http://www.ttu.ee **TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL**
http://www.staff.ttu.ee/ math **MATEMAATIKAINSTITUUT**

http://www.staff.ttu.ee/ itammeraid **Ivar Tammeraid**

MATEMAATILINE ANALÜÜS II

Elektrooniline õppematerjal

http://www.tallinn.ee **TALLINN**
2005

Trükitud versioon: Ivar Tammeraid, Matemaatiline analüüs II, TTÜ Kirjastus,
Tallinn, 2003, 235 lk. ISBN 9985-59-366-9

Eessõna

Käesolev õppevahend on jätk autori poolt kirjutatud materjalile [22]. Aluseks on võetud Tallinna Tehnikaülikooli bakalaureuseõppe üliõpilastele peetud mitme muutuja funktsiooni diferentsiaal- ja integraalarvutuse ning ridade loengud nimetuse all „Matemaatiline analüüs II”. Lisatud on paljude väidete tõestused ja näiteülesanded, mille esitamiseks ei jätku loengutel aega, kuid mis pakuvad huvi usinamale tudengile. Seda võiks arvestada õppija, keda ei huvita antud kursuse süvaõpe. Ta võib osa keerukamatest tõestustest jätta vahele ja keskenduda näidetele. Õppevahend pakub lisavõimalusi üliõpilase iseseisvaks tööks. Käsitletakse klassikalise matemaatilise analüüsi probleeme juhul, kui sõltumatuid muutujaid on rohkem kui üks. Samuti käsitletakse mõningaid arv- ja funktsionaalridadega seotud probleeme. Iga peatüki lõppu on õpitud teooria kinnistamiseks lisatud harjutusülesanded, mis on varustatud vastustega. Põhilised viited on õpikule [9]. Õpikuid [2] ja [17] ning õppevahendit [19] võib kasutada selle kursuse põhitõdedega tutvumisel. Ingliskeelseks õpikuks sobib [13] ja veebist saadav [25]. Kes tunneb tõsisemat huvi selle kursuse vastu, leiab palju huvitavat lisamaterjali venekeelsest klassikast [4-6]. Täiendavaid ülesandeid leiate ülesandekogudest [3], [14], [20] ja [24]. Õpikutega [2], [4-6], [13] ja [25] ning ülesandekogudega [3] ja [24] töötamisel tekkivate tõlkeprobleemide lahendamisel on abi matemaatikasõnaraamatutest [1] ja [8]. Matemaatikaleksikonist [7] leiate teid huvitavate matemaatiliste terminite lühikesed määratlused. Teoreetilise materjali kinnistamiseks sobivad ka teatmikud [11] ja [12] ning metoodiline materjal [15]. Süvateadmisi otsiv õppur võib täiendada oma teadmisi funktsionaalanalüüsi elementaarkursuse [23] ja õpiku [16] abil. Abistavate vahenditena võib soovitada ka mõnda matemaatikapakettidest, näiteks MATLAB, MAPLE, MATHCAD või MATHEMATICA, mis võimaldavad lihtsustada tehnilist külge. MATHEMATICA paketi jaoks on olemas eestikeelne juhend [21].

Õppevahendi koostamisel on kasutatud paketti „Scientific WorkPlace 3.0”, lühendatult SWP3.0 ehk SWP.

Tänan dotsent Frederik Vichmanni, kes tutvus õppevahendi käsikirjaga ja tegi kasulikke märkusi sisu ning vormi kohta. Ivar Tammeraid

21. jaanuar, 2005

Sisukord

Peatükk 1

Diferentsiaalarvutus

1.1 Mitme muutuja funktsioon

Enne mitme muutuja funktsiooniga seotud mõistete defineerimist meenutame olukorda ühe muutuja funtsiooni $y = f(x)$ korral. Selle funktsiooni määramispiirkond X on x-telje kõigi punktide hulga mingi alamhulk, st $X \subseteq \mathbf{R}$. Seega on alust arvata, et vastavate probleemide lahendamisel mitme muutuja funktsiooni korral on funktsiooni määramispiirkond mingi hulk *mitmemõõtmelises ruumis.* Täpsustame mitmemõõtmelise ruumi mõistet.

