrrandist

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y},$$

mis langeb kokku võrrandisüsteemi (1.31) esimese võrrandiga.

Kui on vaja leida kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x, y, z) = 0$, koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$$

ja ekstreemumpunktid leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Selle abil lahendame punkti alguses toodud näite, st leiame funktsiooni $V = xyz$ ekstreemumid lisatingimusel $xy + xz + yz = a$. Koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$$

ja võrrandisüsteemi (1.33)

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0 \\ xz + \lambda(x + z) = 0 \\ xy + \lambda(x + y) = 0 \\ xy + xz + yz - a = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Esimesest võrrandist $\lambda = -\frac{yz}{y+z}$, teisest $\lambda = -\frac{xz}{x+z}$ ja kolmandast $\lambda = -\frac{xy}{x+y}$. Saadud võrranditest esimene ja teine annavad võrrandi

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z}$$

ning esimene ja kolmas võrrandi

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xy}{x+y}.$$

Nendest võrranditest esimese jagame z -ga ja teise y -ga. Kumbki muutujatest ei saa olla 0, sest karbi ruumala võrduks vastasel korral 0-ga.

Esimesest võrrandist saame $y(x+z) = x(y+z)$, millest $xy + yz = xy + xz$ ehk $yz = xz$, st $y = x$. Teisest võrrandist $z(x+y) = x(y+z)$, millest $xz + yz = xy + xz$ ehk $yz = xy$, st $z = x$. Järelikult $z = y = x$, st karbi mõõtmed on võrdsed ja karp peab olema kuubikujuline. Asendades saadud tulemused süsteemi (1.34) viimasesse võrrandisse, saame $x^2 + x^2 + x^2 = a$, millest $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

Järelikult, kui materjali hulk on $2a$ pindalaühikut, tuleb maksimaalse ruumalaga karbi tegemiseks valida selle mõõtmed $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$ ja maksimaalne ruumala $V_{max} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Kui tuleb leida kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ ekstreemumid lisatingimustel $\varphi(x, y, z) = 0$ ja $\psi(x, y, z) = 0$, koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

ja ekstreemumpunktid leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \\ F'_\mu = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

2 Kordsed integraalid

2.1 Kahekordse integraali mõiste

Olgu tõkestatud piirkonnas D määratud kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$. Jagame piirkonna D suvalisel viisil n osapiirkonnaks

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_k, \dots, \Delta s_n,$$

kus Δs_k , $1 \leq k \leq n$, tähendab kontekstist sõltuvalt k -ndat osapiirkonda või selle pindala.

Valime igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k) \in \Delta s_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta s_k$. Kui eeldada, et $f(P_k) \geq 0$, siis korrutis tähendab niisuguse püstprisma ruumala, mille põhjaks on Δs_k ja kõrgus $f(P_k)$.

Summat

$$\sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta s_k$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ *integraalsummaks* piirkonnas D . Geomeetriliselt vastab sellele prismade ruumalade summa.

Piirkonna Δs_k diameetriks nimetatakse selle piirkonna punktide vahelist suurimat kaugust

$$\text{diam } \Delta s_k = \max_{P, Q \in \Delta s_k} |\overrightarrow{PQ}|.$$

Jaotus osapiirkondadeks on suvaline. Igal osapiirkonnal on oma diameeter. Neist suurimat tähistame sümboliga λ , st

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta s_k.$$

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta s_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond D jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D ja tähistatakse

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Definitsiooni kohaselt

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta s_k \quad (2.1)$$

Kui $f(x, y) \geq 0$ piirkonnas D , siis kahekordne integraal tähendab geomeetriliselt niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud xy -tasandi piirkonnaga D , ülalt funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ja juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

2.2 Kahekordse integraali omadused

Omadus 1. Kahe funktsiooni summa kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide summaga

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

Omadus 2. Kui c on konstant, siis

$$\iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$$

st konstantse teguri saab tuua integraali märgi alt välja.

Omadus 3. Kahe funktsiooni vahe kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide vahega

$$\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_D g(x, y) dx dy$$

Omadus 3 järel dub omadustest 1 ja 2, sest

$$f(x, y) - g(x, y) = f(x, y) + (-1)g(x, y)$$

Omadus 4. Kui $D = D_1 \cup D_2$ ning piirkonnad D_1 ja D_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

2.3 Kahekordse integraali arvutamine

Selles punktis eeldame, et integreerimispiirkond D on tõkestatud ja kinnine. Piirkonda D nimetatakse regulaarseks y -telje sihis, kui iga y -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna D sisepunkte, lõikab piirkonna raja joont kahes punktis.

y -telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $a \leq x \leq b$ ja $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

Olgu piirkonnas D määratud pidev funktsioon $f(x, y)$. Integraali

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ *kaksikintegraaliks* üle piirkonna D . Kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse nn *seesmine* integraal

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Siin on integreerimismuutujaks y ja muutujat x vaadeldakse integreerimisel konstandina. Integreerimise tulemuseks on mingisugune muutuja x funktsioon $\Phi(x)$. Teiseks arvutatakse nn *väline* integraal

$$\int_a^b \Phi(x) dx$$

ja tulemuseks on arv.

Tavaliselt kasutatakse kaksikintegraali esitamiseks kirjaviisi

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.2)$$

Näide 1. Arvutame kaksikintegraali

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y) dy$$

Integreerimispiirkond D on kirjeldatav võrratustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq x^2$.

Esiteks leiame seesmise integraali

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y) dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^4}{2} = \frac{3x^4}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$\int_0^1 \frac{3x^4}{2} dx = \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Piirkonda D nimetatakse regulaarseks x -telje sihis, kui iga x -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna D sisepunkte, lõikab piirkonna rajajoont kahes punktis.

x -telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $c \leq y \leq d$ ja $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$.

Kaksikintegraal üle x -telje sihis regulaarse piirkonna defineeritakse

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Ka selle kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse seesmine integraal

$$\Psi(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

ja seejärel väline integraal

$$\int_c^d \Psi(y) dy$$

Viimase kaksikintegraali esitamiseks kasutatakse kirjaviisi

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.3)$$

Kaksikintegraalis (2.2) on y seesmiseks muutujaks ja x väliseks muutujaks, kaksikintegraalis (2.3) on olukord vastupidine. Üleminekut ühe integreerimisjärjekorralt teisele nimetatakse integreerimisjärjekorra muutmiseks ehk vahetamiseks.

Näide 2. Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

Antud kaksikintegraalis on seesmiseks muutujaks y ja väliseks x . Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist peab väliseks muutujaks olema y , mis jääb konstantide vahele, muutuja x rajad võivad sõltuda muutujast y . Jooniselt on näha, et $0 \leq y \leq 1$. Parabooli $y = x^2$ võrrandist avaldame $x = \pm\sqrt{y}$. Antud piirkonda piirab parabooli parem haru, kus $x = \sqrt{y}$, seega x muutub piirkonnas D lõigul $\sqrt{y} \leq x \leq 1$. Järelikult saame pärast integreerimisjärjekorra vahetamist kaksikintegraali

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Näide 3. Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x, y) dx. \quad (2.4)$$

Integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \leq y \leq 3$ ja $y \leq x \leq 6 - y$. Kanname joonisele sirged $y = 0$, $y = 3$, $x = y$ ja $x = 6 - y$.

Integreerimispiirkonnas $0 \leq x \leq 6$ ja $0 \leq y \leq \varphi(x)$, kus

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 3 \\ 6 - x, & \text{kui } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist

$$\int_0^6 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

Määratud integraali lõigul aditiivsuse omaduse tõttu

$$\begin{aligned} & \int_0^3 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Osutub, et kaksimintegraal on sobiv vahend kahakordse integraali arvutamiseks. Kehtib teoreem.

Teoreem. Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev y -telje sihis regulaarses piirkonnas D , siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.5)$$

abil. Kui D on regulaarne x -telje sihis, arvutatakse kahekordne integraal valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.6)$$

abil.

Näide 4. Arvutame kahekordse integraali $\iint_D (x + y) dx dy$, kui piirkond

D on piiratud sirgega $x + y = 2$ ja parabooliga $y = x^2$.

Piirkonna joonise tegemiseks leiame parabooli ja sirge lõikepunktide abstsissid võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Asendades teisest võrrandist $y = 2 - x$ esimesse, saame $x^2 + x - 2 = 0$, millest $x_1 = -2$ ja $x_2 = 1$.

Integreerimispiirkond D on määratud võrratustega $-2 \leq x \leq 1$ ja $x^2 \leq y \leq 2 - x$. Arvutusvalemist (2.5)

$$\iint_D (x + y) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x + y) dy$$

Arvutame seesmise integraali

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{2-x} (x + y) dy &= \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2-x} \\ &= x(2 - x) + \frac{(2 - x)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} = 2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

ja seejärel välise integraali

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \left(2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx &= \left(2x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \left(-4 + \frac{4}{3} - 4 + \frac{16}{5} \right) = 4,95. \end{aligned}$$

2.4 Muutuja vahetus kahekordses integraalis

Alustame kahekordse integraali arvutamise näitest.

Näide 1. Arvutame kahekordse integraali

$$\iint_D (2x - 3y - 4)^2 dx dy$$

kui D on sirgetega $x + y = -1$, $x + y = 3$, $3y - 2x = 6$ ja $2x - 3y = 12$ piiratud piirkond.

Paneme tähele, et kaks esimest sirget on paralleelsed ning kolmas ja neljas sirge on paralleelsed. Esimese ja kolmanda sirge lõikepunkt on $A\left(-\frac{9}{5}; \frac{4}{5}\right)$, esimese ja neljanda sirge lõikepunkt $B\left(\frac{9}{5}; -\frac{14}{5}\right)$, teise ja neljanda sirge lõikepunkt $C\left(\frac{21}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ ning teise ja kolmanda sirge lõikepunkt $D\left(\frac{3}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Selleks, et arvutada kahekordset integraali valemi (2.5) abil, peab piirkonna punktidest D ja B tõmmatud vertikaalsete sirgetega kolmeks jaotama, arvutama antud kahekordse integraali üle kolme piirkonna eraldi ning tulemused liitma. See on seotud küllalt mahuka tehnilise tööga, mida on võimalik vältida, kasutades integreerimiseks muutuja vahetust.

Kahekordses integraalis minnakse muutujatelt x ja y muutujatele u ja v seoste

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (2.7)$$

abil. Eeldame, et kahe muutuja funktsioonid $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ on vaadeldavas uv -tasandi piirkonnas ühesed, pidevad ning omavad pidevaid osatuletisi mõlema muutuja järgi. Lisaks eeldame, et võrrandisüsteem (2.9) on üheselt lahenduv muutujate u ja v suhtes. Sellisel juhul vastab igale xy -tasandi punktile piirkonnas D parajasti üks uv -tasandi punkt piirkonnas D' ja vastupidi.

