Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in \mathbb{R}$. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.

Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.

Teoreem

Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud $u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \ldots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.

Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.

Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku.

Keskpunkti meetod

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.
Kui $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ja $\alpha = \beta = 1$, siis saame prognoosi-korrektsiooni meetodi.

Uurime Runge-Kutta meetodi viga. Selleks

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} = u(x_{i+1}) - u_i - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right).$$

Kui $u_i = u(x_i)$, siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$
$$= u(x_{i+1}) - u(x_i) - c_1 hf(x_i, u_i) - c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right).$$

Siis

$$u(x_{i+1}) - u_{i+1} =$$
$$= u(x_i) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_u f) + O(h^3) -$$
$$- u(x_i) - c_1 hf - c_2 h[f + \alpha h f_x + \beta h f f_u + O(h^2)] =$$
$$= h[1 - c_1 - c_2]f + h^2\left[\left(\frac{1}{2} - c_2\alpha\right) f_x + \left(\frac{1}{2} - c_2\beta\right) f f_u\right] + O(h^3).$$

Kui kehtib

$$c_2 = 1 - c_1,$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2(1 - c_1)},$$

siis on tegu II järku Runge-Kutta meetodiga.

$k-$järku Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_k F_k,$$

kus

$$F_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$F_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} F_1),$$

$$F_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, u_i + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2),$$

$$\ldots$$

$$F_k = hf(x_i + \alpha_k h, u_i + \beta_{k1} F_1 + \beta_{k2} F_2 + \ldots + b_{k,k-1} F_{k-1}).$$

Adams-Bashforthi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \gamma_{k,j} f(x_{i-j}, u_{i-j}).$$

Adams-Moultoni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^{k} \hat{\gamma_{k,j}} f(x_{i-j+1}, u_{i-j+1}).$$