Võrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame võrrandi

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon.
Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.
Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:
1) leitakse alglähend x_0, milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \tag{1}$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.
Üks võimalus selleks on valida $C \neq 0$ ning

$$f(x) = 0 \,|\cdot C$$

saame

$$Cf(x) = 0,$$

$$x + Cf(x) = x.$$

Tähistame $g(x) = x + Cf(x)$ ning saamegi vajaliku kuju

$$x = g(x).$$

Näide 3 (vt loeng 1)
Võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ korral võib leida

1) $x = 0,5(1 - x^3)$ või

2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eestkirja põhjal

$$x_n = g(x_{n-1}), \tag{2}$$

st $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, jne.
Harilik iteratsioonimeetod on ühesammuline meetod.
Uurime meetodi viga:
olgu x^* võrrandi (1) täpne lahend, st $x^* = g(x^*)$. Lähendi x_n tõeline viga on $|x_n - x^*|$.

Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0,$$

siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks x^*, st $x_n \longrightarrow x^*$.
Oluline tingimus sellise koondumise jaoks on

$$|g'(x)| \leq q < 1. \tag{3}$$

Teoreem

Leidugu võrrandi (1) lahendit x^* sisaldav vahemik (a, b), milles on täidetud võrratus (3). Olgu funktsioon $g(x)$ selline, et $\forall x \in (a, b)$ korral $g(x) \in (a, b)$. Olgu $x_0 \in (a, b)$. Siis koondub hariliku iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada x_n täpseks lahendiks x^*. Lisaks kehtib veahinnang

$$\mid x_n - x^* \mid \leq \frac{q^n}{1-q} \mid x_1 - x_0 \mid . \tag{4}$$

Tõestus

Et $x_0 \in (a, b)$ ja $g(x)$ ei vii vahemikust (a, b) välja, siis $x_1 = g(x_0) \in (a, b)$, $x_2 = g(x_1) \in (a, b), \ldots, x_n = g(x_{n-1}) \in (a, b)$.
Et x^* on võrrandi (1) täpne lahend, siis

$$x^* = g(x^*).$$

Lahutame seosest (2) viimase võrduse, saame

$$x_n - x^* = g(x_{n-1}) - g(x^*).$$

Kasutame Lagrange'i keskväärtusteoreemi
(Punktide x_{n-1} ja x^* vahel leidub punkt c_n nii, et

$$g(x_{n-1}) - g(x^*) = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).)$$

Seega

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Teame, et $x_{n-1}, x* \in (a, b)$, järelikult ka $c_n \in (a, b)$. Meie eelduse põhjal $|g'(c_n)| \leq q < 1$.
Järelikult

$$|x_n - x^*| = |g'(c_n)(x_{n-1} - x^*)| = |g'(c_n)||(x_{n-1} - x^*)| \leq q|(x_{n-1} - x^*)|.$$

Rakendame seda hinnangut korduvalt

$$|x_n - x^*| \leq q|x_{n-1} - x^*| \leq q^2|x_{n-2} - x^*| \leq \ldots \leq q^n|x_0 - x^*|.$$

Näitasime, et

$$|x_n - x^*| \leq q^n|x_0 - x^*|. \tag{5}$$

Et $q < 1$, siis $q^n \longrightarrow 0$, kui $n \longrightarrow \infty$. Seega

$$|x_n - x^*| \longrightarrow 0, \ \text{kui } n \longrightarrow \infty.$$

Koondumine $x_n \longrightarrow x^*$ on näidatud.

Valem (5) ei sobi praktilistes arvutustes, sest paremal pool on tundmatu suurus x^*. Tuletame praktilisema hinnangu.

$$|x_0 - x^*| = |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \leq$$
$$\leq |x_0 - x_1| + q|x_0 - x^*|.$$

Koondades selles võrratuses sarnased liikmed, saame

$$(1 - q)|x_0 - x^*| \leq |x_0 - x_1|,$$

siit

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1 - q}|x_1 - x_0|.$$

Jagasime suurusega $1 - q$ ($1 - q > 0$, sest $q < 1$).
Kasutades saadud hinnangut seoses (5) saimegi hinnangu (4).
/**mott**

Hinnangu (4) paremat poolt võib ka vaadelda, kui geomeetrilist jada a, aq, $aq^2, \ldots$, kus $a = \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}$. Et $q < 1$, siis on tegu hääbuva geomeetrilise jadaga ning võib öelda, et **harilik iteratsioonimeetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.**

Saab tõestada, et kui kõikjal lahendit x^* sisaldavas vahemikus $|g'(x)| > 1$, siis meetod ei koondu.

Näide 3

Jätkame eelmise loengu näitega, kus oli vaja lahendada võrrand
$x^3 + 2x - 1 = 0$.

Tuletasime eelnevalt 2 võimalikku hariliku iteratsioonimeetodiks sobivat kuju
1) $x = 0,5(1 - x^3)$ ja
2) $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$.

Eelmises loengus leidsime, et alglähendiks x_0 sobib 0,5. Alglähend $x_0 = 0,5 \in [0,1; 0,7]$.

Kontrollime tingimuse (3) täidetust.

1) Kui $x = 0,5(1 - x^3)$, siis $g(x) = 0,5(1 - x^3)$ ning $g'(x) = -1,5x^2$.
$|g'(0,1)| = 0,015 < 1$, ent $|g'(0,7)| = 0,735 < 1$.
Tingimus (3)on täidetud.

