Lahendi siledus

Vaatleme võrrandit $y' = f(x, y)$. Definitsiooni kohaselt on võrrandi lahendid pidevalt diferentseeruvad.

Teoreem

Olgu funktsioon $f(x, y)$ k korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas D. Siis diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ iga lahend on $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv.

Tõestus

Olgu $y = y(x)$ meie võrrandi lahendiks, siis kehtib samasus:

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Et $y(x)$ ja $f(x, y)$ on pidevalt diferentseeruvad, siis on seda ka $f(x, y(x))$ ehk $y'(x)$. Seega on $y(x)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv ning et ka $f(x, y)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis saab sama öelda ka $f(x, y(x)) \equiv y'(x)$ kohta. Sellega on $y(x)$ kolm korda diferentseeruv. Jätkates samamoodi, jõuame teoreemi väiteni.

Cauchy ülesande lahendamine astmeridadade abil

Olgu meil antud Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Otsime Cauchy ülesande lahendit astmereana

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

kus kordajad avalduvad kujul

$$C_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Algtingimus on rahuldatud, kui $C_0 = y_0$. Nüüd saame võrrandist, et

$$C_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Diferentseerides saame

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y',$$

seega

$$C_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)].$$

Võrrandit edasi diferentseerides on võimalik leida ülejäänud kordajad C_k. Kuna iga järgmise kordaja leidmine on järgmisest keerulisem, siis piirdutakse tavaliselt lähislahendiga, mille annavad enamasti reaksarenduse esimesed liikmed.

Näide: Lahendada Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = x^2 + y^2,$$

leiame tuletised

$$y'' = 2x + 2yy'$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''$$

jne. Teame, et $y(0) = 0$, arvutame nüüd $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Seega saame ülesande lähislahendiks võtta

$$y = \frac{2}{3!}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Üldkuju

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $y = y(x)$ on otsitav ja $y', ..., y^{(n)}$ on otsitava funktsiooni tuletised.

Normaalkuju

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Algtingimused

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{2}$$

Kõrgemat järku DV lahend on funktsioon, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) \equiv 0 \quad \forall x.$$

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev muutujate $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} vähemalt üks lahend.

Teoreem

Olgu funktsioon f pidev piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y', ..., y^{(n-1)}$ järgi, mis on ka pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel {(1),(2)} parajasti üks lahend.

Definitsioon

Võrrandi (1) üldlahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendite peresid $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, mis sõltuvad n suvalisest konstandist $C_1, ..., C_n$ ja mille puhul iga punkti $(x_0, y_0, ..., y_0^{(n-1)} = \in D$ jaoks leiduvad konstantide väärtused $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, nii et lahend $y = y(x, C_1^0, ..., C_n^0)$ rahuldab algtingimusi (2).

Definitsioon

Võrrandi (1) erilahend on võrrandi (1) lahend, mis on saadud konstantide fikseerimisega.

Lihtsamate $n-$järku dif. võrrandite lahendamine

- Vaatame võrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x).$$

Olgu lisaks antud algtingimused (2), siis Cauchy ülesande lahendi saab esitada kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y''}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{n-1} f(s) ds.$$

II Võrrand on kujul

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Võrrandi üldlahendisaab esitada parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \Phi(p, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

III Olgu võrrand kujul

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Kasutame uut otsitavat funktsiooni

$$z = y^{(k)}.$$