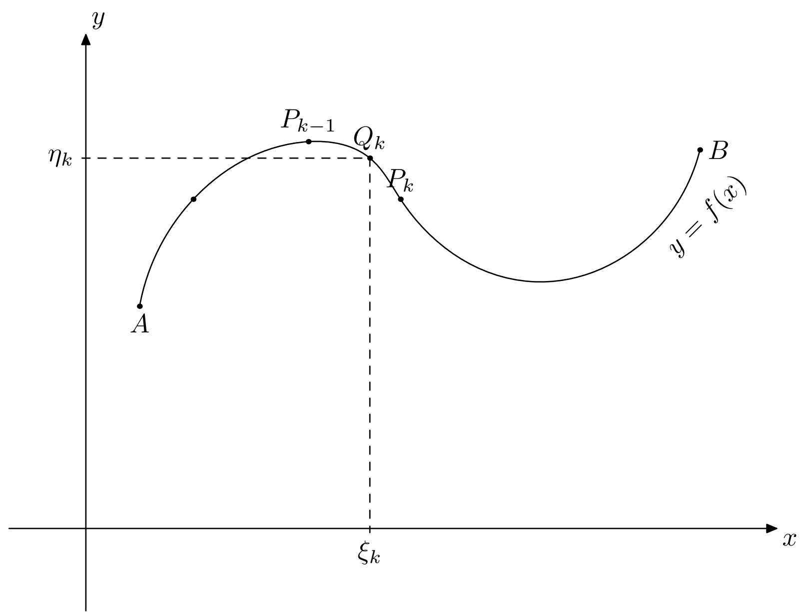
7 Joonintegraalid

7.1 Esimest liiki joonintegraali definitsioon ja omadused

Olgu antud tasandiline kõverjoon otspunktidega A ja B ja olgu sellel joonel defineeritud kahe muutuja funktsioon $f(x,y)$, st igale joone punktile (x,y) on vastavusse seatud väärtus $f(x,y)$. Jaotame joone AB suvalisel viisil punktidega

$$A = P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots, P_{k-1},\ P_k,\ \ldots,\ P_n = B$$

osakaarteks $\widehat{P_{k-1}P_k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Valime igal osakaarel juhusliku punkti $Q_k(\xi_k, \eta_k) \in \widehat{P_{k-1}P_k}$.



Joonis 7.1. Joone AB jaotamine osakaarteks

Osakaare $\widehat{P_{k-1}P_k}$ pikkust tähistame Δs_k. Edasi moodustame korrutised $f(Q_k)\Delta s_k$, kus $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ ja leiame summa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(Q_k)\Delta s_k \tag{7.1}$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ integraalsummaks üle joone AB.

Joone AB jaotus punktidega $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots, P_{k-1},\ P_k,\ \ldots,\ P_n$ on suvaline. Seega on osakaarte $\widehat{P_{k-1}P_k}$ pikkused Δs_k erinevad. Tähistame pikima osakaare pikkust

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta s_k$$

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n$$

ja see ei sõltu joone AB osakaarteks jaotamise viisit ega punktide Q_k valikust osakaartel, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ *esimest liiki joonintegraaliks* üle joone AB ehk *joonintegraaliks kaare pikkuse järgi* ja tähistatakse

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds$$

Vahetult definitsioonist järelduvad esimest liiki joonintegraali omadused.

Omadus 1. Esimest liiki joonintegraal ei sõltu joone läbimise suunast, st

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds$$

Omadus 2. (Aditiivsuse omadus) Kui C on mingi joone AB punkt, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds$$

Omadus 3.

$$\int\limits_{AB} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds \pm \int\limits_{AB} g(x,y)ds$$

Omadus 4. Kui c on konstant, siis

$$\int\limits_{AB} cf(x,y)ds = c\int\limits_{AB} f(x,y)ds$$

Omadus 5. Võttes esimest liiki joonintegraali definitsioonis $f(x,y) \equiv 1$, siis integraalsumma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

on osakaarte pikkuste summa, mis sõltumata joone AB osakaarteks jaotamise viisist annab joone AB pikkuse s_{AB}, st

$$s_{AB} = \int\limits_{AB} ds$$

Kui AB on ruumiline joon, siis iga joone punkt $Q_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ on määratud kolme koordinaadiga ja sellel joonel saab defineerida kolme muutuja funktsiooni $f(x,y,z)$. Kõik muu jääb esimest liiki joonintegraali defineerides tasandilise juhuga samaks, st

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(Q_k)\Delta s_k \tag{7.2}$$

Loomulikult jäävad kehtima ka kõik viis loetletud esimest liiki joonintegraali omadust.

Kui joonel AB funktsioon $f(x,y,z) \geq 0$, siis on funktsioon $f(x,y,z)$ tõlgendatav aine joontihedusena punktis $P(x,y,z)$. Sellisel juhul korrutis $f(Q_k)\Delta s_k$ on ligikaudu k-nda osakaare mass. Ligikaudu sellepärast, et tihedus $f(x,y,z)$ on osakaarel muutuv suurus, siin aga on joontihedus osakaarel loetud võrdseks joontihedusega ühes osakaarel välja valitud punktis Q_k.

Integraalsumma (7.1) tähendab sel juhul joone AB ligikaudset massi ja see summa iseloomustab joone massi seda täpsemalt, mida lühemad on osakaared ehk mida suuremaks hulgaks osakaarteks on joon AB jaotatud. Esimest liiki joonintegraal (7.2)annab meile funktsiooni $f(x,y,z)$ mainitud tõlgenduse korral joone AB täpse massi.

7.2 Esimest liiki joonintegraali arvutamine

Olgu tasandilise joone AB parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ja ruumilise joone AB parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases}$$

kus mõlemal juhul punktis A on parameetri väärtus $t = \alpha$ ja punktis B on $t = \beta$.

Definitsioon. Tasandilist joont AB nimetatakse siledaks, kui $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ ja $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ on pidevad lõigul $[\alpha; \beta]$ ning

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$$

Definitsioon. Ruumilist joont AB nimetatakse siledaks, kui $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ ja $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$ on pidevad lõigul $[\alpha; \beta]$ ning

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0$$

Tõesuseta sõnastame järgmised teoreemid.

Teoreem 1. Olgu funktsioon $f(x,y)$ pidev siledal joonel AB. Siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)]\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt \tag{7.3}$$

Teoreem 2. Olgu funktsioon $f(x,y,z)$ pidev siledal joonel AB. Siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt \qquad (7.4)$$

Kui joon AB on ilmutatud kujul antud funktsiooni $y=\varphi(x)$ graafikuks ja punktis A $x=a$ ning punktis B $x=b$, siis kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3. Olgu funktsioon $f(x,y)$ pidev siledal joonel AB. Siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+y'^2}dx \qquad (7.5)$$

See teoreem järeldub vahetult teoreemist 1, sest kui sõltumatut muutujat x vaadelda parameetrina, saame ilmutatud kuju asemel kasutada parameetrilist esitusviisi

$$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases},$$

millest $\dot{x} = \dfrac{dx}{dx} = 1$ ja $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx} = y'$.

