Konstantsete kordajatega DV erilahendi leidmine määramata kordajate meetodil

Vaatame konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$Ly = f,$$

see tähendab

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \tag{1}$$

Vastava lineaarse homogeense võrrandi $Ly = 0$ lahendi leidmiseks on eeskiri olemas. Mittehomogeense võrrandi lahendi y_* leidmiseks on lisaks Lagrange'i meetodile veel üks võimalus. Selleks on vaja määrata y_* kuju vabaliikmest $f(x)$ lähtuvalt.

A Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = e^{ax} B_m(x) = e^{ax}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m)$$

Lause

Kui arv a ei ole lin. homogeense võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) üks lahend $y_*(x)$ *kujul*

$$y_*(x) = e^{ax} Q_m(x) = e^{ax}(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m),$$

kus q_i *on määramata kordajad.*
Kui arv a on $r-$*kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub erilahend* y_* *kujul*

$$y_*(x) = x^r e^{ax} Q_m(x) =$$

$$= x^r e^{ax}(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m),$$

kus q_i *on määramata kordajad.*

B Olgu võrrandi vabaliige $f(x)$ kujul

$$f(x) = A_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_t(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Lause

Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ei ole võrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendiks, siis leidub võrrandil (1) erilahend $y_*(x)$ kujul

$$y_*(x) = U_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_t(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kus $U_s,\ V_t$ on sama astme polünoomid kui $A_s,\ B_t$.
Kui $\lambda = \alpha \pm \beta i$ on $r-$kordne karakteristlik väärtus, siis võrrandil (1) leidub lahend y_* kujul

$$y_*(x) = x^r\left[U_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_t(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

C Olgu $Ly = f(x)$, kus $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Sellisel juhul leitakse võrrandi $Ly = f_1(x)$ erilahend y_{*1} ning y_{*2}, mis on $Ly = f_2(x)$ erilahendiks.
Võrrandi $Ly = f(x)$ erilahendiks on

$$y_* = y_{*1} + y_{*2}.$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \\ ... \\ F_m(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(n_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ nimetatakse süsteemi järguks.
Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *ja nende osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ *määratud ja pidevad muutujate* $x, y_1, y_2, ..., y_n$ *piirkonnas D. Siis läbi iga piirkonna D iga punkti* $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ *kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) integraalkõver.*

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.