

1 Read

1.1 Rida. Rea koonduvus ja summa

Reaks nimetatakse lõpmatut summat

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1.1)$$

Liidetavaid selles summas nimetatakse rea liikmeteks ja liiget u_k rea *üldliikmeks*. Üldliikmest saame indeksile k väärtusi andes konkreetsed liikmed.

Kui rea liikmed on reaalarvud, nimetatakse rida *arvreaks*. Kui aga liikmed on muutuja x funktsioonid, st $u_k = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, nimetatakse rida *funktsionaalreaks*. Esmalt vaatleme arvridu.

Tuntumad arvread on geomeetriline rida

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_1q^k \quad (1.2)$$

ja harmooniline rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (1.3)$$

Rea n -ndaks osasummaks S_n nimetatakse esimese n liikme summat, st

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Osasummadest

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

.....

tekib rea osasummade jada

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (1.4)$$

Definitsioon. Rida (1.1) nimetatakse *koonduvaks*, kui osasummade jadal (1.4) on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Seda piirväärtust S nimetatakse rea *summaks* ja kirjutatakse

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Kui osasummade jadal (1.4) piirväärtust ei eksisteeri või piirväärtus on lõpmatu, nimetatakse rida (1.1) *hajuvaks*.

Lõpliku arvu liikmete ärajätmine rea algusest ei mõjuta selle koonduvust. Kui koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

siis iga fikseeritud n väärtuse korral koondub ka

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

ja vastupidi.

Näide 1. Geomeetrilise rea (1.2) n -is osasumma on

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

ja kui tegur $|q| < 1$, siis

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

sest tingimuse $|q| < 1$ tõttu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Tulemus tähendab, et kui geomeetrilise rea tegur $|q| < 1$, siis on see rida koonduv ja selle summa

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Näide 2. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

osasummade jada üldliikme S_n leidmiseks kasutame osamurdudeks lahutust

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

mille põhjal

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Rea summa

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Näide 3. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k+1} + \dots$$

osasummade jada paarisarvuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n} = 0,$$

sest nendes osasummades on liidetavaid 1 ja -1 võrdselt. Osasummade jada paarituarvuliste indeksitega liikmed

$$S_{2n-1} = 1$$

sest liidetavaid 1 on ühe võrra rohkem. Järelikult osasummade jadal

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

piirväärtus puudub, st rida on hajuv.

1.2 Rea koonduvuseks tarvilik tingimus

Oletame, et rida (1.1) koondub ja selle summa on S , st

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Kirjutades n -ndas osasummas viimase liikme eraldi, saame

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n$$

ehk

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

millest

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Eelduse kohaselt rida koondub, järelikult

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Sellega oleme saanud olulise tulemuse, nn *rea koonduvuseks tarviliku tingimuse*.

Teoreem 1. Kui rida (1.1) koondub, siis rea üldliikme piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (1.5)$$

Tarvilik on see tingimus selle tõttu, et ilma selle tingimuse täidetusega rida koonduda ei saa.

Elmise punkti näites 3 vaadeldud rida on ka selle tingimuse järgi hajuv, sest üldliikme $u_k = (-1)^{k+1}$ piirväärtus piirprotsessis $k \rightarrow \infty$ puudub.

Tuleb rõhutada, et tingimus (1.5) on rea koonduvuseks tarvilik, aga mitte piisav, st selle täidetusest ei järeldu rea koonduvus. Näiteks harmoonilise rea (1.3) korral on koonduvuseks tarvilik tingimus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

täidetud, kuid ometi, nagu hiljem selgub, on harmooniline rida on hajuv.

1.3 Positiivsete liikmetega ridade koonduvustunnused

Käesolevas punktis vaatleme positiivsete liikmetega arvridu, st ridu (1.1), mille liikmed

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Olgu lisaks reale (1.1) antud veel teine positiivsete liikmetega arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad (1.6)$$

Matemaatiline analüüs I kursuses esines teoreem, millest järeldub, et monotoonselt kasvaval tõkestatud jadal on olemas (lõplik) piirväärtus. Kehtib ka vastupidine, jada

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

piirväärtus on definitsiooni kohaselt S , kui $\forall \varepsilon > 0$ korral $\exists N$, et kui $n \geq N$, siis

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$-\varepsilon < S_n - S < \varepsilon$$

ehk

$$S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon,$$

st vaadeldav jada on tõkestatud. Seega kehtib.

Teoreem 1. Monotoonselt kasvaval jadal on lõplik piirväärtus parajasti siis, kui jada on tõkestatud.

Positiivsete liikmetega arvridade osasummade jadad on kasvavad, sest $S_n = S_{n-1} + u_n$ ja et $u_n > 0$, siis $S_n > S_{n-1}$.

Teoreem 2 (võrdlustunnus). Kui alates indeksist k_0 , st $k \geq k_0$ korral on täidetud tingimus

$$u_k \leq v_k, \tag{1.7}$$

siis

- 1) rea (1.6) koonduvusest järeldub rea (1.1) koonduvus ja
- 2) rea (1.1) hajuvusest järeldub rea (1.6) hajuvus.

Näide 1. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

koondub.

Punkti 8.1 näites 2 tõestasime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$$

koonduvuse. Iga $k = 2, 3, \dots$ korral kehtiva võrratuse

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

tõttu järeldub teoreemist 2 vaadeldava rea koonduvus.

Näide 2. Tõestame, et rida

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

hajub.

Iga $k > 1$ korral $\sqrt{k} < k$ ehk

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

Harmoniline rida (1.3) hajub, seega teoreemi 2 põhjal hajub ka vaadeldav rida.

Teoreem 3 (D'Alemberti tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = D$$

Kui $D < 1$, siis rida (1.1) koondub.

Kui $D > 1$, siis rida (1.1) hajub.

Kui $D = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Teoreem 4 (Cauchy tunnus). Eksisteerigu piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = C$$

Kui $C < 1$, siis rida (1.1) koondub.

Kui $C > 1$, siis rida (1.1) hajub.

Kui $C = 1$, jääb selle tunnuse järgi küsimus lahtiseks.

Näide 3. Uurime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

koonduvust.

Kõigepealt kasutame koonduvuse uurimiseks D'Alemberti tunnust. Üldliige $u_k = \frac{k^2}{2^k}$, seega

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} : \frac{k^2}{2^k} = \frac{(1 + \frac{1}{k})^2}{2}$$

ja

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Tulemusest $D = \frac{1}{2} < 1$ järeldame, et rida koondub.

Uurime sama rea koonduvust ka Cauchy tunnuse abil. Selleks leiame

$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2}$ ja arvutame piirväärtuse

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{2}{k}}$$

Tegemist on ∞^0 tüüpi määramatusega, seega piirväärtuse arvutamiseks kasutame L'Hospitali reeglit ja leiame

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \ln k^{\frac{2}{k}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} \ln k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2 \ln k)'}{k'} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} = 0\end{aligned}$$

ja

$$C = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} < 1$$

Sellega on vaadeldava rea koonduvus tõestatud ka Cauchy tunnuse abil.

1.4 Vahelduvate märkidega read. Leibnizi tunnus

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k, \quad (1.8)$$

kus $u_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$

Teoreem 1. (Leibnizi tunnus) Kui

- 1) $u_k > u_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ ja
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$, siis vahelduvate märkidega rida (1.8) koondub.

Näide. Rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

rahuldab mõlemat teoreemi 1 eeldust, sest

$$1 > \frac{1}{2} > \dots > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} > \dots$$

ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ ning järelikult on koonduv.

1.5 Muutuvate märkidega read. Absoluutne ja tingimisi koonduvus

Selles punktis loobume eeldusest, et rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1.9)$$

liikmed on positiivsed. Märkide jaotus reas võib olla ükskõik missugune. Nii-sugust rida nimetatakse *muutuvate märkidega reaks*. Vahelduvate märkidega rida on muutuvate märkidega rea erijuht.

Definitsioon. Rida (1.9) nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub rida

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

Teoreem 1. Rea (1.9) absoluutsest koonduvusest järelneb selle koonduvus.

Tõestus. Absoluutväärtuse definitsiooni

$$|u_k| = \begin{cases} u_k, & \text{if } u_k \geq 0 \\ -u_k, & \text{if } u_k < 0 \end{cases}$$

põhjal

$$0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$$

Eeldasime rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

koonduvust, kuid siis koondub ka rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2|u_k| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

Võrdlustunnuse põhjal koondub ka rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k|)$$

Järelikult rida (1.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k| - |u_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k + |u_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

on kahe koonduva rea (mille summad on lõplikud arvud) vahe, mis samuti on koonduv (lõplik summa).

Teoreemi 1 järgi rea absoluutsest koonduvusest järelneb alati selle koonduvus. Vastupidine väide ei kehti. Rida võib olla koonduv, kuid mitte absoluutselt. Eelmise punkti näites vaadeldud vahelduvate märkidega rida on koonduv, kuid absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

on harmooniline rida, mis hajub.

Definitsioon. Koonduvat rida, mis absoluutselt ei koonu, nimetatakse *tingimisi koonduvaks* reaks.

Eeltoodut arvesse võttes saame öelda, et eelmise punkti näites vaadeldud rida on tingimisi koonduv rida.

Kui positiivsete liikmetega rea koonduvus ehk muutuvate märkidega rea absoluutne koonduvus leiab aset liikmete piisavalt kiire kahanemise tõttu, siis tingimisi koonduvus leiab aset selle tõttu, et rea erinevate märkidega liikmed koondavad üksteist.

1.6 Funktsionaalread

Funktsionaalreaks nimetatakse rida, mille liikmed on funktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1.10)$$

Kui fikseerida argumendi x väärtus x_0 , omandavad funktsioonid $u_k(x)$ kindlad arvulised väärtused $u_k(x_0)$, st väärtuse x_0 korral saame reast (1.10) arvrea.