Definitsioon 1. Hulkade $H_1, \ldots, H_n$ *otsekorrutiseks* ehk *Cartesiuse korrutiseks* $H_1 \times \ldots \times H_n$ nimetatakse kõigi *järjendite* $(h_1, \ldots, h_n)$, kus $h_k \in H_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, hulka. Järjendit nimetatakse ka *korteežiks.* Kui $H_k = H$ $(k = 1, \ldots, n)$, siis n teguri, millest igaüks on H, otsekorrutise $H \times \ldots \times H$ jaoks kasutatakse ka tähistust H^n.

Definitsioon 2. *Aritmeetiliseks punktiruumiks* (*afiinseks ruumiks*) $\mathbf{R}_n$ nimetatakse otsekorrutist $\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$, milles on n tegurit ja $\mathbf{R}$ on reaalarvude hulk. Punktiruumi elemente nimetatakse selle *ruumi punktideks* ja arve x_i nimetatakse *punkti* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *koordinaatideks*.

Definitsioon 3. *Aritmeetiliseks vektorruumiks* $\mathbf{R}^n$ nimetatakse n teguri otsekorrutist $\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$, milles elementide liitmine on defineeritud seosega $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ ja korrutamine arvuga $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, kusjuures $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ja $\alpha \in \mathbf{R}$. Ruumi $\mathbf{R}^n$ elemente nimetatakse *vektoriteks* ja arve x_i $(i = 1, \ldots, n)$ nimetatakse *vektori* $\mathbf{x}$ *koordinaatideks.* Ruumi $\mathbf{R}^n$ elementi $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ nimetatakse *nullvektoriks* ehk lihtsalt *nulliks*.

Rõhutame, et nii ruumi $\mathbf{R}_n$ punkti $P(x_1, \ldots, x_n)$ kui ka selle punkti P kohavektori $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ määrab ära sama järjend $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ruumi $\mathbf{R}^n$ *vektorite* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *skalaarkorrutis*

$\mathbf{xy}$ defineeritakse seosega

$$\mathbf{xy} \overset{\text{def.}}{=} x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n .$$

Ruumi $\mathbf{R}^n$ vektoreid $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ nimetatakse *ortogonaalseteks,* kui $\mathbf{xy} = 0$. Ruumi $\mathbf{R}^n$ *vektori* $\mathbf{x}$ *pikkus* $|\mathbf{x}|$ defineeritakse kui ruutjuur *vektori skalaarruudust* $\mathbf{x}^2 \overset{\text{def}}{=} \mathbf{xx}$, st

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2} = \sqrt{\mathbf{xx}} = \sqrt{x_1 x_1 + \ldots + x_n x_n} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ *vaheline nurk* defineeritakse seosega

$$\cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Vektorite süsteem $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, kus $\mathbf{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$ ja $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ on x_i-telje suunaline vektorrumi $\mathbf{R}^n$ ühikvektor, on ortonormaalne, st

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{kui } i \neq j \\ 1, & \text{kui } i = j, \end{cases}$$

kus δ_{ij} on *Kroneckeri sümbol.* Saame
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 (1; 0; \ldots; 0) + \ldots + x_n (0; 0; \ldots; 1) = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n$.
Piirprotsessi kirjeldamisel ühe muutuja funktsiooni korral kasutame kahe x-teljel paikneva punkti x_1 ja x_2 vahelist kaugust $|x_2 - x_1|$. Üritame esitada neid probleeme n-mõõtmelisel juhul.

Definitsioon 4. Ruumi $\mathbf{R}_n$ punktide $P(x_1, \ldots, x_n)$ ja $Q(y_1, \ldots, y_n)$ vaheliseks*kauguseks* $d(P, Q)$ nimetatakse ruumi $\mathbf{R}^n$ vektori, mille alguspunktiks on ruumi $\mathbf{R}_n$ punkt P ja lõppunktiks ruumi $\mathbf{R}_n$ punkt Q, st $\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$, pikkust:

$$d(P, Q) \overset{\text{def.}}{=} \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Definitsioon 5. Hulka $U_\varepsilon(P) = \{Q \mid (Q \in \mathbf{R}_n) \wedge (d(Q, P) < \varepsilon)\}$ nimetatakse punkti $P \in \mathbf{R}_n$ *ε-ümbruseks.*

Definitsioon 6. Punkti $P \in \mathbf{R}_n$ nimetatakse hulga $\Omega \subset R_n$ *rajapunktiks,* kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral sisaldab punkti $P \in \mathbf{R}_n$ ε-ümbrus nii hulga Ω punkte kui ka hulka Ω mittekuuluvaid ruumi $\mathbf{R}_n$ punkte.

