Lahendite fundamentaalsüsteem. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

Definitsioon

Võrrandi $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteemiks (LFS) nimetatakse mistahes* n *lineaarset sõltumatut lahendit* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Teoreem

Kui kordajad $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ *on pidevad funktsioonid vahemikus* (a, b), *siis leidub võrrandi* $Ly = 0$ *jaoks lahendite fundamentaalsüsteem.*

Tõestus

Vaatleme selle teoreemi tõestamiseks n *ülesannet. Moodustame need ülesanded nii, et alati on võrrandiks* $Ly = 0$ *ning lisame erinevaid algtingimusi.*

Olgu siis esimene ülesanne

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

kus $x_0 \in (a, b)$. Teine Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Nii moodustame ka ülejäänud Cauchy ülesanded. Viimane Cauchy ülesanne on kujul

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

Oleme saanud võrrandi $Ly = 0$ n lahendit $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Moodustame nende funktsioonide Wronski determinandi:

$$W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]_{x=x_0} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Kuna Wronski determinant on nullist erinev, siis on funktsioonid lineaarselt sõltumatud ja moodustavad LFS.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem, siis selle võrrandi üldlahend avaldub kujul* $y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$.

Teoreem

Olgu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *võrrandi* $Ly = 0$ *lahendite fundamentaalsüsteem,* $y_*(x)$ *võrrandi* $Ly = f(x)$ *üks lahend, siis võrrandi* $Ly = f(x)$ *üldlahend on kujul* $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) + y_*(x)$.

Tõestus

Omaduse 2 (vt 8. loeng) põhjal saame öelda, et

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$$

on $Ly = f(x)$ *lahend. Nüüd on vaja veel veenduda, et mistahes* $x_0 \in (a, b)$ *ja mistahes* $y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}$ *korral leiduvad konstandid* $C_1, C_2, ..., C_n$ *nii, et funktsioon* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*$ *rahuldab algtingimusi*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Kirjutame algtingimused lahti, kusjuures y_* viime paremale poole võrdusmärki. Saame

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0^{(1)} - y_*'(x_0) \\ ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_*^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist on vaja määrata konstandid $C_1, \ldots, C_n$. Lineaarsel süsteemil leidub lahend, kui süsteemi determinant on nullist erinev.

Meil

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0,$$

sest $y_1, y_2, ..., y_n$ on võrrandi $Ly = 0$ LFS. Kuna determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem on lahenduv ning leidub parajasti üks komplekt sellist süsteemi rahuldavaid konstante $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$. Teoreem on tõestatud ning sellega on ka esimene teoreem tõestatud.

KOKKUVÕTE: $n-$järku lineaarse dif. võrrandi võime lahendada järgmiselt:

1) leiame $Ly = 0$ n lineaarset sõltumatut lahendit $y_1, y_2, ..., y_n$ ehk siis LFSi.

2) Leiame $Ly = f$ ühe lahendi y_*.

3) Kirjutame välja vastuse kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y_*.$$

Konstantide varieerimine

Konstantide varieerimist kasutatakse $n-$järku lineaarse mittehomogeense DV ühe konkreetse lahendi leidmiseks. Meetod on tuntud ka Lagrange'i meetodi nime all.
Vaatame võrrandit $Ly = f(x)$. Olgu meil teada vastava homogeense DV $Ly = 0$ lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, ..., y_n$. Sarnaselt esimest järku lineaarsete võrranditega otsime ka nüüd erilahendit lineaarse homogeense võrrandi lahendi kuju järgi, seega otsime y_* kujul

$$y_* = C_1(x)y_1(1) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Selleks, et nii defineeritud y_* oleks võrrandi $Ly = f(x)$ lahend, on vaja sobivalt määrata suurused $C_1(x), ..., C_n(x)$. See, et $Ly = f$ oleks rahuldatud, annab meile ühe tingimuse. Tegelikult on n tundmatu määramiseks vaja veel leida $n - 1$ tingimust. Võime need ise valida.

Diferentseerime y_* avaldist, saame

$$y_* = C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Nõuame, et

$$C_1'(x)y_1(x) + ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,$$

siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Diferentseerime veel korra, siis

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nõuame jälle, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Sellisel juhul

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + ... + C_n(x)y_n''(x)$$

Nii saab diferentseerimist jätkata ja

$$y_*^{(n-1)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Nõuame taas, et

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0.$$

Viimane tuletis

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)$$

Asendame nii leitud y_* tuletised võrrandisse $Ly = f(x)$. Saame

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + ... C_n(x)y_n^{(n)}(x)] +$$

$$+ p_1(x)[C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)] + ... +$$

$$+ p_n(x)[C_1(x)y_1(x) + ... + C_n(x)y_n(x)] = f(x)$$

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]+$$
$$C_1(x)[p_0(x)y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+...+p_n(x)y_1]+...+$$
$$+C_n(x)[p_0(x)y_n^{(n)}+p_1(x)y_n^{(n-1)}+...+p_n(x)y_n]=f(x)$$

Seega

$$p_0(x)[C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)]=f(x)$$

Siit

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+...+C_n'(x)y_n'(x)=0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=\frac{f(x)}{p_0(x)} \end{cases}$$

Need tingimused kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ määramiseks.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

$x \in (a, b)$. Pärast süsteemi lahendamist saame

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, ..., n$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i dx + C_i, \quad i = 1, ..., n$$

Et meil vaja pole vaja $C_i(x)$ kõikvõimalikke väärtusi, siis võime valida $C_i = 0, \quad i = 1, ..., n.$

II järku lineaarne võrrand

Üldiselt lahendatakse kõrgemat järku lineaarseid DVsid järgu alandamisega. Kasutatakse asendust $y' = yz$, siis $y'' = y(z' + z^2)$ jne. Saadav võrrand ei pruugi olla linaarne ning alati pole ka võimalik teda kvadratuurides lahendada.
Kui on teada teist järku lineaarse homogeense DV

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1(x) \neq 0$, saab leida veel teise lahendi $y_2(x)$, nii et $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi.
Uue lahendi y_2 saame võrrandist

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

Näide: Lahendada võrrand $y'' - y = 1$, kui vastava lineaarse homogeense DV üks lahend on e^x.
Lahendame vastava homogeense DV $y'' - y = 0$. Teada on üks lahenditest $y_1 = e^x$. I järku võrrand

$$y'e^x - ye^x = C_1 e^{-\int 0 dx}$$

$$y'e^x - e^x y = C$$

$$y' - y = Ce^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^x$$

Otsime $y_0 = C(x)e^x$, siis $C'(x) = Ce^{-2x}$, $C(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x}$

$$y_0 = -\frac{C}{2}e^{-2x}e^x = C_0 e^{-x}$$

I järku DV lahend on

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Seega on teiseks lahendiks e^{-x}. Kontrollime, kas lin. sõltumatud

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Teist järku lin. hom. võrrandi lahend on seega

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Leiame Lagrange'i meetodiga nüüd y_* :

$$y_* = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = 1 \end{cases}$$

$$2C_1'(x)e^x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}e^x$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-x}dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^x dx + C_{11} = -\frac{1}{2}e^x$$

Seega II järku võrrandi üks lahend on kujul

$$y_* = \frac{1}{2}(-e^{-x} \cdot e^x) - \frac{1}{2}e^x \cdot e^{-x} = -1$$

Üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$$