Näide 1. Arvutame joonintegraali $\int\limits_{AB} \dfrac{ds}{x-y}$, kus AB on koordinaattelgede vahele jääv sirge $y=2x-3$ lõik.

Sirge on ilmutatud kujul antud funktsiooni graafikuks, seega arvutamiseks kasutame valemit (7.5).

Lõikepunktis y-teljega on $x=0$ ja lõikepunktis x-teljega on $y=0$, st $x=\dfrac{3}{2}$. Valemi kasutamise jaoks leiame $y=2$ ja $1+y'^2=5$. Seega

$$\begin{aligned}\int\limits_{AB} \frac{ds}{x-y} &= \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}dx}{x-(2x-3)} = \sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3-x} = -\sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{d(3-x)}{3-x} \\ &= -\sqrt{5}\ln|3-x|\Big|_0^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{5}\left(\ln\frac{3}{2}-\ln 3\right) = -\sqrt{5}\ln\frac{1}{2} = \sqrt{5}\ln 2\end{aligned}$$

Näide 2. Arvutame joonintegraali $\int\limits_{AB} \sqrt{y}ds$, kus AB on tsükloidi $x = a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ esimene kaar.

Tsükloid on tasandiline joon, mille esimene kaar moodustub, kui $0 \le t \le 2\pi$. Valemi (7.3) rakendamiseks leiame $\dot{x}=a(1-\cos t)$, $\dot{y}=a\sin t$ ja $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t) = 2a^2(1-\cos t)$.

Valemi (7.3) järgi

$$\int\limits_{AB} \sqrt{y}ds = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a(1-\cos t)}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt =$$

$$a\sqrt{2a}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = a\sqrt{2a}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a\sqrt{2a}$$

Näide 3. Arvutame joonintegraali $\int\limits_{AB}(2z-\sqrt{x^2+y^2})ds$, kus AB on koonilise kruvijoone $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ esimene kaar.

Koonilise kruvijoone esimene kaar moodustub, kui $0 \le t \le 2\pi$. Leiame $\dot{x} = \cos t - t\sin t$, $\dot{y} = \sin t + t\cos t$, $\dot{z} = 1$ ja

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1 =$$

$$\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1 = 2 + t^2$$

Valemi (7.4) abik leiame

$$\int\limits_{AB}(2z-\sqrt{x^2+y^2})ds = \int\limits_0^{2\pi}(2t-\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t})\sqrt{2+t^2}dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(2t-t)\sqrt{2+t^2}dt = \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+t^2}d(2+t^2) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{(2+4\pi^2)\sqrt{2+4\pi^2}-2\sqrt{2}}{3}$$

7.3 Teist liiki joonintegraal

Olgu AB tasandiline joon ja $\overrightarrow{F}$ jõuvektor, mis teeb tööd, liikudes trajektooril AB. Seame eesmärgiks leida jõuvektori $\overrightarrow{F}$ poolt tehtav töö. Selleks jaotame joone AB suvaliste punktidega

$$A = P_0,\ P_1,\ \dots,\ P_{k-1},\ P_k,\ \dots,\ P_n = B$$

osakaarteks $\widehat{P_{k-1}P_k}$, kus $k = 1,\ 2,\ \dots,\ n$ ja lähendame osakaari $\widehat{P_{k-1}P_k}$ vektoritega $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$.

Olgu punkti P_k koordinaadid x_k ja y_k, st $P_k(x_k; y_k)$. Tähistades

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

ja

$$\Delta y_x = y_k - y_{k-1},$$

on vektori koordinaadid

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k; \Delta y_k).$$

Vektori $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ pikkuse tähistame Δs_k, st

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

Jõuvektori suund ja suurus sõltuvad selle rakenduspunktist, st selle mõlemad koordinaadid on rakenduspunkti funktsioonid

$$\overrightarrow{F} = (X(x,y); Y(x,y)).$$

Valime kaarel $\widehat{P_{k-1}P_k}$ suvalise punkti $Q_k(\xi_k; \eta_k)$ ja loeme osakaarel $\widehat{P_{k-1}P_k}$ jõuvektori konstantseks, st oletame, et jõuvektori pikkus ja suund on osakaarel võrdsed jõuvektori pikkuse ja suunaga punktis Q_k, st

$$\overrightarrow{F_k} = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$$

Mehhaanikast on teada, et kui jõud $\overrightarrow{F_k}$ liigub mööda vektorit $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ punktist P_{k-1} punkti P_k, siis selle jõu poolt tehtav töö A_k on võrdne vektorite $\overrightarrow{F_k}$ ja $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ skalaarkorrutisega, st

$$A_k = \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

Kogu töö, mida teeb jõuvektor $\overrightarrow{F}$, liikudes punktist A punkti B on ligikaudu võrdne summaga

$$\sum_{k=1}^{n} [X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]. \tag{7.6}$$

Ligikaudu tehtud lähenduste tõttu: kaart $\widehat{P_{k-1}P_k}$ lähendasime vektoritega $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ ja muutuvat jõuvektorit $\overrightarrow{F} = (X(x,y); Y(x,y))$ konstantse vektoriga $\overrightarrow{F_k} = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$.

On ilmne, et mida tihedamalt võtta jaotuspunktid, seda täpsemalt lähendab vektor $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ osakaart $\widehat{P_{k-1}P_k}$ ja konstantne vektor $\overrightarrow{F_k} = (X(\xi_k, \eta_k); Y(\xi_k, \eta_k))$ osakaarel muutuvat vektorit $\overrightarrow{F} = (X(x,y); Y(x,y))$

Definitsioon. Kui summast (7.6) $\exists$ piirväärtus piirprotsessis $\max \Delta s_k \to 0$ ja see piirväärtus ei sõltu joone AB osakaarteks jaotamise viisist ega punktide Q_k valikust osakaartel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki joonintegraaliks* ehk *joonintegraaliks koordinaatide järgi* ja tähistatakse

$$\int_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Definitsiooni kohaselt

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [X(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \tag{7.7}$$

Kui AB on ruumiline joon, siis

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k; \Delta y_k; \Delta z_k),$$

selle vektori pikkus

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}$$

ja jõuvektori kolm koordinaaati on rakenduspunkti funktsioonid

$$\overrightarrow{F} = (X(x,y,z); Y(x,y,z)); Z(x,y,z)).$$

Teist liiki joonintegraal defineeritakse piirväärtusena

$$\int\limits_{AB} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$

$$= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k]$$

Teist liiki joonintegraali definitsioonist järeldub vahetult kaks omadust. Lühiduse mõttes esitame need tasandilise joone korral, aga kehtivad need ka ruumilise joone puhul.

