Eraldatud muutujatega DV

Eraldatud muutujatega DV üldkuju:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (1)$$

kus $M(x)$ ja $N(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks on eraldatud muutujatega DV

$$2xdx - \sin ydy = 0,$$

samuti

$$e^x = \ln y \cdot y'.$$

Teoreem

Olgu $M(x)$ pidev vahemikus (a, b), ja $N(y)$ pidev vahemikus (α, β) ning $\forall\ (x, y) \in D = \{(x, y) : x \in (a, b),\ \ y \in (\alpha, \beta)\}$ korral $M^2(x) + N^2(y) \neq 0$, siis on võrrandi (1) üldlahendiks

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \qquad (2)$$

või

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0, \qquad (2')$$

kus (x_0, y_0) on suvaline fikseeritud punkt piirkonnas D.

Tõestus

I Näitame, et (1)$\Longleftrightarrow$(2).
II Näitame, et Cauchy ülesanne

$$\begin{cases} M(x)dx + N(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on üheselt lahenduv ning lahend esitub kujul

$$\int_{x_0}^{x} M(s)ds + \int_{y_0}^{y} N(s)ds = 0.$$

Kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist.

Olgu $\Phi(x, y)$ *korral täidetud:*

a) $\Phi(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$ *ja* $\Phi_y(x, y)$ *määratud ja pidevad punkti* (x_0, y_0) *mingis ümbruses;*

b) $\Phi(x_0, y_0) = 0$;

c) $\Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$. *(või* $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$*)*

Siis $\Phi(x, y) = 0$ *esitab parajasti ühe funktsiooni* $y = \varphi(x)$ *(või* $x = \xi(y)$*), millel on järgmised omadused:*

1) $\varphi(x)$ *(*$\xi(y)$*) on määratud, pidev ja pidevalt diferentseeruv* x_0 *(*y_0*) mingis ümbruses ;*

2) $\varphi(x_0) = y_0$ *(*$\xi(y_0) = x_0$*);*

3) $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ x_0 *mingis ümbruses (*$\Phi(\xi(y), y) \equiv 0$ y_0 *mingis ümbruses).*

Eralduvate muutujatega DV

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (4)$$

kus $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$ ja $N_2(y)$ on antud funktsioonid.
Näiteks võrrand $y' = 1 + y^2$ on eralduvate muutujatega DV.

$$N_1(y)M_2(x)\left[\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy\right] = 0,$$

$$N_1(y) = 0,$$

$$M_2(x) = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

(5) üldlahend:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Lisaks veel lahendid $y = y_1$ ja $x = x_1$.

Homogeenne DV

Vaatame funktsiooni $f(x, y)$, mis on määratud $D \subset \mathbf{R}$. Olgu D selline, et $\forall (x, y) \in D$ korral $(tx, ty) \in D \; \forall t > 0$.

Definitsioon

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse $\alpha-$astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib seos

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y)$$

$\forall t > 0, \forall (x, y) \in D$.

Näiteks on funktsioonid

$$f(x,y) = \frac{y-x}{x}$$

$$g(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$$

homogeensed funktsioonid, ent

$$h(x,y) = \frac{x^3 + x^2 y}{2 - y^3}$$

ei ole homogeenne.

Definitsioon

Diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ nimetatakse homogeenseks, kui $f(x, y)$ on $0-$astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \quad t > 0.$$

Lause

Homogeenne DV $y' = f(x, y)$ taandub muutujate (x, u) suhtes eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega $u = \frac{y}{x}$.

Homogeenne diferentsiaalvõrrand võib esineda ka kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

kus $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ on sama astme homogeensed funktsioonid.