# Sissejuhatus

**Sissejuhatus**

Tõenäosusteooria on matemaatika osa, mis uurib juhuslike nähtuste üldisi seaduspärasusi sõltumatult nende nähtuste konkreetsest sisust ja annab meetodid nendele nähtustele mõjuvate juhuslike mõjude kvantitatiivseks hindamiseks.

Kirjeldav statistika – andmete korrastamine, nähtavaks tegemine, lihtsamate karakteristikute arvutamine. Kirjeldav statistika ei vaja tõenäosusteooria alaseid teadmisi.

Matemaatiline statistika – suhteliselt väikese osa objektide (valimi) andmete abil järelduste tegemine kõigi objektide kogumi (üldkogumi) omaduste kohta. Järelduste tegemine põhineb tõenäosusteoorial.

# Juhuslikud sündmused

**Sündmuse mõiste. Tehted sündmustega.**

Vaatleme mingit katset, millel on mitu erinevat võimalikku tulemust (lõplik arv), kuid katse toimumisel esineb parajasti üks neist tulemustest. Iga võimalikku katsetulemust nimetatakse elementaarsündmuseks ja kõik katsetulemused moodustavad elementaarsündmuste süsteemi ehk elementaarsündmuste hulga $\Omega$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

**Näiteks:**

- katse – mündi viskamine. Katse tulemused:*vapp* ja *kiri*.

$$\Omega = \{\text{vapp}, \text{kiri}\}.$$

- katse – täringu veeretamine. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Sündmuse mõiste. Tehted sündmustega.**

- katse – kahe täringu veeretamine.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

**Sündmuse mõiste. Tehted sündmustega.**

Sündmust, mis katse katse käigus alati toimub, nimetatakse kindlaks sündmuseks (tähistatakse $K$). Sündmust, mis selle katse ei saa toimuda, nimetatakse võimatuks sündmuseks (tähistatakse $V$). Sündmust, mis katse käigus võib toimuda või mitte toimuda, nimetatakse juhuslikuks sündmuseks.

Sündmuseks $A$ nimetatakse elementaarsündmuste hulga $\Omega$ suvalist alamhulka. ($A = \emptyset$ – võimatu sündmus, $A = \Omega$ – kindel sündmus).

Sündmust $A$ võib esitada:

- elementaarsündmuste loeteluna: $A = \{\omega_{1'}, \ldots, \omega_{k'}\}$;
- sõnaliselt, kirjeldades tunnust, mis määrab elementaarsündmuse kuuluvuse alamhulka.

**Näide.** Katseks on täringu veeretamine.

- $A$ on sündmus, et tulemus on paarisarv. (Sõnaline)
- $A = \{2, 4, 6\}$ (elementaarsündmuste loetlemine).

**Tehted sündmustega**

**Definitsioon 1.** Sündmuse $A$ vastandsündmuseks $\bar{A}$ nimetatakse sündmust, kui katsel ei toimu sündmus $A$.

$\Omega \setminus A$

**Definitsioon 2.** Sündmuste $A$ ja $B$ korrutiseks $AB$ (ehk $A \cap B$) nimetatakse sündmust, mis seisneb neist mõlema toimumises antud katsel.

Sündmuste $A_1, \ldots, A_n$ korrutis $A_1 \cdots A_n$.

**Definitsioon 3.** Sündmuste $A$ ja $B$ summaks $A + B$ (ehk $A \cup B$) nimetatakse sündmust, mis seisneb neist vähemalt ühe toimumises antud katsel.

Sündmuste $A_1, \ldots, A_n$ summa $A_1 + \cdots + A_n$.

**Tehted sündmustega**

**Lause 1.** *Kehtivad järgmised väited:*

- $A + K = K$, $AK = A$, $A + V = A$, $AV = V$, $A\bar{A} = V$, $A + \bar{A} = K$;
- $AB = BA$, $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$;
- $\overline{\bar{A}} = A$, $AA = A$, $A + A = A$.

# Sündmuse sagedus

**Sündmuse sagedus**

Vaatame katset, mille tulemusel sündmus $A$ võib toimuda. Eeldame, et võime katset korrata, kusjuures katsetingimused ei muutu katsete seeria jooksul ning sündmuse $A$ toimumine vaadeldaval katsel ei sõltu eelmistest katsetest st. tegemist on **sõltumatute katsetega**. Toimugu sündmus $A$ $n$–katselises seerias $n_A$ korda.

**Definitsioon 4.** Suurust $\mathrm{P}^*(A) = \dfrac{n_A}{n}$ nimetatakse sündmuse $A$ toimumise **sageduseks** ehk **suhteliseks sageduseks** selles $n$–katselises seerias.