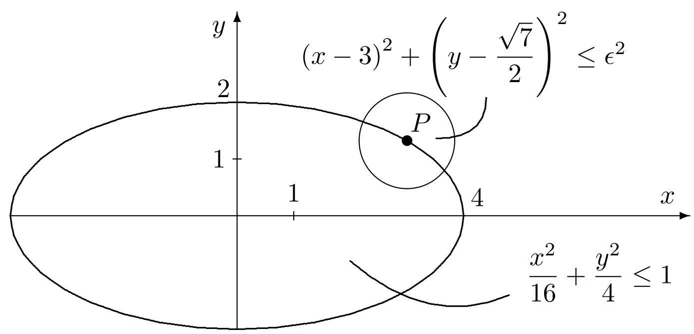
Näide 1. Punkt $P\left(3; \sqrt{7}/2\right)$ on piirkonna

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$$

rajapunkt, sest suvalise $\varepsilon > 0$ korral on tingimusega

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 < \varepsilon^2$$

määratud ringis nii piirkonna Ω punkte kui ka piirkonda Ω mittekuuluvaid punkte:



$\diamondsuit$

Definitsioon 7. Hulga Ω kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga Ω *rajaks.* **Definitsioon 8.** Hulka $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ nimetatakse *lahtiseks*, kui iga $P \in \Omega$ korral leidub selline $\varepsilon = \varepsilon(P) > 0$, et tingimusest $d(Q, P) < \varepsilon$ järeldub $Q \in \Omega$.

Seega sisaldab lahtine hulk Ω iga oma punkti mingit ümbrust ega sisalda ühtki hulga Ω rajapunkti.

Definitsioon 9. Hulka $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ nimetatakse *kinniseks*, kui Ω sisaldab oma raja. **Definitsioon 10.** Hulka $\{P(x_1, \ldots, x_n) \mid d(P, A) < r\}$ ruumis $\mathbf{R}_n$ nimetatakse *lahtiseks keraks* raadiusega r ja keskpunktiga punktis $A(a_1, \ldots, a_n)$.

Definitsioon 11. Hulka $\{P(x_1, \ldots, x_n) \mid d(P, A) \leq r\}$ ruumis $\mathbf{R}_n$ nimetatakse *kinniseks keraks* raadiusega r ja keskpunktiga punktis $A(a_1, \ldots, a_n)$.

Näide 2. Hulk

$$\Big\{(x, y) \mid ((x, y) \in \mathbf{R}_2) \wedge \Big((x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\Big)\Big\}$$

on lahtine ring (kera) ja

$$\Big\{(x, y) \mid ((x, y) \in \mathbf{R}_2) \wedge \Big((x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\Big)\Big\}$$

on kinnine ring ning ringjoon

$$\Big\{(x, y) \mid ((x, y) \in \mathbf{R}_2) \wedge \Big((x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\Big)\Big\}$$

on nende mõlema raja, kusjuures ringjoone keskpunkt on (a, b) ja raadius r. $\diamondsuit$

Definitsioon 12. Hulka
$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid (a_1 < x_1 < b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n < x_n < b_n)\}$
nimetatakse *lahtiseks risttahukaks* ruumis $\mathbf{R}_n$.

Definitsioon 13. Hulka

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid (a_1 \leq x_1 \leq b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \leq x_n \leq b_n)\}$$

nimetatakse *kinniseks risttahukaks* ruumis $\mathbf{R}_n$.

Definitsioon 14. Arvu

$$\mu(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

nimetatakse *risttahuka B mõõduks.*

Ruumi $\mathbf{R}_2$ korral nimetame risttahuka (ristküliku) mõõtu pindalaks ja $\mathbf{R}_3$ korral nimetame risttahuka mõõtu ruumalaks. Üldjuhul on hulga mõõdu defineerimine keerukas ülesanne.

