

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks n -järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + \dots + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Moodustame Cauchy ülesande, selleks lisame lineaarsele võrrandile n algtingimust:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (2)$$

kus $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$ on konstandid.

Teoreem

Kui võrrandi (1) kordajad $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ ja vabaliige $f(x)$ on pidevad vahemikus (a, b) ja $x_0 \in (a, b), y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in (-\infty, \infty)$, siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimusi (2).

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)} \left[f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_n(x)y \right]$$

Meil vaja näidata, et

- 1) $g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ on pidev muutujate piirkonnas D .
- 2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
- 3) punkt $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) : a < x < b; -\infty < y, y', \dots, y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:

1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (1') pidev piirkonnas D ,

$$2) \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$$

...

$$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$$

3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.

Lahenditevahelised seosed

Seame igale vahemikus (a, b) n korda pidevalt diferentseeruvale funktsioonile $y = y(x)$ vastavusse funktsiooni Ly järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y.$$

Nii defineeritud operaatorit L nimetatakse **lineaarseks diferentsiaaloperaatoriks**. Selline operaator rahuldab aditiivsuse ja homogeensuse tingimusi, st

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

ja

$$L(Cy) = CLy$$

Seega saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

lühidalt kirjutada

$$Ly = f \quad (3)$$

ning vastav homogeenne võrrand on siis kujul

$$Ly = 0 \quad (3_h)$$

Omadus 1: Kui y_1, y_2, \dots, y_n on võrrandi (3_h) lahendid, siis on ka

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

võrrandi (3_h) lahend.

Tõestuseks on vaja näidata, et kui $Ly_1 \equiv 0, \dots, Ly_n \equiv 0$, siis

$$L(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) &= L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + \dots + L(C_n y_n) = \\ &= C_1 Ly_1 + C_2 Ly_2 + \dots + C_n Ly_n = C_1 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Omadus 2: Kui y_1, y_2, \dots, y_n on (3_h) lahendid, y_* on aga (3) lahend, siis $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_*$ on (3) lahend.

Eelduse kohaselt $L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) \equiv 0$, $Ly_* \equiv f$, siis L aditiivsuse tõttu

$$L(y_{hom} + y_*) = Ly_{hom} + Ly_* = 0 + Ly_* = f.$$

Omadus 3: Olgu $f = f_1 + f_2$. Kui y_1 on võrrandi $Ly = f_1$ lahend ja y_2 on võrrandi $Ly = f_2$ lahend, siis $y = y_1 + y_2$ on võrrandi $Ly = f$ lahend.

Omadus 4: Olgu $y = u + iv$ võrrandi (3_h) lahendiks, siis on ka u ja v võrrandi (3_h) lahenditeks.

Tõepoolest,

$$L(u + iv) \equiv 0, \text{ siis } L(u + iv) = Lu + L(iv) = Lu + iLv \equiv 0$$

$$\begin{cases} Lu \equiv 0 \\ Lv \equiv 0 \end{cases}$$

Funktsioonide lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Olgu meil antud funktsioonid $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, $x \in (a, b)$.

Definitsioon

Funktsioone $y_1(x), \dots, y_n(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks vahemikus (a, b) , kui leiduvad kordajad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$) nii, et

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (*)$$

Kui seos () kehtib siis ja ainult siis, kui kõik kordajad $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, nimetatakse funktsioone $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ lineaarselt sõltumatuteks.*

Näiteks:

1) Vaatame $y_1 = 1$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = \cos^2 x$ vahemikus (a, b)

Valime $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, siis

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x = 0$$

Järelikult tegu lin. sõltuvate funktsioonidega.

2) Olgu $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2, \dots, y_{n+1} = x^n$, siis

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

ainult siis, kui kordajad võrduvad nulliga. Funktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Wronski determinant

Olgu suurused $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ (3_h) lahendid, st nad on n korda diferentseeruvad vahemikus (a, b) . Sellisel juhul on võimalik moodustada determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$
$$= W(x) = W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$$

Nii defineeritud determinanti nim. Wronski determinandiks.