**Lause 2.** *Kehtivad seosed:*

$$0 \leqslant \mathrm{P}^*(A) \leqslant 1, \quad \mathrm{P}^*(K) = 1, \quad \mathrm{P}^*(V) = 0, \quad \mathrm{P}^*(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}^*(A).$$

# Tõenäosuse statistiline definitsioon

**Tõenäosuse statistiline definitsioon**

Vaatame katset, mille tulemusel sündmus $A$ võib toimuda. Toimugu sündmus $A$ $n$–katselises seerias $n_A$ korda, siis on teada $\mathrm{P}^*(A)$ (sündmuse $A$ suhteline sagedus).

**Definitsioon 5.** Piirväärtust

$$\mathrm{P(A)} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}^*(A)$$

nimetatakse sündmuse $A$ **statistiliseks tõenäosuseks**.

### Tõenäosuse statistiline definitsioon

**Lause 3.** *Kehtivad väited:*

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1, \quad \mathrm{P}(K) = 1, \quad \mathrm{P}(V) = 0, \quad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A),\\
&\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)\\
&\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B).
\end{aligned}
$$

# Tõenäosuse klassikaline definitsioon

### Tõenäosuse klassikaline definitsioon

$\Omega$ – elementaarsündmuste süsteem $A$ – sündmus, st $A \subseteq \Omega$

**Definitsioon 6.** Arvu

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

nimetatakse sündmuse $A$ klassikaliseks tõenäosuseks.

$m$ – hulga $A$ elementide arv (*soodsate võimaluste arv*) $n$ – hulga $\Omega$ elementide arv (*kõikide võimaluste arv*)

### Klassikalise tõenäosuse omadused

**Lause 4.** *Klassikalisel tõenäosusel on järgmised omadused:*

- $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1,$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0,$
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1,$
- $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A),$
- $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB),$
- $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B).$

# Geomeetriline tõenäosus

### Geomeetriline tõenäosus

$\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $\Omega_A \subseteq \Omega$. $\mu$ – mõõt: $n = 1$ – pikkus, $n = 2$–pindala, $n = 3$–ruumala jne. Olgu $A$–sündmus, et katse käigus valitakse üks punkt hulgast $\Omega_A$. Eeldame, et punkti sattumine $\Omega$ mingisse alamhulka sõltub vaid selle hulga mõõdust.

**Definitsioon 7.** Sündmuse $A$ **geomeetriliseks tõenäosuseks** nimetatakse suurust

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(\Omega_A)}{\mu(\Omega)}.$$

### Geomeetriline tõenäosus

**Lause 5.** *Geomeetrilisel tõenäosusel on järgmised omadused:*

- $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$, $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$,
- $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$,
- $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$.

# Tõenäosusteooria aksioomid

### Tõenäosusteooria aksioomid

**Definitsioon 8.** Hulga $\Omega$ alamhulkade hulka $\mathcal{S}$ nimetatakse hulkade algebraks, kui

- $\Omega \in \mathcal{S}$;
- kui $A, B \in \mathcal{S}$, siis ka $\Omega \setminus A \in \Omega$ ja $A \cap B \in \Omega$.

**Definitsioon 9.** Hulkade algebrat $(\Omega, \mathcal{S})$ nimetatakse $\sigma$-algebraks, kui $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{S}$ korral

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}.$$

**Tõenäosusteooria aksioomid**

**Definitsioon 10.** Kolmikut $(\Omega, \mathcal{S}, \mathrm{P})$, kui $(\Omega, \mathcal{S})$ on $\sigma$-algebra, $\mathrm{P}\colon \mathcal{S} \to [0,1]$ ja on täidetud tingimused:

- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
- kui $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Omega$, kusjuures $A_k \cap A_l = \emptyset$ iga $k \neq l$ korral, siis

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j),$$

nimetatakse **tõenäosusruumiks.**

Olgu $A, B \in \mathcal{S}$. Leiame $\mathrm{P}(A \cup B)$.

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),$$

sündmuste abil väljendades

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$$

**Tõenäosuste liitmisteoreem**

Arvutame

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A + B + C) = \\ &... = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(AC) - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC).\end{aligned}$$

**Lause 6** (Tõenäosuste liitmisteoreem)**.**

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} \mathrm{P}(A_iA_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathrm{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right).$$

**Tinglik tõenäosus. Tõenäosuste korrutamisteoreem**

**Definitsioon 11.** Kui $\mathrm{P}(A) > 0$, siis tõenäosust

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

nimetatakse sündmuse $B$ **tinglikuks tõenäosuseks** tingimusel $A$.

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B).$$

**Definitsioon 12.** Sündmust $A$ nimetatakse **sõltumatuks** sündmusest $B$, kui

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A).$$

**Tinglik tõenäosus. Tõenäosuste korrutamisteoreem**

**Lause 7.** *Kehtivad väited:*

- *Kui sündmus $B$ on sõltumatu sündmusest $A$, siis ka sündmus $A$ on sõltumatu sündmusest $B$, st.* $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.
- *Sündmused $A$ ja $B$ on sõltumatud parajasti siis, kui* $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
- *Kui $A$ ja $B$ on sõltumatud, siis ka $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ on sõltumatud.*

**Tinglik tõenäosus. Tõenäosuste korrutamisteoreem**

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B).$$

Leiame $\mathrm{P}(A_1A_2A_3)$.