Kui n-mõõtmelise ruumi hulk on lõpliku arvu risttahukate, millel puuduvad ühised sisepunktid, ühend, siis selle hulga mõõduks nimetame ühendi komponentide mõõtude summat. Kui $D \subset \mathbf{R}_n$ on tõkestatud hulk ja A on lõpliku arvu ühiseid sisepunkte mitteomavate ristahukate ühend, mis sisaldab hulka D, ning C on lõpliku arvu ühiseid sisepunkte mitteomavate ristahukate ühend, mis sisaldub hulgas D, siis $\mu(C) \leq \mu(A)$ ja

$$\sup_{C \subset D} \mu(C) \leq \inf_{D \subset A} \mu(A).$$

Definitsioon 15. Kui

$$\sup_{C \subset D} \mu(C) = \inf_{D \subset A} \mu(A),$$

siis ruumi $\mathbf{R}_n$ tõkestatud hulka D nimetatakse *mõõtuvaks* ja arvu

$$\mu(D) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{C \subset D} \mu(C)$$

nimetatakse hulga D *mõõduks.*

Näiteks ruumi $\mathbf{R}_2$ ringi

$$D = \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\right\}$$

korral $\mu(D) = \pi r^2$.

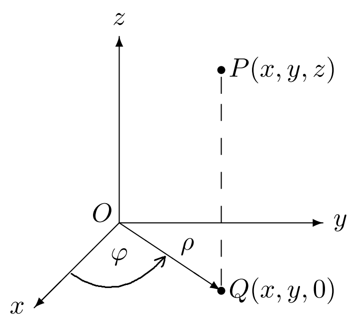
Ruumi R_3 punkti $P(x_1, x_2, x_3)$ korral kasutame tihti tähistust $P(x, y, z)$, st nimetame ümber koordinaadid: $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $x_3 \to z$. Märgime, et kolmemõõtmelises ruumis on võrrandiga $x = c$, kus c on konstant, määratud tasand paralleelne yz-tasandiga. Analoogiliselt on võrranditega $y = c$ ja $z = c$ määratud tasandid paralleelsed vastavalt xz- ja xy-tasandiga.

Punkti asukoha määramiseks kolmemõõtmelises ruumis kasutatakse lisaks ristkoordinaatidele ka silinderkoordinaate ehk silindrilisi koordinaate ja sfäärkoordinaate ehk sfäärilisi koordinaate.

Definitsioon 16. Ruumi $\mathbf{R}_3$ punkti P koordinaate ρ, φ ja z, mida ristkoordinaatidega x, y ja z seovad valemid

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{1.1.1}$$

nimetatakse *silindrilisteks koordinaatideks.*

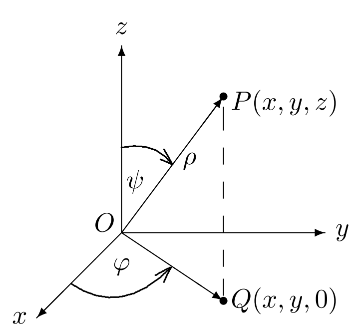


Seejuures on φ ja ρ punkti $Q(x, y, 0)$ polaarkoordinaadid xy-tasandil. Märgime, et silinderkoordinaatide korral on kolmemõõtmelises ruumis võrrandiga $\rho = c$ (c–konstant) määratud pöördsilinder, mille juhtjoon xy-tasandil on ringjoon raadiusega c ja keskpunktiga nullpunktis ning mille moodustaja on paralleelne z-teljega. Võrrandiga $\varphi = c$ on määratud pooltasand, st üks z-telge läbiva tasandi kahest osast, milleks selle tasandi jaotab z-telg. Selle tasandi teine osa on määratud võrrandiga $\varphi = c + \pi$. Võrrandiga $z = c$ määratud tasand on paralleelne xy-tasandiga.

Definitsioon 17. Ruumi $\mathbf{R}_3$ punkti P koordinaate ρ, φ ja ψ, mida ristkoordinaatidega x, y ja z seovad valemid

$$x = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \psi \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \psi, \tag{1.1.2}$$

nimetatakse *sfäärilisteks koordinaatideks.*



Seejuures on ψ nurk, mille punkti $P(x, y, z)$ kohavektor $\overrightarrow{OP}$ moodustab z-telje positiivse suunaga, ρ on vektori $\overrightarrow{OP}$ pikkus ja φ on nurk, mille vektor $\overrightarrow{OQ}$ moodustab x-telje positiivse suunaga.

Märgime, et sfäärkoordinaatide kasutamisel on kolmemõõtmelises ruumis võrrandiga $\rho = c$ (c–konstant) määratud sfäär keskpunktiga nullpunktis ja raadiusega c. Võrrandiga $\varphi = c$ on määratud pooltasand. Võrrandiga $\psi = c$ on määratud osa pöördkoonusest, mille teljeks on z-telg. Millise võrrandiga on antud selle pöördkoonuse ülejäänud osa?

