Lineaarne DV

Esimest järku lineaarse DV üldkuju on

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0,$$

kus $A(x)$ ja $B(x)$ on võrrandi kordajad ning $C(x)$ on vabaliige.
Kui $A(x) \neq 0$, siis saab võrrandi viia kujule

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Lisame algtingimuse

$$y(x_0) = y_0. \qquad (2)$$

ning moodustame Cauchy ülesande {(1),(2)}.

Lause

Olgu $p(x)$ ja $q(x)$ pidevad vahemikus (a, b) ning $x_0 \in (a, b)$. Siis leidub võrrandil (1) parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust (2).

Tõestus

Lause saab tõestada Cauchy teoreemi abil (vt esimene loeng).

Lineaarse DV $y' + p(x)y = q(x)$ lahendamise saab jagada kolmeks:

I lahendatakse vastav lineaarne homogeenne võrrand

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

II mittehomogeense võrrandi lahendamiseks saab kasutada konstantide varieerimise meetodit (Lagrange' i meetodit).
Nimelt asendatakse leitud lin. hom. DV lahendis konstant C sobiva funktsiooni $C(x)$ nii, et

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

rahuldaks võrrandit (1).
Seega

$$y_* = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

III lin. DV üldlahendiks on

$$y = y_h + y_*.$$

Näide: Lahendada $u' + \frac{1}{x}u = -1$.

Lahendiks on $u = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$.

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Bernoulli diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kus $\alpha \in (-\infty; \infty)$.
Lahendamiseks

$$y' + p(x)y - q(x)y^\alpha = 0$$

$$y^\alpha \left[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) \right] = 0$$

Kui $\alpha > 0$, siis $y = 0$ on üheks lahendiks.
Teises teguris

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} - q(x) = 0$$

teeme muutujavahetuse $z = y^{1-\alpha}$, siis $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ ning

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Näide: Lahendada

$$3y^2y' - y^3 = x + 1$$

Lahendiks on $y = \sqrt[3]{Ce^x - x - 2}$.

Riccati diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Riccati võrrandit saab lahendada juhul, kui on teada üks selle võrrandi lahend y_*. Asendusega $u = y - y_*$ saab Riccati võrrandi teisendada Bernoulli võrrandiks.

Näide: Lahendada

$$y' - y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

kus $y_* = \frac{1}{x}$.

Lahendiks on

$$y = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

nimetatakse eksaktseks ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et selle täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Eksaktsuse tarvilik ja piisav tingimus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$