Ligikaudne lahendamine

Paljude matemaatika rakendusülesannete lahendamise saab jagada kolmeks:

- matemaatilise mudeli koostamine;
- lihtsustatud versiooni lahendamine;
- täieliku mudeli lahendamine.

Sageli saame praktilistes arvutustes oma ülesandele ligikaudse lahendi ehk lähislahendi. Leitud väärtusel on praktiline tähtsus vaid siis, kui suudame garanteerida selle usaldatavuse ja küllaldase täpsuse.

Vigade liigid

- Matemaatilise formuleeringu viga
  Sellesse jaotusse kuuluvad näiteks ülesande algandmete vead.
  Näide 1 Keha langeb Maa raskusväljas. Lihtsustatud mudelis, kus ei arvestata takistusjõude

  $$F = mg.$$

  Õhutakistuse korral

  $$F = mg - kv^2.$$

Vigade liigid

- Meetodi viga
  Matemaatiliste ülesannete lahendusmeetodid saab laias laastus jagada kaheks: *täpseteks* ja *ligikaudseteks* meetoditeks.
- Ümardamisvead
  Näide 2

  $$654321 \cdot 654321 = 428135971041$$

  Samas taskuarvutil leides oleks sama tehte vastuseks $4,28135971 \cdot 10^{11}$.

Vigade liigid

- Aproksimeerimisvead
- Teisendusvead

Matemaatilise formuleeringi ebatäpsus põhjustab nn *tingimatu vea*, mis ei sõltu lahendusmeetodist, arvutusvahenditest ega ka arvutajast. Meetodi veast, aproksimeerimis- ja ümardamisvigadest põhjustatud ebatäpsused moodustavad *tingliku vea*.
Tingimatu viga+tinglik viga=täielik viga.

Absoluutne ja relatiivne viga

Olgu a arvu A ligikaudne väärtus.
Ligikaudse arvu a **tõeliseks veaks** nimetatakse suurust $\Delta = a - A$.
Ligikaudse arvu a **absoluutseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu ε, mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| \leq \varepsilon \quad \text{ehk} \quad |a - A| \leq \varepsilon.$$

Absoluutne ja relatiivne viga

Ligikaudse arvu *a* **tõeliseks relatiivseks veaks** nimetatakse suurust $\eta = \frac{\Delta}{a}$.
Ligikaudse arvu *a* **relatiivseks veaks** nimetatakse suvalist positiivset arvu δ, mis rahuldab võrratust

$$|\eta| \leq \delta \quad \text{ehk} \quad |\frac{a-A}{a}| \leq \delta.$$

Vigade edasikandumine arvutustes

Olgu vaja arvutada funktsiooni $u = u(x_1, \ldots, x_m)$ väärtus, kui argumendid $x_1, \ldots, x_m$ ei ole täpsed.
Olgu argumentide $x_1, \ldots, x_m$ ligikaudsed väärtused $X_1, \ldots, X_m$.
Tõeline viga $\Delta x_i = X_i - x_i,\ \ i = 1, \ldots, m$.
Siit $X_i = x_i + \Delta x_i$ ning

$$\Delta u = u(X_1, \ldots, X_m) - u(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= u(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m) - u(x_1, \ldots, x_m)$$

$$\Delta u \approx du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Et $x_i \approx X_i$, siis pidevate osatuletiste $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ korral

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \approx \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m).$$

Seega $\Delta u \approx \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m)\Delta x_i$.

Kui $|\Delta x_i| \le \varepsilon_{x_i}$, siis

$$|\Delta u| \approx \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m)\Delta x_i \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m)\Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| |\Delta x_i| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse *u* **absoluutseks veaks** võtta

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i}.$$

Vastavalt definitsioonile $\delta_{x_i} = \dfrac{\varepsilon_{x_i}}{|X_i|}$ ja $\delta_u = \dfrac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|}$.

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{|u(X_1, \dots, X_m)|} = \frac{1}{|u(X_1, \dots, X_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \dots, X_m) \right| \varepsilon_{x_i} =$$

$$= \frac{1}{|u(X_1, \ldots, X_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| |X_i| \delta_{x_i}.$$

Järelikult saab suuruse u **relatiivseks veaks** võtta

$$\delta_u = \frac{1}{|u(X_1, \ldots, X_m)|} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_1, \ldots, X_m) \right| |X_i| \delta_{x_i}.$$

Mõned erijuhud

Liitmine ja lahutamine

Olgu $u = x_1 \pm x_2$, siis

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \frac{|X_1|\delta_{x_1} + |X_2|\delta_{x_2}}{|X_1 \pm X_2|}.$$

Korrutamine ja jagamine

Olgu $u = x_1 \cdot x_2$, siis

$$\varepsilon_u = |X_2|\varepsilon_{x_1} + |X_1|\varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Olgu $u = \frac{x_1}{x_2}$, siis

$$\varepsilon_u = \frac{1}{|X_2|}\varepsilon_{x_1} + \frac{|X_1|}{|X_2|^2}\varepsilon_{x_2},$$

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0$$

lahendamist, kus $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon. Näiteks

$$2x + 4 = 0, \quad x = -2$$

$$3x^2 + 18x - 21 = 0, \quad x_1 = -7, \; x_2 = 1$$

$$\sin x = 1, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

Definitsioon

Võrrandit $f(x) = 0$ *nimetatakse algebraliseks võrrandiks, kui* $f(x)$ *on algebraline avaldis (st arvud, tähed on omavahel seotud liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, täisarvulise astendamise ja juurimise abil).*

Definitsioon

Võrrandit $f(x) = 0$ *nimetatakse transtsendentseks võrrandiks, kui* $f(x)$ *sisaldab transtsendentseid funktsioone (st eksponent- või logaritmfunktsioone, trigonomeetrilisi funktsioone ja nende pöördfunktsioone).*

Definitsioon

Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.

Definitsioon

Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks (funktsiooni $f(x)$ nullkohaks), kui

$$f(x^*) \equiv 0.$$

Definitsioon

Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ $k-$kordseks lahendiks, kui

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$