Definitsioon 18. Kui hulga $\Omega \subset \mathbf{R}_n$ igale punktile $P(x_1, \ldots, x_n)$ on vastavusse seatud muutuja $u \in \mathbf{R}$ kindel väärtus, siis öeldakse, et hulgal Ω on defineeritud *n muutuja (skalaarväärtusega) funktsioon.* Seda fakti tähistatakse $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ või lühidalt $u = f(P)$ ehk $P \overset{f}{\mapsto} u$. Hulka Ω nimetatakse funktsiooni *määramispiirkonnaks* ja hulka

$$\{u \mid ((x_1, \ldots, x_n) \in \Omega) \wedge u = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbf{R}$$

funktsiooni *väärtuste piirkonnaks.* Hulka

$$\{(x_1, \ldots, x_n, u) \mid ((x_1, \ldots, x_n) \in \Omega) \wedge u = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbf{R}_{n+1}$$

nimetatakse *funktsiooni graafikuks.*

Et järjend $(x_1, \ldots, x_n)$ määrab ära vektori $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, siis on mõningatel juhtudel otstarbekas lisaks funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ lühendatud tähistusele $u = f(P)$ kasutada ka tähistust $u = f(\mathbf{x})$ ja kõnelda *vektorargumendi* $\mathbf{x}$ *skalaarväärtusega funktsioonist* $u = f(\mathbf{x})$.

Kui funktsioon on antud analüütilise eeskirjaga ja määramispiirkonda ei ole ette antud, siis funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ määramispiirkonnaks loetakse nende punktide, mille korral see eeskiri omab mõtet, hulka.

Näide 3. Leiame funktsiooni $u = \ln\left(1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2\right)$ määramispiirkonna. Et logaritmitav peab olema positiivne, siis

$$1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1,$$

st määramispiirkonnaks on lahtine kera raadiusega 1 ja keskpunktiga nullpunktis. $\diamondsuit$

Tehnilistel kaalutlustel piirdume järgnevas põhiliselt kahe muutuja funktsiooni $u = f(x_1, x_2)$ uurimisega. Nimetame ümber muutujad:

$$x_1 \to x,\; x_2 \to y,\; u \to z.$$

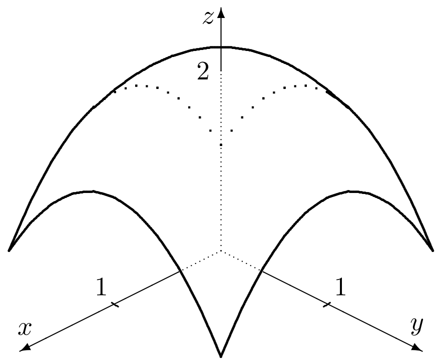
Seega piirdume tavaliselt funktsiooni $z = f(x, y)$ uurimisega.

Näide 4. Olgu $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$. Skitseerime funktsiooni

$$z = 2 - x^2 - y^2$$

graafiku ja leiame selle pinna võrrandi nii silinder- kui ka sfäärkoordinaatides.

Skitseerime graafiku



Minnes üle silinderkoordinaatidesse, saame

$$z = 2 - x^2 - y^2 \overset{(1.1.1)}{\leftrightarrow} z = 2 - \rho^2.$$

Minnes üle sfäärkoordinaatidesse, saame

$$z = 2 - x^2 - y^2 \overset{(1.1.2)}{\leftrightarrow} \rho \cos \psi = 2 - \rho^2 \sin^2 \psi. \qquad \diamondsuit$$

Definitsioon 19. Kui funktsioon $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ on antud võrrandiga

$$F(x_1, \ldots, x_n, u) = 0, \tag{1.1.3}$$

siis öeldakse, et see funktsioon on antud *ilmutamata kujul.* Võrrand (1.1.3) seob $n+1$ muutujat. Kui punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ sobivalt ette anda, siis on suurus u seosest (1.1.3) määratav, kuigi mitte alati üheselt. Kõigi nende punktide P hulk, mil suurus u on seosest (1.1.3) määratav, moodustab ilmutamata kujul antud funktsiooni määramispiirkonna Ω.

Kahe muutuja ilmutamata funktsiooni korral piirdume tavapäraselt võrrandiga $F(x, y, z) = 0$.