Muutujate vahetuse Jacobi determinandiks ehk *jakobiaaniks* nimetatakse determinanti

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Muutujate vahetus kahekordses integraalis toimub valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv. \quad (2.9)$$

abil.

Pöördume tagasi punkti alguses toodud näite juurde ja teeme kahekordses integraalis muutuja vahetuse

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases} \quad (2.10)$$

Sellises juhul xy -tasandi rööpkülik teiseneb uv -tasandi ristkülikuks, mis on määratud tingimustega $-1 \leq u \leq 3$ ja $-6 \leq v \leq 12$. Integreeritav funktsioon $(2x - 3y - 4)^2 = (v - 4)^2$. Jakobiaani (2.8) arvutamiseks avaldame võrrandisüsteemist (2.10) muutujad x ja y

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v \\ y = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v \end{cases}$$

ja leiame osatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{3}{5}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{2}{5}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{5}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Seega

$$J = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{1}{5}$$

ja muutja vahetuse valemi abil (2.9) leiame

$$\iint_D (2x - 3y - 4)^2 dx dy = \iint_{D'} (v - 4)^2 \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \int_{-1}^3 du \int_{-6}^{12} (v - 4)^2 dv = 403 \frac{1}{5}$$

2.5 Kahekordne integraal polaarkoordinaatides

Kui ristkoordinaadistik on asetatud polaarkoordinaadistiku suhtes tavajoonel viisil, st x -telg ühtib polaarteljega ja y -telg läbib poolust, siis üleminek ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele toimub seoste

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (2.11)$$

abil, kus φ tähistab polaarnurka ja ρ polaarraadiust.

Konstantsetele polaarnurkadele polaarkoordinaatides vastavad koordinaatide alguspunktist lähtuvad sirged ristkoordinaadistikus ja konstantsetele polaarraadiustele vastavad ringjooned keskpunktiga koordinaatide alguses. Seega on muutuja vahetust (2.11) eelkõige sobiv kasutada juhul, kui integreerimispiirkonnaks ristkoordinaadistikus on ring või mingi ringi osa.

Muutuja vahetuse valemi (2.9) kasutamiseks leiame $f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ ja jakobiaani

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho$$

ja arvestades sellega, et ρ kui polaarraadius on mittenegatiivne $|J| = \rho$.

Tähistame xy -tasandi piirkonnale D vastava piirkonna $\varphi\rho$ -tasandil sümboliga Δ . Siis muutja vahetuse valemist (2.9) saame üleminekul ristkoordinaatidest polaarkoordinaatidesse valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho. \quad (2.12)$$

Näide 1. Teisendame polaarkoordinaatidesse kahekordse integraali

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

kui integreerimispiirkonnaks D on ring $x^2 + y^2 \leq 4y$.

Piirkond D on piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 = 4y$, mille teisendamisel saame $x^2 + y^2 - 4y = 0$, st $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$ ehk $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Seega ringjoone keskpunktiks on $(0; 2)$ ja raadiuseks 2.

x -telg on ringjoone puutujaks, seega polaarnurk muutub $0 \leq \varphi \leq \pi$. Polaarraadius algab iga nurga korral 0-st. Suurim kaugus on ringjoonel ja seega sõltub polaarnurgast. Sõltuvuse kindlakstegemiseks asendame ülemineku valemist (2.11) x ja y ringjoone võrrandisse $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \sin \varphi$, millest

$$\rho = 4 \sin \varphi$$

Valemi (2.12) põhjal kirjutame

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho,$$

kus integreerimispiirkond Δ rahuldab tingimusi $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja $0 \leq \rho \leq 4 \sin \varphi$. Kahekordse integraali arvutusvalemi järgi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Näide 2. Arvutame polaarkoordinaatide abil kahekordse integraali

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$$

kui integreerimispiirkond D on piiratud joontega $y = 0$ ja $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Et $x^2 + y^2 + 1 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + 1 = \rho^2 + 1$, siis

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1} = \iint_{\Delta} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho^2 + 1}.$$

Piirkond D on piiratud x -teljega ja ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ ülemise poolega.

Piirkonnale D vastav piirkond polaarkoordinaadistikus Δ on määratud võrratustega $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja $0 \leq \rho \leq 1$, seega

$$\iint_{\Delta} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho^2 + 1} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1}$$

Leiame seesmise integraali

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(\rho^2 + 1)}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

ja välise integraali

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln 2 d\varphi = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

2.6 Pindalade ja ruumalade arvutamine kahekordse integraali abil

Kahekordse integraali defineerimisel veendusime, et kui funktsioon $f(x, y) \geq 0$ piirkonnas D , siis geomeetriliselt tähendab kahekordne integraal

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud xy -tasandi piirkonnaga D , ülalt funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silindripinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ja juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

Eeldame, et piirkonnas D on täidetud tingimus $f(x, y) \geq g(x, y)$. Kahekordse integraali omaduse tõttu

$$\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_D g(x, y) dx dy$$

Mõlemad kahekordsed integraalid tähendavad geomeetriliselt kõversilindri ruumalasid, esimene neist on pealt piiratud funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuga ja teine funktsiooni $z = g(x, y)$ graafikuga. Seega nende vahe tähendab niisuguse kõversilindri ruumala, mis pealt on piiratud funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuga, alt funktsiooni $z = g(x, y)$ graafikuga ja küljelt silindripinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ning juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

Kõversilindri ruumala arvutatakse valemist

$$V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy. \quad (2.13)$$

Näide 1. Arvutame tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ piiratud piirkonna ruumala.

Antud tasanditega piiratud piirkonnaks on püramiid.

Antud piirkonda piirab ülalt tasapind $z = 1 - x - y$ ja alt xy -tasand $z = 0$. Valemis (2.13) $f(x, y) = 1 - x - y$ ja $g(x, y) = 0$. Püramiidi ruumala on valemi järgi

$$V = \iint_D (1 - x - y) dx dy.$$

Piirkond D on määratud tingimustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$, seega

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy.$$

Arvutame kõigepealt seesmise integraali

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)dy = - \int_0^{1-x} (1-x-y)d(1-x-y) = - \frac{(1-x-y)^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$V = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = - \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} d(1-x) = - \frac{(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Kui kõversilindri kõrgus $f(x, y) = 1$ igas piirkonna D punktis, siis selle ruumala $V = S_D \cdot 1$, kus S_D tähistab põhja pindala. Asendades funktsiooni $f(x, y) = 1$ ruumala arvutamise valemisse

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

saame tasandilise piirkonna D pindala arvutamiseks valemi

$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (2.14)$$

Näide 2. Arvutame lemniskaadiga $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ piiratud kujundi pindala.

Teisendades lemniskaadi võrrandi polaarkoordinaatidesse, saame $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Seega $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, millest $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ või $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$.

Lemniskaat on sümmeetriline nii x - kui ka y -telje suhtes. Arvutame lemniskaadiga piiratud kujundi koordinaattasandi esimesse veerandisse jääva osa pindala ja korrutame 4-ga. Valemis (2.14) on integreerimispiirkonnaks veerand lemniskaadiga piiratud piirkonnast. Teisendades integraali polaarkoordinaatidesse, saame

$$S = 4 \iint_D dx dy = 4 \iint_{\Delta} \rho d\varphi d\rho.$$

Integreerimispiirkond Δ on polaarkoordinaatides määratud tingimustega $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ja $0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}$, järelikult

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho.$$

Seesmise integraali arvutamisel saame

$$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{2} \cos 2\varphi$$

ja

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

2.7 Kolmekordse integraali mõiste ja omadused

Olgu ruumilises piirkonnas V määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame piirkonna V suvalise viisil n osapiirkonnaks

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_k, \dots, \Delta v_n$$

kusjuures kontekstist sõltuvalt Δv_k tähistab nii k -ndat osapiirkonda kui ka selle ruumala.

Valime igast osapiirkonnast suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta v_k$. Kõikide korrutiste summerimisel saame summa

$$\sum_{k=0}^n f(P_k)\Delta v_k, \quad (2.15)$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ integraalsummaks üle piirkonna V .

Olgu

$$\text{diam } \Delta v_k = \max_{P, Q \in \Delta v_k} |\overrightarrow{PQ}|$$

piirkonna Δv_k diameeter ja tähistagu λ piirkondade diameetritest suurimat, st

$$\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta v_k$$

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(P_k)\Delta v_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond V jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordseks integraaliks üle piirkonna V ja tähistatakse

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(P_k) \Delta v_k \quad (2.16)$$

Kolmekordse integraali omadused on sarnased kahekordse integraali vastavate omadustega.

Omadus 1.

$$\iiint_V [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$$

Omadus 2. Kui c on konstant, siis

$$\iiint_V cf(x, y, z) dx dy dz = c \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

st konstantse teguri saab tuua kolmekordse integraali märgi alt välja (viia kolmekordse integraali märgi alla).

Omadus 3. Kui $V = V_1 \cup V_2$ ja piirkonnad V_1 ja V_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Kui eeldada, et piirkonnas V on $f(x, y, z) \geq 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena punktis (x, y, z) . Siis ühe punkti P_k fikseerimine osapiirkonnas Δv_k tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks, st selliseks, mis on aine tihedus selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_k) \Delta v_k$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks.

Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna V massi. Piirprotsess $\lambda \rightarrow 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Kokku võttes, tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x, y, z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna V massi.

Kui piirkond V on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $f(x, y, z) \equiv 1$, siis piirkonna V mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna V ruumala on arvutatav kolmekordse integraali

$$V = \iiint_V dx dy dz \quad (2.17)$$

abil. Näidet selle valemi kasutamise kohta vaatleme allpool.

2.8 Kolmekordse integraali arvutamine

Ruumilist piirkonda V nimetatakse regulaarseks z -telje sihis, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Iga z -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna sisepunkte, lõikab piirkonna rajapinda kahes punktis.
2. Piirkonna projektsioon xy -tasandil on regulaarne tasandiline piirkond.
3. Kui piirkonda lõigata mingi vertikaalse tasandiga, siis lõike tagajärjel tekkinud osad on omadustega 1. ja 2.

Regulaarne piirkond V on kirjeldatav tingimustega $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ja $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$. Sellisel juhul on kolmekordne integraal arvutatav valemist

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (2.18)$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kaht erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6 ja peale valemi (2.18) on võimalik kasutada veel viit arvutusvalemit.

