Hermite'i interpolatsioonipolünoom

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja teada sõlmedes $f(x_j)$ ning $f'(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Vaja leida funktsioon $\Phi(x)$ nii, et

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad \Phi'(x_j) = f'(x_j), \;\; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ülimalt $2n + 1$ astme polünoom, mis neid tingimusi rahuldab, on kujul

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(x) f(x_i) + \tilde{h}_i(x) f'(x_i) \right],$$

kus

$$h_i(x) = \left[1 - 2L'_{n,i}(x_i)(x - x_i)\right] [L_{n,i}(x)]^2,$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[L_{n,i}(x)]^2,$$

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi $H_n(x)$ nimetatakse Hermite'i polünoomiks.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks ning igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti. Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \;\; \text{kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Splainid

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.
Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, st $S^{3,2}(x)$.
Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

$B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1;1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0;1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$.
Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui} x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui} x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui} x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada B-splainide lineaarkombinatsioonina.