Omadus 1. Kui C on suvaline joonel AB asuv punkt, siis

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{AC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy + \int\limits_{CB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy \tag{7.8}$$

Põhjenduseks piisab märkida, et võttes teist liiki joonintegraali defineerides esimeseks joone AB jaotuspunktiks C ja edasi jätkates joone jaotamist suvalisel viisil, tekivad joonte AC ja CB suvalised jaotused osakaarteks. Inregraalsumma üle joone AB on võrdne integralsummade summaga üle joonte AC ja CB.

Omadus 2. Kui muuta teist liiki joonintegraalis joone läbimise suunda, siis märk integraali ees muutub vastupidseks, st

$$\int\limits_{BA} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = -\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy \tag{7.9}$$

Tõestus. Defineerides joonel teist liiki joonintegraali, läbides selle suunas BA, võime jaotuspunktid nende suvalisuse tõttu võtta samad, mis võetakse joone läbimisel suunas AB. Siis vektorite $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ asemel on vektorid $\overrightarrow{P_kP_{k-1}} =$

$(-\Delta x_k; -\Delta y_k)$ ja k-ndal osalõigul suvaliselt fikseeritud punktis $Q_k(\xi_k;\eta_k)$ on jõuvektor

$$\overrightarrow{F_k} = (X(\xi_k,\eta_k); Y(\xi_k,\eta_k))$$

Võttes integraalsummast

$$\sum_{k=1}^{n}[X(\xi_k,\eta_k)(-\Delta x_k)+Y(\xi_k,\eta_k)(-\Delta y_k)] = -\sum_{k=1}^{n}[X(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Y(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

piirväärtuse piirprotsessis $\max \Delta s_k \to 0$, saame väite.

7.4 Teist liiki joonintegraali arvutamine

Olgu, et AB on tasandiline sile joon parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \ \ y = y(t)$$

ja funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ pidevad joonel AB. Oletame, et punktis A on $t = \alpha$ ja punktis B on $t = \beta$.

Teoreem 1. Kui funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ on pidevad siledal joonel AB, siis

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}[X(x(t),y(t))\dot{x} + Y(x(t),y(t))\dot{y}]dt \qquad (7.10)$$

Tõstus. Tõestame väitest esimese poole, st

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} X(x(t),y(t))\dot{x}dt$$

Tähistame $\varphi(t) = X(x(t), y(t))$. Joone AB sileduse tõttu on $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}$ ja $\dot{y}$ pidevad lõigul $[\alpha;\beta]$. Definitsiooni kohaselt

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} X(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$$

Kui parameetri väärtus punktis P_k on t_k, siis $x_k = x(t_k)$ ja $y_k = y(t_k)$. Lagrange'i teoreemi järgi leidub selline $\tau_k \in (t_{k-1}; t_k)$, et

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dot{x}(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = \dot{x}(\tau_k)\Delta t_k$$

Teist liiki joonintegraali definitsioonis $Q_k(\xi_k, \eta_k)$ on suvaline punkt k-ndalt osakaarelt, seega võib selleks olla ka punkt , mis vastab parameetri väärtusele τ_k, st $\xi_k = x(\tau_k)$ ja $\eta_k = y(\tau_k)$. Siis tähistuse tõttu $X(\xi_k, \eta_k) = \varphi(\tau_k)$ ja

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_k)\dot{x}(\tau_k)\Delta t_k$$

Pideva funktsiooni $x = x(t)$ pöördfunktsioon on samuti pidev. Sellest, et $\Delta x_k \to 0$ järeldub, et $\Delta t_k \to 0$, järelikult ka sellest, et $\max \Delta x_k \to 0$ järeldub ka, et $\max \Delta t_k \to 0$ ja

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\tau_k)\dot{x}(\tau_k)\Delta t_k$$

Viimane piirväärtus on funktsiooni $\varphi(t)\dot{x}$ integraalsumma lõigul $[\alpha; \beta]$ piirväärtus maksimaalse osalõigu pikuse lähenemisel 0-le ehk määratud integraal

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\dot{x}dt$$

Arvestades $\varphi(t)$ tähendust

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t))\dot{x}dt,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Olgu, et AB on ruumiline sile joon parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$$

ja funktsioonid $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ ja $Z(x,y,z)$ pidevad joonel AB. Olgu jälle punktis A $t = \alpha$ ja punktis B $t = \beta$.

Teoreem 2. Kui funktsioonid $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ ja $Z(x,y,z)$ on pidevad siledal joonel AB, siis

$$\int\limits_{AB} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))\dot{x} + Y(x(t), y(t), z(t))\dot{y} + Z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}]dt \tag{7.11}$$

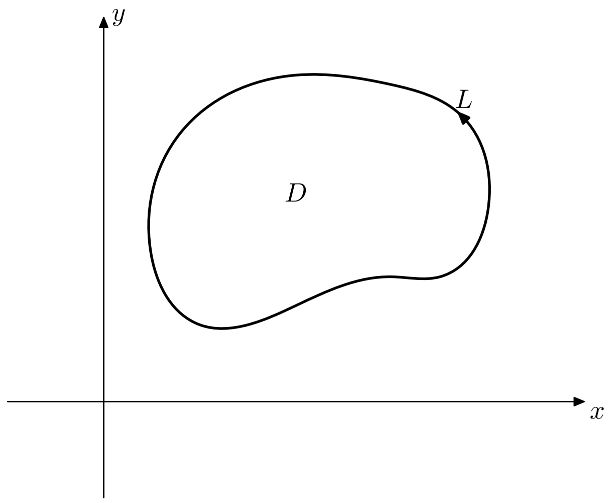
Kui joon AB on ilmutatud kujul esitatud funktsiooni $y = y(x)$ graafikuks ja punktis A $x = a$ ning punktis B $x = b$, siis vaadeldes muutujat x parameetrina, saame $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = y'$ ja valemist (7.10)

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} [X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y']dx \tag{7.12}$$

Kinniseks jooneks ehk *kinniseks kontuuriks* nimetatakse joont, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku. Kinniseks jooneks on näiteks ringjoon, ellips jne. Teist liiki joonintegraali üle kinnise kontuuri L tähistatakse

$$\oint\limits_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Kinnise kontuuri L läbimise positiivseks suunaks loetakse suunda, milles liikudes kontuuri poolt piiratud piirkond D jääb vasakule.



Joonis 7.2. Joone läbimine positiivses suunas

Näide 1. Arvutame $\int\limits_{AB} x\cos y dx - y \sin x dy$ üle sirglõigu punktist $A(0;0)$ punktini $B(\pi;2\pi)$.