Näide. Vaatleme funktsionaalrida

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (1.11)$$

Andes selles reas muutujale x väärtuse $x = \frac{1}{2}$, saame geomeetrilise rea,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

mille tegur on $\frac{1}{2}$ ja seega koondub.

Andes reas (1.11) muutujale x väärtuse $x = 1$, saame arvrea

$$1 + 1 + 1 + \dots,$$

st arvrea, mille üdliikme piirväärtus on 1, st ei ole 0. Rea koonduvuseks tarvilik tingimus pole täidetud, seega rida hajub hajub.

Andes reas (1.11) muutujale x väärtuse $x = -1$, saame arvrea

$$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^k + \dots$$

mis hajub, sest üldliikmel piirväärtus puudub, so koonduvuseks tarvilik tingimus pole jälle täidetud.

Andes reas (1.11) muutujale x väärtuse $x > 1$, saame arvrea, mille üldliikme

$$u_k(x) = x^k$$

piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \infty$$

Andes reas (1.11) muutujale x väärtuse $x < -1$, saame arvrea, mille üldliikme piirväärtus puudub.

Seega ilmneb, et on muutuja x väärtusi, mille korral funktsionaalrida koondub ja on väärtusi, mille korral funktsionaalrida hajub.

Rea (1.10) osasummad

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

on samuti muutuja x funktsioonid, mis moodustavad funktsionaaljada

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots \quad (1.12)$$

Definitsioon. Argumendi x väärtuste hulka X , mille korral osasummade jada (1.12) koondub, st $\exists$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad (1.13)$$

nimetatakse funktsionaalrea (1.10) koonduvuspiirkonnaks.

Sellisel juhul öeldakse, et $S(x)$ on funktsionaalrea (1.10) summa ja kirjutatakse

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Viimase võrduse asemel võime kirjutada

$$S(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Summas esinevat teist liiget

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

nimetatakse funktsionaalrea jääkliikmeks ja rea summa

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

1.7 Astmeread

Astmereaks nimetatakse funktsionaalrida, mille liikmed on astmefunktsioonid, st rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \quad (1.14)$$

või üldisemalt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - a)^k \quad (1.15)$$

Nende ridade omaduste uurimine on sarnane, seepärast piirdume ridadega (1.14).

Näide 1. Rida

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

on iga x väärtuse korral geomeetriline rida, mis koondub, kui $|x| < 1$. Nagu eelmises punktis kindlaks tegime, on selle rea koonduvuspiirkonnaks vahemik $X = (-1; 1)$ ning rea summa selles vahemikus

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (1.16)$$

Selgub, et astmeridade koonduvuspiirkonnad ongi sellise lihtsa struktuuriga.

Teoreem 1 (Abeli teoreem). Kui astmerida (1.14) koondub agumendi väärtuse x_0 korral, siis koondub see rida absoluutselt iga tingimust $|x| < |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Vastupidi, kui astmerida (1.14) hajub agumendi väärtuse x_0 korral, siis hajub see ka iga tingimust $|x| > |x_0|$ rahuldava x väärtuse korral.

Abeli teoreemi tõttu eksisteerib selline reaalarv R , et $|x| < R$ korral rida (1.14) koondub ja $|x| > R$ korral (1.14) hajub. Sellist reaalarvu R nimetatakse rea (1.14) *koonduvusraadiuseks* ja vahemikku $(-R; R)$ selle rea *koonduvusvahemikuks*.

Märkus. Koonduvusvahemiku otspunktides, st $x = R$ ja $x = -R$ korral tuleb rea (1.14) koonduvust eraldi uurida. Allpool esitatavas näites veendume, et koonduvusvahemiku otspunktides võib rida olla hajuv, tingimisi koonduv või absoluutselt koonduv.

Ühe võimalus leida koonduvusraadiust R on valem

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \quad (1.17)$$

Näide. Leiame ridade $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ koonduvuspiirkonnad.

Kõigi kolme rea koonduvusraadiused võrduvad 1-ga, sest esimesel real $c_k = 1$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

teisel real $c_k = \frac{1}{k}$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

kolmandal $c_k = \frac{1}{k^2}$ ja

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Seega on kõigi kolme rea koonduvusvahemikud $(-1; 1)$.

Esimese rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $1^k = 1$, selle piirväärtus on $1 \neq 0$, st rida hajub. Vasakpoolses otspunktis on üldliige $(-1)^k$, millel puudub piirväärtus, kui $k \rightarrow \infty$, st rida hajub ning esimese rea koonduvuspiirkond on vahemik $(-1; 1)$

Teise rea üldliige on koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis $\frac{1}{k}$, st teine rida on parempoolses otspunktis harmooniline rida, mis hajub. Vasakpoolses otspunktis on teise rea üldliige $\frac{(-1)^k}{k}$, st teine rida on vasakpoolses otspunktis vahelduvate märkidega rida, mis Leibnizi tunnuse põhjal koondub. Niisiis on teise rea koonduvuspiirkond poollõik $[-1; 1)$

Kolmanda rea üldliige koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis on $\frac{1}{k^2}$ ja vasakpoolses otspunktis $\frac{(-1)^k}{k^2}$, mõlema absoluutväärtused $\frac{1}{k^2}$. Punkti

8.3 näite 1 põhjal rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ koondub, seega kolmas rida koonduvusvahemiku parempoolses otspunktis koondub ja vasakpoolses otspunktis koondub absoluutselt, st kolmanda rea koonduvuspiirkond on lõik $[-1; 1]$

Järgnevalt esitame kolm olulist astmeridu käsitlevat teoreemi.

Teoreem 1. Astmerea (1.14) koonduvusraadiusedga R summa $S(x)$ on pidev igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Teoreem 2. Astmerida (1.14) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti integreerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Teoreem 3. Astmerida (1.14) koonduvusraadiusedga R võib liikmeti diferentseerida igal lõigul $[a; b] \subset (-R; R)$.

Toetudes geomeetrilise rea (1.16) summale ning teoreemidele 2 ja 3, saame leida paljude funktsioonide arendusi astmereaks.

Näide 1. Korrutades võrduse (1.16) mõlemat poolt teguriga x , saame rea

$$\frac{x}{1-x} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$$

mille koonduvusraadius on endiselt 1. On lihtne kontrollida, et

$$\left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Kasutades liikmeti diferentseerimist, saame selle tuletise astmerea

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1})' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

ja saadud rea koonduvusraadius on ikka 1.

Näide 2. Asendades võrduses (1.16) muutuja x muutujaga $-x^2$, saame

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

ning see rida koondub kui $|-x^2| < 1$, mis on võrdväärne tingimusega $|x| < 1$.

Arvestades seda, et

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

saame funktsiooni $\arctan x$ arenduse astmereaks integreerides viimast rida liikmeti lõigul $[0; x]$ eeldusel $|x| < 1$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Saadud rea koonduvusraadius on taas 1, so koonduvusvahemik $(-1; 1)$. Uuri-me saadud rea koonduvust koonduvusvahemiku otspunktides.

Koonduvusvahemiku vasakpoolses otspunktis $x = -1$ saame arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ja parempoolses otspunktis $x = 1$ arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Mõlemad saadud arvread on vahelduvate märkidega read, mis koonduvad Leibnizi tunnuse põhjal, so funktsiooni $\arctan x$ arendud astmerekaks koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis, st koonduvuspiirkonnaks on lõik $[-1; 1]$.

Seega on võimalik, et liikmeti integreerimise tagajärjel saadud rida koondub koonduvusvahemiku mõlemas otspunktis vaatamata sellele, et esialgne rida on mõlemas otspunktis hajuv.

1.8 Tayloriga ja Maclaurini rida

Oletame et funktsioon $f(x)$ on punkti a ümbruses lõpmatu arv kordi diferentseeruv. Kui astmerekas

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

kordajad c_k leitakse valemi

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (1.18)$$

põhjal, siis saadud rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (1.19)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Tayloriga reaks punkti a ümbruses või funktsiooni $f(x)$ Tayloriga reaks $x-a$ astmete järgi ja kordajaid (1.18) funktsiooni $f(x)$ Tayloriga kordajateks. Selle rea n -es osasumma on Tayloriga polünoom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Tayloriga valemi põhjal avaldub funktsioon $f(x)$ summana

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

so Tayloriga polünoomi ja jääkliikme summana.

On tõestatud, et Tayloriga valemi jääkliikme avaldub

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))$$

kus $0 < \Theta < 1$

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

so Tayloriga rea osasummade jada koondub funktsiooniks $f(x)$.

Kokku võttes saab väita, et Tayloriga rida (1.19) esitab funktsiooni $f(x)$ ainult siis, kui jääkliikme piirväärtus võrdub nulliga. Kui $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, siis funktsiooni $f(x)$ Tayloriga rida võib küll koonduda, kuid see ei esita funktsiooni $f(x)$.

Tayloriga rida $a = 0$ ümbruses ehk Tayloriga rida x astmete järgi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (1.20)$$

nimetatakse Maclaurini reaks.

1.9 Funktsioonide e^x , $\sin x$ ja $\cos x$ arendamine Maclaurini reaks

Matemaatiline analüüs I kursuses on Maclaurini valemit käsitlevas teemas tõestatud, et funktsiooni e^x n -ndat järku Maclaurini valem avaldub

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

kus jääkliikme piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} = 0$$

iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral. Järelikult esitab funktsiooni e^x Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x korral, st

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Samuti on tõestatud, et funktsiooni $\sin x$ $2n+1$ järku Maclaurini valem on

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

mille jääkliige avaldub

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\Theta x + (n+1)\pi)$$

Et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}(x) = 0$$

esitab funktsiooni $\sin x$ Maclaurini rida seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Lisaks on tõestatud, et funktsiooni $\cos x$ $2n$ järku Maclaurini valem on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

jääkliikmega

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(\Theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Jälle on teada, et iga $x \in \mathbb{R}$ ja iga $0 < \theta < 1$ korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0$$

st funktsiooni $\cos x$ Maclaurini rida esitab seda funktsiooni iga reaalarvulise x väärtuse korral:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

1.10 2π -perioodiliste funktsioonide Fourier' read

Funktsioonide süsteemi

$$\{1; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x; \dots; \sin kx; \cos kx; \dots\} \quad (1.21)$$

nimetatakse *trigonomeetriliseks funktsioonide süsteemiks*. Rida selle süsteemi funktsioonide järgi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.22)$$

nimetatakse trigonomeetriliseks reaks. Siin vabaliige on sobilik kirjutada $\frac{a_0}{2}$, mitte a_0 , sest siis saab vabaliiget a_0 arvutada sama valemi järgi nagu ülejäänud kordajaid a_k .