Valemi (2.18) kasutamisel arvutatakse järjest kolm määratud integraali. Kõigepealt seesmine integraal muutuja z järgi (siis x ja y loetakse integreerimisel konstantideks)

$$\Psi(x, y) = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

seejärel integreeritakse muutuja y järgi ja leitakse

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x, y) dy$$

ning lõpuks integreeritakse muutuja x järgi

$$\int_a^b \Phi(x) dx$$

Näide. Arvutame kolmekordse integraali

$$\iiint_V xyz dx dy dz$$

kui piirkond V on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.
 määrame integreerimispiirkonna jaoks rajad: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ ja
 $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Seega

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$$

Arvutame seesmise integraali

$$\int_0^{1-x-y} xyz dz = xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = xy \frac{(1-x-y)^2}{2},$$

seejärel integreerime y järgi

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} xy \frac{(1-x-y)^2}{2} dy &= \frac{x}{2} \int_0^{1-x} y[(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2] dy \\ &= \frac{x}{2} \left[(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right] \Big|_0^{1-x} \\ &= \frac{x}{2} \left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4} \right] = \frac{x(1-x)^4}{24} \end{aligned}$$

ja lõpuks

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx &= -\frac{1}{24} \int_0^1 (-x)(1-x)^4 dx \\ &= -\frac{1}{24} \int_0^1 (1-x-1)(1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 [(1-x)^5 - (1-x)^4] d(1-x) \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{(1-x)^6}{6} - \frac{(1-x)^5}{5} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

2.9 Muutuja vahetus kolmekordses integraalis

Seame eesmärgiks teisendada kolmekordne integraal

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

üle piirkonna V xyz -koordinaadistikus kolmekordseks integraaliks üle piirkonna V' uvw -koordinaadistikus teisenduste

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases} \quad (2.19)$$

abil. Eeldame, et kolme muutuja u, v ja w funktsioonid x, y ja z on ühesed ja võrrandisüsteem (2.19) on üheselt lahenduv muutujate u, v ja w suhtes. Siis vastab igale piirkonna V' punktile üks punkt piirkonnast V ja vastupidi. Lisaks eeldame funktsioonide (2.19) kohta, et need on pidevad ja neil on pidevad osatuletised kõigi kolme muutuja järgi piirkonnas V' .

Muutuja vahetuse jakobiaan on kolmandat järku determinant

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

ja kolmekordne integraal üle piirkonna V teisendatakse kolmekordseks integraaliks üle piirkonna V' valemi

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J| du dv dw \quad (2.21)$$

abil.

2.10 Kolmekordne integraal silinderkoordinaatides

Olgu antud xyz -koordinaadistikus punkt $P(x, y, z)$. Tähistame selle punkti projektsiooni xy -tasandile P' . Tähistame punkti P' kaugust koordinaatide alguspunktist ρ ja lõigu $P'O$ ning x -telje vahelist nurka φ . Suurustel φ ja ρ on sama tähendus, mis tasandilisel juhul polaarkoordinaatidel.

Definitsioon. Punkti P silinderkoordinaatideks nimetatakse suurusi φ , ρ ja z .

Et φ -l ja ρ -l on sama tähendus, mis polaarkoordinaatidel ja kolmanda koordinaadiga teisendust ei tehta, on ülemineku valemiteks ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z. \end{cases} \quad (2.22)$$

Leiame muutuja vahetuse jakobiaani üleminekul ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele. Arvutuseeskirja (2.20) järgi

$$J = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix}.$$

Muutuja z ei sõltu muutujatest φ ja ρ , seega $z'_\varphi = 0$ ja $z'_\rho = 0$. Muutujad x ja y ei sõltu muutujast z , st $x'_z = 0$ ja $y'_z = 0$. Järelikult

$$J = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Arendades saadud determinanti viimase rea või viimase veeru järgi, saame

$$J = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \varphi - \rho \cos^2 \varphi = -\rho.$$

Arvestades sellega, et ρ tähistab kaugust, on $|J| = \rho$.

Tähistagu V' piirkonnale V vastavat piirkonda silinderkoordinaatides. Üldise muutuja vahetuse valemi (2.21) põhjal saame valemi üleminekuks kolmekordses integraalis ristkoordinaatidelt silinderkoordinaatidele

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\varphi d\rho dz \quad (2.23)$$

Näide. Arvutame silinderkoordinaatide abil kolmekordse integraali

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz.$$

Integreerimispiirkond on määratud ristkoordinaadistikus võrratustega $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ ja $0 \leq z \leq a$, st piiratud tasanditega $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = a$ ning silindriga $y = \sqrt{2x-x^2}$. Silindri moodustaja on z -teljega paralleelne ja projektsioon xy -tasandil poolringjoon $y = \sqrt{2x-x^2}$. See on ülemine pool ringjoonest $y^2 = 2x-x^2$ ehk $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, st ringjoonest keskpunktiga $(1; 0)$ ja raadiusega 1.

Teisendame valemite (2.22) abil antud kolmekordse integraali silinderkoordinaatidesse. Joonisel oleva poolsilindri moodustumiseks peab nurk φ muutuma lõigul $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Teisendades silindri võrrandi $x^2 + y^2 = 2x$ silinderkoordinaatidesse, saame $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi$ ehk $\rho = 2 \cos \varphi$. Järelikult kaugus $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$. Kolmanda koordinaadiga teisendust ei toimu, seega endiselt $0 \leq z \leq a$.

Integreeritav funktsioon on silinderkoordinaatides

$$z \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = z\rho$$

ja antud kolmekordne integraal on pärast teisendamist silinderkoordinaatidesse

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} d\rho \int_0^a z \rho \cdot \rho dz$$

Integreerime muutuja z järgi

$$\int_0^a z \rho^2 dz = \rho^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a^2 \rho^2}{2}$$

Seejärel integreerime muutuja ρ järgi

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{a^2}{2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{4a^2 \cos^3 \varphi}{3}$$

Lõpuks integreerime nurga φ järgi

$$\frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{4a^2}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^2}{9}.$$

3 Joon- ja pindintegraalid

3.1 Esimest liiki joonintegraali definitsioon ja omadused

Olgu antud tasandiline kõverjoon otspunktidega A ja B ja olgu sellel joonel defineeritud kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$, st igale joone punktile (x, y) on vastavusse seatud väärtus $f(x, y)$. Jaotame joone AB suvalisel viisil punktidega

$$A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_k, \dots, P_n = B$$

osakaarteks $\widehat{P_{k-1}P_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Valime igal osakaarel juhusliku punkti $Q_k(\xi_k, \eta_k) \in \widehat{P_{k-1}P_k}$.

Osakaare $\widehat{P_{k-1}P_k}$ pikkust tähistame Δs_k . Edasi moodustame korrutised $f(Q_k)\Delta s_k$, kus $k = 1, 2, \dots, n$ ja leiame summa

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(Q_k)\Delta s_k \quad (3.1)$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ integraalsummaks üle joone AB .

Joone AB jaotus punktidega $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_k, \dots, P_n$ on suvaline. Seega on osakaarte $\widehat{P_{k-1}P_k}$ pikkused Δs_k erinevad. Tähistame pikima osakaare pikkust

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k$$

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s_n$$

ja see ei sõltu joone AB osakaarteks jaotamise viisist ega punktide Q_k valikust osakaartel, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ *esimest liiki joonintegraaliks* üle joone AB ehk *joonintegraaliks kaare pikkuse järgi* ja tähistatakse

$$\int_{AB} f(x, y) ds$$

Vahetult definitsioonist järelduvad esimest liiki joonintegraali omadused.

Omadus 1. Esimest liiki joonintegraal ei sõltu joone läbimise suunast, st

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds$$

Omadus 2. (Aditiivsuse omadus) Kui C on mingi joone AB punkt, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{AC} f(x, y) ds + \int_{CB} f(x, y) ds$$

Omadus 3.

$$\int_{AB} [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_{AB} f(x, y) ds \pm \int_{AB} g(x, y) ds$$

Omadus 4. Kui c on konstant, siis

$$\int_{AB} c f(x, y) ds = c \int_{AB} f(x, y) ds$$

Omadus 5. Võttes esimest liiki joonintegraali definitsioonis $f(x, y) \equiv 1$, siis integraalsumma

$$s_n = \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

on osakaarte pikkuste summa, mis sõltumata joone AB osakaarteks jaotamise viisist on võrdne joone AB pikkusega s_{AB} , st

$$s_{AB} = \int_{AB} ds$$

Kui AB on ruumiline joon, siis iga joone punkt $Q_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ on määratud kolme koordinaadiga ja sellel joonel saab defineerida kolme muutuva funktsiooni $f(x, y, z)$. Kõik muu jääb esimest liiki joonintegraali defineerides tasandilise juhuga samaks, st

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(Q_k) \Delta s_k \quad (3.2)$$

Loomulikult jäävad kehtima ka kõik viis loetletud esimest liiki joonintegraali omadust.

Kui joonel AB funktsioon $f(x, y, z) \geq 0$, siis on funktsioon $f(x, y, z)$ tõlgendatav aine joontihedusena punktis $P(x, y, z)$. Sellisel juhul korrutis $f(Q_k) \Delta s_k$ on ligikaudu k -nda osakaare mass. Ligikaudu sellepärast, et tiheus $f(x, y, z)$ on osakaarel muutuv suurus, siin aga on joontihedus osakaarel loetud võrdseks joontihedusega ühes osakaarel välja valitud punktis Q_k .

Integraalsumma (3.1) tähendab sel juhul joone AB ligikaudset massi ja see summa iseloomustab joone massi seda täpsemalt, mida lühemad on osakaared ehk mida suuremaks hulgaks osakaarteks on joon AB jaotatud. Esimest liiki joonintegraal (3.2) annab meile funktsiooni $f(x, y, z)$ mainitud tõlgenduse korral joone AB täpse massi.

3.2 Esimest liiki joonintegraali arvutamine

Olgu tasandilise joone AB parameetrised võrrandid

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ja ruumilise joone AB parameetrised võrrandid

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases}$$

kus mõlemal juhul punktis A on parameetri väärtus $t = \alpha$ ja punktis B on $t = \beta$.

Definitsioon. Tasandilist joont AB nimetatakse siledaks, kui $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ja $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ on pidevad lõigul $[\alpha; \beta]$ ning

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$$

Definitsioon. Ruumilist joont AB nimetatakse siledaks, kui $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ja $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ on pidevad lõigul $[\alpha; \beta]$ ning

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0$$

Tõesusetä sõnastame järgmised teoreemid.

Teoreem 1. Olgu funktsioon $f(x, y)$ pidev siledal joonel AB . Siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (3.3)$$

Teoreem 2. Olgu funktsioon $f(x, y, z)$ pidev siledal joonel AB . Siis

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (3.4)$$

Kui joon AB on ilmutatud kujul antud funktsiooni $y = \varphi(x)$ graafikuks ja punktis A $x = a$ ning punktis B $x = b$, siis kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3. Olgu funktsioon $f(x, y)$ pidev siledal joonel AB . Siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3.5)$$

See teoreem järeldub vahetult teoreemist 1, sest kui sõltumatut muutujat x vaadelda parameetrina, saame ilmutatud kuju asemel kasutada parameetrilist esitusviisi

$$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases} ,$$

millest $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1$ ja $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = y'$.

Näide 1. Arvutame joonintegraali $\int_{AB} \frac{ds}{x - y}$, kus AB on koordinaattelgede vahele jääv sirge $y = 2x - 3$ lõik.

