

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \dots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes. Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^n \kappa_i (\Phi(x_i) - f(x_i))^2,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust. Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse vähimruutude funktsionaaliks. Nii püstitatud ülesannet nimetatakse vähimruutude ülesandeks. Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.

Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x),$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad c_1, c_2, \dots, c_m saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^n \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^n \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$