Meeldetuletuseks: funktsiooni $f(x)$ nimetatakse 2π -perioodiliseks, kui iga $x, x + 2\pi \in X$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

mis tähendab, et funktsiooni väärtused korduvad iga 2π järel.

Olgu $f(x)$ 2π -perioodiline funktsioon. Arvutame selle funktsiooni jaoks trigonomeetrilise rea kordajad valemitest.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (1.23)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

ja

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

Kordajaid a_0 , a_k ja b_k , mis on defineeritud vastavalt võrdustega (1.23), (1.24) ja (1.25), nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' kordajateks* ja nende kordajatega trigonomeetrilist rida (1.22) funktsiooni $f(x)$ *Fourier' reaks*.

Kui me arvutame Fourier' kordajad valemite (1.23), (1.24) ja (1.25) abil ning koostame nende kordajatega Fourier' reaks arenduse

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ei saa me olla kindlad, kas saadud Fourier' rida koondub, ja kui see koondub, kas siis ta koondub väärtuseks $f(x)$. Hetkel saame väita, et lähtudes funktsioonist $f(x)$ lõigul $[-\pi; \pi]$ on leitud reaks arendus, mida nimetatakse Fourier' reaks ja kirjutatakse

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1.26)$$

Märgi $\sim$ võime kirjutada = alles siis, kui oleme tõestanud, et Fourier reaks arendus koondub funktsiooniks $f(x)$.

Näide 1. Arendame Fourier' reaks ristkülikukujulise lainefunktsiooni, mis on defineeritud kui

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kui } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{kui } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{and} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Antud funktsioon $f(x)$ on 2π -perioodiline.

Fourier' kordajad leiame valemite (1.23), (1.24) ja (1.25) abil. Esiteks

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

teiseks

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \sin kx \Big|_0^{\pi} = 0$$

ja kolmandaks

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{kui } k \text{ on paaris} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{kui } k \text{ on paaritu} \end{cases}$$

Seega $a_k = 0$ iga $k = 0, 1, 2, \dots$ korral ja $b_{2k} = 0$ iga $k = 1, 2, \dots$ korral. Antud funktsiooni arendus Fourier' reaks on

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

ehk

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$$

Järgmine teoreem annab piisavad tingimused Fourier' rea koonduvuseks. Koonduvus punktis x tähendab endiselt seda, et rea (1.26) osasummade

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

jada koondub funktsiooni $f(x)$ väärtuseks punktis x , st

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

Teoreem (Dirichlet' teoreem). Kui $f(x)$ on tõkestatud 2π -perioodiline funktsioon, millel on ühes perioodis lõplik arv maksimume ja miinimume ning lõplik arv esimest liiki katkevuspunkte, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$ kõikides funktsiooni $f(x)$ pidevuspunktides ning funktsiooni $f(x)$ vasak- ja parempoolse piirväärtuse aritmeetiliseks keskmiseks funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktides.

Ristkülikukujulisel lainefunktsioonil on poollõigul $(-\pi; \pi]$ üks maksimum, mis võrdub 1-ga, ja üks miinimum, mis võrdub 0-ga ning kaks katkevuspunkti 0 ja π . Seega vahemikes, kus funktsioon on pidev, so vahemikes $(-\pi; 0)$ ja $(0; \pi)$ selle funktsiooni Fourier' rida koondub väärtuseks $f(x)$. Punktis 0 on funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus $f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ ja parempoolne piirväärtus $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Funktsiooni $f(x)$ vasakpoolne piirväärtus punktis π on $f(\pi-) = \lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = 1$ ja parempoolne piirväärtus $f(\pi+) = \lim_{x \rightarrow \pi+} f(x) = 0$ ning nende ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiline keskmine

$$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Seega katkevuspunktides koondub ristkülikukujulise lainefunktsiooni Fourier' rida väärtuseks $\frac{1}{2}$.

Seda saab kinnitada vahetu arvutamise teel, sest iga täisarvulise k korral $\sin((2k+1) \cdot 0) = 0$ ja $\sin((2k+1)\pi) = 0$, seega

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)0) = \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}$$

Märkus. Kui funktsiooni $f(x)$ on perioodiline, kuid selle periood on T , siis funktsiooni $f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ periood on 2π . Järelikult muutuja vahetusega $t =$

$\frac{Tx}{2\pi}$ saame T -perioodilisest funktsionist 2π -perioodilise funktsiooni ja selle Fourier' kordajad saame jälle valemite (1.23), (1.24) ja (1.25) abil.

1.11 Lõpmatute rajadega päratud integraalid

Päratuid integraale on kahte tüüpi. Käesolevas punktis vaatleme lõpmatute rajadega päratuid integraale. Lisaks sellele eksisteerivad päratud integraalid tõkestamata funktsioonidest.

Definitsioon 1. Olgu funktsioon $f(x)$ määratud poollõigul $[a; \infty)$. Kui iga $N \in [a; \infty)$ korral on olemas määratud integraal $\int_a^N f(x)dx$ ja eksisteerib

piirväärtus $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ lõpmatu ülemise rajaga päratuks integraaliks ja tähistatakse $\int_a^\infty f(x)dx$.

Definitsiooni 1 kohaselt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x)dx \quad (1.27)$$

Seega tuleb päratu integraali arvutamiseks leida kõigepealt funktsiooni $f(x)$ määratud integraal rajades a -st N -ni ja saadud avaldisest arvutada piirväärtus piirprotsessis $N \rightarrow \infty$.

Näide 1. Leiame $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Arvutusvalemi (1.27) järgi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\arctan N - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

Definitsioon 2. Olgu funktsioon $f(x)$ määratud poollõigul $(-\infty; b]$. Kui iga $M \in (-\infty; b]$ korral on olemas määratud integraal $\int_M^b f(x)dx$ ja eksisteerib

piirväärtus $\lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni

$f(x)$ lõpmatu alumise rajaga päratuks integraaliks ja tähistatakse $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Definitsiooni 2 järgi

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x)dx \quad (1.28)$$

Definitsioon 3. Kui võrdustes (1.27) või (1.28) esinev piirväärtus on lõplik, siis öeldakse, et *päratu integraal koondub*, kui piirväärtus on lõpmatu või piirväärtust ei ole olemas, siis öeldakse, et *päratu integraal hajub*.

Kui funktsioon $f(x)$ on määratud vahemikus $(-\infty; \infty)$, siis mõlema lõpmatu rajaga päratu integraali defineerimisel jaotatakse integraal suvalises punktis $c \in (-\infty; \infty)$ kaheks,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Tekkinud liidetavatest esimene on lõpmatu alumise rajaga päratu integraal ja teine lõpmatu ülemise rajaga päratu integraal.

Näide 2. Vaatleme päratut integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+2}$

Jaotades antud integraali punktis $x = 0$ kaheks, saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{x^2+2} + \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+2}$$

Saadud liidetavatest teine on lõpmatu ülemise rajaga päratu integraal, mille arvutame valemi (1.27) abil

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{xdx}{x^2+2}$$

Määramata integraali $\int \frac{xdx}{x^2+2}$ leiame muutuja vahetuse $t = x^2 + 2$ abil.

Sellisel juhul $dt = 2xdx$, millest $xdx = \frac{1}{2}dt$. Seega

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 2} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$

ja päratu integraal

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{x dx}{x^2 + 2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) \right|_0^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(N^2 + 2) - \frac{1}{2} \ln 2 \right] = \infty$$

Järelikult on teine liidetav hajuv päratu integraal ja kuigi saaksime arvutada esimese liidetava valemi (1.28) abil, pole sellel mõtet, sest kui juba üks liidetavatest hajub, hajub ka kogu päratu integraal.

Näide 3. Olgu $a > 0$. Urime, milliste α väärtuste korral päratu integraal $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ koondub ja milliste väärtuste korral hajub. Leiame

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N \frac{dx}{x^\alpha}$$

Kui $\alpha \neq 1$, siis

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)$$

Kui $\alpha > 1$, siis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}},$$

st päratu integraal koondub. Kui $\alpha < 1$, siis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \right) = \infty,$$

st päratu integraal hajub.

Kui $\alpha = 1$, siis

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \ln x \right|_a^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln N - \ln a) = \infty,$$

st ka antud juhul päratu integraal hajub.

Seega päratu integraal $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$

Definitsioon 4. Pärartut integraali (1.27) nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub päratu integraal

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

Teoreem Päratu integraali (1.27) absoluutsest koonduvusest järeldub selle koonduvus.

Näide 4. Uurime päratu integraali $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$ koonduvust.

Iga $x \in \mathbb{R}$ korral on täisetud tingimus $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$. Näite 3 põhjal päratu integraal $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ koondub. Teoreemi põhjal antud päratu integraal koondub absoluutselt ja teoreemist järeldame, et antud päratu integraal koondub.

1.12 Positiivsete liikmetega ridade koonduvuse integraaltunnus

Olgu antud positiivsete liikmetega rida (1.1). Olgu $u(x)$ poollõigul $[1; \infty)$ monotoonselt kahanev funktsioon, mille väärtusteks täisarvuliste argumentide korral on rea (1.1) liikmed, st $u(k) = u_k$.

Teoreem 5 (integraaltunnus).

Kui päratu integraal $\int_1^\infty u(x) dx$ koondub, siis koondub ka (1.1).