Sirge on ilmutatud kujul antud funktsiooni graafikuks, seega arvutamiseks kasutame valemit (3.5).

Lõikepunktis y -teljega on $x = 0$ ja lõikepunktis x -teljega on $y = 0$, st $x = \frac{3}{2}$. Valemi kasutamise jaoks leiame $y = 2$ ja $1 + y'^2 = 5$. Seega

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{ds}{x - y} &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5} dx}{x - (2x - 3)} = \sqrt{5} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3 - x} = -\sqrt{5} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d(3 - x)}{3 - x} \\ &= -\sqrt{5} \ln |3 - x| \Big|_0^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{5} \left(\ln \frac{3}{2} - \ln 3 \right) = -\sqrt{5} \ln \frac{1}{2} = \sqrt{5} \ln 2 \end{aligned}$$

Näide 2. Arvutame joonintegraali $\int_{AB} \sqrt{y} ds$, kus AB on tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ esimene kaar.

Tsükloid on tasandiline joon, mille esimene kaar moodustub, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. Valemi (3.3) rakendamiseks leiame $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$ ja $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t)$.

Valemi (3.3) järgi

$$\begin{aligned} \int_{AB} \sqrt{y} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 - \cos t)} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = \\ &= a\sqrt{2a} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = a\sqrt{2a} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a\sqrt{2a} \end{aligned}$$

Näide 3. Arvutame joonintegraali $\int_{AB} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$, kus AB on koonilise kruijoone $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ esimene kaar.

Koonilise kruijoone esimene kaar moodustub, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. Leiame $\dot{x} = \cos t - t \sin t$, $\dot{y} = \sin t + t \cos t$, $\dot{z} = 1$ ja

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1 = \\ &= \cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1 = 2 + t^2 \end{aligned}$$

Valemi (3.4) abik leiame

$$\begin{aligned} \int_{AB} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds &= \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{2 + t^2} dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{(2 + 4\pi^2)\sqrt{2 + 4\pi^2} - 2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

3.3 Teist liiki joonintegraal

Olgu AB tasandiline joon ja $\vec{F}$ jõuvektor, mis teeb tööd, liikudes trajektooriga AB . Seame eesmärgiks leida jõuvektori $\vec{F}$ poolt tehtav töö. Selleks jaotame joone AB suvaliste punktidega

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, \dots, P_n = B$$

osakaarteks $\widehat{P_{k-1}P_k}$, kus $k = 1, 2, \dots, n$ ja lähendame osakaari $\widehat{P_{k-1}P_k}$ vektoritega $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$.

Olgu punkti P_k koordinaadid x_k ja y_k , st $P_k(x_k; y_k)$. Tähistades

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

ja

$$\Delta y_x = y_k - y_{k-1},$$

on vektori koordinaadid

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k; \Delta y_k).$$

Vektori $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ pikkuse tähistame Δs_k , st

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

Jõuvektori suund ja suurus sõltuvad selle rakenduspunktist, st selle mõlemad koordinaadid on rakenduspunkti funktsioonid

$$\vec{F} = (X(x, y); Y(x, y))$$

Valime kaarel $\widehat{P_{k-1}P_k}$ suvalise punkti $Q_k(\xi_k; \eta_k)$ ja loeme osakaarel $\widehat{P_{k-1}P_k}$ jõuvektori konstantseks, st oletame, et jõuvektori pikkus ja suund on osakaarel võrdsed jõuvektori pikkuse ja suunaga punktis Q_k , st

$$\vec{F}_k = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$$

Mehhaanikast on teada, et kui jõud $\vec{F}_k$ liigub mööda vektorit $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ punktist P_{k-1} punkti P_k , siis selle jõu poolt tehtav töö A_k on võrdne vektorite $\vec{F}_k$ ja $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ skalaarkorrutisega, st

$$A_k = \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

Kogu töö, mida teeb jõuvektor $\vec{F}$, liikudes punktist A punkti B on ligikaudu võrdne summaga

$$\sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]. \quad (3.6)$$

Ligikaudu tehtud lähenduste tõttu: kaart $\widehat{P_{k-1}P_k}$ lähendasime vektoritega $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ ja muutuvat jõuvektorit $\vec{F} = (X(x, y); Y(x, y))$ konstantse vektoriga $\vec{F}_k = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$.

On ilmne, et mida tihedamalt võtta jaotuspunktid, seda täpsemalt lähendab vektor $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ osakaart $\widehat{P_{k-1}P_k}$ ja konstantne vektor $\vec{F}_k = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$ osakaarel muutuvat vektorit $\vec{F} = (X(x, y); Y(x, y))$

Definitsioon. Kui summast (3.6) $\exists$ piirväärtus piirprotsessis $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ ja see piirväärtus ei sõltu joone AB osakaarteks jaotamise viisist ega punktide Q_k valikust osakaartel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki joonintegraaliks* ehk *joonintegraaliks koordinaatide järgi* ja tähistatakse

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Definitsiooni kohaselt

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (3.7)$$

Kui AB on ruumiline joon, siis

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k; \Delta y_k; \Delta z_k),$$

selle vektori pikkus

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}$$

ja jõuvektori kolm koordinaati on rakenduspunkti funktsioonid

$$\vec{F} = (X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z))$$

Teist liiki joonintegraal defineeritakse piirväärtusena

$$\begin{aligned} & \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \\ &= \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k] \end{aligned}$$

Teist liiki joonintegraali definitsioonist järeldub vahetult kaks omadust. Lühiduse mõttes esitame need tasandilise joone korral, aga kehtivad need ka ruumilise joone puhul.

Omadus 1. Kui C on suvaline joonel AB asuv punkt, siis

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{AC} X(x, y)dx + Y(x, y)dy + \int_{CB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (3.8)$$

Põhjenduseks piisab märkida, et võttes teist liiki joonintegraali defineerides esimeseks joone AB jaotuspunktiks C ja edasi jätkates joone jaotamist suvalisel viisil, tekivad joonte AC ja CB suvalised jaotused osakaarteks. In-tegraalsumma üle joone AB on võrdne integraalsummade summaga üle joonte AC ja CB .

Omadus 2. Kui muuta teist liiki joonintegraalis joone läbimise suunda, siis märk integraali ees muutub vastupidiseks, st

$$\int_{BA} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = - \int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (3.9)$$

3.4 Teist liiki joonintegraali arvutamine

Olgu, et AB on tasandiline sile joon parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ja funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ pidevad joonel AB . Oletame, et punktis A on $t = \alpha$ ja punktis B on $t = \beta$.

Teoreem 1. Kui funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ on pidevad siledal joonel AB , siis

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))\dot{x} + Y(x(t), y(t))\dot{y}]dt \quad (3.10)$$

Olgu, et AB on ruumiline sile joon parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

ja funktsioonid $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ ja $Z(x, y, z)$ pidevad joonel AB . Olgu jälle punktis A parameeter $t = \alpha$ ja punktis B $t = \beta$.

Teoreem 2. Kui funktsioonid $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ ja $Z(x, y, z)$ on pidevad siledal joonel AB , siis

$$\begin{aligned} \int_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))\dot{x} + Y(x(t), y(t), z(t))\dot{y} + Z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}]dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kui joon AB on ilmutatud kujul esitatud funktsiooni $y = y(x)$ graafikuks ja punktis A $x = a$ ning punktis B $x = b$, siis vaadeldes muutujat x parameetrina, saame $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = y'$ ja valemist (3.10)

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y']dx \quad (3.12)$$

Kinniseks jooneks ehk *kinniseks kontuuriks* nimetatakse joont, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku. Kinniseks jooneks on näiteks ringjoon, ellips jne. Teist liiki joonintegraali üle kinnise kontuuri L tähistatakse

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

Kinnise kontuuri L läbimise positiivseks suunaks loetakse suunda, milles liikudes kontuuri poolt piiratud piirkond D jääb vasakule.

Näide 1. Arvutame $\int_{AB} x \cos y dx - y \sin x dy$ üle sirglõigu punktist $A(0; 0)$ punktini $B(\pi; 2\pi)$.

Sirge sihivektor on $\overrightarrow{AB} = (\pi; 2\pi)$ ja parameetrilised võrrandid

$$\begin{aligned}x &= \pi t \\y &= 2\pi t,\end{aligned}$$

kusjuures punktis A on $t = 0$ ja punktis B on $t = 1$. Valemi (3.10) rakendamiseks leiame veel $\dot{x} = \pi$ ja $\dot{y} = 2\pi$. Valemi järgi

$$\begin{aligned}\int_{AB} x \cos y dx - y \sin x dy &= \int_0^1 (\pi t \cos 2\pi t \cdot \pi - 2\pi t \sin \pi t \cdot 2\pi) dt \\&= \pi^2 \int_0^1 [t(\cos 2\pi t - 4 \sin \pi t)] dt = \dots\end{aligned}$$

Saadud integraali integreerime ositi, võttes

$$u = t, \quad dv = \cos 2\pi t - 4 \sin \pi t$$

Siis

$$du = dt, \quad v = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{4}{\pi} \cos \pi t$$

ning

$$\begin{aligned}\dots &= \pi^2 \left[t \left(\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{4}{\pi} \cos \pi t \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{4}{\pi} \cos \pi t \right) dt \right] \\&= \pi^2 \left[-\frac{4}{\pi} + \left(\frac{1}{4\pi^2} \cos 2\pi t - \frac{4}{\pi^2} \sin \pi t \right) \Big|_0^1 \right] = -4\pi\end{aligned}$$

Näide 2. Arvutame $\oint_L (x^2 + y) dx + xy dy$, kus L on kolmnurga OAB

kontuur, mis läbitakse positiivses suunas ning kolmnurga tipud on $O(0; 0)$, $A(2; 1)$ ja $B(0; 1)$.

Omaduse 1 tõttu

$$\oint_L (x^2 + y) dx + xy dy = \int_{OA} (x^2 + y) dx + xy dy + \int_{AB} (x^2 + y) dx + xy dy + \int_{BO} (x^2 + y) dx + xy dy,$$

siinjuures omaduse 2 põhjal on oluline integreerimise suund. Vaatleme kolme tekkinud joonintegraali eraldi. Kolmnurga külje OA võrrand on $y = \frac{x}{2}$ ja $0 \leq x \leq 2$ ning $y' = \frac{1}{2}$. Valemi (3.12) põhjal

$$\int_{OA} (x^2 + y)dx + xydy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) dx$$

Külje AB võrrand on $y = 1$, st $y' = 0$. Alguspunktis A $x = 2$ ja lõpppunktis B $x = 0$. Seega (3.12) järgi

$$\int_{AB} (x^2 + y)dx + xydy = \int_2^0 (x^2 + 1 + x \cdot 1 \cdot 0)dx = \int_2^0 (x^2 + 1)dx$$

Selleks, et kasutada valemit (3.12) kolmanda liidetava arvutamiseks, peame selles vahetama x ja y rollid, st vaatlema joont kui funktsiooni $x = g(y)$ graafikut. Kui joonel AB argument y muutub väärtusest a väärtuseni b , siis

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b [X(x(y), y)x' + Y(x(y), y)]dy \quad (3.13)$$

Külje BO võrrand on $x = 0$, seega ka $x' = 0$ ja

$$\int_{BO} (x^2 + y)dx + xydy = \int_1^0 [(0 + y) \cdot 0 + 0 \cdot y]dy = 0$$

Seega

$$\oint_L (x^2 + y)dx + xydy = \int_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) dx + \int_2^0 (x^2 + 1)dx$$

Vahetades viimases integraalis rajad, saame

$$\begin{aligned} \oint_L (x^2 + y)dx + xydy &= \int_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2} - x^2 - 1 \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx = \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - x \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 1 - 2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3.5 Greeni valem

Greeni valem seob teist liiki joonintegraali üle kinnise joone kahekordse integraaliga üle selle joone poolt piiratud piirkonna. Olgu kinnisel kontuuril L ja sellega piiratud piirkonnas D määratud kaks kahe muutuja funktsiooni $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$.

