Juhuslikud suurused

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon 1. Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse **juhuslikuks suuruseks**.

Definitsioon 2. Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse **diskreetseks juhuslikuks suuruseks**.

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon 3. Funktsiooni $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ nimetatakse juhusliku suuruse X **jaotusfunktsiooniks**.

Lause 1. *Kui $F(x)$ on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, siis*

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$*;*
- $F(x)$ *on mittekahanev;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$*;*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*;*
- *kui* $\alpha < \beta$*, siis* $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$*.*

Pidevad juhuslikud suurused

Definitsioon 4. Juhuslikku suurust, mille jaotusfunktsioon on pidev hulgal R, nimetatakse **pidevaks juhuslikuks suuruseks**.

Järeldus 1. *Pidev juhuslik suurus omandab iga väärtuse tõenäosusega* 0.

Tõestus.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = a) &= \lim_{x \to a+} \mathrm{P}(\mathrm{a} \geqslant \mathrm{X} < \mathrm{x}) = \lim_{x \to a+} (F(x) - F(a)) \\ & \quad X \textbf{ on pidev js., järelikult } F(x) \textbf{ on pidev} \\ &= F(a) - F(a) = 0\end{aligned}$$

Järeldus 2. *Kui X on pidev juhuslik suurus ja $\alpha < \beta$, siis*

$$\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \mathrm{P}(\alpha < X \leqslant \beta) = \mathrm{P}(\alpha < X < \beta) = \mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta).$$

Jaotustihedus

Definitsioon 1. Funktsiooni

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **jaotustiheduseks**.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mathrm{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \end{aligned}$$

juhul, kui see piirväärtus eksisteerib!

Lause 2. *Kehtivad seosed:*

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ f(x) &\geqslant 0 \\ F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1 \\ \mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \quad (\alpha < \beta). \end{aligned}$$

Pideva juhusliku suuruse arvkarakteristikud

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \\
\mathrm{D}X &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}X)^2 f(x) dx, \\
\nu_n &= \mathrm{E}(X^n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx, \\
\mu_n &= \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}X)^n f(x) dx
\end{aligned}
$$

Definitsioon 2. Pideva juhusliku suuruse **mediaaniks** nimetatakse arvu, mille korral

$$P\{X \leq MeX\} = P\{X \geq MeX\} \geq \frac{1}{2}$$

Definitsioon 3. Pideva juhusliku suuruse **moodiks** nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, millel selle suuruse jaotustihedusel on lokaalne maksimum.

Kvantiilid

Pideva juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on mittekahanev ja pidev. Tingimustest $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$ ning funktsiooni $F(x)$ pidevusest saame, et $F(x)$ väärtuste hulk on lõik $[0, 1]$ (**NB! Kehtib ainult pideva juhusliku suuruse korral!**).

Definitsioon 4. Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.

Definitsioon 5. Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.

Ühtlane jaotus

Definitsioon 6. Öeldakse, et juhuslik suurus X allub lõigul $[a,b]$ **ühtlasele jaotusele**, kui selle jaotustihedus avaldub kujul

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kui } x \in [a,b]; \\ 0, & \text{kui } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Tähistatakse $X \sim U(a,b)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \quad \mathrm{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normaaljaotus

Definitsioon 7. Öeldakse, et juhuslik suurus X allub **normaaljaotusele** parameetritega a ja $\sigma > 0$, kui selle jaotustihedus avaldub kujul

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

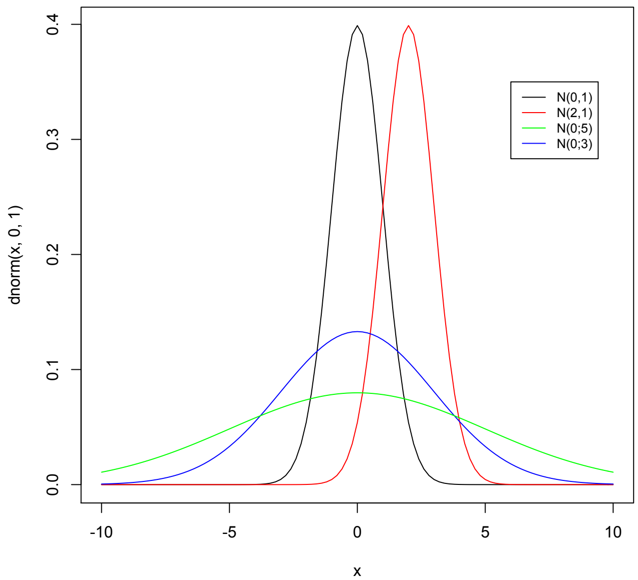
Tähistatakse $X \sim N(a,\sigma)$.

$$\mathrm{E}X = a, \quad \mathrm{D}X = \sigma^2$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}, \quad \text{kus} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

kus $\Phi(x)$ on **Laplace'i funktsioon**. Omadused: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ja $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$$



Definitsioon 8. Öeldakse, et juhuslik suurus X allub **eksponentjaotusele** parameetriga $\lambda > 0$, kui selle juhusliku suuruse jaotustihedus avaldub kujul

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Tähistatakse $X \sim E(\lambda)$.

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}, \ \ \mathrm{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$$