Kui päratu integraal $\int_1^\infty u(x) dx$ hajub, siis hajub ka (1.1).

Näide 4. Uurime harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$$

koonduvust.

Integraaltunnuse kasutamiseks vaatleme funktsiooni $u(x) = \frac{1}{x}$, sest sel juhul

$$u_k = u(k) = \frac{1}{k}$$

Arvutame päratu integraali

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N = \infty \end{aligned}$$

Päratu integraal hajub. Integraaltunnuse põhjal hajub ka harmooniline rida.

1.13 Fourier' teisendus

Perioodilisi funktsioone saab arendada Fourier' reaks. Selleks tuleb arvutada Fourier' kordajad ja moodustada nende kordajega trigonomeetriline rida. Mitteperioodiliste funktsioonide korral asendab Fourier' kordajate jada, perioodilise funktsiooni $f(x)$ nn *spektraaljada*,

$$\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$$

Fourier' teisendus.

Funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisenduse olemasoluks tuleb eeldada, et funktsioon on *absoluutselt integreeruv* vahemikus $(-\infty; \infty)$. Viimane tähendab seda, et päratu integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

on absoluutselt koonduv, st

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Gemeetriliselt tähendab see, et funktsiooni $y = |f(x)|$ graafiku ($x \in (-\infty; \infty)$) ja x -telje vahele jääva piirkonn pindala on lõplik. See tingimus seab funktsioonile $y = f(x)$ küllalt ranged nõuded, funktsioon peab piirprotsessides $x \rightarrow \infty$ ja $x \rightarrow -\infty$ piisavalt kiiresti 0-le lähenema. Näiteks selline lihtne funktsioon nagu $f(x) \equiv 1$ niisugust tingimust ei rahulda.

Praktikas on aga Fourier' teisendus rakendatav signaalitöötluses, kus funktsioonideks on signaalid. Signaal algab teatud ajahetkel ja samuti ei kesta üksi signaal igavesti, st ka lõpeb mingil ajahetkel. Teiste sõnadega, praktikas vaatleme funktsioone $f(x)$, mis erinevad 0-st lõigul $[a; b]$. Selliseid funktsioone nimetatakse *lõpliku kandjaga* funktsioonideks. Lõpliku kandjaga funktsioonid on vahemikus $(-\infty; \infty)$ absoluutselt integreeruvad, sest kui $f(x) = 0$ ($x < a$, $x > b$, siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

Järgnevas eeldme, et funktsioon $f(x)$ on absoluutselt integreeruv vahemikus $(-\infty; \infty)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisenduseks nimetatakse integraalteisendust

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.29)$$

Funktsioon $\hat{f}(\omega)$ kujutab endast mitteperioodilise signaali spektrit. Spekt-ri järgi on signaal taastatav Fourier' pöördteisenduse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.30)$$

abil.

Näide. Leiame funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kui } x \geq 0 \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

Fourier' teisenduse.

Antud juhul $f(x) = 0$, kui $x < 0$ ning definitsiooni (1.29) põhjal

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)x} \right] \Big|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1+i\omega} (e^{-(1+i\omega)N} - 1) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1+i\omega} (e^{-N} e^{-i\omega N} - 1) \right] = \frac{1}{1+i\omega} \end{aligned}$$

sest $e^{-N} e^{-i\omega N}$ on piirprotsessis $N \rightarrow \infty$ lõpmatult kahaneva suuruse e^{-N} ja tõkestatud suuruse $e^{-i\omega N}$ korrutis, st lõpmatult kahanev suurus.

2 Mitme muutuja funktsioonid

Reaalarvude järjestatud paaride (x, y) hulga ja tasandi punktide hulga vahel on üksühene vastavus, st igale paarile vastab üks kindel punkt tasandil ja igale tasandi punktile vastavad selle koordinaadid ehk üks reaalarvude järjestatud paar. Piirkonnaks nimetatakse (x, y) -tasandi punktide alamhulka. Tasandilisi piirkondi hakkame tähistama sümboliga D . Näiteks piirkond

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

on tasandi niisuguste punktide hulk, mis asuvad koordinaatide alguspunktist mitte kaugemal kui üks ühik ehk ühikulise raadiusega ring koos seda ümbritseva ringjoonega.

Piirkonda piiravat joont nimetatakse piirkonna rajajooneks ja rajajoone punkte piirkonna rajapunktideks. Rajajoonel mitte asuvaid punkte nimetatakse piirkonna sisepunktideks.

Piirkonda nimetatakse kinniseks, kui see sisaldab kõiki oma rajapunkte, st sisaldab rajajoont.

Piirkonda nimetatakse lahtiseks, kui see ei sisalda ühtegi rajapunkti.

Edaspidi kujutame joonistel kinnise piirkonna rajajoont pideva joonega ja lahtise piirkonna rajajoont katkendliku joonega.

Reaalarvude kolmikute (x, y, z) ja ruumi punktide hulga vahel on korraldatav üksühene vastavus. Ruumiliseks piirkonnaks on kogu ruumi alamhulk.

Ruumilist piirkonna eraldab kogu ruumist mingisugune pind, mida nimetatakse piirkonna rajapinnaks ehk rajaks. Rajapinna punkte nimetatakse piirkonna rajapunktideks ja rajapinnal mitte asuvaid punkte piirkonna sisepunktideks.

Kui piirkond sisaldab kõiki oma rajapunkte, nimetatakse piirkonda kinniseks.

Kui piirkond ei sisalda ühtegi oma rajapunkti, nimetatakse piirkonda lahtiseks.

Seega, kinnine piirkond on piirkond koos seda ümbritseva rajapinnaga, lahtine piirkond on piirkond ilma seda ümbritseva rajapinnata.

2.1 Kahe muutuja funktsiooni mõiste

Olgu D tasandiline piirkond, mis võib olla ka kogu xy -tasand.

Definitsioon 1. Kui igale $(x, y) \in D$ on vastavusse seatud muutuja z kindel väärtus, siis muutujat z nimetatakse kahe muutuja x ja y funktsiooniks ja tähistatakse

$$z = f(x, y).$$

Veel on kasutusel tähistused $z = g(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ või $z = z(x, y)$.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikule kuulub ruumiline punkt koordinaatidega $(x, y, f(x, y))$. Kõikide niisuguste punktide hulk moodustab ruumis pinna. Seega on kahe muutuja funktsiooni graafikuks pind ruumis.

Näide 1. Kahe muutuja funktsiooni $z = 1 - x - y$ graafikuks on tasand.

Näide 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = x^2 + y^2$ graafikuks on pöördparaboloid, mis tekib parabooli $z = y^2$ pöörlemisel ümber z -telje.

Kui kahe muutuja funktsioon ei ole ühene, kasutatakse selle esitamiseks ilmutamata kuju.

Näide 3. Ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ graafikuks on sfäär keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega r . Kui avaldada sellest võrdusest muutuja z , saame kaks ühest kahe muutuja funktsiooni $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ja $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Nendest esimese graafikuks on sfääri ülemine pool ja teisel alumine pool.

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnaks nimetatakse niisugust järjestatud paaride (x, y) (tasandi punktide) hulka, millele antud eeskirja kohaselt on võimalik vastavusse seada muutuja z väärtust.

Näide 4. Leiame funktsiooni $z = \ln(8 - x^2 - y^2) + \sqrt{2y - x^2}$ määramispiirkonna ja kujutame selle xy -tasandil

Funktsioon on määratud, kui on täidetud tingimused

$$\begin{cases} 8 - x^2 - y^2 > 0 \\ 2y - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Esimesest tingimusest $x^2 + y^2 < 8$ ja teisest $y \geq \frac{x^2}{2}$. Esimest tingimust rahuldavad xy -tasandi punktid mis kuuluvad ringi keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega $2\sqrt{2}$. Et tingimuses võrdust 8-ga pole, siis ringi ümbritsev ringjoon hulka ei kuulu ja joonisel kujutame ringjoone katkendliku joonega.

Teist tingimust rahuldavad xy -tasandi punktid, mis jäävad paraboolist $y = \frac{x^2}{2}$ kõrgemale. Antud tingimuses on võrdus lubatud, seega parabool kuulub hulka ja joonisel kujutame selle pideva joonega.

2.2 Kahe muutuja funktsiooni graafiku tasandilõiked ja nivoojooned

Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (st paralleelne ühega koordinaattasanditest). yz -tasandi võrrand on $x = 0$, xz -tasandi võrrand on $y = 0$ ja xy -tasandi võrrand $z = 0$.

Tasand $x = a$ on x -teljega risti, st yz -tasandiga paralleelne. Tasand $y = b$ on y -teljega risti ehk xz -tasandiga paralleelne. Tasand $z = c$ on z -teljega risti ehk xy -tasandiga paralleelne.

Pinna $z = f(x, y)$ tasandilõigeteks tasanditega $x = a$ erinevate a väärtustega korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = a, \end{cases}$$

pinna $z = f(x, y)$ tasandilõigeteks tasanditega $y = b$ erinevate b väärtustega korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases}$$

ja pinna $z = f(x; y)$ tasandilõigeteks tasanditega $z = c$ erinevate c väärtuste korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c, \end{cases}$$

Viimaste projektsioone xy -tasandil nimetatakse pinna $z = f(x, y)$ *nivoo-joonteks*.

Näide 1. Joonestame pinna $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, kasutades selleks lõikeid tasanditega $z = 0$, $z = \pm 1$ ja $z = \pm 2$ ning lõiget tasandiga $x = 0$.

Lõigates pinda tasandiga xy -tasandiga $z = 0$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$ ehk koordinaatide alguspunkti, sest $x^2 + y^2 = 0$ ainult juhul, kui $x = 0$ ja $y = 0$.

Lõigates pinda tasandiga $z = 1$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = 1$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = -1$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 1$, $z = -1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = -1$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = 2$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = 2$ keskpunktiga z -teljel.