Teoreem (Greeni valem). Kui funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ on pidevad kinnisel siledal joonel L , osatuletised $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ja $\frac{\partial X}{\partial y}$ on pidevad joonega L piiratud regulaarses piirkonnas D ning L läbitakse positiivses suunas, siis

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy \quad (3.14)$$

Näide. Arvutame eelmise punkti näites 2 toodud joonintegraali

$$\oint_L (x^2 + y)dx + xydy$$

Greeni valemi abil.

Siin $X(x, y) = x^2 + y$ ja $Y(x, y) = xy$. Greeni valemi (3.14) rakendamiseks leiame $\frac{\partial Y}{\partial x} = y$ ja $\frac{\partial X}{\partial y} = 1$. Tähistagu D kontuuri L poolt piiratud piirkonda. Valemi (3.14) järgi

$$\oint_L (x^2 + y)dx + xydy = \iint_D (y - 1)dxdy$$

Piirkond D määratud tingimustega $0 \leq x \leq 2$ ja $\frac{x}{2} \leq y \leq 1$. Kahekordse integraali arvutusvalemi põhjal

$$\oint_L (x^2 + y)dx + xydy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)dy$$

Leiame seesmise integraali

$$\int_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)dy = \int_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)d(y - 1) = \frac{(y - 1)^2}{2} \Big|_{\frac{x}{2}}^1 = -\frac{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}{2} = -\frac{(x - 2)^2}{8}$$

ning seejärel

$$\int_0^2 \left[-\frac{(x - 2)^2}{8} \right] dx = -\frac{1}{8} \int_0^2 (x - 2)^2 d(x - 2) = -\frac{1}{8} \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{8} \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

3.6 Joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimus

Selles punktis uurime, millistel tingimustel joonintegraal

$$\int_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (3.15)$$

sõltub ainult punktide A ja B asukohast tasandil, mitte aga neid ühendavast joonest.

Eeldame, et D on punkte A ja B sisaldav piirkond, milles funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ ning osatuletised $\frac{\partial X}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Y}{\partial x}$ on pidevad. Valime piirkonnas D kaks täiesti suvalist punkte A ja B ühendavat joont AEB ja AFB .

Püstatud eesmärgi kohaselt

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy = \int_{AFB} Xdx + Ydy$$

st

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy - \int_{AFB} Xdx + Ydy = 0$$

Teist liiki joonintegraali teise omaduse põhjal

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy + \int_{BFA} Xdx + Ydy = 0$$

ja esimese omaduse põhjal

$$\int_{AEBFA} Xdx + Ydy = 0$$

Tähistades kinnise joone $AEBFA = L$, saame tingimuseks

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0 \quad (3.16)$$

Sellise tingimuseni jõuame ükskõik milliste punktide A ja B ühendavate joonte, st mistahes punktide A ja B läbiva kinnise joone korral, aga samuti ka

erinevate punktide A ja B valimisel piirkonnas D . Edaspidi nimetame punkte A ja B ühendavat joont *integreerimisteks*.

Järelikult, kui joonintegraal (3.15) ei sõltu integreerimistest, siis mistahes piirkonnas D valitud kinnise kontuuri L korral kehtib tingimus (4.7).

Formuleerime teoreemi.

Teoreem 1. Joonintegraal (3.15) on piirkonnas D integreerimistest sõltumatu parajasti siis, kui mistahes piirkonnas D valitud kinnise joone korral kehtib tingimus (4.7).

Oletame, et mistahes piirkonnas D valitud kinnise joone L korral on täidetud (4.7). Punkti alguses tehtud eeldustel kehtib Greeni valem. Kui Δ tähistab kinnise kontuuri L poolt piiratud piirkonda, siis (3.14) põhjal

$$\iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Sellisel juhul ka integreeritav funtsioon

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

ehk

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad (3.17)$$

Teoreemist 1 järeldub.

Teoreem 2. Joonintegraal (3.15) on piirkonnas D integreerimistest sõltumatu parajasti siis, kui piirkonnas D on täidetud tingimus (3.17).

Joonintegraali (3.15) tähistatakse ka

$$\int_A^B X dx + Y dy$$

Näide 1. Joonintegraal

$$\int_A^B (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$$

on integreerimistest sõltumatu, sest

$$\frac{\partial}{\partial x} (2y \cos x - x^2 \sin y) = -2y \sin x - 2x \sin y$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial y} (2x \cos y - y^2 \sin x) = -2x \sin y - 2y \sin x,$$

st on täidetud (3.17).

Näide 2. Arvutame

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$$

Joonintegraal on integreerimisteest sõltumatu, sest

$$\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$$

ja

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$$

Arvutamiseks võime seega valida mis tahes punkte $(0;0)$ ja $(2;1)$ ühendava joone. Valime selleks murdjoone OBA , kus $O(0,0)$, $B(2;0)$ ja $A(2;1)$.

Teist liiki joonintegraali omaduse 1 põhjal

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = \int_{(0,0)}^{(2,0)} 2xydx + x^2dy + \int_{(2,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$$

Sirge OB võrrand on $y = 0$, sellest ka $y' = 0$. Lõigul OB $0 \leq x \leq 2$ ja (3.12) järgi

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} 2xydx + x^2dy = \int_0^2 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)dx = 0$$

Sirge BA võrrand on $x = 2$, st $x' = 0$. Lõigul BA $0 \leq y \leq 1$ ja (3.13) põhjal

$$\int_{(2,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (4y \cdot 0 + 4)dy = 4$$

Seega

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = 4$$

On võimalik näidata, et kui piirkonnas D on täidetud tingimus (3.17), siis eksisteerib kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, mille täisdiferentsiaal

$$du = Xdx + Ydy$$

Järeldus. Joonintegraal (3.15) on integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui eksisteerib kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, mille täisdiferentsiaaliks on avaldis $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$.

Asjaolu, et $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ on kahemuutuja funktsiooni $u(x, y)$ täisdiferentsiaaliks tähendab, et

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ja} \quad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

st vektorväli

$$(X(x, y); Y(x, y)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

on skalaarvälja $u = u(x, y)$ gradiendiks.

Definitsioon. Vektorvälja $\vec{F} = (X(x, y); Y(x, y))$, mis on mingi skalaarvälja $u(x, y)$ gradiendiks, nimetatakse *konservatiivseks vektorväljaks* ja funktsiooni $u(x, y)$ selle vektorvälja *potentsiaaliks*.

Järeldus 1. Konservatiivse vektorvälja korral joonintegraal (3.15) on integreerimisteest sõltumatu.

Järeldus 2. Konservatiivse vektorvälja korral joonintegraal (3.15) üle mis tahes kinnise kontuuri võrdub 0-ga.

Järeldus 3. Kui $\vec{F} = (X(x, y); Y(x, y))$ on konservatiivne vektorväli ja $u(x, y)$ selle potentsiaal, siis

$$\int_A^B X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_A^B du(x, y) = u(x, y) \Big|_A^B$$

3.7 Esimest liiki pindintegraal

Olgu xyz -teljestikus antud pind S ja sellel määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$.

Jaotame pinna S suvalisel viisil n osapinnaks $\Delta\sigma_k$ ($1 \leq k \leq n$), kusjuures $\Delta\sigma_k$ tähistab nii k -ndat osapinda kui ka selle pindala.

Valime igal osapinnal suvalise punkti $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \in \Delta\sigma_k$ ja moodustame korrutised

$$f(P_k)\Delta\sigma_k$$

ning nendest summa

$$\sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta\sigma_k$$

Osapinna diameetriks $\text{diam } \Delta\sigma_k$ nimetatakse osapinna punktide vahelist suurimat kaugust ja suurima nendest kaugustest tähistame

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta\sigma_k$$

Definitsioon 1. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta\sigma_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas pind S on jaotatud osapindadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *esimest liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna pindala järgi* ja tähistatakse

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma$$

Seega definitsiooni 1 kohaselt

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\sigma_k$$

Esimest liiki pindintegraalil on analoogilised omadused senini vaadeldud integraalidega.

Omadus 1. Funktsioonide summa (vahe) esimest liiki pindintegraal võrdub nende funktsioonide esimest liiki pindintegraalide summaga (vahega).

Omadus 2. Konstantse teguri saab tuua esimest liiki pindintegraali ette.

Omadus 3. Kui pind S koosneb kahest pinnast S_1 ja S_2 nii, et pindadel S_1 ja S_2 ei ole ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{S_2} f(x, y, z) d\sigma$$

Olgu pind S kahe muutuja funktsiooni $z = z(x, y)$ graafikuks. Tähistame pinna S projektsiooni xy -tasandil D . Pinda S nimetatakse *siledaks*, kui funktsioonil $z(x, y)$ eksisteerivad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Järgnev teoreem annab esimest liiki pindintegraali arvutuseeskirja kahekordse integraali abil.

Teoreem. Kui funktsioon $f(x, y, z)$ on pidev siledal pinnal S ja D on S projektsioon xy -tasandil, siis

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (3.18)$$

Juhul, kui pinnal S määratud funktsioon $f(x, y, z) \equiv 1$, siis valemi

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (3.19)$$

abil arvutatakse pinna S pindala.

Näide 1. Arvutame $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$, kui S on koonuse $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

osa, kus $0 \leq z \leq 1$.

Tasand $z = 1$ ja koonus $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ lõikuvad mööda ringjoont

$$x^2 + y^2 = 1$$

Seega antud koonuse osa projektsioon xy -tasandil on ring $x^2 + y^2 \leq 1$.

Valemi (3.18) kasutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ja

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

ning seejärel valemi (3.18) järgi

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Saadud kahekordses integraalis on intergeerimispiirkonnaks D ring. Seepärast arvutamiseks teisendame kahekordse integraali polaarkoordinaatidesse $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, mille korral $x^2 + y^2 = \rho^2$ ja $|J| = \rho$.

