Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Vaatleme integraali

$$\int_a^b f(x)dx$$

leidmist.

Kui $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, siis ristkülikvalem

$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Newton-Cotesi kvadratuurvalem

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

kus $A_i = \int_a^b L_{n,i}(x)dx$.

Ühtlase võrgu korral ($h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$) avaldub

$$A_i = (b - a)B_i,$$

kus B_i väärtusi saab leida käsiraamatutest.
Näiteks

n	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	-
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	-
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Kui $n = 1$, siis

$$S_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Kui $n = 2$, siis

$$S_2 = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

kus $C > 0$ on konstant, mis ei sõltu n ja M_n on $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$.

Üldiselt kasutatakse polünomiaalse interpolandi asemel tükiti polünomiaalset interpolanti. Olgu $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ tükiti lineaarne interpolant sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Asendame integreeritava funktsiooni $f(x)$ selle interpolandiga ning integreerime

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx.$$

Lõigul $[x_{i-1}, x_i]$ integreerides kasutame Newton-Cotesi kvadratuurvalemit $n = 1$ korral (võtame $a = x_{i-1}$ ja $b = x_i$), saame

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}[f(x_{i-1} + f(x_i)].$$

Seega

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] +$$

$$\ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Saadud valemit

$$S_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

nimetatakse **trapetsvalemiks.** Trapetsvalemi viga igal osalõigul

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi(x)dx \right| \le CM_1 h^3.$$

Viga lõigul $[a, b]$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx\right| \leq CM_1 nh^3.$$

Etl $n = \dfrac{b-a}{h}$, seega

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx\right| \leq CM_1 nh^3 = CM_1 \frac{b-a}{h} h^3$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx\right| \leq Ch^2$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $\Phi(x)$ on ruutinterpolant, st igal lõigul $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ on $\Phi(x)$ on ruutfunktsioon. Juhime tähelepanu, et selliseks interpoleerimiseks peab n olema paaris arv.
Asendame funktsiooni $f(x)$ tema interpolandiga ning integreerime

$$S_n = \int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx.$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ on $\Phi(x)$ ruutfunktsioon, seega võime selle integreerimiseks kasutada Newton-Cotesi kvadratuurvalemit ($n = 2$, võttes $a = x_{2i-2}$ ja $b = x_{2i}$). Siis

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx = \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})].$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] +$$

$$+ \frac{h}{3}[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] + \ldots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Siit saame **Simpsoni valemi**

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \right.$$

$$\left. + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Osalõigul $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ kehtib veahinnang

$$\left| \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx - \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \Phi(x)dx \right| \leq CM_2 h^5.$$

Meil osalõike kokku $\frac{n}{2}$, absoluutsed vead liituvad, järelikult

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| \leq CM_2 \frac{n}{2} h^5 = CM_2 \frac{b-a}{2h} h^5$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx \right| \leq Ch^4.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

Valemeid

$$\int\int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots, dx_n$$

arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.
Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid.
Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dxdy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Teame, et $\int_c^d f(x,y)dy = g(x)$. Tuletame kvadratuurvalemi selle funktsiooni jaoks. Selleks jagame vaadeldava integreerimislõigu $[c, d]$ osalõikudeks nii, et $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Lihtsuse huvides võime lugeda sõlmedevahelised kaugused võrdseks, st tegu on ühtlase võrguga, kus $\tau = y_j - y_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Rakendame nüüd trapetsvalemit, siis

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy \approx$$

$$\approx \frac{\tau}{2}\left[f(x,y_0) + 2f(x,y_1) + 2f(x,y_1) + \ldots + 2f(x,y_{m-1}) + f(x,y_m)\right].$$

Meil seega

$$\int_D\int f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx.$$

Saadud integraali $\int_a^b g(x)dx$ leidmiseks kasutame veelkord trapetsvalemit. Olgu meil ka siin lõigul $[a, b]$ antud ühtlane võrk $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, kus $h = x_i - x_{i-1}$, kus $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\int_a^b g(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{2}\left[g(x_0) + 2g(x_1) + 2g(x_2) + \ldots + 2g(x_{n-1}) + g(x_n)\right].$$