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1A_2).$$

**Lause 8** (Tõenäosuste korrutamisteoreem)**.**

$$\mathrm{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1)\prod_{j=2}^{n}\mathrm{P}\left(A_j \,\middle|\, \prod_{k=1}^{j-1} A_k\right).$$

**Tinglik tõenäosus. Tõenäosuste korrutamisteoreem**

**Definitsioon 13.** Sündmuste süsteemi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ nimetatakse **sõltumatuks**, kui

$$\mathrm{P}\left(A_j \middle| \prod_{k<j} A_k\right) = \mathrm{P}\left(A_j\right), \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

**Lause 9.** *Sündmuste süsteem* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *on sõltumatu parajasti siis, kui*

$$\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_k\right).$$

# Täistõenäosus

**Täistõenäosus**

Olgu $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ täielik sündmuste süsteem, st.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = K \wedge H_i H_j = V \quad \text{iga } i \neq j \text{ korral.}$$

Olgu $A$ sündmus. Leiame $\mathrm{P}(A)$.

**Lause 10** (Täistõenäosuse valem)**.** *Kui* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *on hüpoteeside süsteem, siis sündmuse* $A$ *tõenäosus avaldub valemiga*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i).$$

**Täistõenäosus**

**Näide:** Tudeng siseneb kottpimedasse tuppa eesmärgiga hankida kirjutusvahend. Ta liigub kombates lauani, avab kahest sahtlist ühe ja valib sealt juhusliku kirjutusvahendi. Leiame tõenäosuse, et ta sai pastaka, kui ühes sahtlis oli 6 pastakat ja 6 harilikku pliiatsit ning teises 2 pastakat ning 4 markerkerit.

$H_1$– kirjutusvahend valitakse esimesest sahtlist $H_2$–kirjutusvahend valitakse teisest sahtlist, siis $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$ ning $P(A|H_1) = 0,5$ ja $P(A|H_2) = \frac{1}{3}$. Seega

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

**Bayesi valem**

**Lause 11** (Bayesi valem)**.** *Kui* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *on hüpoteeside süsteem ja* $A$ *on mingi sündmus, siis*

$$\mathrm{P}(H_i|A) = \frac{\mathrm{P}(AH_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)} = \frac{\mathrm{P}(AH_i)}{\mathrm{P}(A)}.$$

**Bayesi valem**

**Näide:** Tudeng siseneb kottpimedasse tuppa eesmärgiga hankida kirjutusvahend. Ta liigub kombates lauani, avab kahest sahtlist ühe ja valib sealt juhusliku kirjutusvahendi. Osutus, et tudeng sai pastaka. Leiame tõenäosuse, et see pärineb esimesest sahtlist, kus oli 6 pastakat ja 6 harilikku pliiatsit (vt eelmine näide).

$H_1$– kirjutusvahend valitakse esimesest sahtlist $H_2$–kirjutusvahend valitakse teisest sahtlist, siis $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$ ning $P(A|H_1) = 0,5$ ja $P(A|H_2) = \frac{1}{3}$. Seega

$$P(H_1|A) = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot \frac{1}{3}} = 0,6$$

# Bernoulli valem

**Bernoulli valem**

**Bernoulli (katsete) skeem**: $n$–sõltumatust katsest koosnev katseseeria, kus sündmus $A$ toimub igal katsel tõenäosusega $p$.

Kui $0 < p < 1$, siis $q = 1 - p$. $B_{n,m}$ – sündmus, et $A$ toimub selles katseseerias täpselt $m$ korda. $P_{n,m} \overset{def.}{=} \mathrm{P}(B_{n,m})$.

**Lause 12.** *Kui katseseerias on n sõltumatut katset ja sündmus A toimub igal katsel tõenäosusega p ning* $B_{n,m}$ *on sündmus, et A toimub selle seeria korral täpselt m* $(0 \leqslant m \leqslant n)$ *korda, siis*

$$P_{n,m} = \mathrm{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

**Sündmuse $A$ tõenäoseim toimumiste arv $n$–katselises seerias**

Leiame sündmuse $A$ tõenäoseima toimumiste arvu $m$ Bernoulli skeemis.

**Arv $m$ on ka lokaalne maksimum funktsioonile $P_{n,m}$, st.**

$$\begin{cases} P_{n,m} \geqslant P_{n,m+1} \\ P_{n,m} \geqslant P_{n,m-1}. \end{cases}$$

**Lause 13.** *Sündmuse $A$ tõenäoseim toimumiste arv $m$ $n$–katselise Bernoulli skeemi korral on leitav võrratusest*

$$(n+1)p - 1 \leqslant m \leqslant (n+1)p.$$