Integreerimispiirkond on polaarkoordinaatides on määratud tingimustega $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ja $0 \leq \rho \leq 1$. Seega

$$2\sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho$$

Seesmine integraal

$$\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}$$

ja lõpuks väline integraal

$$2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi\sqrt{2}$$

Näide 2. Arvutame pöördparaboloidi $z = x^2 + y^2$ selle osa pindala, mis jääb tasandist $z = 4$ allapoole.

Pöördparaboloidi projektsioon xy -tasandil D on ring $x^2 + y^2 \leq 4$, mille raadius on 2. Valemi (3.19) kasutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

ja

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

Seega valemi (3.19) põhjal on pöördparaboloidi vaadeldava osa pindala

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

Saadud kahekordse integraali teisendame polaarkoordinaatidesse $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, mille korral $1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4\rho^2$ ja $|J| = \rho$ ja piirkonnas D $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ning $0 \leq \rho \leq 2$. Seega

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho$$

Seemise integraali arvutamiseks kasutame diferentsiaali alla viimist. Vorduse $d(1 + 4\rho^2) = 8\rho d\rho$ tõttu

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho &= \frac{1}{8} \int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} 8\rho d\rho \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 (1 + 4\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4\rho^2) = \frac{1}{8} \frac{(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{12} (1 + 4\rho^2) \sqrt{1 + 4\rho^2} \Big|_0^2 = \frac{17\sqrt{17} - 1}{12} \end{aligned}$$

Väline integraal, st arvutatav pindala on seega

$$\frac{17\sqrt{17} - 1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{17\sqrt{17} - 1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{6}$$

3.8 Teist liiki pindintegraal

Olgu ruumis pind σ , millel on määratud kolme muutuja funktsioon $Z(x, y, z)$. Jaotame pinna σ suvalisel viisil n osapinnaks $\Delta\sigma_k$ ($1 \leq k \leq n$). Igal osapinnal valime suvalise punkti $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ ning leiame funktsiooni väärtuse $Z(P_k)$. Tähistame pinnatüki $\Delta\sigma_k$ projektsiooni xy -tasandil Δs_k , kusjuures Δs_k tähistab ka selle projektsiooni pindala. Edasi moodustame korrutised $Z(P_k)\Delta s_k$. Kõiki neid korrutisi kokku liites saame summa

$$\sum_{k=1}^n Z(P_k)\Delta s_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $Z(x, y, z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni xy -tasandil. Olgu projektsiooni Δs_k diameeter $\text{diam } \Delta s_k$. Pinna σ jaotus osapiirkondadeks $\Delta\sigma_k$ on suvaline, seega on need erinevad ja erineva diameetriga on ka nende projektsioonid Δs_k xy -tasandil. Projektsioonide suurimat diameetrit tähistame λ , st

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta s_k$$

Definitsioon 1. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Z(P_k)\Delta s_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi xy -tasandil* ja tähistatakse

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Z(P_k)\Delta s_k \quad (3.20)$$

Teiseks. Olgu pinnal σ määratud kolme muutuja funktsioon $Y(x, y, z)$ ja olgu osapinna $\Delta\sigma_k$ projektsioon xz -tasandil $\Delta s'_k$. Valides jälle suvalise punkti $P_k \in \Delta\sigma_k$, saame moodustada korrutised $Y(P_k)\Delta s'_k$ ja nendest summa

$$\sum_{k=1}^n Y(P_k)\Delta s'_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $Y(x, y, z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni xz -tasandil.

Definitsioon 2. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Y(P_k) \Delta s'_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi xz -tasandil* ja tähistatakse

$$\iint_{\sigma} Y(x, y, z) dx dz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_{\sigma} Y(x, y, z) dx dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Y(P_k) \Delta s'_k \quad (3.21)$$

Kolmandaks. Olgu pinnal σ määratud kolme muutuja funktsioon $X(x, y, z)$ ja olgu osapinna $\Delta\sigma_k$ projektsioon yz -tasandil $\Delta s''_k$. Valides taas suvalise punkti $P_k \in \Delta\sigma_k$, saame moodustada korrutised $X(P_k) \Delta s''_k$ ja nendest summa

$$\sum_{k=1}^n X(P_k) \Delta s''_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $X(x, y, z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni yz -tasandil.

Definitsioon 2. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(P_k) \Delta s''_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi yz -tasandil* ja tähistatakse

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dy dz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(P_k) \Delta s''_k \quad (3.22)$$

Kõige üldisemal kujul saame vektorfunktsiooni

$$\vec{F}(x, y, z) = (X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z))$$

korral defineerida teist liiki pindintegraali ehk pindintegraali pinna projektsiooni järgi

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy \quad (3.23)$$

3.9 Teist liiki pindintegraali arvutamine

Vaatleme teist liiki pindintegraali

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy$$

arvutamist. Selleks oletame, et pind σ on kahe muutja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks. Eeldame, et $z = f(x, y)$ on ühene ja pidev ning omab pidevaid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ühesuse tõttu lõikab iga z -teljega paralleelne sirge pinda täpselt ühes punktis.

Definitsioon 1. Ruumis antud pinda nimetatakse *kahe poolega pinnaks*, kui pinna normaal, liikudes mis tahes mööda pinnal asuvat rajajoonega mitte lõikuvat kinnist kontuuri, säilitab lähtepunkti jõudes oma suuna.

Kahe poolega pinna puhul eristame pinna alumist ja ülemist poolt. Pinna ülemisks pooleks nimetatakse poolt, kus pinna normaal moodustab z -telje positiivse suunaga teravnurga α ja alumiseks poolt, kus pinna normaal moodustab z -telje positiivse suunaga nürinurga $\beta = 180^\circ - \alpha$.

Teist liiki pindintegraali arvutamine sõltub sellest, üle kumma pinna poole integraali arvutatakse. Kui $Z(x, y, z)$ on pidev siledal pinnal $z = f(x, y)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y)) dx dy \quad (3.24)$$

abil. Sealjuures kahekordse integraali ette valitakse "+", kui integreeritakse üle pinna ülemise poole ja "-", kui integreeritakse üle pinna alumise poole. Seega probleemi püstitusel peab olema teada, üle kumma pinnapoole teist liiki pindintegraal tuleb arvutada. Valemis tähistab D pinna σ projektsiooni xy -tasandil.

Kui $Y(x, y, z)$ on pidev siledal pinnal $y = g(x, z)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint_{\sigma} Y(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D'} Y(x, g(x, z), z) dx dz \quad (3.25)$$

abil. Valemis D' tähistab pinna σ projektsiooni xz -tasandil ja märk $+$ või $-$ valitakse selle järgi, kas teist liiki pindintegraali arvutatakse üle pinna ülemise või alumise poole (st kas pinna normaal moodustab y -telje positiivse suunaga terav- või nürinurga).

Kui $X(x, y, z)$ on pidev siledal pinnal $x = h(y, z)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D''} X(h(y, z), y, z) dy dz \quad (3.26)$$

abil. Siin D'' tähistab pinna σ projektsiooni yz -tasandil ja märk $+$ või $-$ valitakse selle järgi, kas teist liiki pindintegraali arvutatakse üle pinna ülemise või alumise poole (st kas pinna normaal moodustab x -telje positiivse suunaga terav- või nürinurga).

Näide. Arvutame teist liiki pindintegraali

$$\iint_{\sigma} z^2 dx dy$$

kus σ on koonuse $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ selle osa ülemine pool, mis jääb tasandist $z = 1$ allapoole.

Vaadeldava koonuse osa projektsioon D xy -tasandil on ring $x^2 + y^2 \leq 1$. Seega valemi (3.24) järgi

$$\iint_{\sigma} z^2 dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Et integreerimispiirkonnaks on ring, siis kahekordse integraali arvutamiseks teisendame selle polaarkoordinaatidesse. Ringis $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ja $0 \leq \rho \leq 1$, seega

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho$$

Seesmine integraal

$$\int_0^1 \rho^3 d\rho = \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

ja väline

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

4 Read

4.1 Rida. Rea summa

Reaks nimetatakse lõpmatut summat

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (4.1)$$

Liidetavaid selles summas nimetatakse rea liikmeteks ja liiget u_k rea *üldliikmeks*. Üldliikmest saame indeksile k väärtusi andes konkreetseid liikmed.

Kui rea liikmed on reaalarvud, nimetatakse rida *arvreaks*. Kui aga liikmed on muutuja x funktsioonid, st $u_k = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, nimetatakse rida *funktsionaalreaks*. Esmalt vaatleme arvridu.

Tuntumad arvread on geomeetriline rida

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_1q^k \quad (4.2)$$

ja harmooniline rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (4.3)$$

Rea n -ndaks osasummaks S_n nimetatakse esimese n liikme summat, st

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Osasummadest

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

.....

tekib rea osasummade jada

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (4.4)$$

Definitsioon. Rida (4.1) nimetatakse *koonduvaks*, kui osasummade jadal (4.4) on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Seda piirväärtust S nimetatakse rea *summaks* ja kirjutatakse

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Kui osasummade jadal (4.4) piirväärtust ei eksisteeri või piirväärtus on lõpmatu, nimetatakse rida (4.1) *hajuvaks*.

Lõpliku arvu liikmete ärajätmine rea algusest ei mõjuta selle koonduvust. Kui koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

siis iga fikseeritud n väärtuse korral koondub ka

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

ja vastupidi.

Näide 1. Geomeetrilise rea (4.2) n -is osasumma on

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

ja kui tegur $|q| < 1$, siis

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

sest tingimuse $|q| < 1$ tõttu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Tulemus tähendab, et kui geomeetrilise rea tegur $|q| < 1$, siis on see rida koonduv ja selle summa

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Näide 2. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

osasummade jada üldliikme S_n leidmiseks kasutame osamurdudeks lahtutust

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

mille põhjal

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Rea summa

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Näide 3. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots$$

osasummade jada paarisarvuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n} = 0,$$

sest nendes osasummades on liidetavaid 1 ja -1 võrdselt. Osasummade jada paarituuravuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n-1} = 1$$

sest liidetavaid 1 on ühe võrra rohkem. Järelikult osasummade jadal

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

piirväärtus puudub, st rida on hajuv.

4.2 Rea koonduvuseks tarvilik tingimus

Oletame, et rida (4.1) koondub ja selle summa on S , st

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Kirjutades n -ndas osasummas viimase liikme eraldi, saame

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n$$

ehk

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

millest

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Eelduse kohaselt rida koondub, järelikult

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Sellega oleme saanud olulise tulemuse, nn *rea koonduvuseks tarviliku tingimuse*.

Teoreem 1. Kui rida (4.1) koondub, siis rea üldliikme piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \tag{4.5}$$

Tarvilik on see tingimus selle tõttu, et ilma selle tingimuse täidetusega rida koonduda ei saa.

Elmise punkti näites 3 vaadeldud rida on ka selle tingimuse järgi hajuv, sest üldliikme $u_k = (-1)^{k+1}$ piirväärtus piirprotsessis $k \rightarrow \infty$ puudub.

