Konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Vaatame

$$\overline{y'} = A\overline{y} + \overline{g}, \tag{1}$$

kus $A = (a_{ij})$ on konstantne reaalarvuline maatriks,
$\overline{g} = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))^T$. Süsteemi võib esitada ka kujul

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + g_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + g_n(x) \end{cases}$$

14. loengu põhjal teame, et sellise süsteemi üldlahend esitub kujul

$$\overline{y} = \overline{y_H} + \overline{y_*}.$$

$\overline{y_*}$ leidmiseks saab kasutada Lagrange'i meetodit või määramata kordajate meetodit.
Lagrange'i meetod Teades lin. hom. DVS üldlahendit kujul

$$\overline{y_H} = C_1 y^1 + C_2 y^2 + \ldots + C_n y^n$$

asendame konstandid C_i suurustega $C_i(x)$, mille täpset kuju me ei tea. Seega

$$\overline{y_*} = C_1(x) y^1 + C_2(x) y^2 + \ldots + C_n(x) y^n$$

Et tegu on meie süsteemi lahendiga, siis

$$C_1'(x) y_i^1 + C_2'(x) y_i^2 + \ldots + C_n'(x) y_i^n = g_i(x),$$

$i = 1, 2 \ldots, n$. See süsteem on üheselt lahenduv ning

$$C_i'(x) = \varphi_i(x)$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \overline{C},$$

$$\overline{y_*} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx \right) y^i.$$

Näide: Lahendada $\begin{cases} y' = -y + 8z + 1 \\ z' = y + z - x \end{cases}$

Süsteem maatrikskujul

$$\overline{y}' = A\overline{y} + \overline{g},$$

kus $\overline{y} = (y, z)^T$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\overline{g} = (1; -x)^T$.

Et vastava lin. hom. DVS lahendiks on

$$\begin{cases} y_H = 2C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-3x} \\ z_H = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x} \end{cases},$$

siis otsime lin. mittehom. DVS lahendit kujul

$$\begin{cases} y_* = 2C_1(x)e^{3x} + 4C_2(x)e^{-3x} \\ z_* = C_1(x)e^{3x} - C_2(x)e^{-3x} \end{cases}$$

Suurused $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ määrame süsteemist

$$\begin{cases} 2C_1'(x)e^{3x} + 4C_2'(x)e^{-3x} = 1 \\ C_1'(x)e^{3x} - C_2'(x)e^{-3x} = -x \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{6}(1+x)e^{3x}, \quad C_2(x) = \frac{1}{18}e^{3x}\left(\frac{2}{3}+x\right)$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{6}(1-2x)e^{-3x}, \quad C_1(x) = -\frac{1}{18}e^{-3x}\left(\frac{2}{3}-2x\right)$$

Nüüd

$$y_* = \frac{4}{9}x + \frac{2}{27}$$

$$z_* = \frac{1}{18}x - \frac{2}{27}$$

Süsteemi üldlahendiks

$$\begin{cases} y = 2C_1e^{3x} + 4C_2e^{-3x} + \frac{4}{9}x + \frac{2}{27} \\ z = C_1e^{3x} - C_2e^{-3x} + \frac{1}{18}x - \frac{2}{27} \end{cases}$$

Määramata kordajate meetod
Kui $g_i(x) = P_r(x)e^{ax}$, kus a on konstant ning $P_r(x)$ on $r-$astme polünoom, siis saab otsida

$$y_{*i} = Q_{r+s}(x)e^{ax},$$

kus $Q_{r+s}(x)$ on $r+s$-astme polünoom, ($s=0$, kui a pole karakteristlikuks väärtuseks).

Näide: Lahendada $\begin{cases} y' = y + 2z + 16xe^x \\ z' = 2y - 2z \end{cases}$

Süsteem maatrikskujul

$$\overline{y}' = A\overline{y} + \overline{g},$$

kus $\overline{y} = (y, z)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ja $\overline{g} = (16xe^x; 0)^T$.

Karakteristlikud väärtused on $k_1 = 2$ ja $k_2 = -3$, seega

$$\begin{cases} y_H = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} \\ z_H = C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-3x} \end{cases}$$

Otsime erilahendit määramata kordajate meetodil. Selle kuju määrame vabaliikmetest. Meil $\overline{g} = (16xe^x; 0)^T$.

$$y_* = (q_0 x + q_1)e^x$$

$$z_* = (d_0 x + d_1)e^x$$

Kordajad q_0, q_1, d_0, d_1 määrame nii, et esialgne süsteem oleks rahuldatud.

Seega

$$\begin{cases} y_*' = y_* + 2z_* + 16xe^x \\ z_*' = 2y_* - 2z_* \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} e^x(q_0x + q_1 + q_0) = e^x(q_0x + q_1 + 2d_0x + 2d_1 + 16x) \\ e^x(d_0x + d_1 + d_0) = e^x(2q_0x + 2q_1 - 2d_0x - 2d_1) \end{cases}$$

Siit saame seosed

$$q_0 = q_0 + 2d_0 + 16,$$

$$q_0 + q_1 = q_1 + 2d_1$$

$$d_0 = 2q_0 - 2d_0$$

$$d_0 + d_1 = 2q_1 - 2d_1$$

Järelikult $d_0 = -8$, $q_0 = -12$, $d_1 = -6$ ja $q_1 = -13$ ning

$$\begin{cases} y_* = -e^x(12x + 13) \\ z_* = -e^x(8x + 6) \end{cases}$$

Süsteemi lahendiks on seega

$$\begin{cases} y = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - e^x(12x + 13) \\ z = C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-3x} - e^x(8x + 6) \end{cases}$$