

# Lineaarsete võrrandisüsteemide täpne lahendamine

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

Sama süsteemi saab üles kirjutada ka maatrikskujul  $Ax = y$ , kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ ja } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Süsteemi  $Ax = y$  lahendamiseks saab kasutada Crameri valemeid, kuid see on küllalt töömahukas ( $m + 1$  determinanti).  
Samuti saab süsteemi lahendada Gaussi meetodiga (lahendamiseks kulub suurusjärku  $m^3 + m^2$  tehet).  
Lineaarseid süsteeme saab lahendada ka **LU-dekompositsiooniga** (*LU-lahutus*).

Osutub, et maatriksit  $A$  on võimalik lahutada kahe maatriksi korrutiseks  $A = LU$ , kus

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

ja

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

Kasutades dekompositsiooni  $A = LU$  saab süsteemi  $Ax = y$  lahendamise taandada kahe järjestikuse kolmnurkse süsteemi lahendamisele.

Olgu  $u_{ij} = 1$ , siis  $l_{i1} = a_{i1}$ ,  $u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}}$ ,  $l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}u_{jk}$  ( $i \geq k$ ),

$$u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{jk} \right) \quad (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga  $A$ , kuid erinevate vabaliikmetega  $y$ .

# Vektori ja maatriksi norm

$n$ -mõõtmelise vektori  $\vec{x}$  saab kirjutada kujul

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{või} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektorist kõneldes peetakse tavaliselt silmas veeruvektorit. Kui kasutada transponeerimist, siis saab veeruvektorist reavektori kujul

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \quad \text{või} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Vektorite  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ja  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  summa ja korrutis arvuga  $\alpha$  esituvad

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T \\ \alpha \vec{x} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^T. \end{aligned}$$

## Definitsioon

Vektori  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  norm on arv, mida tähistatakse sümboliga  $\|\vec{x}\|$ , ja mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1.  $\|\vec{x}\| > 0$ , kui  $x \neq 0$  ning  $\|\vec{x}\| \equiv 0$  siis ja ainult siis, kui  $\vec{x} = 0$ ;
2.  $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\| \quad \forall \alpha$ ;
3.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .

Kolmas tingimus on tuntud ka kolmnurga aksioomina.

Enimkasutatud normid vektorruumis  $\mathbb{R}^n$  on:

1. 1-norm:  $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|;$

2.  $m$ -norm:  $\|\vec{x}\|_m = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|;$

3.  $\mathcal{L}_p$  või  $\mathcal{L}^p$  norm:  $\|\vec{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$

Ütleme, et vektorite jada  $\vec{x}_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) koondub normi järgi vektoriks  $\vec{x}$  ja tähistame  $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}$ , kui  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\vec{x}_m - \vec{x}\| = 0$ .

Vektorruumi, milles on defineeritud norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks ehk lihtsalt normeeritud ruumiks.

Ruumi, milles norm on defineeritud skalaarkorrutise  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  abil, nimetatakse Hilberti ruumiks ja tähistatakse tavaliselt tähega  $\mathcal{H}$ .

## Definitsioon

Olgu  $A$  suvaline ristkülikmaatriks. Vähiinat arvu  $M$ , mille korral võrratus

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

kehtib iga vektori  $x$  puhul, nimetatakse maatriksi  $A$  normiks ja tähistatakse  $\|A\|$ .

## Definitsioon

Suvalise maatriksi  $A$  norm defineeritakse kui arv  $\|A\|$ , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1.  $\|A\| > 0$ , kui  $A \neq \ominus$  ning  $\|\ominus\| = 0$ ;
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ ;
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
4.  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ,

kus  $\lambda$  on arv,  $B$  on sobivate mõõtmetega maatriks ja  $\ominus$  on nullmaatriks.



Maatriksi normi nimetatakse kooskõlastatuks vektori normiga  $\|x\|$ , kui iga vektori  $x$  korral kehtib  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ .

Kui maatriksi norm  $\|A\|$  on kooskõlastatud vektori  $\|x\|$  normiga selliselt, et mistahes maatriksi  $A$  puhul leidub selline vektor  $x \neq 0$  nii, et kehtib võrdus  $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$ , siis öeldakse, et see maatriksi norm  $\|A\|$  on allutatud vektori normile  $\|x\|$ .

Olgu  $A$  suvaline  $(m \times n)$ -ristkülikmaatriks. Norme, mis on määratud seosega

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}},$$

kus  $\lambda_{max}$  on maatriksi  $A^T A$  suurim omaväärtus, nimetatakse maatriksi  $A$  spektraalseks normiks, mis on kooskõlas vektori eukleidilise normiga ja allutatud temale.

Lisaks spektraalsele normile kasutatakse veel küll sageli matriksi  $\mathcal{L}_1$ -normi ja  $\mathcal{L}_\infty$ -normi, sest nad on lihtsalt arvutatavad.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

# Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus  $f_1, \dots, f_m$  on funktsioonid.

Olgu otsitavate vektor  $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$ .

Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustada vektori  $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x))$ . Vektor  $F(x)$  sõltub vektorist  $x$ , seega on suurus  $F$  vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga  $F(x) = 0$ .

## Jacobi maatriks

Vektorfunktsiooni  $F(x)$  igast skalaarsest komponendist  $f_i(x)$  saab leida  $m$  osatuletist  $\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m}$ . Kokku selliseid tuletisi  $m \times m$  ning neist saab moodustada maatriksi

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sellist maatriksit nimetatakse vektorfunktsiooni  $F(x)$  Jacobi maatriksiks.

## Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem  $F(x) = 0$  viia kujule  $x = G(x)$ , kus  $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \dots; g_m(x))$ , ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \dots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \dots; x_m) \\ \dots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \dots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ , siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast  $x^1 = G(x^0)$ , järgmisena  $x^2 = G(x^1)$ , jne.

**Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

pause Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \dots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \dots; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \dots; x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \dots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Olgu meil teada süsteemi  $F(x) = 0$  täpne lahend  $x^*$ , siis ka  $x^* = G(x^*)$ . Lähendi  $x^n$  erinevust täpsest lahendist  $x^*$  iseloomustab nende vaheline kaugus  $\|x^n - x^*\|$ .

Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^*\| = 0,$$

siis koondub lähend  $x^n$  täpseks lahendiks  $x^*$ .

## Oluline tingimus koondumiseks

$$\|G'(x)\| \leq q < 1.$$

### Teoreem

Leidugu süsteemi  $F(x) = 0$  lahendit  $x^*$  sisaldav kera  $B$ , milles on täidetud võrratus  $\|G'(x)\| \leq q < 1$ . Peale selle eeldame, et vektorfunktsioon  $G(x)$  ei vii kerast  $B$  välja, st iga  $x \in B$  korral  $G(x) \in B$ . Olgu alglahend  $x^0$  valitud hulgast  $B$ , siis koondub nii hariliku kui ka Seideli iteratsioonimeetodiga arvatatud lähendite jada  $x^n$  täpseks lahendiks  $x^*$ . Seejuures kehtib veahinnang

$$\|x^n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x^1 - x^0\|.$$



## Newtoni meetod

Võrrandi  $f(x) = 0$  korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul  $F(x) = 0$ . Siin

$F(X) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$  on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

**Newtoni meetodi** algoritm

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^{n-1})]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus  $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots, x_m^{n-1})$  ja  $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)$  on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$\|x^n - x^*\| \leq C \|x^{n-1} - x^*\|^2.$$

### **Modifitseeritud Newtoni meetod**

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^{n-1})]^{-1} F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.