Tuleb rõhutada, et tingimus (4.5) on rea koonduvuseks tarvilik, aga mitte piisav, st selle täidetusest ei järeldu rea koonduvus. Näiteks harmoonilise rea (4.3) korral on koonduvuseks tarvilik tingimus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

täidetud, kuid ometi, nagu hiljem selgub, on harmooniline rida on hajuv.

4.3 Positiivsete liikmetega ridade koonduvustunnused

Käesolevas punktis vaatleme positiivsete liikmetega arvridu, st ridu (4.1), mille liikmed

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Olgu lisaks reale (4.1) antud veel teine positiivsete liikmetega arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{4.6}$$

Matemaatiline analüüs I kursuses esines teoreem, millest järeldub, et monotoonselt kasvaval tõkestatud jadad on olemas (lõplik) piirväärtus. Kehtib ka vastupidine, jada

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

piirväärtus on definitsiooni kohaselt S , kui $\forall \varepsilon > 0$ korral $\exists N$, et kui $n \geq N$, siis

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$-\varepsilon < S_n - S < \varepsilon$$

ehk

$$S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon,$$

st vaadeldav jada on tõkestatud. Seega kehtib.

Teoreem 1. Monotoonselt kasvaval jadad on lõplik piirväärtus parajasti siis, kui jada on tõkestatud.

Positiivsete liikmetega arvridade osasummade jadad on kasvavad, sest $S_n = S_{n-1} + u_n$ ja et $u_n > 0$, siis $S_n > S_{n-1}$.

Teoreem 2 (võrdlustunnus). Kui alates indeksist k_0 , st $k \geq k_0$ korral on täidetud tingimus

$$u_k \leq v_k, \tag{4.7}$$

siis

- 1) rea (4.6) koonduvusest järeldub rea (4.1) koonduvus ja
- 2) rea (4.1) hajuvusest järeldub rea (4.6) hajuvus.

Näide 1. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

koondub.

Punkti 8.1 näites 2 tõestasime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$$

koonduvuse. Iga $k = 2, 3, \dots$ korral kehtiva võrratuse

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

tõttu järeldub teoreemist 2 vaadeldava rea koonduvus.

Näide 2. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

hajub.

Iga $k > 1$ korral $\sqrt{k} < k$ ehk

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

Harmoniline rida (4.3) hajub, seega teoreemi 2 põhjal hajub ka vaadeldav rida.

Teoreem 3 (D'Alemberti tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = D$$

Kui $D < 1$, siis rida (4.1) koondub.

Kui $D > 1$, siis rida (4.1) hajub. Kui $D = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Teoreem 4 (Cauchy tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = C$$

Kui $C < 1$, siis rida (4.1) koondub.

Kui $C > 1$, siis rida (4.1) hajub.

Kui $C = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Näide 3. Uurime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

koonduvust.

Kõigepealt kasutame koonduvuse uurimiseks D'Alemberti tunnust. Üldliige $u_k = \frac{k^2}{2^k}$, seega

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} : \frac{k^2}{2^k} = \frac{(1 + \frac{1}{k})^2}{2}$$

ja

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Tulemusest $D = \frac{1}{2} < 1$ järeldame, et rida koondub.

Uurime sama rea koonduvust ka Cauchy tunnuse abil. Selleks leiame $\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2}$ ja arvutame piirväärtuse

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{2}{k}}$$

Tegemist on ∞^0 tüüpi määramatusega, seega piirväärtuse arvutamiseks kasutame L'Hospitali reeglit ja leiame

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \ln k^{\frac{2}{k}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} \ln k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln k)'}{k'} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} = 0 \end{aligned}$$

ja

$$C = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} < 1$$

Sellega on vaadeldava rea koonduvus tõestatud ka Cauchy tunnuse abil.

Teoreem 5 (integraaltunnus). Olgu $u(x)$ poollõigul $[1; \infty)$ monotoonselt kahanev funktsioon, mille väärtusteks täisarvuliste argumentide korral on rea (4.1) liikmed, st $u(k) = u_k$.

Kui päratu integraal $\int_1^{\infty} u(x) dx$ koondub, siis koondub ka (4.1).

Kui päratu integraal $\int_1^{\infty} u(x) dx$ hajub, siis hajub ka (4.1).

Näide 4. Uurime harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

koonduvust.

Integraaltunnuse kasutamiseks vaatleme funktsiooni $u(x) = \frac{1}{x}$, sest sel juhul

$$u_k = u(k) = \frac{1}{k}$$

Arvutame päratu integraali

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N = \infty \end{aligned}$$

Päratu integraal hajub. Integraaltunnuse põhjal hajub ka harmooniline rida.

4.4 Vahelduvate märkidega read. Leibnizi tunnus

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k, \quad (4.8)$$

kus $u_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Teoreem 1. (Leibnizi tunnus) Kui

1) $u_k > u_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ ja

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$, siis vahelduvate märkidega rida (4.8) koondub.

Näide. Rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

rahuldab mõlemat teoreemi 1 eeldust, sest

$$1 > \frac{1}{2} > \dots > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} > \dots$$

ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ ning järelikult on koonduv.

4.5 Muutuvate märkidega read. Absoluutne ja tingimisi koonduvus

Selles punktis loobume eeldusest, et rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (4.9)$$

liikmed on positiivsed. Märkide jaotus reas võib olla ükskõik missugune. Nii-sugust rida nimetatakse *muutuvate märkidega reaks*. Vahelduvate märkidega rida on muutuvate märkidega rea erijuht.

Definitsioon. Rida (4.9) nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub rida

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

Teoreem 1. Rea (4.9) absoluutsest koonduvusest järeldub selle koonduvus.

Tõestus. Absoluutväärtuse definitsiooni

$$|u_k| = \begin{cases} u_k, & \text{if } u_k \geq 0 \\ -u_k, & \text{if } u_k < 0 \end{cases}$$

põhjal

$$0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$$

Eeldasime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

koonduvust, kuid siis koondub ka rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2|u_k| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

Võrdlustunnuse põhjal koondub ka rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k|)$$

Järelikult rida (4.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k| - |u_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

on kahe koonduva rea (mille summad on lõplikud arvud) vahe, mis samuti on koonduv (lõpki summa).

Teoreemi 1 järgi rea absoluutsest koonduvusest järeldub alati selle koonduvus. Vastupidine väide ei kehti. Rida võib olla koonduv, kuid mitte absoluutselt. Eelmise punkti näites vaadeldud vahelduvate märkidega rida on koonduv, kuid absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

on harmooniline rida, mis hajub.

Definitsioon. Koonduvat rida, mis absoluutselt ei koonu, nimetatakse *tingimisi koonduvaks* reaks.

Eeltoodut arvesse võttes saame öelda, et eelmise punkti näites vaadeldud rida on tingimisi koonduv rida.

Kui positiivsete liikmetega rea koonduvus ehk muutuvate märkidega rea absoluutne koonduvus leiab aset liikmete piisavalt kiire kahanemise tõttu, siis tingimisi koonduvus leiab aset selle tõttu, et rea erinevate märkidega liikmed koondavad üksteist.

4.6 Funktsionaalread

Funktsionaalreaks nimetatakse rida, mille liikmed on funktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (4.10)$$

Kui fikseerida argumendi x väärtus x_0 , omandavad funktsioonid $u_k(x)$ kindlad arvulised väärtused $u_k(x_0)$, st väärtuse x_0 korral saame reast (4.10) arvrea.

Näide. Vaatleme funktsionaalrida

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (4.11)$$

Andes selles reas muutujale x väärtuse $x = \frac{1}{2}$, saame geomeetrilise rea,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

mille tegur on $\frac{1}{2}$ ja seega koondub.

Andes reas (4.11) muutujale x väärtuse $x = 1$, saame arvrea

$$1 + 1 + 1 + \dots,$$

st arvrea, mille üldliikme piirväärtus on 1, st ei ole 0. Rea koonduvuseks tarvilik tingimus pole täidetud, seega rida hajub hajub.

Andes reas (4.11) muutujale x väärtuse $x = -1$, saame arvrea

$$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^k + \dots$$

mis hajub, sest üldliikmel piirväärtus puudub, so koonduvuseks tarvilik tingimus pole jälle täidetud.

Andes reas (4.11) muutujale x väärtuse $x > 1$, saame arvrea, mille üldliikme

$$u_k(x) = x^k$$

piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \infty$$

Andes reas (4.11) muutujale x väärtuse $x < -1$, saame arvrea, mille üldliikme piirväärtus puudub.

Seega ilmneb, et on muutuja x väärtusi, mille korral funktsionaalrida koondub ja on väärtusi, mille korral funktsionaalrida hajub.

Rea (4.10) osasummad

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

on samuti muutuja x funktsioonid, mis moodustavad funktsionaaljada

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (4.12)$$

Definitsioon. Argumendi x väärtuste hulka X , mille korral osasummade jada (4.12) koondub, st $\exists$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad (4.13)$$

nimetatakse funktsionaalrea (4.10) koonduvuspiirkonnaks.

Sellisel juhul öeldakse, et $S(x)$ on funktsionaalrea (4.10) summa ja kirjutatakse

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Viimase võrduse asemel võime kirjutada

$$S(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Summas esinevat teist liiget

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

nimetatakse funktsionaalrea jääkliikmeks ja rea summa

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

4.7 Astmeread

Astmereaks nimetatakse funktsionaalrida, mille liikmed on astmefunktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \quad (4.14)$$

või üldisemalt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - a)^k \quad (4.15)$$

Nende ridade omaduste uurimine on sarnane, seepärast piirdume ridadega (4.14).

Näide 1. Rida

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

on iga x väärtuse korral geomeetriline rida, mis koondub, kui $|x| < 1$. Nagu eelmises punktis kindlaks tegime, on selle rea koonduvuspiirkonnaks vahemik $X = (-1; 1)$ ning rea summa selles vahemikus

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \quad (4.16)$$

Selgub, et astmeridade koonduvuspiirkonnad ongi sellise lihtsa struktuuriga.

Teoreem 1 (Abeli teoreem). Kui astmerida (4.14) koondub agumendi väärtuse x_0 korral, siis koondub see rida absoluutselt iga tingimust $|x| < |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Vastupidi, kui astmerida (4.14) hajub agumendi väärtuse x_0 korral, siis hajub see ka iga tingimust $|x| > |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Abeli teoreemi tõttu eksisteerib selline reaalarv R , et $|x| < R$ korral rida (4.14) koondub ja $|x| > R$ korral (4.14) hajub. Sellist reaalarvu R nimetatakse rea (4.14) *koonduvusraadiuseks* ja vahemikku $(-R; R)$ selle rea *koonduvusvahemikuks*.

