Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähislahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

Vigade liigid

- Matemaatilise formuleeringu viga
  Sellesse jaotusse kuuluvad näiteks ülesande algandmete vead.
  Näide 1 Keha langeb Maa raskusväljas. Lihtsustatud mudelis, kus ei arvestata takistusjõude
  $$F = mg.$$
  Õhutakistuse korral
  $$F = mg - kv^2.$$

Vigade liigid

- Meetodi viga
  Matemaatiliste ülesannete lahendusmeetodid saab laias laastus jagada kaheks: *täpseteks* ja *ligikaudseteks* meetoditeks.
- Ümardamisvead
  Näide 2
  $$654321 \cdot 654321 = 428135971041$$
  Samas taskuarvutil leides oleks sama tehte vastuseks $4,28135971 \cdot 10^{11}$.

Vigade liigid

- Aproksimeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

Absoluutne ja relatiivne viga

Olgu a arvu A ligikaudne väärtus.
Ligikaudse arvu a **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust $\Delta = a - A$.
Ligikaudse arvu a **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu ε, mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| \leq \varepsilon \quad \text{ehk} \quad |a - A| \leq \varepsilon.$$

Absoluutne ja relatiivne viga

Ligikaudse arvu *a* **tõeliseks relatiivseks veaks** nimetatakse suurust $\eta = \frac{\Delta}{a}$.
Ligikaudse arvu *a* **relatiivseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu δ, mis rahuldab võrratust

$$|\eta| \leq \delta \quad \text{ehk} \quad \left|\frac{a - A}{a}\right| \leq \delta.$$

Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni $u = u(x_1, \ldots, x_m)$ väärtus, kui argumendid $x_1, \ldots, x_m$ ei ole täpsed.
Olgu argumentide $x_1, \ldots, x_m$ ligikaudsed väärtused $X_1, \ldots, X_m$.
Tõeline viga $\Delta x_i = X_i - x_i, \;\; i = 1, \ldots, m$.
Siit $X_i = x_i + \Delta x_i$ ning

$$\Delta u = u(X_1, \ldots, X_m) - u(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= u(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Et $x_i \approx X_i$, siis pidevate osatuletiste $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m).$$

Seega $\Delta u \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m)\Delta x_i$.

Kui $|\Delta x_i| \le \varepsilon_{x_i}$, siis

$$|\Delta u| \approx \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m)\Delta x_i \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m)\Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| |\Delta x_i| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse u **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile $\delta_{x_i} = \frac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$ ja $\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \ldots, X_m)|}$.

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \ldots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \ldots, X_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$= \frac{1}{|u(X_1,\ldots,X_m)|}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1,\ldots,X_m)\right||X_i|\delta_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse *u* **relatiivseks veaks** võtta

$$\delta_u = \frac{1}{|u(X_1,\ldots,X_m)|}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1,\ldots,X_m)\right||X_i|\delta_{x_i}.$$

Mõned erijuhud

Liitmine ja lahutamine

Olgu $u = x_1 \pm x_2$, siis

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \frac{|X_1|\delta_{x_1} + |X_2|\delta_{x_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$

Korrutamine ja jagamine

Olgu $u = x_1 \cdot x_2$, siis

$$\varepsilon_u = |X_2|\varepsilon_{x_1} + |X_1|\varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Olgu $u = \frac{x_1}{x_2}$, siis

$$\varepsilon_u = \frac{1}{|X_2|}\varepsilon_{x_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2}\varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \; x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

Definitsioon

Võrrandit $f(x) = 0$ nimetatakse algebraliseks võrrandiks, kui $f(x)$ on algebraline avaldis (st arvud, tähed on omavahel seotud liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, täisarvulise astendamise ja juurimise abil).

Definitsioon

Võrrandit $f(x) = 0$ nimetatakse transtsendentseks võrrandiks, kui $f(x)$ sisaldab transtsendentseid funktsioone (st eksponent- või logaritmfunktsioone, trigonomeetrilisi funktsioone ja nende pöördfunktsioone).

Definitsioon

Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.

Definitsioon

Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks (funktsiooni $f(x)$ nullkohaks), kui

$$f(x^*) \equiv 0.$$

Definitsioon

Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ $k-$kordseks lahendiks, kui

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Väga keerulist võrrandit õnnestub harva täpselt lahendada. Seega on vajalikud neil juhtudel ligikaudsed meetodid.
Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn **iteratsioonimeetodid**.
Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:
1) leitakse alglähend x_0, milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.
Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Graafiline meetod
Mõnedel juhtudel on mõtekas võrrand $f(x) = 0$ kirjutada ümbes kujule $f_1(x) = f_2(x)$ ning joonistada kahe funktsiooni $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ graafikud. Nende kahe graafiku lõikepunkti(de) abstsiss(id) annabki (annavadki) vajaliku alglähendi.
Näide 3 Näiteks võrrandi $x^3 + 2x - 1 = 0$ võib kirjutada kujul $x^3 = 1 - 2x$ ja siit joonistada $y = x^3$ ja $y = 1 - 2x$ graafikud. Jooniselt on näha, et võime alglähendiks võtta $0,4 \sim 0,5$.

Tabel
Kui $f(x)$ on pidev, saab alglähendi leidmiseks kasutada ka funktsiooni väärtustest moodustatud tabelit.
Meie näite puhul $f(0,4) = -0,136$ ja $f(0,5) = 0,125$.

Poolitamismeetod

Selle korral arvutatakse funktsiooni $f(x)$ väärtus lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunktis $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$. Edasi võetakse vaatluse alla see poollõik, mille otstes on funktsiooni väärtustel erinev väärtus (seal asub vähemalt üks võrrandi $f(x) = 0$ lahend) ja arvutatakse funktsiooni väärtus poollõigu keskpunktis. Valitakse uus poollõik ja korratakse protseduuri, kuni saame lähendile piisavalt täpsed tõkked.