Harilike diferentsiaalvõrrandite ligikaudne lahendamine

Vaatame Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

kus x_0 ja u_0 on etteantud suurused ning $x \in$ R. Ligikaudsel lahendamisel fikseeritakse mingid sõlmed $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve u_1, u_2, $u_3, \ldots$ nii, et $u_i \approx u(x_i)$.
Olgu võrk ühtlane, st $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots$.
Euleri meetod

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i).$$

Meetodi viga saab hinnata $u_{i+1} - u(x_{i+1}) = O(h^2)$.
Teoreem. Kui funktsiooni f esimest järku osatuletised on tõkestatud, siis Euleri meetodiga arvutatud u_1, $u_2, \ldots, u_{i+1}$ korral rahuldab u_{i+1} hinnangut

$$|u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leq C_i max_{x \in [x_0, x_{i+1}]} |u''(x)| h$$

iga $i = 0, 1, \ldots$ korral, kus $C_i = e^{K(x_{i+1} - x_0)}$ ja K on funktsioonist f sõltuv konstant.
Trapetsvalemi meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, u_{i+1})$$

Meetod on teist järku, kuna tema lokaalne viga on hinnatav suurusega Ch^3.
Prognoosi-korrektsiooni meetod

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(x_i, u_i) + \frac{h}{2} f\left(x_{i+1}, u_i + hf(x_i, u_i)\right).$$

Meetod on teist järku. *Keskpunkti meetod*

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(x_i, u_i).$$

Meetodi lokaalne viga on $O(h^3)$.
Runge-Kutta meetod

$$u_{i+1} = u_i + c_1 hf(x_i, u_i) + c_2 hf\left(x_i + \alpha h, u_i + \beta hf(x_i, u_i)\right),$$

kus c_1, c_2, α ja β on konstandid.