

Määratud integraalide ligikaudne arvutamine

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse arvutamise valemeid nimetatakse **kvadratuurvalemiteks**.

Integraali leidmise saab asendada integraalsumma leidmisega. Lõigu $[a, b]$ tükelduse $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ korral on integraalsumma defineeritud

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i,$$

kus $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ühtlase võrgu korral

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(p_i).$$

Siit

$$S_n = h \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Tegu on **ristkülikvalemiga**, valem on esimest järku täpsusega.

Newton-Cotesi kvadratuurvalemi

Üldine kvadratuurvalemi üldkuju

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus A_i on kordajad, mis erinevad erinevate kvadratuurvalemite korral. Üks võimalus kvadratuurvalemi tuletamiseks on asendada funktsioon selle interpolandiga, st

$$f(x) \approx \Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i),$$

kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Siis

$$\begin{aligned} S_n &= \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_a^b L_{n,i}(x) f(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b L_{n,i}(x) dx \right] f(x_i). \end{aligned}$$

Seega

$$S_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

kus

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b L_{n,i}(x) dx = \\ &= \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx. \end{aligned}$$

See on **Newton-Cotesi kvadratuurvalem**.

Ühtlase võrgu korral saab esitada veahinnangu

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \begin{cases} CM_n h^{n+3}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv} \\ CM_n h^{n+2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu arv} \end{cases}$$

Trapetsvalem

$$S_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Veahinnang

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch^2.$$

Simpsoni valem

Olgu lõigu $[a, b]$ osalõikude arv n paarisarv.

$$S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Simpsoni valemi veahinnang

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq Ch^4.$$

Kordsete integraalide ligikaudne arvutamine

ligikaudne arvutamine

Valemeid $\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots, dx_n$ arvutamiseks nimetatakse kubatuurvalemiteks.

Kordse integraali saab esitada mitme järjestiku määratud integraalina ehk mitmikintegraalina, nende leidmiseks saab kasutada kvadratuurvalemeid. Nii saab näiteks integraali

$$\int_D \int f(x, y) dx dy$$

piirkonna $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ korral esitada

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Kasutades kaks korda trapetsvalemit, saame ligikaudse valemi

$$\int_D \int f(x, y) dx dy \approx$$

$$\begin{aligned} \approx & \frac{h\tau}{4} [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + \dots + 2f(x_0, y_{m-1}) + f(x_0, y_m) + \\ & + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + \dots + 4f(x_1, y_{m-1}) + 2f(x_1, y_m) + \dots + \\ & + 2f(x_{n-1}, y_0) + 4f(x_{n-1}, y_1) + \dots + 4f(x_{n-1}, y_{m-1}) + 2f(x_{n-1}, y_m) + \\ & + f(x_n, y_0) + 2f(x_n, y_1) + \dots + 2f(x_n, y_{m-1}) + f(x_n, y_m)], \end{aligned}$$

kus h on sammupikkus $[a; b]$ ning τ on sammupikkus $[c; d]$. Ligikaudsel arvutamisel on vaja leida funktsiooni väärtus $(n + 1)(m + 1)$ sõlmes.

Monte Carlo meetod

Vaatame

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N$$

arvutamist. Üldiselt on vaja sellise integraali leidmiseks arvutada funktsiooni f väärtus suurusjärg N^2 sõlmes.

Olgu piirkond D N -mõõtmeline ühikkuup. Olgu $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ juhuslikult valitud punkt sellest hulgast. Olgu X ühtlase jaotusega.

Suurus $f(X)$ on punktist X sõltuv juhuslik funktsioon, tema keskväertuse saab leida

$$Ef(x) = \int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N.$$

Valime hulgast D n punkti $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$.

Suuruse $f(x)$ statistiline keskvärtus

$$E_{stat}f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$

Kui keskvärtus asendada statistilise keskvärtusega, siis

$$\int \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots, dx_N \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\tilde{X}^i).$$