Sirge sihivektor on $\overrightarrow{AB} = (\pi;2\pi)$ ja parameetrilised võrrandid

$$x = \pi t$$
$$y = 2\pi t,$$

kusjuures punktis A on $t = 0$ ja punktis B on $t = 1$. Valemi (7.10) rakendamiseks leiame veel $\dot{x} = \pi$ ja $\dot{y} = 2\pi$. Valemi järgi

$$\int\limits_{AB} x\cos y dx - y\sin x dy = \int\limits_0^1 (\pi t \cos 2\pi t \cdot \pi - 2\pi t \sin \pi t \cdot 2\pi)dt$$
$$= \pi^2 \int\limits_0^1 [t(\cos 2\pi t - 4\sin \pi t)]dt = \dots$$

Saadud integraali integreerime ositi, võttes

$$u = t, \qquad dv = \cos 2\pi t - 4\sin \pi t$$

Siis

$$du = dt, \qquad v = \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t + \frac{4}{\pi}\cos \pi t$$

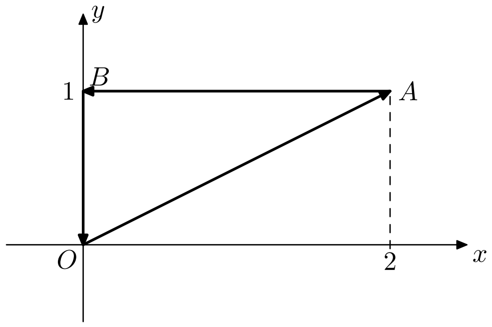
ning

$$\ldots = \pi^2 \left[t\left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t + \frac{4}{\pi}\cos \pi t\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t + \frac{4}{\pi}\cos \pi t\right) dt \right]$$

$$= \pi^2 \left[-\frac{4}{\pi} + \left(\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi t - \frac{4}{\pi^2}\sin \pi t\right)\Big|_0^1 \right] = -4\pi$$

Näide 2. Arvutame $\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy$, kus L on kolmnurga OAB kontuur, mis läbitakse positiivses suunas ning kolmnurga tipud on $O(0;0)$, $A(2;1)$ ja $B(0;1)$.

Kolmnurk ning selle läbimise suund on näidatud joonisel 7.3.



Joonis 7.3. Positiivses suunas läbitav kolmnurga OAB kontuur

Omaduse 1 tõttu

$$\oint\limits_L (x^2+y)dx+xydy = \int\limits_{OA} (x^2+y)dx+xydy+\int\limits_{AB} (x^2+y)dx+xydy+\int\limits_{BO} (x^2+y)dx+xydy,$$

siinjuures omaduse 2 põhjal on oluline integreerimise suund. Vaatleme kolme tekkinud joonintegraali eraldi. Kolmnurga külje OA võrrand on $y = \dfrac{x}{2}$ ja $0 \le x \le 2$ ning $y' = \dfrac{1}{2}$. Valemi (7.12) põhjal

$$\int\limits_{OA} (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_0^2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) dx$$

Külje AB võrrand on $y = 1$, st $y' = 0$. Alguspunktis A $x = 2$ ja lõpp-punktis B $x = 0$. Seega (7.12) järgi

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_2^0 (x^2 + 1 + x \cdot 1 \cdot 0)dx = \int\limits_2^0 (x^2 + 1)dx$$

Selleks, et kasutada valemit (7.12) kolmanda liidetava arvutamiseks, peame selles vahetama x ja y rollid, st vaatlema joont kui funktsiooni $x = g(y)$ graafikut. Kui joonel AB argumet y muutub väärtusest a väärtuseni b, siis

$$\int\limits_{AB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int\limits_a^b [X(x(y), y)x' + Y(x(y), y)]dy \tag{7.13}$$

Külje BO võrrand on $x = 0$, seega ka $x' = 0$ ja

$$\int\limits_{BO} (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_1^0 [(0 + y) \cdot 0 + 0 \cdot y]dy = 0$$

Seega

$$\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) dx + \int\limits_2^0 (x^2 + 1)dx$$

Vahetades viimases integraalis rajad, saame

$$\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_0^2 \left(\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2} - x^2 - 1\right) dx$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} + 1 - 2 = -\frac{1}{3}$$

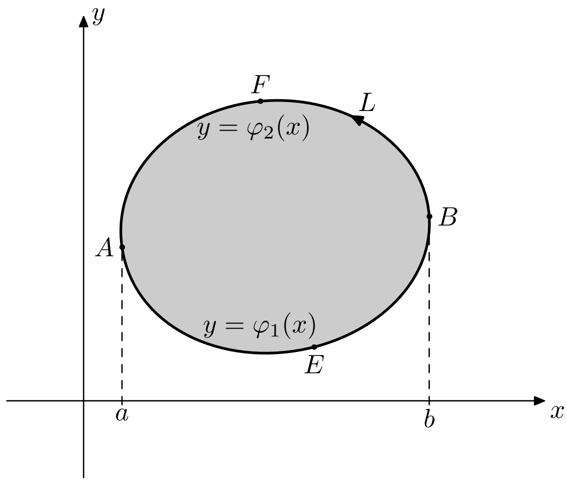
7.5 Greeni valem

Greeni valem seob teist liiki joonintegraali üle kinnise joone kahekordse integraaliga üle selle joone poolt piiratud piirkonna. Olgu kinnisel kontuuril L ja sellega piiratud piirkonnas D määratud kaks kahe muutuja funktsiooni $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$.

Teoreem (Greeni valem). Kui funktsioonid $X(x, y)$ ja $Y(x, y)$ on pidevad kinnisel siledal joonel L, osatuletised $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ja $\frac{\partial X}{\partial y}$ on pidevad joonega L piiratud regulaarses piirkonnas D ning L läbitakse positiivses suunas, siis

$$\oint\limits_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy \tag{7.14}$$

Tõestus. Olgu L kinnine sile joon $AEBFA$, mis läbitakse positiivses suunas. Olgu kinnise kontuuri L alumine osa AEB funktsiooni $y = \varphi_1(x)$ graafikuks ja ülemine osa AFB funktsiooni $y = \varphi_2(x)$ graafikuks.



Joonis 7.4. Positiivses suunas läbitav joon L ja selle poolt piiratud piirkond

Tõestame valemist ühe poole. Teist liiki joonintegraali omaduste 1 ja 2 põhjal

$$\oint_L X(x,y)dx = \int_{AEB} X(x,y)dx + \int_{BFA} X(x,y)dx = \int_{AEB} X(x,y)dx - \int_{AFB} X(x,y)dx$$

Kasutades arvutusvalemit (7.12), saame

$$\oint_L X(x,y)dx = \int_a^b X(x,\varphi_1(x))dx - \int_a^b X(x,\varphi_2(x))dx = -\int_a^b [X(x,\varphi_2(x)) - X(x,\varphi_1(x))]dx \tag{7.15}$$

Teiselt poolt, piirkonna D regulaarsuse tõttu on see kirjeldatav võrratustega $a \le x \le b$ ja $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ ning

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

Viimases integraalis on kahe muutuja funktsiooni $X(x,y)$ kõigepealt y järgi diferentseeritud ja seejärel sama muutuja järgi integreeritud. Selle tulemuseks on uuesti funktsioon $X(x,y)$. Seega

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = X(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = X(x,\varphi_2(x)) - X(x,\varphi_1(x)),$$

millest

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b [X(x, \varphi_2(x)) - X(x, \varphi_1(x))]dx \tag{7.16}$$

Näeme, et (7.15) ja (7.16) tulemused erinevad teineteisest ainult märgi poolest. Järelikult

$$\oint\limits_L X(x, y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy \tag{7.17}$$

Tõestatud võrdusega sarnaselt saab tõestada, et

$$\oint\limits_L Y(x, y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy \tag{7.18}$$

Liites võrduste (7.17) ja (7.18) vastavad pooled saame (7.14).