Märkus. Koonduvusvahemiku otspunktides, st $x = R$ ja $x = -R$ korral tuleb rea (4.14) koonduvust eraldi uurida. Allpool esitatavas näites veendume, et koonduvusvahemiku otspunktides võib rida olla hajuv, tingimisi koonduv või absoluutselt koonduv.

Ühe võimalus leida koonduvusraadiust R on valem

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \quad (4.17)$$

Näide. Leiame ridade $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ koonduvuspiirkonnad.

Kõigi kolme rea koonduvusraadiused võrduvad 1-ga, sest esimesel real $c_k = 1$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

teisel real $c_k = \frac{1}{k}$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

kolmandal $c_k = \frac{1}{k^2}$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Seega on kõigi kolme rea koonduvusvahemikud $(-1; 1)$.

Esimese rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $1^k = 1$, selle piirväärtus on $1 \neq 0$, st rida hajub. Vasakpoolses otspunktis on üldliige $(-1)^k$, millel puudub piirväärtus, kui $k \rightarrow \infty$, st rida hajub ning esimese rea koonduvuspiirkond on vahemik $(-1; 1)$

Teise rea üldliige on koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis $\frac{1}{k}$, st teine rida on parempoolses otspunktis harmooniline rida, mis hajub. Vasakpoolses otspunktis on teise rea üldliige $\frac{(-1)^k}{k}$, st teine rida on vasakpoolses otspunktis vahelduvate märkidega rida, mis Leibnizi tunnuse põhjal koondub. Niisiis on teise rea koonduvuspiirkond poollõik $[-1; 1)$

Kolmanda rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $\frac{1}{k^2}$ ja vasakpoolses otspunktis $\frac{(-1)^k}{k^2}$, mõlema absoluutväärtused $\frac{1}{k^2}$. Punkti

8.3 näite 1 põhjal rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ koondub, seega kolmas rida koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis koondub ja vasakpoolses otspunktis koondub absoluutselt, st kolmanda rea koonduvuspiirkond on lõik $[-1; 1]$

Järgnevalt esitame kolm olulist asttmeridu käsitlevat teoreemi.

Teoreem 1. Astmerea (4.14) koonduvusraadiusedga R summa on pidev igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Teoreem 2. Astmerida (4.14) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti integreerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Teoreem 3. Astmerida (4.14) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti diferentseerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Toetudes geomeetrilise rea (4.16) summale ning järeldustele 2 ja 3, saame leida paljude funktsioonide arendusi astmereaks.

Näide 1. Korrutades võrduse (4.16) mõlemat poolt teguriga x , saame rea

$$\frac{x}{1-x} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$$

mille koonduvusraadius on endiselt 1. On lihtne kontrollida, et

$$\left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Kasutades liikmeti diferentseerimist, saame selle tuletise astmerea

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1})' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

ja saadud rea koonduvusraadius on ikka 1.

Näide 2. Asendades võrduses (4.16) muutuja x muutujaga $-x^2$, saame

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

ning see rida koondub kui $|-x^2| < 1$, mis on võrdväärne tingimusega $|x| < 1$.

Arvestades seda, et

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

saame funktsiooni $\arctan x$ arenduse astmereaks integreerides viimast rida liikmeti lõigul $[0; x]$ eeldusel $|x| < 1$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Saadud rea koonduvusraadius on taas 1, so koonduvusvahemik $(-1; 1)$. Uuri-
me saadud rea koonduvust koonduvusvahemiku otspunktides.

Koonduvusvahemiku vasakpoolses otspunktis $x = -1$ saame arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ja parempoolses otspunktis $x = 1$ arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Mõlemad saadud arvread on vahelduvate märkidega read, mis koonduvad Leibnizi tunnuse põhjal, so funktsiooni $\arctan x$ arendud astmereaks koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis, st koonduvuspiirkonnaks on lõik $[-1; 1]$.

Seega on võimalik, et liikmeti integreerimise tagajärjel saadud rida koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis vaatamata sellele, et esialgne rida on mõlemas otspunktis hajuv.

4.8 Taylори ja Maclaurini rida

Oletame et funktsioon $f(x)$ on punkti a ümbruses lõpmatu arv kordi diferentseeruv. Kui astmereas

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

kordajad c_k leitakse valemi

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (4.18)$$

põhjal, siis saadud rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (4.19)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks punkti a ümbruses või funktsiooni $f(x)$ Taylori reaks $x-a$ astmete järgi ja kordajaid (4.18) funktsiooni $f(x)$ Taylori kordajateks. Selle rea n -es osasumma on Taylori polünoom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Taylori valemi põhjal avaldub funktsioon $f(x)$ summana

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

so Taylori polünoomi ja jääkliikme summana.

On tõestatud, et Taylori valemi jääkliige avaldub

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))$$

kus $0 < \Theta < 1$

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

so Taylori rea osasummade jada koondub funktsiooniks $f(x)$.

Kokku võttes saab väita, et Taylori rida (4.19) esitab funktsiooni $f(x)$ ainult siis, kui jääkliikme piirväärtus võrdub nulliga. Kui $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, siis funktsiooni $f(x)$ Taylori rida võib küll koonduda, kuid see ei esita funktsiooni $f(x)$.

Taylori rida $a = 0$ ümbruses ehk Taylori rida x astmete järgi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (4.20)$$

nimetatakse Maclaurini reaks.

4.9 Funktsioonide e^x , $\sin x$ ja $\cos x$ arendamine Maclaurini reaks

Matemaatiline analüüs I kursuses on Maclaurini valemit käsitlevas teemas tõestatud, et funktsiooni e^x n -ndat järku Maclaurini valem avaldub

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

kus jääkliikme piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0$$

iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral. Järelikult esitab funktsiooni e^x Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x korral, st

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Samuti on tõestatud, et funktsiooni $\sin x$ $2n+1$ järku Maclaurini valem on

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

mille jääkliige avaldub

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\Theta x + (n+1)\pi)$$

Et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}(x) = 0$$

esitab funktsiooni $\sin x$ Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Lisaks on tõestatud, et funktsiooni $\cos x$ $2n$ järku Maclaurini valem on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

jääkliikmega

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Jälle on teada, et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0$$

st funktsiooni $\cos x$ Maclaurini rida esitab seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

4.10 2π -perioodiliste funktsioonide Fourier' read

Funktsioonide süsteemi

$$\{1; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x; \dots; \sin kx; \cos kx; \dots\} \quad (4.21)$$

nimetatakse *trigonomeetriliseks funktsioonide süsteemiks*. Rida selle süsteemi funktsioonide järgi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4.22)$$

nimetatakse trigonomeetriliseks reaks. Siin vabaliige on sobilik kirjutada $\frac{a_0}{2}$, mitte a_0 , sest siis saab vabaliiget a_0 arvutada sama valemi järgi nagu ülejäänud kordajaid a_k .

Meeldetuletuseks: funktsiooni $f(x)$ nimetatakse 2π -perioodiliseks, kui iga $x, x + 2\pi \in X$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

mis tähendab, et funktsiooni väärtused korduvad iga 2π järel.

Olgu $f(x)$ 2π -perioodiline funktsioon. Arvutame selle funktsiooni jaoks trigonomeetrilise rea kordajad valemitest.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (4.23)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

ja

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Kordajaid a_0 , a_k ja b_k , mis on defineeritud vastavalt võrdustega (4.23), (4.24) ja (4.25), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' kordajateks* ja nende kordajatega trigonomeetrilist rida (4.22) funktsiooni $f(x)$ *Fourier' reaks*.

Kui me arvutame Fourier' kordajad valemite (4.23), (4.24) ja (4.25) abil ning koostame nende kordajatega Fourier' reaks arenduse

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ei saa me olla kindlad, kas saadud Fourier' rida koondub, ja kui see koon-
dub, kas siis ta koondub väärtuseks $f(x)$. Hetkel saame väita, et lähtudes

funktsioonist $f(x)$ lõigul $[-\pi; \pi]$ on leitud reaks arendus, mida nimetatakse Fourier' reaks ja kirjutatakse

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (4.26)$$

Märgi $\sim$ võime kirjutada = alles siis, kui oleme tõestanud, et Fourier reaks arendus koondub funktsiooniks $f(x)$.

Näide 1. Arendame Fourier' reaks ristkülikukujulise lainefunktsiooni, mis on defineeritud kui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kui } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{kui } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{and} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Antud funktsioon $f(x)$ on 2π -perioodiline.

Fourier' kordajad leiame valemite (4.23), (4.24) ja (4.25) abil. Esiteks

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

teiseks

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \sin kx \Big|_0^{\pi} = 0$$

ja kolmandaks

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{kui } k \text{ on paaris} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{kui } k \text{ on paaritu} \end{cases}$$

Seega $a_k = 0$ iga $k = 0, 1, 2, \dots$ korral ja $b_{2k} = 0$ iga $k = 1, 2, \dots$ korral. Antud funktsiooni arendus Fourier' reaks on

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

ehk

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$$

Järgmine teoreem annab piisavad tingimused Fourier' rea koonduvuseks. Koonduvus punktis x tähendab endiselt seda, et rea (4.26) osasummade

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

jada koondub funktsiooni $f(x)$ väärtuseks punktis x , st

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

Teoreem (Dirichlet' teoreem). Kui $f(x)$ on tõkestatud 2π -perioodiline funktsioon, millel on ühes perioodis lõplik arv maksimume ja miinimume ning lõplik arv esimest liiki katkevuspunkte, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$ kõikides funktsiooni $f(x)$ pidevuspunktides ning funktsiooni $f(x)$ vasak- ja parempoolse piirväärtuse aritmeetiliseks keskmiseks funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktides.

Ristkülikukujulisel lainefunktsioonil on poollõigul $(-\pi; \pi]$ üks maksimum, mis võrdub 1-ga, ja üks miinimum, mis võrdub 0-ga ning kaks katkevuspunkti 0 ja π . Seega vahemikes, kus funktsioon on pidev, so vahemikes $(-\pi; 0)$ ja $(0; \pi)$ selle funktsiooni Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$. Punktis 0 on funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus $f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ ja parempoolne piirväärtus $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus punktis π on $f(\pi-) = \lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = 1$ ja parempoolne piirväärtus $f(\pi+) = \lim_{x \rightarrow \pi+} f(x) = 0$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Seega katkevuspunktides koondub ristkülikukujulise lainefunktsiooni Fourier' rida väärtuseks $\frac{1}{2}$.

Seda saab kinnitada vahetu arvutamise teel, sest iga täisarvulise k korral $\sin((2k+1) \cdot 0) = 0$ ja $\sin((2k+1)\pi) = 0$, seega

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)0) = \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}$$

Märkus. Kui funktsiooni $f(x)$ on perioodiline, kuid selle periood on T , siis funktsiooni $f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ periood on 2π . Järelikult muutuja vahetusega $t = \frac{Tx}{2\pi}$ saame T -perioodilisest funktsionist 2π -perioodilise funktsiooni ja selle Fourier' kordajad saame jälle valemite (4.23), (4.24) ja (4.25) abil.