Tallinna Tehnikaülikool

Loengukursuses DIFERENTSIAALVÕRRANDID kasutatavate põhimõistete kogumik

sügis 2006

Diferentsiaalvõrrandiks (DV) nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletiste ja sõltumatute muutujatega.
Harilik diferentsiaalvõrrand - otsitav on ühe muutuja funktsioon.
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand - otsitav on mitme muutuja funktsioon.
DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatute muutujate suhtes.
Integraalkõver, -pind - lahendi graafik.
DV lahendamine - DV kõigi lahendite leidmine ehk DV integreerimine.

Esimest järku harilikud DV

Esimest järku harilik diferentsiaalvõrrandi (HDV) üldkuju:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ otsitav funktsioon ja $y' = \frac{dy}{dx}$ otsitava funktsiooni tuletis.
Esimest järku HDV normaalkuju:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Esimest järku HDV sümmeetriline kuju:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Definitsioon: Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ määratud xyz- ruumi piirkonnas G. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (1) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x), y'(x)) \in G$ ja $F(x, y(x), y'(x)) = 0\ \forall x \in (a, b)$ korral.
Definitsioon: Olgu funktsioon $f(x, y)$
määratud xy- ruumi piirkonnas D. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi (2) lahendiks selles vahemikus, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning $(x, y(x)) \in D$ ja $y'(x) = f(x, y(x))\ \forall x \in (a, b)$ korral.
Cauchy ülesanne esimest järku HDV jaoks:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (2) \\ y(x_0) = y_0, & (3) \end{cases}$$

kus $x_0,\ y_0$ on mingid antud reaalarvud.
Peano teoreem: Olgu $f(x, y)$ pidev kahemuutuja funktsioon piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.
Cauchy teoteem: Olgu $f(x, y)$ pidev piirkonnas D ning olgu tal selles piirkonnas olemas pidev osatuletis $\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}$. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandi (2) integraalkõver.

Definitsioon: Võrrandi (2) üldlahendiks piirkonnas D nimetatakse suvalisest konstandist C sõltuvat lahendit $y = y(x, C)$, mis rahuldab tingimust:
iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral leidub konstandi C selline väärtus C_0, et lahend $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.
Definitsioon: Võrrandi (2) erilahendiks nimetatakse lahendit, mis saadakse üldlahendist konstandi C fikseerimisega.

Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Teoreem: Olgu
1) $M(x)$ pidev vahemikus (a, b),
2) $N(y)$ pidev vahemikus (α, β) ning
3) $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$,
siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

ehk

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = C_1, \quad (2')$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.
Tõestus:
I Näitame, et (2) on (1) lahendiks.
II Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega DV

Eralduvate muutujatega DV:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x),\ N_1(y),\ M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

Homogeenne DV

Definitsioon: Funktsiooni $F(x,y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx,ty) = t^\alpha F(x,y)$$

$\forall t > 0$, $\forall (x,y) \in D$.

Definitsioon: Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x,y)$ nimetatakse homogeenseks, kui
$f(x,y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx,ty) = f(x,y), \quad t > 0.$$

Lause: Homogeenne DV $y' = f(x,y)$ taandub muutujate (x,u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.
Homogeenne diferentsiaalvõrrand võib esineda ka kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

kus $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ on sama astme homogeensed funktsioonid.

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

kus $A(x)$ ja $B(x)$ on võrrandi kordajad ning $C(x)$ on vabaliige.

Kui $A(x) \neq 0$, siis saab võrrandi viia kujule

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Algtingimus: $y(x_0) = y_0$. (2)

Lause: Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi (1) lahendamise võib jagada osadeks:
1) lahendatakse vastav lineaarne homogeenne DV

$$y' + p(x)y = 0,$$
$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx};$$

2) leitakse üks lineaarse mittehomogeense DV konkreetne lahend

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx};$$

3) kirjutatakse välja võrrandi (1) üldlahend

$$y = y_h + y_*.$$

Bernoulli võrrand

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

kus $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Riccati võrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x).$$

Saame lahendada, kui teada üks konkreetne lahend y_*.

Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon: Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et tema täisdiferentsiaal on kujul

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

st

$$\frac{\delta u(x, y)}{\delta x} = M(x, y), \quad \frac{\delta u(x, y)}{\delta y} = N(x, y).$$

Tarvilik ja piisav tingimus eksaktsuseks:

$$\frac{\delta M(x, y)}{\delta y} = \frac{\delta N(x, y)}{\delta x} \qquad \forall (x, y) \in D.$$

Integreeruvustegur

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.
Korrutamisel saame võrrandi

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (*)$$

ja eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\delta(\mu M)}{\delta y} = \frac{\delta(\mu N)}{\delta x}.$$

Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{-N} dx$$

ja

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{N} dx}.$$

Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M} dy}.$$

Kui $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x + y$ või $\omega = x - y$ või $\omega = xy$ vms, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{-\left(\frac{\delta \omega}{\delta x}N - \frac{\delta \omega}{\delta y}M\right)} d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega}.$$

Tuletise suhtes ilmutamata DV

$$F(x, y, y') = 0$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Parametriseerimisega saame, et

$$y = g(x, y') \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p) \end{cases}$$

ning saame esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$\left(\frac{\delta g}{\delta x} - p\right) dx + \frac{\delta g}{\delta p} dp = 0.$$

Lahend parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, C), p), \end{cases}$$

kus p on parameeter.
Analoogiliselt ka

$$x = h(y, y') \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p). \end{cases}$$

Üldskeem parametriseerimiseks:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \longleftrightarrow \quad F(x, y, z) = 0$$

Pinna võrrandi saab esitada parameetreid

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

kasutades, saame

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v.$$

Nii saame diferentsiaalvõrrandi

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0.$$

Lahendi siledus

Vaatleme võrrandit $y' = f(x, y)$.

Teoreem:
Olgu funktsioon $f(x, y)$ k korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas D. Siis diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ iga lahend on $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv.

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.
Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{2}$$

Peano teoreem: Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.
Cauchy teoreem: Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide y, $y', ..., y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.
Definitsioon: Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, mis sõltuvad n suvalisest konstandist $C_1, ..., C_n$ ja mille puhul iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)} =\in D$ jaoks leiduvad konstantide väärtused $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, nii et lahend $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ rahuldab algtingimusi (2).
Definitsioon: Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

I Võrrand kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y''}{2!}(x - x_0)^2 + ...+$$

$$\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s) ds.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendi esitame parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Phi(t, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni $z = y^{(k)}$. **IV** Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

Muutujavahetus $y' = z$, $z = z(y)$.
Oma esialgse võrrandi saame teisendada $(n-1)-$järku võrrandiks

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

V Otsitava ja tema tuletiste suhtes homogeenne diferentsiaalvõrrand.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots, y^{(n)}$ suhtes. See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

$\forall t > 0$.

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon.

n-järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Otsitava funktsiooni ja selle tuletiste suhtes lineaarset võrrandit nimetatakse $n-$järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks ning
tähistatakse

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Moodustame Cauchy ülesande, selleks lisame lineaarsele võrrandile n algtingimust:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{2}$$

Teoreem: Kui võrrandi (1) kordajad $p_0(x)$, $p_1(x), ..., p_n(x)$ $(p_0(x) \neq 0)$ ja vabaliige $f(x)$ on pidevad vahemikus (a, b) ja $x_0 \in (a, b)$, y_0, $y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)} \in (-\infty, \infty)$, siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimusi (2).

Lahenditevahelised seosed

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$$

Siis võrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$$

võime lühidalt kirjutada

$$Ly = f \qquad (1)$$

ning vastav homogeenne võrrand on kujul

$$Ly = 0. \qquad (1_h)$$

Omadus 1: Kui $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi (1_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

võrrandi (1_h) lahend.
Omadus 2: Kui $y_1, y_2, ...y_n$ on (1_h) lahend, y_* on aga (1) lahend, siis

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_*$$

on (1) lahend.

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.
Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (1_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (1_h) lahenditeks.

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Definitsioon: Funktsioone $y_1(x), ...y_n(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus (a, b), kui leiduvad kordajad $\alpha_1, \alpha_2, ...,\ \alpha_n$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0)$ nii, et

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + ... + \alpha_ny_n(x) = 0$$

$$\forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos (*) kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, nimetatakse funktsioone $y_1(x), y_2(x), ...,\ y_n(x)$ lineaarselt sõltumatuteks.

Wronski determinant. Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Wronski determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Teoreem: Olgu $y_1(x), ..., y_n(x)$ võrrandi (1_h) lahendid. Siis
I $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui

$$W(x) \equiv 0 \ \forall x \in (a, b).$$

II $y_1(x), ..., y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui

$$W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b).$$

Järeldus 1: Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) lahendite $y_1, y_2, ..., y_n$ korral on järgmised tingimused samaväärsed:
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b);
2) $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3) $\exists x_0 \in (a, b)$, mille korral $W(x_0) = 0$.
Järeldus 2: Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) lahendite $y_1, y_2, ..., y_n$ korral on järgmised tingimused samaväärsed:
1) $y_1, y_2, ..., y_n$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b);
2) $W(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3) $\exists x_0 \in (a, b)$, mille korral $W(x_0) \neq 0$.
Järeldus 3: Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1_h) lahendite $y_1, y_2, ..., y_n$ korral on kas $W(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ korral või $W(x) \neq 0$ kõigi $x \in (a, b)$.

Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon: Võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.
Teoreem: Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ on pidevad funktsioonid vahemikus (a, b), siis leidub võrrandi $Ly = 0$ jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.
Teoreem: Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, selle võrrandi üldlahend avaldub kujul $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$.
Teoreem: Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ võrrandi $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem, $y_*(x)$ võrrandi $Ly = f(x)$ üks lahend, siis võrrandi $Ly = f(x)$ üldlahend on kujul $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) + y_*(x)$.

Konstantide varieerimise meetod

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Konstantsete kordajatega lineaarne diferentsiaalvõrrand

Vaatame võrrandit kujul $Ly = 0$, st

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

kus suurused p_i on konstandid.
Karakteristlik võrrand

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + ... + p_n = 0.$$

Karakteristlikud väärtused $\lambda_1,\ \lambda_2 \dots \lambda_n$.
I Karakteristlikud väärtused λ_1,...,λ_n on reaalsed ja paarikaupa erinevad.
Võrrandi $Ly = 0$ üldlahend

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

II Karakteristlike väärtuste λ_1,...,λ_n seas on ka paarikaupa erinevaid komplekseid väärtusi.
Võrrandi $Ly = 0$ lahenditeks on siis $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.
Võrrandi $Ly = 0$ üldlahend

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

III Karakteristlike väärtuste seas on kordseid väärtusi.
Kui λ_1 on reaalne $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis sellisele karakteristlikule väärtusele vastavad funktsioonid

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = x e^{\lambda_1 x},$$

$$y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

on konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi $Ly = 0$ lahenditeks.
Kui $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ on kompleksne $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis on vastavad lahendid $y_1, ..., , y_n$ ka kompleksed. Reaalsed lahendid saame reaal- ja imaginaarosa eraldamisel.

$$\widetilde{y_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \widetilde{y_2} = x e^{\alpha x} \cos \beta x,\ ...,$$

$$\widetilde{y_r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$\widetilde{y_{r+1}} = e^{\alpha x} \sin \beta x,\ \widetilde{y_{r+2}} = x e^{\alpha x} \sin \beta x,\ ...,$$

$$\widetilde{y_{2r}} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame lineaarset konstantsete kordajatega dif. võrrandit

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \quad (1)$$

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ meil $m-$ astme polünoom

$$f(x) = B_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m$$

Lause: Kui $\lambda = 0$ ei ole (1) lin. homogeensele võrrandile vastava karakteristliku võrrandi lahendiks, siis võrrandil (1) leidub erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m,$$

kus q_i on määramata kordajad.
Kui $\lambda = 0$ on $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandi (1) erilahend y_* on kujul

$$y_*(x) = x^r Q_m(x) = x^r (q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m).$$

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{ax} B_m(x) = e^{ax}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m)$$

Lause: Kui arv a ei ole (1) lin. homogeensele võrrandile vastava karakteristliku võrrandi lahendks, siis võrrandil (1) leidub erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = e^{ax} Q_m(x) =$$

$$= e^{ax}(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.
Kui arv a on $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^r e^{ax} Q_m(x) =$$

$$= x^r e^{ax}(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m),$$

kus q_i on määramata kordajad.
C Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ avaldis kujul

$$f(x) = A_s(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + B_t(x) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Lause: Kui $\lambda = \alpha + \beta i$ ei ole (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis võrrandil (1) leidub erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = U_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kus U_m, V_m on sama astme polünoomid kui A_s, B_t.
Kui $\lambda = \alpha + \beta i$ on $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^r \left[U_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \right].$$

D Olgu $Ly = f(x)$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f(x)$ erilahend y_{*1}, ning leitakse y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n_1}, y_2, y_2', ..., y_2^{n_2}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n_m}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n_1}, y_2, y_2', ..., y_2^{n_2}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n_m}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n_1}, y_2, y_2', ..., y_2^{n_2}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{n_m}) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{4}$$

Peano teoreem: Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ pidevad muutujate $x, y_1, y_2, ..., y_n$ piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.
Cauchy teoreem: Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ja nende osatuletised $\frac{\delta f_i}{\delta y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ määratud ja pidevad muutujate $x, y_1, y_2, ..., y_n$ piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.
Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.