Näide. Arvutame eelmise punkti näites 2 toodud joonintegraali

$$\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy$$

Greeni valemi abil.

Siin $X(x, y) = x^2 + y$ ja $Y(x, y) = xy$. Greeni valemi (7.14) rakendamiseks leiame $\frac{\partial Y}{\partial x} = y$ ja $\frac{\partial X}{\partial y} = 1$. Tähistagu D kontuuri L poolt piiratud piirkonda. Valemi (7.14) järgi

$$\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy = \iint\limits_D (y - 1)dxdy$$

Joonise 7.3 järgi on piirkond D määratud tingimustega $0 \leq x \leq 2$ ja $\frac{x}{2} \leq y \leq 1$. Kahekordse integraali arvutusvalemi põhjal

$$\oint\limits_L (x^2 + y)dx + xydy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)dy$$

Leiame seesmise integraali

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)dy = \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 (y - 1)d(y - 1) = \left.\frac{(y - 1)^2}{2}\right|_{\frac{x}{2}}^1 = -\frac{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}{2} = -\frac{(x - 2)^2}{8}$$

ning seejärel

$$\int\limits_0^2 \left[-\frac{(x - 2)^2}{8}\right] dx = -\frac{1}{8}\int\limits_0^2 (x-2)^2 d(x-2) = -\frac{1}{8}\left.\frac{(x - 2)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{1}{8}\frac{(-2)^3}{3} = -\frac{1}{3}$$

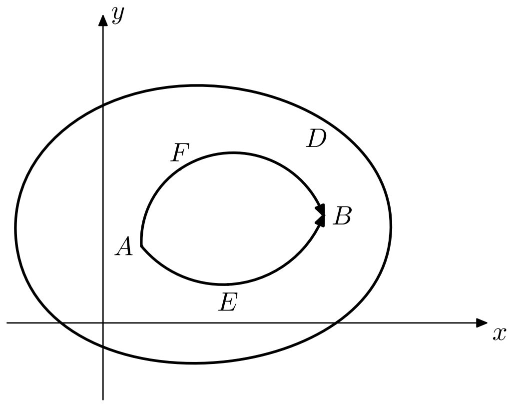
7.6 Joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimus

Selles punktis uurime, millistel tingimustel joonintegraal

$$\int_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy \tag{7.19}$$

sõltub ainult punktide A ja B asukohast tasandil, mitte aga neid ühendavast joonest.

Eeldame, et D on punkte A ja B sisaldav piirkond, milles funktsioonid $X(x,y)$ ja $Y(x,y)$ ning osatuletised $\frac{\partial X}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Y}{\partial x}$ on pidevad. Valime piirkonnas D kaks täiesti suvalist punkte A ja B ühendavat joont AEB ja AFB.



Joonis 7.5. Punkte A ja B ühendavad jooned

Püstatud eesmärgi kohaselt

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy = \int_{AFB} Xdx + Ydy,$$

st

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy - \int_{AFB} Xdx + Ydy = 0$$

Teist liiki joonintegraali teise omaduse põhjal

$$\int_{AEB} Xdx + Ydy + \int_{BFA} Xdx + Ydy = 0$$

ja esimese omaduse põhjal

$$\int_{AEBFA} Xdx + Ydy = 0$$

Tähistades kinnise joone $AEBFA = L$, saame tingimuseks

$$\oint\limits_L X dx + Y dy = 0 \tag{7.20}$$

Sellise tingimuseni jõuame ükskõik milliste punkte A ja B ühendavate joonte, st mistahes punkte A ja B läbiva kinnise joone korral, aga samuti ka erinevate punktide A ja B valimisel piirkonnas D. Edaspidi nimetame punkte A ja B ühendavat joont *integreerimisteeks*.

Järelikult, kui jooninegraal (7.19) ei sõltu integreerimisteest, siis mistahes piirkonnas D valitud kinnise kontuuri L korral kehtib tingimus (7.20).

Vastupidi, kui iga kinnise joone L puhul piirkonnas D kehtib tingimus (7.20) ja A ning B on kaks piirkonnas D valitud suvalist punkti, võime kinnise joone L valida nii, et A ja B paiknevad sellel joonel $L = AEBFA$. Tingimuse (7.20) kohaselt

$$\oint\limits_L X dx + Y dy = \int\limits_{AEBFA} X dx + Y dy = 0$$

Teist liiki joonintegraali 1. omadusest

$$\int\limits_{AEB} X dx + Y dy + \int\limits_{BFA} X dx + Y dy = 0,$$

ja 2. omadusest

$$\int\limits_{AEB} X dx + Y dy - \int\limits_{AFB} X dx + Y dy = 0$$

ehk

$$\int\limits_{AEB} X dx + Y dy = \int\limits_{AFB} X dx + Y dy$$

Joon L on suvaline punkte A ja B läbiv kinnine joon, seega on suvalised ka integreerimisteed AEB ja AFB. Järelikult kehtib teoreem.

Teoreem 1. Joonintegraal (7.19) on piirkonnas D integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui mistahes piirkonnas D valitud kinnise joone korral kehtib tingimus (7.20).

Oletame, et mistahes piirkonnas D valitud kinnise joone L korral on täidetud (7.20). Punkti alguses tehtud eeldustel kehtib Greeni valem. Kui Δ tähistab kinnise kontuuri L poolt piiratud piirkonda, siis (7.14) põhjal

$$\iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Sellisel juhul ka

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \tag{7.21}$$

sest kui oletada vastuväiteliselt, et mingis punktis $P_0 \in D$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0, \tag{7.22}$$

siis $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ja $\frac{\partial X}{\partial y}$ pidevuse tõttu on pidev ka $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$, st punktil P_0 on olemas ümbrus $U(P_0)$, milles kehtib (7.22). Aga siis ka

$$\iint\limits_{U(P_0)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy > 0$$

ja kui Γ on ümbruse $U(P_0)$ rajajoon, siis Greeni valemi põhjal

$$\oint\limits_{\Gamma} Xdx + Ydy > 0,$$

mis on vastuolus eeldusega, on piirkonnas D võrdub joonintegraal üle mistahes kinnise kontuuri nulliga. Seega (7.22) ei saa kehtida, järelikult kehtib (7.21) ehk

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \tag{7.23}$$

Vastupidi, kui kehtib tingimus (7.23) ja L on piirkonnas D paiknev kinnine joon, mis piirab piirkonda Δ, siis

$$\iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

millest Greeni valemi põhjal järeldub (7.20).

Tehtud arutlustest ja teoreemist 1 järeldub.

Teoreem 2. Joonintegraal (7.19) on piirkonnas D integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui piirkonnas D on täidetud tingimus (7.23).