Lõigates pinda tasandiga $z = -2$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 4$, $z = -2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = -2$ keskpunktiga z -teljel. Joonestame need lõiked ruumilisse teljestikku (joonis 6.6).

Kui lõigata pinda tasandiga $x = 0$, saame lõikejoonteks $z^2 = y^2$ ehk kaks ristuvat sirget $z = y$ ja $z = -y$, mis asuvad yz -tasandil. Kui lisada need sirged teljestikku, on ilmne, et vaadeldav pind on koonus, mille tipp asub koordinaatide alguspunktis.

Funktsiooni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ teisendamisel ilmutatud kujule saame kaks

ühelst haru $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, mille graafikuteks on vastavalt koonuse ülemine ja koonuse alumine pool.

Koonuse nivoojoonteks on joonte

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = c, \end{cases}$$

projektsioonid xy -tasandil ja need on kontsentrilised ringjooned $x^2 + y^2 = c^2$ keskpunktiga $(0; 0)$ ja raadiusega $|c|$. Joonisel 6.8 on koonuse nivoojooned $c = \pm 1$, $c = 2$ ja $c = \pm 3$ korral.

Kolme muutuva funktsiooni $w = f(x, y, z)$ graafiku *nivooindadeks* nimetatakse pindu

$$\begin{cases} w = f(x, y, z) \\ w = c. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemist saame, et $f(x, y, z) = c$, st ilmutamata kujul kahe muutuva funktsiooni, mille graafikuks on pind ruumis.

Näide 3. Kolme muutuva funktsiooni $w = x^2 + y^2 + z^2$ nivooindadeks on pinnad $x^2 + y^2 + z^2 = c$, kus $c > 0$. Nendeks pindadeks on sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguses, raadiusega $\sqrt{c}$.

2.3 Funktsiooni osamuut ja täismuut

Fikseerime kahe muutuva funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas D ühe punkti $M(x, y)$.

Jättes muutuva y konstantseks, muudame sõltumatut muutujat x suuruse Δx võrra. Funktsiooni osamuuduks x järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (2.1)$$

Jättes muutuva x konstantseks, muudame sõltumatut muutujat y suuruse Δy võrra. Funktsiooni osamuuduks y järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2.2)$$

Muutes argumenti x suuruse Δx ja argumenti y suuruse Δy võrra, liigume xy -tasandi punktist $M(x, y)$ punkti $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Funktsiooni

täismuuduks nimetatakse vahet

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2.3)$$

Üldjuhul funktsiooni osamuutude summa ei võrdu täismuuduga, st $\Delta z \neq \Delta x + \Delta y$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = xy$ osamuutude summa ja täissmuudu, kui $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0,2$ ja $\Delta y = 0,1$.

Osamuut x järgi $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.

Osamuut y järgi $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y = 2 \cdot 0,1 = 0,2$. Seega $\Delta_x z + \Delta_y z = 0,8$.

Täismuut $\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,82$.

Samasugusel viisil defineeritakse kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ osamuudud sõltumatute muutujate x , y ja z järgi ning täismuut.

$$\begin{aligned} \Delta_x w &= f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z), \\ \Delta_y w &= f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z), \\ \Delta_z w &= f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z), \\ \Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \end{aligned}$$

2.4 Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Fikseerime kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas ühe punkti $P(x, y)$. Jättes muutuja y konstantseks, muudame muutujat x suuruse Δx võrra ja leiame funktsiooni osamuudu x järgi $\Delta_x z$.

Definitsioon 1. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.4)$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks x järgi.

Osatuletist x järgi tähistatakse veel z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Jättes muutuja x konstantseks, muudame muutujat y suuruse Δy võrra ja leiame funktsiooni osamuudu y järgi $\Delta_y z$.

Definitsioon 2. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.5)$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks y järgi.

Osatuletist y järgi tähistatakse veel z'_y , $f'_y(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Kahe muutja funktsiooni osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y loetud konstantseks. Ainaks muutujaks selles definitsioonis on Δx . Samuti on osatuletise leidmisel y järgi loetud konstantseks muutuja x ja ainsaks muutujaks definitsioonis on Δy . Järelikult jäävad osatuletiste leidmisel kehtima kõik ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise reeglid, millele lisandub reegel, et *muutujat mille järgi osatuletist ei leita, vaadeldakse konstandina*.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^3y - x^2y^2$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y konstantne, seega diferentseerimisreeglite põhjal

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = y \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = y \cdot 3x^2 - y^2 \cdot 2x = 3x^2y - 2xy^2.$$

Osatuletise leidmisel y järgi on x konstantne. Diferentseerimisreeglite abil

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2) = x^3 \frac{\partial}{\partial y}(y) - x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = x^3 - x^2 \cdot 2y = x^3y - 2x^2y.$$

Kehtima jääb ka liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.

Näide 2. Leiame funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletis x järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Osatuletis y järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ osatuletised muutujate x , y ja z järgi defineeritakse vastavalt

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \end{aligned}$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Osatuletiste leidmisel kehtib sama reegel, mis kahe muutuja funktsiooni osatuletiste leidmisel: kõiki muutujaid, va. muutjat, mille järgi osatuletist leitakse, vaadeldakse konstantidena.

Näide 3. Leiame funktsiooni $w = x^{y^z}$ osatuletised kõigi muutujate järgi.

Osatuletise leidmisel muutja x järgi on meil tegemist astmefunktsiooniga konstantse astendajaga y^z , seega

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutja y järgi on tegemist eksponentfunktsiooniga, mille alus on x ja astendajaks astmefunktsioon y^z , seega

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutja z järgi on antud funktsioon eksponentfunktsioon alusega x . Astendaja y^z on samuti eksponentfunktsioon alusega y . Seega

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$$

2.5 Täismuut ja täisdiferentsiaal

Oletame, et kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev ja omab pidevaid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ning $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses.

Sellistel eeldustel on võimalik tõestada, et kahe muutuja funktsiooni täismuut on esitatav kui

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (2.6)$$

kus ε_1 ja ε_2 on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ lõpmatult kahanevad suurused.

Punktis 6.4 võtsime kasutusels tähistuse $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Tingimuste

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

ja

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

põhjal on need tõkestatud suurused. Seega $\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ ja $\varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta \rho}$ on lõpmatult kahanevad suurused kui lõpmatult kahanevate ja tõkestatud suuruste korrutised. Piirväärtus

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\Delta \rho} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \alpha \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \beta \frac{\Delta y}{\Delta \rho} = 0,$$

st $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$ on $\Delta \rho$ suhtes st Δx ja Δy suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus.

Definitsioon. Kui täismuudu avaldises (2.6) esimene summa on Δx ja Δy suhtes lineaarne ja teine summa samade muutujate suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, siis lineaarset osa nimetatakse kahe muutja funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaaliks.

Täisdiferentsiaali tähistatakse dz . Seega definitsiooni kohaselt

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Funktsiooni $z = x$ korral $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ja $dz = dx = \Delta x$.

Funktsiooni $z = y$ korral $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ja $dz = dy = \Delta y$.

Järelikult sõltumatute muutujate x ja y jaoks langevad diferentsiaali ja muudu mõisted kokku ning täisdiferentsiaal on kirjutatav

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (2.7)$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Kasutades punkti 6.5 näites 2 leitud osatuletisi, saame

$$dz = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}.$$

Näide 2. Arvutame funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ täismuudu ja täisdiferentsiaali väärtuse, kui $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0,2$ ja $\Delta y = 0,1$.

Täismuudu valemi (2.3) abil

$$\Delta z = \sqrt{3,2^2 + 4,1^2} - \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{27,05} - \sqrt{25} = 0,20096.$$

Täisdiferentsiaali arvutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Siis

$$dz = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0,2 + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot 0,1 = \frac{0,6}{5} + \frac{0,4}{5} = 0,2.$$

Tehtud arvutustest nähtub, et täismuut ja täisdiferentsiaal erinevad vähem kui 0,001 võrra, st suuruse võrra, mis on kaks suurusjärku väiksem kui Δx ja Δy .

Seda asjaolu arvestades saab täisdiferentsiaali kasutada kahe muutuja funktsiooni väärtuste ligikaudsel arvutamisel. Kui Δx ja Δy on piisavalt väikesed, siis Δz ja dz erinevad teineteisest suuruse võrra, mis on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, kui Δx ja Δy . Seega võime kirjutada

$$\Delta z \approx dz$$

ehk

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Siit saame ligikaudse arvutamise valemi funktsiooni täisdiferentsiaal abil

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.8)$$

Näide 3. Arvutame täisdiferentsiaali abil ligikaudu $2,03^3 \cdot 0,96^2$.

Siin valime $f(x, y) = x^3 y^2$, $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,03$ ja $\Delta y = -0,04$.
Osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y.$$

Funktsiooni väärtus $f(2, 1) = 8 \cdot 1 = 8$ ja osatuletiste väärtused $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$. Valemist (2.8)

$$(2 + 0,03)^3 \cdot (1 - 0,04)^2 = 8 + 12 \cdot 0,03 - 16 \cdot 0,04 = 7,72.$$

Kui kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ ja $\frac{\partial w}{\partial z}$ on pidevad punktis $P(x, y, z)$ ja selle mingis ümbruses, siis sarnaselt

valemile (2.6) on võimalik näidata, et täismuut

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (2.9)$$

kus $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$ on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus kui $\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Funktsiooni w täisdiferentsiaaliks nimetatakse avaldist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \quad (2.10)$$

Viimases langevad sõltumatute muutujate muudud ja diferentsiaalid kokku, st $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ ja $dz = \Delta z$.

Näide 4. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = x^{y^z}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Toetudes punkti 6.5 näite 3 tulemustele, kirjutame

$$\begin{aligned} dw &= y^z x^{y^z-1} dx + x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1} dy + x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y = \\ &= y^z x^{y^z} \left(\frac{dx}{x} + \frac{z \ln x dy}{y} + \ln x \ln y \right). \end{aligned}$$

2.6 Ilmutamata funktsiooni osatuletised

Olgu antud pidev funktsioon ilmutamata kujul

$$F(x, y) = 0 \quad (2.11)$$

See võrdus määrab muutuja y muutuja x (reeglina mitte ühese) funktsioonina. Selle ühe muutuja funktsiooni graafikuks on joon tasandil.

