Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s)ds.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendisaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$

IV Vaatleme võrrandit kujul

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Lahendamiseks kasutatakse muutujavahetust $y' = z$, kusjuures $z = z(y)$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z.$$

Sarnaselt saab leida ka järgmised tuletised. Nt

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] z = \left(z'' z + (z')^2\right) z$$

Selliste asendustega on võimalik esialgne võrrand viia kujule

$$G(y, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$$

Lahendiks

$$z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Arvestades nüüd tehtud muutujavahetust, saame

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Siit

$$y = y_0,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, ..., C_n)} = x + C_n.$$

Näide: Lahendada $y''(1-y^2) = 2(y')^2$
Võrrandi lahendamiseks alandame võrrandi järku asendusega $z = y'$. Siis

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z.$$

Asendades

$$z' \cdot z(1-y^2) = 2z^2$$

Võrrand on eralduvate muutujatega DV

$$z(1-y^2)dz - 2z^2 dy = 0$$

$$(1-y^2)z^2\left(\frac{dz}{z} - 2\frac{dy}{1-y^2}\right) = 0$$

Sulgavaldise integreerimisel saame

$$\ln z - \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = C$$

$$z = C_1 \cdot \frac{1+y}{1-y}$$

Et $z = y'$, siis

$$y' = C_1 \cdot \frac{1+y}{1-y}$$

$$\frac{1-y}{1+y} dy = C_1 dx$$

$$y - 2\ln \mid y+1 \mid = C_1 x + C_2$$

ning $y = 2\ln \mid y+1 \mid + C_1 x + C_2$. Lisalahendid $z = 0$, millest saame $y = C$; $y = \pm 1$.

V Otsitava ja selle tuletise suhtes homogeenne DV.
Olgu võrrandis

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

funktsioon F $\alpha-$astme homogeenne funktsioon $y,\ y',\ \dots, y^{(n)}$ suhtes. See tähendab

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^{\alpha} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \forall t > 0$$

Sellisel juhul saab võrrandi järku alandada asendusega $y' = yz$, kus $z = z(x)$ on uus otsitav funktsioon. Siit

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

analoogililiselt saab leida ülejäänud tuletised. Asendustega saame

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), ..., y\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0.$$

Kuna tegu on homogeense võrrandiga, siis $\forall y > 0$ korral võime seose kirjutada kujule

$$y^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

ning $\forall y < 0$ korral

$$y^{\alpha} F(x, -1, -z, -(z^2 + z'), ..., -\omega_n(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis tuleb ka $y = 0$ arvesse esialgse võrrandi lahendina. Üldiselt saame kaks lahendit

$$z = \varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}),$$

$$z = \varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1})$$

ning siit saame tagasiasendusega eralduvate muutujatega DV'd

$$y' = y\varphi_+(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

või

$$y' = y\varphi_-(x, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Lahendiks vastavalt siis

$$y = C_n e^{\int \varphi_+(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx} \quad C_n > 0$$

ja

$$y = C_n e^{\int \varphi_-(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx} \quad C_n < 0.$$

Näide: Lahendada $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$
Võrrandi vasak pool on teise astme homogeenne funktsioon y, y', y'' suhtes, sest

$$xtyty'' - x(ty')^2 - tyty' = t^2(xyy'' - x(y')^2 - yy').$$

Teeme asenduse $y' = yz$ ja $y'' = y(z^2 + z')$, siis

$$xyy(z^2 + z') - x(yz)^2 - yyz = 0$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0$$

$$y^2(xz' - z) = 0$$

Selle võrrandi lahendiks on $y = 0$ ja $z = C_1x$. Siit omakorda lahendame võrrandi $y' = C_1xy$, mille lahendiks tuleb $y = C_2e^{C_1x^2}$. See on üldlahend, sest lahend $y = 0$ sisaldub siin konstandi $C_2 = 0$ korral.

Kõrgemat järku lineaarsed DV

Võrrandit

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse lineaarseks $n-$järku HDVks, kui ta on lineaarne otsitava ja tema tuletiste suhtes ehk ta on kirjutatav kujul

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Eeldame, et $p_0(x) \neq 0$, siis

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y^{(n-1)} + ... + \frac{p_n(x)}{p_0(x)}y = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Moodustame Cauchy ülesande, selleks lisame lineaarsele võrrandile n algtingimust:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (2)$$

Teoreem

Kui võrrandi (1) kordajad $p_0(x),\ p_1(x), ..., p_n(x)$ *ja vabaliige* $f(x)$ *on pidevad vahemikus* (a, b) *ja* $x_0 \in (a, b),\ y_0,\ y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)} \in (-\infty, \infty)$, *siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend* $y = y(x)$, *mis rahuldab tingimusi (2).*

Tõestus

Kasutame tõestuseks Cauchy teoreemi, selleks viime võrrandi (1) kujule

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ehk

$$y^{(n)} = \frac{1}{p_0(x)}\left[f(x) - p_1(x)y' - ... - p_n(x)y\right]$$

Meil vaja näidata, et
1) $g(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *on pidev muutujate piirkonnas D.*
2) leiduvad piirkonnas D pidevad osatuletised $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial y'}, ..., \frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}}$
3) punkt $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$.
Sellistel tingimustel Cauchy ülesanne omab ühest lahendit.

Olgu meil piirkond

$$D = \left\{ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) : a < x < b;\ -\infty < \ y, y', ..., y^{(n-1)} < \infty \right\}.$$

Kontrollime tingimusi:
1) kui $p_0(x) \neq 0$, siis on (1') pidev piirkonnas D,
2) $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$
$\frac{\partial g}{\partial y'} = -\frac{p_{n-1}(x)}{p_0(x)}$
...
$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$
3) on automaatselt täidetud teoreemi põhjal.