Joonintegraali (7.19) tähistatakse ka

$$\int\limits_A^B Xdx + Ydy$$

Näide 1. Joonintegraal

$$\int\limits_A^B (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy$$

on integreerimisteest sõltumatu, sest

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y \cos x - x^2 \sin y) = -2y \sin x - 2x \sin y$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y - y^2\sin x) = -2x\sin y - 2y\sin x,$$

st on täidetud (7.23).

Näide 2. Arvutame

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$$

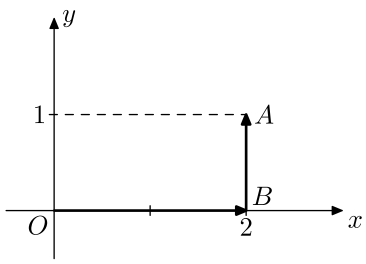
Joonintegraal on integreerimisteest sõltumatu, sest

$$\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$$

ja

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$$

Arvutamiseks võime seega valida mis tahes punkte $(0;0)$ ja $(2;1)$ ühendava joone. Valime selleks murdjoone OBA, kus $O(0,0)$, $B(2;0)$ ja $A(2;1)$.



Joonis 7.6. Murdjoon OBA

Teist liiki joonintegraali omaduse 1 põhjal

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{(0,0)}^{(2,0)} 2xydx + x^2dy + \int\limits_{(2,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$$

Sirge OB võrrand on $y = 0$, sellest ka $y' = 0$. Lõigul OB $0 \leq x \leq 2$ ja (7.12) järgi

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,0)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{0}^{2} (2x\cdot 0 + x^2\cdot 0)dx = 0$$

Sirge BA võrrand on $x = 2$, st $x' = 0$. Lõigul BA $0 \leq y \leq 1$ ja (7.13) põhjal

$$\int\limits_{(2,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{0}^{1} (4y\cdot 0 + 4)dy = 4$$

Seega

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy = 4$$

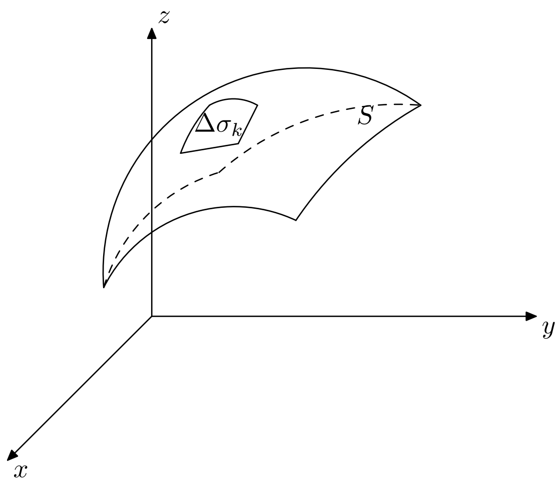
On võimalik näidata, et kui piirkonnas D on täidetud tingimus (7.23), siis eksisteerib kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, mille täisdiferentsiaal

$$du = Xdx + Ydy$$

Järeldus. Joonintegraal (7.19) on integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui eksisteerib kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, mille täisdiferentsiaaliks on avaldis $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$.

7.7 Esimest liiki pindintegraal

Olgu xyz-teljestikus antud pind S ja sellel määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame pinna S suvalisel viisil n osapinnaks $\Delta\sigma_k$ $(1 \leq k \leq$



Joonis 7.7. Pind S ja selle osapiirkond

$n)$, kusjuures $\Delta\sigma_k$ tähistab nii k-ndat osapinda kui ka selle pindala.

Valime igal osapinnal suvalise punkti $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \in \Delta\sigma_k$ ja moodustame korrutised

$$f(P_k)\Delta\sigma_k$$

ning nendest summa

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k$$

Osapinna diameetriks diam $\Delta\sigma_k$ nimetatakse osapinna punktide vahelist suurimat kaugust ja suurima nendest kaugustest tähistame

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{diam} \Delta\sigma_k$$

Definitsioon 1. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \Delta\sigma_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas pind S on jaotatud osapindadeks, ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *esimest liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna pindala järgi* ja tähistatakse

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma$$

Seega definitsiooni 1 kohaselt

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \Delta\sigma_k$$

Esimest liiki pindintegraalil on analoogilised omadused senini vaadeldud integraalidega.

Omadus 1. Funktsioonide summa (vahe) esimest liiki pindintegraal võrdub nende funktsioonide esimest liiki pindintegraalide summaga (vahega).

Omadus 2. Konstantse teguri saab tuua esimest liiki pindintegraali ette.

Omadus 3. Kui pind S koosneb kahest pinnast S_1 ja S_2 nii, et pindadel S_1 ja S_2 ei ole ühiseid sisepunkte, siis

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{S_2} f(x, y, z) d\sigma$$

Olgu pind S kahe muutuja funktsiooni $z = z(x, y)$ graafikuks. Tähistame pinna S projektsiooni xy-tasandil D. Pinda S nimetatakse *siledaks*, kui funktsioonil $z(x, y)$ eksisteerivad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Järgnev teoreem annab esimest liiki pindintegraali arvutuseeskirja kahekordse integraali abil.

Teoreem. Kui funktsioon $f(x, y, z)$ on pidev siledal pinnal S ja D on S projektsioon xy-tasandil, siis

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (7.24)$$

Juhul, kui pinnal S määratud funktsioon $f(x, y, z) \equiv 1$, siis valemi

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (7.25)$$

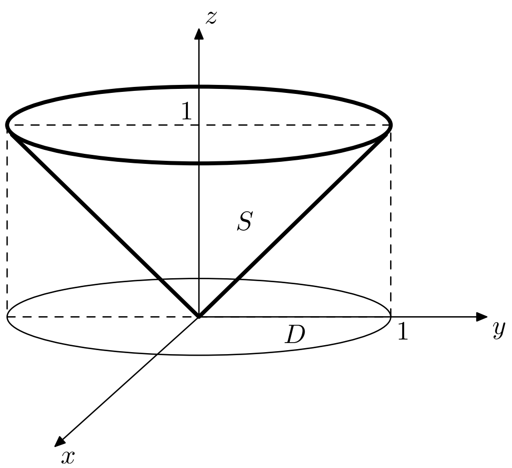
abil arvutatakse pinna S pindala.

Näide 1. Arvutame $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)d\sigma$, kui S on koonuse $z = \sqrt{x^2+y^2}$ osa, kus $0 \le z \le 1$.

Tasand $z = 1$ ja koonus $z = \sqrt{x^2+y^2}$ lõikuvad mööda ringjoont

$$x^2 + y^2 = 1$$

Seega antud koonuse osa projektsioon xy-tasandil on ring $x^2+y^2 \le 1$. Valemi



Joonis 7.8. Näite 1 koonus

(7.24) kasutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ja

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

ning seejärel valemi (7.24) järgi

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)d\sigma = \iint\limits_D (x^2+y^2+x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

Saadud kahekordses integraalis on intergeerimispiirkonnaks D ring. Seepärast arvutamiseks teisendame kahekordse integraali polaarkoordinaatidesse $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, mille korral $x^2+y^2 = \varrho^2$ ja $|J| = \varrho$.