Eeldame, et funktsioonil $F(x, y)$ eksisteerivad punktis $P(x, y)$ ja selle minigis ümbruses pidevad osatuletised F'_x ja F'_y ning et $F'_y(x, y) \neq 0$. Tuletame valemi $\frac{dy}{dx}$ leidmiseks kahe muutuja funktsiooni $F(x, y)$ osatuletiste abil.

Fikseerime funktsiooni graafikuks oleval joonel punkti $P(x, y)$. Selle koordinaadid rahuldavad võrrandit (2.11). Muudame x muudu Δx võrra ja leiame punktile $x + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y + \Delta y$. Et $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ on samuti funktsiooni graafiku punkt, rahuldavad selle punkti koordinaadid joone võrrandit

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \quad (2.12)$$

Lahutades võrrandist (2.12) võrrandi (2.11), saame

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Viimase võrduse vasak pool on funktsiooni $F(x, y)$ täismuut, st

$$\Delta F = 0.$$

Tehted eelduste tõttu saame funktsiooni täismuudu avaldise (2.6) põhjal

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0,$$

millest

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta \right) \Delta y = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x$$

ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}.$$

Leiame tekkinud võrduse mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\Delta x \rightarrow 0$. Vasaku poole piirväärtus on funktsiooni tuletise definitsiooni kohaselt $\frac{dy}{dx}$. Funktsiooni pidevuse tõttu ka $\Delta y \rightarrow 0$. Et α ja β on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0; 0)$ lõpmatult kahanevad suurused, siis $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ ja $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0$ ning pärast parema poole piirväärtuse leidmist saame

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Seega saab ühe muutuja ilmutamata funktsiooni tuletise leidmiseks kasutada ka valemit

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}. \quad (2.13)$$

Näide 1. Leiame ilmutamata funktsiooni $x^4 + y^4 - a^2 x^2 y^2 = 0$ tuletise $\frac{dy}{dx}$.

Siin $F(x, y) = x^4 + y^4 - a^2 x^2 y^2$, seega $F'_x = 4x^3 - 2a^2 x y^2$ ja $F'_y = 4y^3 - 2a^2 x^2 y$. Valemi (2.13) järgi

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{4x^3 - 2a^2 x y^2}{4y^3 - 2a^2 x^2 y} = - \frac{x(2x^2 - a^2 y^2)}{y(2y^2 - a^2 x^2)}.$$

Vaatleme ilmutamata pidevat funktsiooni $F(x, y, z) = 0$. See võrrand määrab muutja z kahe muutja x ja y funktsioonina. Eeldame, et funktsioonil $F(x, y, z)$ eksisteerivad punktis $P(x, y, z)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$ ning $F'_z(x, y, z) \neq 0$.

Funktsiooni z osatuletise leidmisel x järgi vaatleme muutujat y konstandina. Siis on võrrandis $F(x, y, z) = 0$ ainult kaks muutjat x ja z ning (2.13) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}. \quad (2.14)$$

Samasuguse arutluse korral muutuja y jaoks

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (2.15)$$

Näide 2. Leiame ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Selleks leiame $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$ ja $F'_z = 2z$. Valemi (2.14) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

ja valemi (2.15) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

2.7 Liitfunktsiooni osatuletised

Olgu z kahe muutuja u ja v funktsioon $z = f(u, v)$ ning u ja v omakorda kahe muutja x ja y funktsioonid $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$. Sellisel juhul z on liitfunktsioon muutjate x ja y suhtes, st

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y)$$

Eeldame, et funktsioonidel u ja v on punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ ning funktsioonil z vastavas punktis (u, v) ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Nendel eeldustel leitakse liitfunktsiooni $z = F(x, y)$ osatuleti x järgi valemi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.16)$$

abil ja osatuletis y järgi valemi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.17)$$

abil.

Näide 1. Leiame $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$ ja $v = x^2 + y$.

Valemid (2.16) ja (2.17) sisaldavad kuut osatuletitist. Leiame

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2u}{u^2 + v}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{1}{u^2 + v}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{x+y^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 2ye^{x+y^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 1; \end{aligned}$$

Valemi (2.16) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x)$$

ja valemi (2.17) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (4uye^{x+y^2} + 1).$$

Märkus. Kui z on kolme muutja funktsioon $z = f(u, v, w)$ ja lisaks funktsioonidele u ja v on $w = \chi(x, y)$, siis liitfunktsiooni z osatuletised muutujate x ja y järgi leitakse valemite

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.18)$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.19)$$

abil.

Olgu nüüd z kolme muutja x , u ja v funktsioon $z = f(x, u, v)$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$. Siis z on ühe muutuja x liitfunktsioon

$$z = f(x, \varphi(x), \psi(x)),$$

mille tuletise $\frac{dz}{dx}$ leidmiseks saame valemi (2.18) abil. Et x tuletis x järgi $\frac{dx}{dx} = 1$ ja u ning v on ühe muutuja funktsioonid, siis

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (2.20)$$

Valemit (2.20) nimetatakse *täistuletise* valemiks.

Näide 2. Leiame $\frac{dz}{dx}$, kui $z = x^2 + \sqrt{y}$ ja $y = x^2 + 1$.

Antud juhul z on kahe muutuja x ja y funktsiooni, kus y on muutja x funktsioon. Antud olukorra jaoks annab täistuletise valem (2.20) tulemuse

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

2.8 Kõrgemat järku osatuletised

Näidetest on selgunud, et kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on üldiselt kahe muutuja funktsioonid. Seega on võimalik mõlemat diferentseerida kahe muutuja x ja y järgi.

Definitsioon 1. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (loetakse *de-ruut-dzett de-iks-ruut*) nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x ja y järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

Definitsioon 3. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y ja x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Definitsioon 4. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Kui diferentseeritud on erinevate muutujate järgi, siis teist järku osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

nimetatakse ka *segatuletisteks*.

Nende teist järku osatuletiste jaoks kasutatakse veel tähistusi vastavalt $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}$ ja z''_{yy} või $f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ ja $f''_{yy}(x, y)$.

Saadud teist järku osatuletised on omakorda kahe muutuja x ja y funktsioonid. Seega saab kõigist neljast leida osatuletised x ja y järgi. ja nii saadakse kaheksa kolmandat järku osatuletist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Näide 1. Leiame kahe muutuja funktsiooni $z = \arctan \frac{x}{y}$ teist järku osatuletised.

Punkti 6.5 näites 2 leidsime, et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Leiame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = y \left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = -x \left(-\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Esitatud näite põhjal võib püstitada küsimuse, kas teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

on alati võrdsed. Alati see nii ei ole, aga kui funktsioonil on piisavalt head omadused, siis segatuletised on võrdsed. Tõestuseta formuleerime teoreemi segatuletiste võrdsusest.

Teoreem. Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ on pidevad punktis P ja selle mingis ümbruses, siis punktis P

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Vajalike osatuletiste pidevuse korral ei sõltu ka kõrgemat järku osatuletised diferentseerimise järjekorrast, vaid ainult sellest, mitu korda on kummagi muutuja järgi diferentseeritud. Näiteks võime kõigi madalamat järku osatuletiste ja ka vaadeldavate osatuletiste pidevuse korral punktis ja selle ümbruses kirjutada

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2}$$

Samasugune teoreem kehtib ka kolme ja enam muutuja funktsiooni puhul.

Näide 2. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = e^x \sin(yz)$ kolmandat järku osatuletised $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ ja $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y}$.

Esimese kolmandat järku osatuletise jaoks leiame kõigepealt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x \sin(yz),$$

siis

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^x \cos(yz) \cdot z = z e^x \cos(yz)$$

ja kolmandaks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = e^x \cos(yz) + z(-e^x \sin(yz)) \cdot y = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)]$$

Teise kolmandat järku osatuletise jaoks leiame

$$\frac{\partial w}{\partial z} = ye^x \cos(yz)$$

seejärel

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = ye^x \cos(yz)$$

ja lõpuks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} = e^x \cos(yz) - ye^x \sin(yz) \cdot z = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)]$$

3 Kordused integraalid

3.1 Kahekordse integraali mõiste

Olgu tõkestatud piirkonnas D määratud kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$. Jagame piirkonna D suvalisel viisil n osapiirkonnaks

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_k, \dots, \Delta s_n,$$

kus Δs_k , $1 \leq k \leq n$, tähendab kontekstist sõltuvalt k -ndat osapiirkonda või selle pindala.

Valime igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k) \in \Delta s_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta s_k$. Kui eeldada, et $f(P_k) \geq 0$, siis korrutis tähendab niisuguse püstprisma ruumala, mille põhjaks on Δs_k ja kõrgus $f(P_k)$.

Summat

$$\sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta s_k$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ *integraalsummaks* piirkonnas D . Geomeetriliselt vastab sellele prisma ruumalade summa.

Piirkonna Δs_k diameetriks nimetatakse selle piirkonna punktide vahelist suurimat kaugust

$$\text{diam } \Delta s_k = \max_{P, Q \in \Delta s_k} |\overrightarrow{PQ}|.$$

Jaotus osapiirkondadeks on suvaline. Igal osapiirkonnal on oma diameeter. Neist suurimat tähistame sümboliga λ , st

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta s_k.$$

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta s_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond D jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D ja tähistatakse

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Definitsiooni kohaselt

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta s_k \quad (3.1)$$

Kui $f(x, y) \geq 0$ piirkonnas D , siis kahekordne integraal tähendab geomeetriliselt niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud xy -tasandi piirkonnaga D , ülalt funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ja juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

3.2 Kahekordse integraali omadused

Omadus 1. Kahe funktsiooni summa kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide summaga

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

Omadus 2. Kui c on konstant, siis

$$\iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$$

st konstantse teguri saab tuua integraali märgi alt välja.

