Rajaülesanded

Vaatleme lineaarset DV

$$Ly = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Eeldame, et $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $f(x)$ on määratud ja pidevad lõigul $[a, b]$.
Siiani oleme vaadanud ülesannet, kus erilahend leitakse algtingimuste

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

abil.

Ent võrdlemisi sageli leidub ülesandeid, kus tuleb leida võrrandi (1) lahend, mis rahuldaks tingimusi

$$\begin{cases} \alpha_{10}y(a) + \alpha_{11}y'(a) + \ldots + \alpha_{1,n-1}y^{(n-1)} + \\ +\beta_{10}y(b) + \beta_{11}y'(b) + \ldots + \beta_{1,n-1}y^{(n-1)}(b) = \gamma_1 \\ \alpha_{20}y(a) + \alpha_{21}y'(a) + \ldots + \alpha_{2,n-1}y^{(n-1)} + \\ +\beta_{20}y(b) + \beta_{21}y'(b) + \ldots + \beta_{2,n-1}y^{(n-1)}(b) = \gamma_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n0}y(a) + \alpha_{n1}y'(a) + \ldots + \alpha_{n,n-1}y^{(n-1)} + \\ +\beta_{n0}y(b) + \beta_{n1}y'(b) + \ldots + \beta_{n,n-1}y^{(n-1)}(b) = \gamma_n \end{cases} \tag{2}$$

Tingimusi (2) nimetatakse rajatingimusteks ning ülesannet $\{(1),(2)\}$ kutsutakse rajaülesandeks. Eristatakse homgeenset ja mittehomogeenset rajaülesannet.

Olgu rajaoperaator

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)\right],$$

siis

$$D = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Lause

Rajaülesanne {(1),(2)} on üheselt lahenduv parajasti siis, kui vastaval homogeensel rajaülesandel on ainult triviaalne lahend.

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{4}$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) integraalkõver.*

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:
1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
2) esimeste integraalide abil;
3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (4) esimeseks integraaliks, kui muutujate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *asendamisel süsteemi (4) mistahes lahendiga* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *muutub see funktsion konstantseks* x *suhtes:*

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *on sõltumatud, siis süsteemi (4) üldlahendiks ilmutamata kujul on*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$