Integreerimispiirkond on polaarkoordinaatides on määratud tingimustega $0 \le \varphi \le 2\pi$ ja $0 \le \varrho \le 1$. Seega

$$2\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \varrho^2 \varrho d\varrho$$

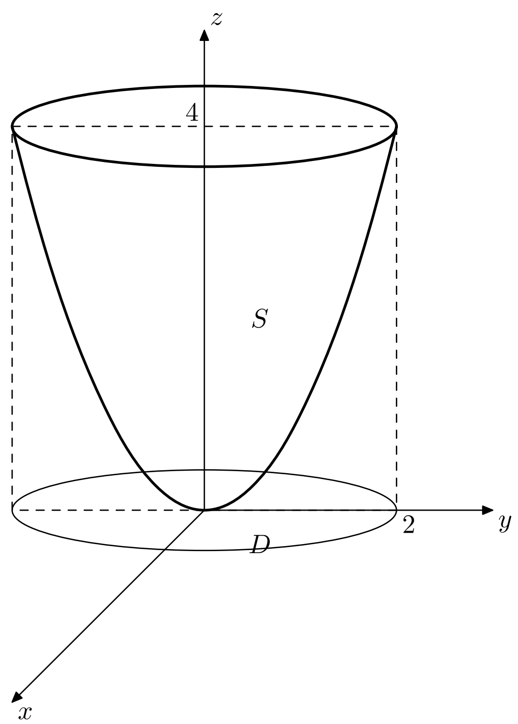
Seesmine integraal

$$\int\limits_0^1 \varrho^3 d\varrho = \frac{1}{4}$$

ja lõpuks väline integraal

$$2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi\sqrt{2}$$

Näide 2. Arvutame pöördparaboloidi $z = x^2 + y^2$ selle osa pindala, mis jääb tasandist $z = 4$ allapoole. Pöördparaboloidi projektsioon xy-tasandil D



Joonis 7.9. Näite 2 pöördparaboloid

on ring $x^2 + y^2 \le 4$, mille raadius on 2. Valemi (7.25) kasutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

ja

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

Seega valemi (7.25) põhjal on pöördparaboloidi vaadeldava osa pindala

$$\iint\limits_S d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

Saadud kahekordse integraali teisendame polaarkoordinaatidesse $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, mille korral $1+4x^2+4y^2 = 1+4\varrho^2$ ja $|J| = \varrho$ ja piirkonnas D $0 \le \varphi \le 2\pi$ ning $0 \le \varrho \le 2$. Seega

$$\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1+4\varrho^2}\varrho d\varrho$$

Seesmise integraali arvutamiseks kasutame diferentsiaali alla viimist. Võrduse $d(1+4\varrho^2) = 8\varrho d\varrho$ tõttu

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4\varrho^2}\varrho d\varrho &= \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4\varrho^2}8\varrho d\varrho \\ &= \frac{1}{8}\int\limits_0^2 (1+4\varrho^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4\varrho^2) = \frac{1}{8}\frac{(1+4\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{1}{12}(1+4\varrho^2)\sqrt{1+4\varrho^2}\Bigg|_0^2 = \frac{17\sqrt{17}-1}{12}\end{aligned}$$

Väline integraal, st arvutatav pindala on seega

$$\frac{17\sqrt{17}-1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{17\sqrt{17}-1}{12}\cdot 2\pi = \frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{6}$$

7.8 Teist liiki pindintegraal

Olgu ruumis pind σ, millel on määratud kolme muutuja funktsioon $Z(x,y,z)$ Jaotame pinna σ suvalisel viisil n osapinnaks $\Delta\sigma_k$ $(1 \le k \le n)$. Igal osapinnal valime suvalise punkti $P_k(\xi_k;\eta_k;\zeta_k)$ ning leiame funktsiooni väärtuse $Z(P_k)$. Tähistame pinnatüki $\Delta\sigma_k$ projektsiooni xy-tasandil Δs_k, kusjuures Δs_k tähistab ka selle projektsiooni pindala. Edasi moodustame korrutised $Z(P_k)\Delta s_k$. Kõiki neid korrutisi kokku liites saame summa

$$\sum_{k=1}^{n} Z(P_k)\Delta s_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $Z(x, y, z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni xy-tasandil. Olgu projektsiooni Δs_k diameeter $\operatorname{diam} \Delta s_k$. Pinna σ jaotus osapiirkondadeks $\Delta\sigma_k$ on suvaline, seega on need erinevad ja erineva diameetriga on ka nende projektsioonid Δs_k xy-tasandil. Projektsioonide suurimat diameetrit tähistame λ, st

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \operatorname{diam} \Delta s_k$$

Definitsioon 1. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Z(P_k) \Delta s_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi xy-tasandil* ja tähistatakse

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dxdy$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Z(P_k) \Delta s_k \tag{7.26}$$

Teiseks. Olgu pinnal σ määratud kolme muutuja funktsioon $Y(x, y, z)$ ja olgu osapinna $\Delta\sigma_k$ projektsioon xz-tasandil $\Delta s'_k$. Valides jälle suvalise punkti $P_k \in \Delta\sigma_k$, saame moodustada korrutised $Y(P_k)\Delta s'_k$ ja nendest summa

$$\sum_{k=1}^{n} Y(P_k) \Delta s'_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $Y(x, y, z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni xz-tasandil.

Definitsioon 2. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Y(P_k) \Delta s'_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi xz-tasandil* ja tähistatakse

$$\iint_{\sigma} Y(x, y, z) dxdz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint\limits_{\sigma} Y(x,y,z)dxdz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Y(P_k)\Delta s'_k \tag{7.27}$$

Kolmandaks. Olgu pinnal σ määratud kolme muutuja funktsioon $X(x,y,z)$ ja olgu osapinna $\Delta\sigma_k$ projektsioon yz-tasandil $\Delta s''_k$. Valides taas suvalise punkti $P_k \in \Delta\sigma_k$, saame moodustada korrutised $X(P_k)\Delta s''_k$ ja nendest summa

$$\sum_{k=1}^{n} X(P_k)\Delta s''_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $X(x,y,z)$ integraalsummaks üle pinna σ projektsiooni yz-tasandil.

