Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

st

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Nii taandubki eksaktse DV lahendamine sobival kujul funktsiooni u määramisele. Sest kui on teada

$$du(x,y) = 0,$$

siis integreerimisega saame

$$u(x,y) = C.$$

Olgu võrrandi (1) kordajad $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ning osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ pidevad piirkonnas

$$D = \{(x,y) : \; a < x < b, \; \alpha < y < \beta\}.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D. \tag{2}$$

Tarvilikkus (1)=>(2).
Olgu (1) eksaktne, siis $\exists u = u(x,y) : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Piisavus (2)=>(1).
Kehtigu seos (2) ja näitame, et sellest järeldub (1) eksaktsus.
Konstrueerime selleks $u = u(x, y)$ nii, et kehtiksid seosed
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Mõlemad seosed on diferentsiaalvõrrandid.
Integreerime esimest eraldatud muutujatega võrrandit (kuna y järgi diferentseerimist pole, võime ta lugeda parameetriks).

$$\frac{du}{dx} = M(x, y)$$

$$du = M(x, y)dx$$

$$u = \int M(x, y)dx + C(y)$$

Teisalt aga $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.
Seega võtame saadud tulemusest osatuletise y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + C(y)\right] = N(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y) = N(x, y)$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

Tähistame

$$\phi(x,y) := N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Näitame, et kui (2) kehtib, siis $\phi(x,y)$ ei sõltu $x-$st. Tõepoolest

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Et ϕ ei sõltu $x-$st, siis saame integreerides leida ka $C(y)$.

$$C(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1$$

Seega

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy + C_1.$$

Tarvilik ja piisav tingimus on tõestatud.

Võimalikke lahendusviise on kolm:
1) põhilistest diferentsiaalidest lähtudes konstrueerida funktsioon $u(x, y)$.
Näiteks $dx \pm dy = d(x \pm y)$, $xdy + ydx = d(xy)$, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, jne.
2) konstrueerida funktsioon $u(xm, y)$ sarnaselt piisavuse tõestusega.
3) Cauchy ülesande korral saab leida eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = 0$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = 0$$

Integreeruvustegur

Vaatleme jätkuvalt võrrandit kujul (1), st

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Kui see võrrand on eksaktne, siis leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Praktikas on see tingimus väga tõsine, tegelikkuses selliseid kordajaid $M(x, y)$ ja $N(x, y)$peaaegu ei esine. Ent osutub, et teatava teguriga korrutades saab DV teisendada eksaktseks.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integreeruvusteguriks nimetatakse funktsiooni $\mu(x, y)$*, millega korrutamisel muutub võrrand eksaktseks.*

Pärast korrutamist saame

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

eksaktsuse tingimus võtab kuju

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Saime esimest järku osatuletistega võrrandi $\mu = \mu(x,y)$ suhtes. Selle võrrandi lahendamine on raskem kui esialgse võrrandi lahendamine. Teisalt on võimalik leida sellise võrrandi lahendeid teatavatel erijuhtudel. Vaatame neid lähemalt.

I Kui $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Võrrand (4) saab kuju

$$-\frac{d\mu}{dlx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

siit

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mid \cdot \frac{dx}{-N\mu}.$$

Saame

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx.$$

Kui murd sõltub ainult suurusest x või on konstant, siis on tegu lineaarse homogeense DVga ning lahend esitub kujul

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}.$$

Olemegi leidnud integreeruvusteguri, mis sõltub ainult muutujast x.

II Analoogiliselt saab leida integreeruvusteguri kujul $\mu = \mu(y)$.
Kui $\mu = \mu(y)$, siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

ja

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Integreeruvustegur leidub sellisel kujul ainult siis, kui murd sõltub ainult suurusest y või on konstant.

III Integreeruvustegurit saab otsida kujul ka $\mu = \mu(\omega)$, kus $\omega = x \pm y, \;\; \omega = xy, \;\; \omega = \frac{x}{y}$ jne. Kui $\mu = \mu(\omega)$, siis

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

ja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Asendame (4), siis

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Pärast muutujate eraldamist

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M \right)} d\omega$$

ja

$$\mu(\omega) = e^{\int \phi(\omega) d\omega},$$

kus

$$\phi(\omega) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} N - \frac{\partial \omega}{\partial y} M\right)}.$$

Oluline on jälle see, et murd sõltuks ainult suurusest ω.
Märkus: Integreeruvusteguriga korrutades tuleb jälgida, et lahendeid ei läheks kaotsi ning ei tekiks võõrlahendeid.

Näide 1: Lahendada

$$(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Meil $M(x, y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^x$ ja $N(x, y) = y + e^x$. Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right) = y + 2e^x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + e^x) = e^x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(x)$, siis

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{e^x - y - 2e^x}{-(y+e^x)}dx = \frac{-(y+e^x)}{-(y+e^x)}dx = 1\cdot dx.$$

Siit saame leida integreeruvusteguri

$$\mu = e^{\int dx} = e^x.$$

Korrutame võrrandi läbi, saame eksaktse võrrandi

$$(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + (e^x y + e^{2x})dy = 0.$$

Tõepoolest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = ye^x + 2e^{2x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}N = ye^x + 2e^{2x}.$$

$$u(x,y) = \int(\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})dx + C(y) =$$

$$= \frac{y^2}{2}e^x + 2y\frac{1}{2}e^{2x} + C(y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y),$$

teisalt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C(y)\right) = e^x y + e^{2x}.$$

$$ye^x + e^{2x} + C'(y) = e^x y + e^{2x}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C_1.$$

Seega

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + C_1.$$

Näide 2: Lahendada

$$(xy-1)dx + x^2 dy = 0.$$

Võrrand pole eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2x.$$

Otsime integreeruvustegurit kujul $\mu = \mu(xy)$. Siis

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x - x}{-\left(yx^2 - x(xy-1)\right)} d\omega = -1 \cdot d\omega.$$

Seega $\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-xy}$. Korrutame nüüd esialgse võrrandi mõlemat poolt integreeruvusteguriga, siis

$$(xy-1)e^{-xy}dx + x^2 e^{-xy} dy = 0.$$

Saadud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial}{\partial y}M = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}.$$

$$u(x,y) = \int x^2e^{-xy}dy + C(x) = \frac{x^2}{-x}e^{-xy} + C(x),$$

samas aga

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xe^{-xy} + C(x)\right) = (xy-1)e^{-xy}$$

$$-e^{-xy} + xye^{-xy} + C'(x) = xye^{-xy} - e^{-xy}$$

$$C'(x) = 0, \;\; C(x) = C_1$$

$$u(x,y) = -xe^{-xy} + C_1.$$