Näide: Vaatame jällegi funktsioone $y_1 = 1$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = \cos^2 x$.
Moodustame Wronski determinandi

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & \sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & 2 \cos 2x & -2 \cos 2x \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 2x = 0.$$

Lineaarse homogeense DV lahendite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

Teoreem

Olgu $y_1(x), \dots, y_n(x)$ võrrandi (3_h) lahendid. Siis

I $y_1(x), \dots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

II $y_1(x), \dots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Tõestus

I kui funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis kehtib seos (*). Valime nt $\alpha_n \neq 0$, siis seosest (*) saame

$$y_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} [-\alpha_1 y_1(x) - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)].$$

Saadud seost diferentseerides saame

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\alpha_n} [-\alpha_1 y_1^{(k)}(x) - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(k)}(x)].$$

Kirjutame välja Wronski determinandi

$$W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & \frac{1}{\alpha_n} [-\alpha_1 y_1(x) - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)] \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & \frac{1}{\alpha_n} [-\alpha_1 y_1'(x) - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}'(x)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{1}{\alpha_n} [-\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & 0 \\ y_1'(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

II Nüüd kehtib eeldus, et $y_1(x), \dots, y_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in (a, b)$: $W(x_0) = 0$. Saame välja kirjutada algebraalse süsteemi α_j -de suhtes.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ning vastav determinant on vastavalt

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Kui homogeesel süsteemil determinant=0, siis leidub mittetriviaalne lahend (vähemalt üks arvudest α_j on nullist erinev)

$$\alpha_1 = \widetilde{\alpha}_1, \dots, \alpha_n = \widetilde{\alpha}_n.$$

Moodustame funktsiooni

$$\tilde{y}(x) = \tilde{\alpha}_1 y_1(x) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n(x).$$

Omaduse 1 põhjal on \tilde{y} võrrandi (3_h) lahend.

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{\alpha}_1 y_1(x_0) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n(x_0) = 0$$

$$\tilde{y}'(x_0) = \tilde{\alpha}_1 y_1'(x_0) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n'(x_0) = 0$$

...

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = \tilde{\alpha}_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Seega rahuldab $\tilde{y}(x)$ võrrandit $Ly = 0$ ja tingimusi

$$\tilde{y}(x_0) = 0$$

$$\tilde{y}'(x_0) = 0$$

...

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ning saame, et $\tilde{y}(x) \equiv 0$. Seega

$$\tilde{\alpha}_1 y_1(x) + \dots + \tilde{\alpha}_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Teisalt aga

$$\tilde{\alpha}_1^2 + \dots + \tilde{\alpha}_n^2 \neq 0$$

ja seega peaksid selleks siis $y_1(x), \dots, y_n(x)$ olema lin. sõltuvad vahemikus (a, b) . Vastuolu II osa tõestuse eeldusega.

Märkus: Teoreemi esimene osa I kehtib igasuguste $(n - 1)$ korda diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Järeldus

Lineaarse homogeenise diferentsiaalvõrrandi (3_h) lahendite y_1, y_2, \dots, y_n korral on järgmised tingimused samaväärsed:

- 1) y_1, y_2, \dots, y_n on lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b) ;*
- 2) $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$;*
- 3) leidub $x_0 \in (a, b)$, mille korral $W(x_0) = 0$.*

Järeldus

Lineaarse homogeenise diferentsiaalvõrrandi (3_h) lahendite y_1, y_2, \dots, y_n korral on järgmised tingimused samaväärsed:

- 1) y_1, y_2, \dots, y_n on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b) ;*
- 2) $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$;*
- 3) leidub $x_0 \in (a, b)$, mille korral $W(x_0) \neq 0$.*

Järeldus

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (3_h) lahendite y_1, y_2, \dots, y_n korral on kas $W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ korral või $W(x) \neq 0$ kõigi $x \in (a, b)$.