Definitsioon 2. Kui $\exists$ piirväärtus

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} X(P_k)\Delta s''_k$$

ja see piirväärtus ei sõltu sellest, kuidas on pind σ jaotatud osapindadeks ega sellest, kuidas on valitud punktid P_k osapindadel, siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pinna projektsiooni järgi yz-tasandil* ja tähistatakse

$$\iint\limits_{\sigma} X(x,y,z)dydz$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\iint\limits_{\sigma} X(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} X(P_k)\Delta s''_k \tag{7.28}$$

Kõige üldisemal kujul saame vektorfunktsiooni

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (X(x,y,z); Y(x,y,z); Z(x,y,z))$$

korral defineerida teist liiki pindintegraali ehk pindintegraali pinna projektsiooni järgi

$$\iint\limits_{\sigma} X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy \tag{7.29}$$

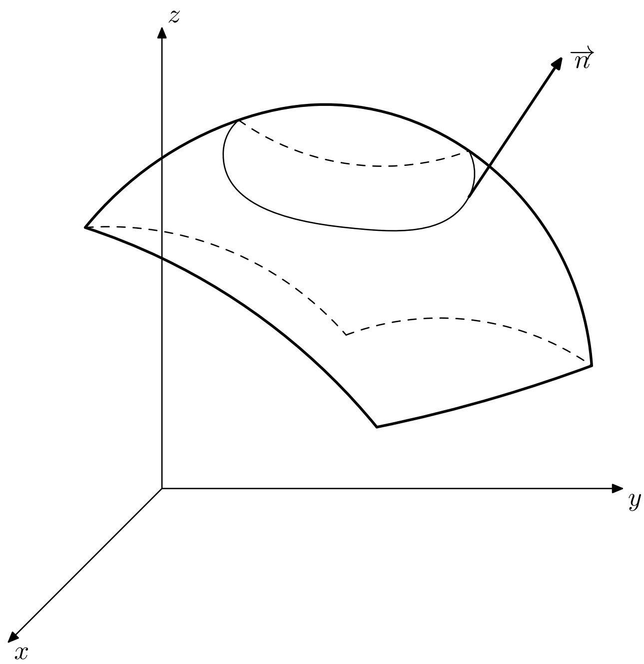
7.9 Teist liiki pindintegraali arvutamine

Vaatleme teist liiki pindintegraali

$$\iint_\sigma Z(x,y,z)dxdy$$

arvutamist. Selleks oletame, et pind σ on kahe muutja funktsiooni $z = f(x,y)$ graafikuks. Eeldame, et $z = f(x,y)$ on ühene ja pidev ning omab pidevaid osatuletisi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Ühesuse tõttu lõikab iga z-teljega paralleelne sirge pinda täpselt ühes punktis.

Definitsioon 1. Ruumis antud pinda nimetatakse *kahe poolega pinnaks*, kui pinna normaal, liikudes mis tahes mööda pinnal asuvat rajajoonega mitte lõikuvat kinnist kontuuri, säilitab lähtepunkti jõudes oma suuna.

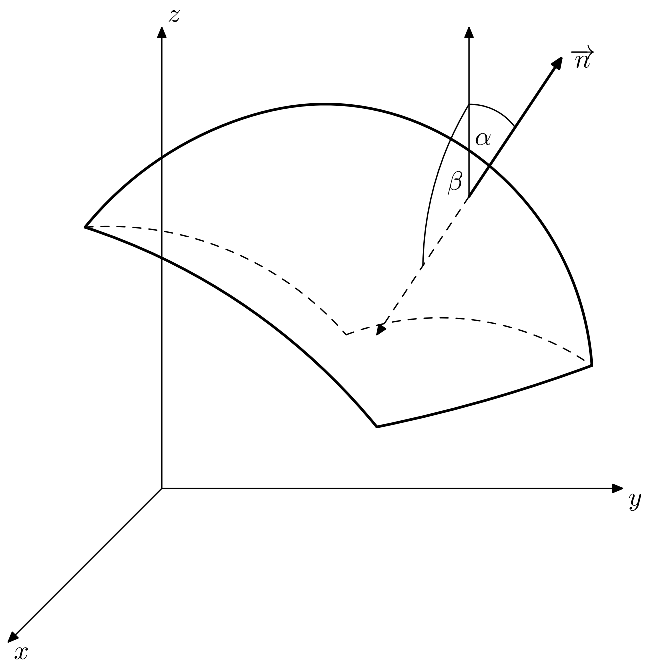


Joonis 7.10. Kahe poolega pind

Kahe poolega pinna puhul eristame pinna alumist ja ülemist poolt. Pinna ülemisks pooleks nimetatakse poolt, kus pinna normaal moodustab z-telje positiivse suunaga teravnurga α ja alumiseks poolt, kus pinna normaal moodustab z-telje positiivse suunaga nürinurga $\beta = 180° - \alpha$

Teist liiki pindintegraali arvutamine sõltub sellest, üle kumma pinna poole integraali arvutatakse. Kui $Z(x,y,z)$ on pidev siledal pinnal $z = f(x,y)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint_\sigma Z(x,y,z)dxdy = \pm \iint_D Z(x,y,f(x,y))dxdy \qquad (7.30)$$



Joonis 7.11. Pinna ülemine ja alumine pool

abil. Sealjuures kahekordse integraali ette valitakse "+", kui inegreeritakse üle pinna ülemise poole ja "−", kui integreeritakse üle pinna alumise poole. Seega probleemi püstitusel peab olema öeldud, üle kumma pinnapoole teist liiki pindintegraal tuleb arvutada. Valemis tähistab D pinna σ projektsiooni xy-tasandil.

Kui $Y(x,y,z)$ on pidev siledal pinnal $y = g(x,z)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint\limits_{\sigma} Y(x,y,z)dxdz = \pm \iint\limits_{D'} Y(x,g(x,z),z)dxdz \tag{7.31}$$

abil. Valemis D' tähistab pinna σ projektsiooni xz-tasandil ja märk + või − valitakse selle järgi, kas teist liiki pindintegraali arvutatakse üle pinna ülemise või alumise poole (st kas pinna normaal moodustab y-telje positiivse suunaga terav- või nürinurga).

Kui $X(x,y,z)$ on pidev siledal pinnal $x = h(y,z)$, siis teist liiki pindintegraal arvutatakse valemi

$$\iint\limits_{\sigma} X(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D''} X(h(y,z),y,z)dydz \tag{7.32}$$

abil. Siin D'' tähistab pinna σ projektsiooni yz-tasandil ja märk + või − valitakse selle järgi, kas teist liiki pindintegraali arvutatakse üle pinna ülemise või alumise poole (st kas pinna normaal moodustab x-telje positiivse suunaga terav- või nürinurga).

Näide. Arvutame teist liiki pindintegraali

$$\iint_\sigma z^2 dxdy$$

kus σ on koonuse $z = \sqrt{x^2+y^2}$ selle osa ülemine pool, mis jääb tasandist $z=1$ allapoole.

Vaadeldava koonuse osa projektsioon D xy-tasandil on ring $x^2+y^2 \le 1$. Seega valemi (7.30) järgi

$$\iint_\sigma z^2 dxdy = \iint_D (x^2+y^2) dxdy$$

Et integreerimispiirkonnaks on ring, siis kahekordse integraali arvutamiseks teisendame selle polaarkoordinaatidesse. Ringis $0 \le \varphi \le 2\pi$ ja $0 \le \varrho \le 1$, seega

$$\iint_D (x^2+y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho$$

Seesmine integraal

$$\int_0^1 \varrho^3 d\varrho = \frac{\varrho^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

ja väline

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$