Omadus 3. Kahe funktsiooni vahe kahekordne integraal on võrdne nende funktsioonide kahekordsete integraalide vahega

$$\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_D g(x, y) dx dy$$

Omadus 3 järeldeb omadustest 1 ja 2, sest

$$f(x, y) - g(x, y) = f(x, y) + (-1)g(x, y)$$

Omadus 4. Kui $D = D_1 \cup D_2$ ning piirkonnad D_1 ja D_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3.3 Kahekordse integraali arvutamine

Selles punktis eeldame, et integreerimispiirkond D on tõkestatud ja kinnine. Piirkonda D nimetatakse regulaarseks y -telje sihis, kui iga y -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna D sisepunkte, lõikab piirkonna rajajoont kahes punktis.

y -telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $a \leq x \leq b$ ja $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$.

Olgu piirkonnas D määratud pidev funktsioon $f(x, y)$. Integraali

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ *kaksikintegraaliks* üle piirkonna D . Kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse nn *seesmine* integraal

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Siin on integreerimismuutujaks y ja muutujat x vaadeldakse integreerimisel konstandina. Integreerimise tulemuseks on mingisugune muutuja x funktsioon $\Phi(x)$. Teiseks arvutatakse nn *väline* integraal

$$\int_a^b \Phi(x) dx$$

ja tulemuseks on arv.

Tavaliselt kasutatakse kaksikintegraali esitamiseks kirjaviisi

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (3.2)$$

Näide 1. Arvutame kaksikintegraali

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y) dy$$

Integreerimispiirkond D on kirjeldatav võrratustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq x^2$.

Esiteks leiame seesmise integraali

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y) dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^4}{2} = \frac{3x^4}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$\int_0^1 \frac{3x^4}{2} dx = \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Piirkonda D nimetatakse regulaarseks x -telje sihis, kui iga x -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna D sisepunkte, lõikab piirkonna rajajoont kahes punktis.

x -telje sihis regulaarne piirkond on kirjeldatav võrratustega $c \leq y \leq d$ ja $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$.

Kaksikintegraal üle x -telje sihis reguleeritava piirkonna defineeritakse

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Ka selle kaksikintegraali arvutamine seisneb kahe järjestikuse määratud integraali arvutamises. Esiteks arvutatakse seesmine integraal

$$\Psi(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

ja seejärel väline integraal

$$\int_c^d \Psi(y) dy$$

Viimase kaksikintegraali esitamiseks kasutatakse kirjaviisi

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (3.3)$$

Kaksikintegraalis (3.2) on y seesmiseks muutujaks ja x väliseks muutujaks, kaksikintegraalis (3.3) on olukord vastupidine. Üleminekut ühe integreerimisjärjekorralt teisele nimetatakse integreerimisjärjekorra muutmiseks ehk vahetamiseks.

Näide 2. Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

Antud kaksikintegraalis on seesmiseks muutujaks y ja väliseks x . Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist peab väliseks muutujaks olema y , mis jääb konstantide vahele, muutuja x rajad võivad sõltuda muutujast y . Jooniselt on näha, et $0 \leq y \leq 1$. Parabooli $y = x^2$ võrrandist avaldame $x = \pm\sqrt{y}$. Antud piirkonda piirab parabooli parem haru, kus $x = \sqrt{y}$, seega x muutub piirkonnas D lõigul $\sqrt{y} \leq x \leq 1$. Järelikult saame pärast integreerimisjärjekorra vahetamist kaksikintegraali

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$$

Näide 3. Vahetame integreerimisjärjekorra kaksikintegraalis

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x, y) dx. \quad (3.4)$$

Integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \leq y \leq 3$ ja $y \leq x \leq 6 - y$. Kanname joonisele sirged $y = 0$, $y = 3$, $x = y$ ja $x = 6 - y$.

Integreerimispiirkonnas $0 \leq x \leq 6$ ja $0 \leq y \leq \varphi(x)$, kus

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 3 \\ 6 - x, & \text{kui } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Pärast integreerimisjärjekorra vahetamist

$$\int_0^6 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy$$

Määratud integraali lõigul aditiivsuse omaduse tõttu

$$\begin{aligned} & \int_0^3 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Osutub, et kaksimintegraal on sobiv vahend kahakordse integraali arvutamiseks. Kehtib teoreem.

Teoreem. Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev y -telje sihis regulaarses piirkonnas D , siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (3.5)$$

abil. Kui D on regulaarne x -telje sihis, arvutatakse kahekordne integraal valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (3.6)$$

abil.

Näide 4. Arvutame kahekordse integraali $\iint_D (x+y) dx dy$, kui piirkond

D on piiratud sirgega $x+y=2$ ja parabooliga $y=x^2$.

Piirkonna joonise tegemiseks leiame parabooli ja sirge lõikepunktide abstsissid võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Asendades teisest võrrandist $y = 2-x$ esimesse, saame $x^2 + x - 2 = 0$, millest $x_1 = -2$ ja $x_2 = 1$.

Integreerimispiirkond D on määratud võrratustega $-2 \leq x \leq 1$ ja $x^2 \leq y \leq 2-x$. Arvutusvalemist (3.5)

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+y) dy$$

Arvutame seesmise integraali

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{2-x} (x+y) dy &= \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2-x} \\ &= x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} = 2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

ja seejärel välise integraali

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \left(2 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx &= \left(2x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \left(-4 + \frac{4}{3} - 4 + \frac{16}{5} \right) = 4,95. \end{aligned}$$

3.4 Muutuja vahetus kahekordses integraalis

Alustame kahekordse integraali arvutamise näitest.

Näide 1. Arvutame kahekordse integraali

$$\iint_D (2x - 3y - 4)^2 dx dy$$

kui D on sirgetega $x + y = -1$, $x + y = 3$, $3y - 2x = 6$ ja $2x - 3y = 12$ piiratud piirkond.

Paneme tähele, et kaks esimest sirget on paralleelsed ning kolmas ja neljas sirge on paralleelsed. Esimese ja kolmanda sirge lõikepunkt on $A\left(-\frac{9}{5}; \frac{4}{5}\right)$, esimese ja neljanda sirge lõikepunkt $B\left(\frac{9}{5}; -\frac{14}{5}\right)$, teise ja neljanda sirge lõikepunkt $C\left(\frac{21}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ ning teise ja kolmanda sirge lõikepunkt $D\left(\frac{3}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Selleks, et arvutada kahekordset integraali valemi (3.5) abil, peab piirkonna punktidest D ja B tõmmatud vertikaalsete sirgetega kolmeks jaotama, arvutama antud kahekordse integraali üle kolme piirkonna eraldi ning tulemused liitma. See on seotud küllalt mahuka tehnilise tööga, mida on võimalik vältida, kasutades integreerimiseks muutuja vahetust.

Kahekordses integraalis minnakse muutujatelt x ja y muutujatele u ja v seoste

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (3.7)$$

abil. Eeldame, et kahe muutuja funktsioonid $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ on vaadeldavas uv -tasandi piirkonnas ühesed, pidevad ning omavad pidevaid osatuletisi mõlema muutuja järgi. Lisaks eeldame, et võrrandisüsteem (3.9) on üheselt lahenduv muutujate u ja v suhtes. Sellisel juhul vastab igale xy -tasandi punktile piirkonnas D parajasti üks uv -tasandi punkt piirkonnas D' ja vastupidi.

Muutujate vahetuse Jacobi determinandiks ehk *jakobiaaniks* nimetatakse determinanti

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Muutujate vahetus kahekordses integraalis toimub valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv. \quad (3.9)$$

abil.

Pöördume tagasi punkti alguses toodud näite juurde ja teeme kahekordses integraalis muutuja vahetuse

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - 3y \end{cases} \quad (3.10)$$

Sellises juhul xy -tasandi rööpkülik teiseneb uv -tasandi ristkülikuks, mis on määratud tingimustega $-1 \leq u \leq 3$ ja $-6 \leq v \leq 12$. Integreeritav funktsioon $(2x - 3y - 4)^2 = (v - 4)^2$. Jakobiaani (3.8) arvutamiseks avaldame võrrandisüsteemist (3.10) muutujad x ja y

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v \\ y = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v \end{cases}$$

ja leiame osatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{3}{5}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{2}{5}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{5}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Seega

$$J = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{1}{5}$$

ja muutja vahetuse valemi abil (3.9) leiame

$$\iint_D (2x - 3y - 4)^2 dx dy = \iint_{D'} (v - 4)^2 \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \int_{-1}^3 du \int_{-6}^{12} (v - 4)^2 dv = 403 \frac{1}{5}$$

3.5 Kahekordne integraal polaarkoordinaatides

Kui ristkoordinaadistik on asetatud polaarkoordinaadistiku suhtes tavalisel viisil, st x -telg ühtib polaarteljega ja y -telg läbib poolust, siis üleminek ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele toimub seoste

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (3.11)$$

abil, kus φ tähistab polaarnurka ja ρ polaarraadiust.

Konstantsetele polaarnurkadele polaarkoordinaatides vastavad koordinaatide alguspunktist lähtuvad sirged ristkoordinaadistikus ja konstantsetele polaarraadiustele vastavad ringjooned keskpunktiga koordinaatide alguses. Seega on muutuja vahetust (3.11) eelkõige sobiv kasutada juhul, kui integreerimispiirkonnaks ristkoordinaadistikus on ring või mingi ringi osa.

Muutuja vahetuse valemi (3.9) kasutamiseks leiame $f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ ja jakobiaani

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho$$

ja arvestades sellega, et ρ kui polaarraadius on mittenegatiivne $|J| = \rho$.

Tähistame xy -tasandi piirkonnale D vastava piirkonna $\varphi\rho$ -tasandil sümboliga Δ . Siis muutja vahetuse valemist (3.9) saame üleminekul ristkoordinaatidest polaarkoordinaatidesse valemi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho. \quad (3.12)$$

Näide 1. Teisendame polaarkoordinaatidesse kahekordse integraali

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

kui integreerimispiirkonnaks D on ring $x^2 + y^2 \leq 4y$.