2) Kui $x = \sqrt[3]{1 - 2x}$, siis $g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ja $g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{1-2x}}$.
$|g'(0,1)| = 1,04 > 1$ ja $|g'(0,7)| = 4,167 > 1$.
Tingimus (3) pole täidetud.

Vastavalt tõestatud teoreemile oleme leidnud koonduva hariliku iteratsioonimeetodi. Seega saame leida võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ ligikaudse lahendi eeskirjaga

$$x_n = 0,5(1 - x_{n-1}^3)$$

ehk

$$x_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,5(1 - x_0^3) = 0,5(1 - 0,5^3) = 0,4375$$

$$x_2 = 0,5(1 - x_1^3) \approx 0,4581$$

$$x_3 = 0,5(1 - x_2^3) \approx 0,4519$$

$$\dots$$

$$x_{10} \approx x_{11} \approx 0,4534.$$

Kontrolliks $0,4534^3 + 2 \cdot 0,4534 - 1 \approx 6,14 \cdot 10^{-6}$.

Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Hariliku iteratsioonimeetodi korral kehtis

$$x_n - x^* = g'(c_n)(x_{n-1} - x^*).$$

Esitame sama seose x_{n+1} ja x^* jaoks:

$$x_{n+1} - x^* = g'(c_{n+1})(x_n - x^*).$$

Suurus $x_n < c_{n+1} < x^*$. Kui n on suur, siis $x_{n-1} \approx x_n \approx x^*$. Seega $x^* \approx c_n \approx c_{n+1}$.
Kui $g'(x)$ on pidev funktsioon, siis kehtib

$$g'(c_n) \approx g'(c_{n+1}).$$

Tähistame näiteks $a_n = g'(c_n)$, siis $a_n \approx g'(c_{n+1})$.

Neid tähistusi kasutades saame esialgsed seosed kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} x_n - x^* = a_n(x_{n-1} - x^*) \\ x_{n+1} - x^* \approx a_n(x_n - x^*) \end{cases}$$

Selles süsteemis on meie jaoks tundmatud a_n ja x^*. Süsteemi lahendamisel saame otsitava ligikaudse väärtuse x^*:

$$x^* \approx \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suurust saab kasutada x_{n+1} parandamiseks:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n}.$$

Leitud suuruse abil saab leida $x_{n+2} = g(\overline{x_{n+1}})$. Nüüd omakorda on võimalik x_{n+1}, $\overline{x_{n+1}}$ ja x_{n+2} põhjal leida $\overline{x_{n+2}}$. Siit $x_{n+3} = g(\overline{x_{n+2}})$, jne.

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit $f(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi korral $x = g(x)$, kus $g(x) = x + Cf(x)$ (C on suvaline konstant). Koonduva hariliku iteratsioonimeetodi jaoks on tarvilik, et $|g'(x)| \leq q < 1$, kusjuures mida väiksem q, seda kiiremini koondumine toimub. Seega peaksime koondumise kiirendamiseks valima konstandi C nii, et $|g'(x)| = |1 + Cf'(x)|$ oleks x^* lähedal võimalikult väike. Võime valida igal iteratsioonisammul erineva C väärtuse. Kui x_{n-1} on leitud, siis valime C nii, et $g'(x_{n-1}) = 0$ ehk

$$g'(x_{n-1}) = 1 + Cf'(x_{n-1}) = 0.$$

Lahendame saadud võrrandi C suhtes, saame

$$C = -\frac{1}{f'(x_{n-1})}.$$

Seega

$$g(x) = x + Cf(x) = x - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

ja hariliku iteratsioonimeetodi eeskiri $x_n = g(x_{n-1})$ saab kuju

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Sellist iteratsioonimeetodit nimetatakse **Newtoni meetodiks.**
Newtoni meetod on ühesammuline meetod.
Newtoni meetodi koondumiseks on oluline

$$|f'(x)| > 0$$

ja

$$|f''(x)| \leq K$$

ja alglähend x_0 peab olema otsitavale lahendile x^* piisavalt lähedal.
Siis kehtib

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus γ sõltub konstandist K.

Näide 3 Lahendame eelmise loengu näite 3 võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ Newtoni meetodiga.
Meil $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $f'(x) = 3x^2 + 2$.
Newtoni meetod $n-$nda lähendi leidmiseks on seega

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 + 2} = \frac{2x_{n-1}^3 + 1}{3x_{n-1}^2 + 2}$$

$x_0 = 0,5$
$x_1 = \frac{2x_0^3+1}{3x_0^2+2} \approx 0,4545$
$x_2 = \frac{2x_1^3+1}{3x_1^2+2} \approx 0,4534$
$x_3 = \frac{2x_2^3+1}{3x_2^2+2} \approx 0,4534$

Modifitseeritud Newtoni meetod

Newtoni meetodi korral

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Alati ei ole võimalik leida tuletise väärtust või on see protsess liiga töömahukas. Selle vältimiseks võib kasutada Newtoni meetodi modifikatsioone. Lihtsaim neist:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Eeskiri on **modifitseeritud Newtoni meetod**. Meetod on ühesammuline iteratsioonimeetod ning koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Lõikajate meetod

Teine võimalus Newtoni meetodit modifitseerida on tuletise lähendamine. Matemaatilisest analüüsist on teada, et

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kui Δx on väike, siis $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Argumendi muudule $\Delta x = x_{n-2} - x_{n-1}$ vastab funktsiooni muut $\Delta y = f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})$ ning

$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}.$$

Asendades leitud tuletise Newtoni meetodisse ning saame **lõikajate ehk kõõlude meetodi**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Meetod on kahesammuline ja teatud eeldustel kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus $\beta > 0$.