Et

$$g(x_0) = \frac{\tau}{2}\left[f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + \ldots + 2f(x_0, y_{m-1}) + f(x_0, y_m)\right],$$

$$g(x_1) = \frac{\tau}{2}\left[f(x_1, y_0) + 2f(x_1, y_1) + \ldots + 2f(x_1, y_{m-1}) + f(x_1, y_m)\right],$$

ja nii edasi, siis siit saame

$$\int_D\int f(x,y)dxdy \approx$$

$$\approx \frac{h\tau}{4}\left[f(x_0,y_0) + 2f(x_0,y_1) + \ldots + 2f(x_0,y_{m-1}) + f(x_0,y_m) + \right.$$

$$+2f(x_1,y_0) + 4f(x_1,y_1) + \ldots + 4f(x_1,y_{m-1}) + 2f(x_1,y_m) + \ldots +$$

$$+2f(x_{n-1},y_0) + 4f(x_{n-1},y_1) + \ldots + 4f(x_{n-1},y_{m-1}) + 2f(x_{n-1},y_m) +$$

$$\left. +f(x_n,y_0) + 2f(x_n,y_1) + \ldots + 2f(x_n,y_{m-1}) + f(x_n,y_m)\right],$$

kus h on sammupikkus $[a;b]$ ning τ on sammupikkus $[c;d.]$ Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n+1)(m+1)$ sõlmes.

Vaatame
$$\int\int_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$
arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärk n^N sõlmes.
Olgu piirkond D $N-$mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast D. Olgu X ühtlase jaotusega. Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväärtuse saab leida
$$Ef(x) = \int\int_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx_1 dx_2 \ldots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2, \ldots \widetilde{X}^n$. Nende punktide põhjal saab leida suuruse $f(X)$ valimi. Suuruse $f(x)$ statistiline keskväärtus

$$E_{stat} f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Kui keskväärtus asendada statistilise keskväärtusega, siis

$$\int \int_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx_1 dx_2 \ldots, dx_N \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}^i).$$

Siin sõlmede arv n ei sõltu integraali dimensioonist N.

Diferentsiaalvõrrandid

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitavate funktsioonide tuletisi või diferentsiaale.
Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse selles võrrandis esineva otsitava funktsiooni tuletise või diferentsiaali kõrgeimat järku. Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks funktsiooniks ühe muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit harilikuks diferentsiaalvõrrandiks (HDV). Kui diferentsiaalvõrrandis on otsitavaks mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks (ODV).

1. järku HDV üldkuju on järgmine:

$$F(x, u, u') = 0,$$

kus $F(x, u, v)$ on kolme muutuja funktsioon.
Kui võrrandis on kõrgeimat järku tuletis teiste liikmete kaudu avaldatud, siis see võrrand on normaalkujul. Seega on 1. järku HDV normaalkuju järgmine:

$$u' = f(x, u),$$

kus f on kahe muutuja funktsioon.
n. järku HDV üldkuju ja normaalkuju on vastavalt

$$F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) = 0$$

ja

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}),$$

kus F ja f on vastavalt $n+2-$ ja $n+1-$muutuja funktsioonid.

Diferentsiaalvõrrandi lahend on funktsioon, mis rahuldab seda võrrandit. Diferentsiaalvõrrand ei ole üheselt lahenduv, see tähendab, et võrrandil on palju lahendeid. Üldiselt $n-$järku võrrandi lahend sõltub n konstandist.

$n-$järku HDV üldlahendiks nimetatakse selle võrrandi lahendit, mis sõltub n suvaliselt valitavast konstandist. Erilahendiks nimetatakse lahendit, mis on saadud üldlahendist mainitud konstantide fikseerimise teel.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendi graafikut nimetatakse selle võrrandi integraalkõveraks. Seega võib $n-$järku HDV üldlahendit geomeetriliselt tõlgendada kui $n-$parameetrist sõltuvat integraalkõverate parve.

Vaatleme normaalkujulist $n-$järku HDV-d. Selle võrrandi üldlahend sõltub n parameetrist $C_1, \ldots, C_n$, st omab n vabadusastet. Erilahendi määramiseks on vaja järelikult lisada sellele võrrandile n lisatingimust.

$$\begin{cases} u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) = u_0^0, \\ u^{(1)}(x_0) = u_0^1, \\ \ldots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{n-1} \end{cases}$$

Seda ülesannet nimetatakse Cauchy ehk algtingimustega ülesandeks $n-$järku HDV-le. auchy teoreemi põhjal on teada, et kui funktsioon f on pidev ja tal on pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, siis on sellisel Cauchy ülesandel parajasti üks lahend.
Esineb ka ülesandeid, kus lisatingimused konstantide määramiseks on antud mitmes punktis. Sellisel juhul räägitakse rajaülesandest.