Piirkond D on piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 = 4y$, mille teisendamisel saame $x^2 + y^2 - 4y = 0$, st $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$ ehk $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Seega ringjoone keskpunktiks on $(0; 2)$ ja raadiuseks 2.

x -telg on ringjoone puutujaks, seega polaarnurk muutub $0 \leq \varphi \leq \pi$. Polaarraadius algab iga nurga korral 0-st. Suurim kaugus on ringjoonel ja seega sõltub polaarnurgast. Sõltuvuse kindlakstegemiseks asendame ülemineku valemist (3.11) x ja y ringjoone võrrandisse $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \sin \varphi$, millest

$$\rho = 4 \sin \varphi$$

Valemi (3.12) põhjal kirjutame

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho,$$

kus integreerimispiirkond Δ rahuldab tingimusi $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja $0 \leq \rho \leq 4 \sin \varphi$.
Kahekordse integraali arvutusvalemi järgi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Näide 2. Arvutame polaarkoordinaatide abil kahekordse integraali

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$$

kui integreerimispiirkond D on piiratud joontega $y = 0$ ja $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Et $x^2 + y^2 + 1 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + 1 = \rho^2 + 1$, siis

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} = \iint_\Delta \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho^2 + 1}.$$

Piirkond D on piiratud x -teljega ja ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ ülemise poolega.

Piirkonnale D vastav piirkond polaarkoordinaadistikus Δ on määratud võrratustega $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja $0 \leq \rho \leq 1$, seega

$$\iint_\Delta \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho^2 + 1} = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1}$$

Leiame seesmise integraali

$$\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(\rho^2 + 1)}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

ja välise integraali

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} \ln 2 d\varphi = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

3.6 Pindalade ja ruumalade arvutamine kahekordse integraali abil

Kahekordse integraali defineerimisel veendusime, et kui funktsioon $f(x, y) \geq 0$ piirkonnas D , siis geomeetriliselt tähendab kahekordne integraal

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

niisuguse kõversilindri ruumala, mis alt on piiratud xy -tasandi piirkonnaga D , ülalt funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks oleva pinnaga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ja juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

Eeldame, et piirkonnas D on täidetud tingimus $f(x, y) \geq g(x, y)$. Kahekordse integraali omaduse tõttu

$$\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_D g(x, y) dx dy$$

Mõlemad kahekordsed integraalid tähendavad geomeetriliselt kõversilindri ruumalasid, esimene neist on pealt piiratud funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuga ja teine funktsiooni $z = g(x, y)$ graafikuga. Seega nende vahe tähendab niisuguse kõversilindri ruumala, mis pealt on piiratud funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuga, alt funktsiooni $z = g(x, y)$ graafikuga ja küljelt silinderpinnaga, mille moodustaja on paralleelne z -teljega ning juhtjooneks piirkonna D rajajoon.

Kõversilindri ruumala arvutatakse valemist

$$V = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy. \quad (3.13)$$

Näide 1. Arvutame tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ piiratud piirkonna ruumala.

Antud tasanditega piiratud piirkonnaks on püramiid.

Antud piirkonda piirab ülalt tasapind $z = 1 - x - y$ ja alt xy -tasand $z = 0$. Valemis (3.13) $f(x, y) = 1 - x - y$ ja $g(x, y) = 0$. Püramiidi ruumala on valemi järgi

$$V = \iint_D (1 - x - y) dx dy.$$

Piirkond D on määratud tingimustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$, seega

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy.$$

Arvutame kõigepealt seesmise integraali

$$\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = - \int_0^{1-x} (1 - x - y) d(1 - x - y) = - \frac{(1 - x - y)^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1 - x)^2}{2}$$

ja seejärel välise integraali

$$V = \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2} dx = - \int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2} d(1 - x) = - \frac{(1 - x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Kui kõversilindri kõrgus $f(x, y) = 1$ igas piirkonna D punktis, siis selle ruumala $V = S_D \cdot 1$, kus S_D tähistab põhja pindala. Asendades funktsiooni $f(x, y) = 1$ ruumala arvutamise valemisse

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

saame tasandilise piirkonna D pindala arvutamiseks valemi

$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (3.14)$$

Näide 2. Arvutame lemniskaadiga $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ piiratud kujundi pindala.

Teisendades lemniskaadi võrrandi polaarkoordinaatidesse, saame $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Seega $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, millest $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ või $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$.

Lemniskaat on sümmeetriline nii x - kui ka y -telje suhtes. Arvutame lemniskaadiga piiratud kujundi koordinaattasandi esimesse veerandisse jääva osa pindala ja korrutame 4-ga. Valemis (3.14) on integreerimispiirkonnaks veerand lemniskaadiga piiratud piirkonnast. Teisendades integraali polaarkoordinaatidesse, saame

$$S = 4 \iint_D dx dy = 4 \iint_{\Delta} \rho d\varphi d\rho.$$

Integreerimispiirkond Δ on polaarkoordinaatides määratud tingimustega $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ja $0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}$, järelikult

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho.$$

Seesmise integraali arvutamisel saame

$$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{2} \cos 2\varphi$$

ja

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

3.7 Kolmekordse integraali mõiste ja omadused

Olgu ruumilises piirkonnas V määratud kolme muutuva funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame piirkonna V suvalise viisil n osapiirkonnaks

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_k, \dots, \Delta v_n$$

kusjuures kontekstist sõltuvalt Δv_k tähistab nii k -ndat osapiirkonda kui ka selle ruumala.

Valime igast osapiirkonnast suvalise punkti $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ ja moodustame korrutised $f(P_k)\Delta v_k$. Kõikide korrutiste summerimisel saame summa

$$\sum_{k=0}^n f(P_k)\Delta v_k, \quad (3.15)$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ integraalsummaks üle piirkonna V .

Olgu

$$\text{diam } \Delta v_k = \max_{P, Q \in \Delta v_k} |\overrightarrow{PQ}|$$

piirkonna Δv_k diameeter ja tähistagu λ piirkondade diameetritest suurimat, st

$$\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} \text{diam } \Delta v_k$$

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(P_k) \Delta v_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on piirkond V jaotatud osapiirkondadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapiirkondades, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordseks integraaliks üle piirkonna V ja tähistatakse

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(P_k) \Delta v_k \quad (3.16)$$

Kolmekordse integraali omadused on sarnased kahekordse integraali vastavate omadustega.

Omadus 1.

$$\iiint_V [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$$

Omadus 2. Kui c on konstant, siis

$$\iiint_V c f(x, y, z) dx dy dz = c \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

st konstantse teguri saab tuua kolmekordse integraali märgi alt välja (viia kolmekordse integraali märgi alla).

Omadus 3. Kui $V = V_1 \cup V_2$ ja piirkonnad V_1 ja V_2 ei oma ühiseid sisepunkte, siis

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Kui eeldada, et piirkonnas V on $f(x, y, z) \geq 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena punktis (x, y, z) . Siis ühe punkti P_k fikseerimine osapiirkonnas Δv_k tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks, st selliseks, mis on aine tihedus selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_k)\Delta v_k$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks.

Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna V massi. Piirprotsess $\lambda \rightarrow 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Kokku võttes, tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x, y, z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna V massi.

Kui piirkond V on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $f(x, y, z) \equiv 1$, siis piirkonna V mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna V ruumala on arvutatav kolmekordse integraali

$$V = \iiint_V dx dy dz \quad (3.17)$$

abil. Näidet selle valemi kasutamise kohta vaatleme allpool.

3.8 Kolmekordse integraali arvutamine

Ruumilist piirkonda V nimetatakse regulaarseks z -telje sihis, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Iga z -teljega paralleelne sirge, mis läbib piirkonna sisepunkte, lõikab piirkonna rajapinda kahes punktis.
2. Piirkonna projektsioon xy -tasandil on regulaarne tasandiline piirkond.
3. Kui piirkonda lõigata mingi vertikaalse tasandiga, siis lõike tagajärjel tekkinud osad on omadustega 1. ja 2.

Regulaarne piirkond V on kirjeldatav tingimustega $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ja $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$. Sellisel juhul on kolmekordne integraal arvutatav valemist

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (3.18)$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kaht erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6 ja peale valemi (3.18) on võimalik kasutada veel viit arvutusvalemit.

Valemi (3.18) kasutamisel arvutatakse järjest kolm määratud integraali. Kõigepealt seesmine integraal muutuja z järgi (siis x ja y loetakse integreerimisel konstantideks)

$$\Psi(x, y) = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

seejärel integreeritakse muutuja y järgi ja leitakse

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x, y) dy$$

ning lõpuks integreeritakse muutuja x järgi

$$\int_a^b \Phi(x) dx$$

Näide. Arvutame kolmekordse integraali

$$\iiint_V xyz dx dy dz$$

kui piirkond V on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.

määrame integreerimispiirkonna jaoks rajad: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ ja $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Seega

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$$

Arvutame seesmise integraali

$$\int_0^{1-x-y} xyz dz = xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = xy \frac{(1-x-y)^2}{2},$$

seejärel integreerime y järgi

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} xy \frac{(1-x-y)^2}{2} dy &= \frac{x}{2} \int_0^{1-x} y[(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2] dy \\ &= \frac{x}{2} \left[(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right] \Big|_0^{1-x} \\ &= \frac{x}{2} \left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4} \right] = \frac{x(1-x)^4}{24} \end{aligned}$$

ja lõpuks

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx &= -\frac{1}{24} \int_0^1 (-x)(1-x)^4 dx \\ &= -\frac{1}{24} \int_0^1 (1-x-1)(1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 [(1-x)^5 - (1-x)^4] d(1-x) \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{(1-x)^6}{6} - \frac{(1-x)^5}{5} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{720} \end{aligned}$$