Juhuslikud suurused

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon 1. Suurust X, mille võrdumine katse käigus etteantud väärtusega x on juhuslik sündmus, nimetatakse **juhuslikuks suuruseks**.

Näide 1. Mündi viskamine. $X = 0$, kui tulemuseks on „kiri“, $X = 1$, kui tulemuseks on „vapp“.

Näide 2. Täringu veeretamine. $X = k$, $k \in \{1, \ldots, 6\}$, st tulemuseks on k silma.

Definitsioon 2. Väärtusi x, mida juhuslik suurus X võib katse käigus omandada, nimetatakse selle **juhusliku suuruse võimalikeks väärtusteks**.

Definitsioon 3. Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on lõplik või loenduv, nimetatakse **diskreetseks juhuslikuks suuruseks**.

Juhusliku suuruse mõiste

Definitsioon 4. Kui diskreetse juhusliku suuruse X korral on teada tema võimalike väärtuste hulk $\{x_i\}_{i\in I}$, kus I on lõplik või loenduv hulk, ja tõenäosused

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)_{i\in I} \quad \left(\sum_{i\in I} p_i = 1\right),$$

millega juhuslik suurus X iga neist võimalikest väärtustest omandab, siis öeldakse, et on antud diskreetse juhusliku suuruse X **jaotusseadus**.

Definitsioon 5. Funktsiooni $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$ nimetatakse juhusliku suuruse X **jaotusfunktsiooniks**.

Lause 1. *Kui $F(x)$ on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, siis*

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$*;*
- $F(x)$ *on mittekahanev;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$*;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$*;*

- *kui* $\alpha < \beta$, *siis* $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Lause 2. *Kui* $\{x_k\}_{k\in I}$ *on diskreetse juhusliku suuruse* X *võimalike väärtuste hulk ja* $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, *kus* $\sum\limits_{k\in I} p_k = 1$, *siis selle suuruse jaotusfunktsioon on esitatav kujul*

$$F(x) = \sum_{k\in I} p_k H(x - x_k).$$

Lause 3. *Diskreetse juhusliku suuruse* X *jaotusfunktsioon* $F(x)$ *on igas punktis* $x \in \mathbb{R}$ *pidev vasakult.*

Diskreetse juhusliku suuruse arvkarakteristikud

Juhusliku suuruse arvkarakteristikud

Definitsioon 1. Kui $\{x_k\}_{k\in I}$ on diskreetse juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulk ja $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis kindlat suurust

$$\mathrm{E}X = \sum_{k\in I} x_k p_k$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **keskväärtuseks**.

Definitsioon 2. Kaht juhuslikku suurust nimetatakse **sõltumatuteks**, kui ühe jaotus ei sõltu sellest, millise võimaliku väärtuse omandab katsel teine juhuslik suurus.

Lause 4. *Juhusliku suuruse* X *keskväärtusel* $\mathrm{E}X$ *on järgmised omadused:*

- *kui* $X = C$ *on kindel suurus, siis* $\mathrm{E}C = C$;
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$;
- *kui* X *ja* Y *on sõltumatud, siis* $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$;
- $\mathrm{E}(C \cdot X) = C \cdot \mathrm{E}X$.

Definitsioon 3. Kui $\{x_k\}_{k\in I}$ on diskreetse juhusliku suuruse X võimalike väärtuste hulk ja $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis arvu

$$\mathrm{E}(h(X)) = \sum_{k\in I} h(x_k)p_k$$

nimetatakse **juhusliku argumendiga funktsiooni** $h(X)$ **keskväärtuseks.**

Definitsioon 4. Arvu

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **dispersiooniks**.

Definitsioon 5. Arvu

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **standardhälbeks**.

Lause 5. *Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis*

$$\mathrm{D}X = \sum_{k\in I}(x_k - \mathrm{E}X)^2 p_k.$$

Lause 6. *Juhusliku suuruse X dispersioonil $\mathrm{D}X$ on järgmised omadused:*

- $\mathrm{D}C = 0$;
- $\mathrm{D}(CX) = C^2\mathrm{D}X$;
- $\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2$.
- $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y))$;
- *kui X ja Y on sõltumatud, siis* $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Definitsioon 6. Arvu

$$\nu^n = \mathrm{E}(X^n) \quad (n \geqslant 1)$$

nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku algmomendiks**.

Definitsioon 7. Arvu

$$\mu^n = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^n \quad (n \geqslant 1)$$

nimetatakse juhusliku suuruse X n–**järku keskmomendiks**.

Lause 7. *Kui X on diskreetne juhuslik suurus ja $\{x_k\}_{k\in I}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ning $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)_{k\in I}$, siis*

$$\nu_n = \sum_{k\in I} x_k^n \cdot p_k, \quad \mu_n = \sum_{k\in I} (x_k - \mathrm{E}X)^n \cdot p_k.$$

Definitsioon 8. Arvu

$$\mathrm{As}X = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mathrm{E(X - EX)}^3}{(\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2)^{3/2}}$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **asümmeetriakordajaks**.

Definitsioon 9. Arvu

$$\mathrm{Ex}X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

nimetatakse juhusliku suuruse X **ekstsessikordajaks**.

Definitsioon 10. Arvu x_p, mis on määratud tingimusega

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p, \quad 0 < p < 1,$$

nimetatakse juhusliku suuruse X p–**kvantiiliks**.

Definitsioon 11. Juhusliku suuruse X $0,5$-kvantiili nimetatakse selle suuruse **mediaaniks**.

Definitsioon 12. Diskreetse juhusliku suuruse **moodiks** nimetatakse selle suuruse sellist võimalikku väärtust, mille omandamise tõenäosus on suurim.

Bernoulli (katsete) skeem: n–sõltumatust katsest koosnev katseseeria, kus sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p.

Kui $0 < p < 1$, siis $q = 1 - p$. $B_{n,m}$ – sündmus, et A toimub selles katseseerias täpselt m korda. $P_{n,m} \stackrel{def.}{=} \mathrm{P}(B_{n,m})$.

Lause 8. *Kui katseseerias on n sõltumatut katset ja sündmus A toimub igal katsel tõenaäosusega p ning $B_{n,m}$ on sündmus, et A toimub selle seeria korral täpselt m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ korda, siis*

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$X = m$ – toimub sündmus $B_{n,m}$.

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Definitsioon 13. Öeldakse, et juhuslik suurus X allub **binoomjaotusele** parameetritega n ja p $(0 < p < 1)$, kui $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ja

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Poissoni jaotus

Definitsioon 14. Öeldakse, et juhuslik suurus X allub **Poissoni jaotusele** parameetriga λ $(\lambda > 0)$, kui $\mathbb{N}$ on selle suuruse võimalike väärtuste hulk ja

$$\mathrm{P}(X = m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}.$$