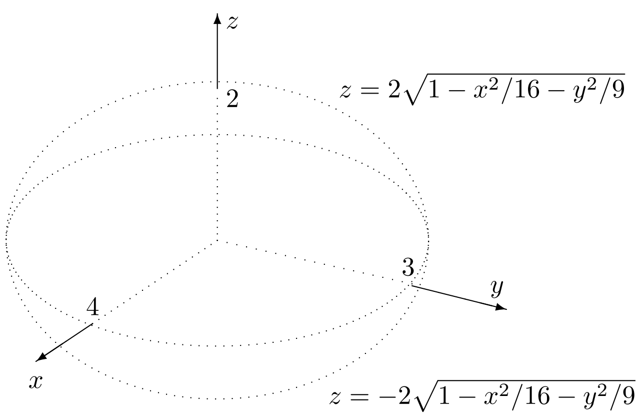
Näide 5. Olgu funktsioon antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0. \tag{1.1.4}$$

Avaldame võrrandist (1.1.4) muutuja z : $z = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}$.
Et ruutjuure all olev avaldis peab olema mittenegatiivne, siis leiame määramispiirkonna Ω kui võrratuse $1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \geq 0$ kõigi lahendite hulga:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Uuritava funktsiooni määramispiirkonnaks on ellipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ poolt hõlmatav xy-tasandi piirkond. Võrrandiga (1.1.4) määratud funktsioon on kahene. Leiame kaks haru: $z = 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}}$, $z = -2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}}$. Skitseerime uuritava funktsiooni graafiku:



Funktsionaalset seost $z = f(x, y)$ võib esitada ka *parameetriliselt*

$$\begin{cases} x = \varphi(p, q) \\ y = \psi(p, q) \\ z = \chi(p, q) \end{cases} \qquad (p, q) \in \Pi \subset \mathbf{R}_2. \tag{1.1.5}$$

Seoste (1.1.5) abil on konstrueeritud üksühene vastavus piirkonna Π ja pinna punktide vahel. Esituste (1.1.5) paigutamine võrrandisse $z = f(x, y)$ muudab selle samasuseks hulgal Π, st

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x = \varphi(p, q)) \wedge (y = \psi(p, q)) \wedge ((p, q) \in \Pi)\}$$

ja

$$\chi(p, q) = f(\varphi(p, q), \psi(p, q)) \quad (\forall\ (p, q) \in \Pi).$$

Funktsionaalset seost võime parameetriliselt esitada tavaliselt mitmel erineval viisil. Parametriseerimise oskused avardavad oluliselt arvuti kolmedimensionaalse graafika kasutamisvõimalusi.

Näide 6. Uurime võrrandiga (1.1.4) esitatud pinna üht parameetrilist esitust. Näitame, et parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi\sin\psi \\ y = 3\sin\varphi\sin\psi \\ z = 4\cos\psi \end{cases}, \tag{1.1.6}$$

kus $0 \le \varphi < 2\pi$ ja $0 \le \psi \le \pi$, annavad sama funktsionaalse sõltuvuse. Asendame muutujate x, y ja z parameetrilised esitused lähtevõrrandi vasakusse poolde. Leiame, et

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}&=\frac{(2\cos\varphi\sin\psi)^2}{4}+\frac{(3\sin\varphi\sin\psi)^2}{9}+\frac{(4\cos\psi)^2}{16}=\\&=\cos^2\varphi\sin^2\psi+\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\psi=\\&=\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\sin^2\psi+\cos^2\psi=\sin^2\psi+\cos^2\psi=1\\&(\forall\ (\varphi\in[0;2\pi))\wedge\psi\in[0;\pi]),\end{aligned}$$

st selle parameetrilise esituse (1.1.6) paigutamine lähtevõrrandisse muudab võrrandi (1.1.4) samasuseks . Seega on parameetriliste võrranditega (1.1.6) esitatud pinna punktid ka pinna (1.1.4) punktideks. Et parameetrit ψ võime tõlgendada kui nurka, mille punkti (x,y,z) kohavektor moodustab z-telje positiivse suunaga, ja parameetrit φ kui nurka, mille punkti (x,y,z) ristprojektsiooni $(x,y,0)$ kohavektor moodustab xy-tasandil x-telje positiivse suunaga, siis võimaldavad parameetrite φ ja ψ valitud määramispiirkonnad esitada parameetriliste võrrandite (1.1.6) abil selle ellipsoidi kõik punktid. $\diamondsuit$

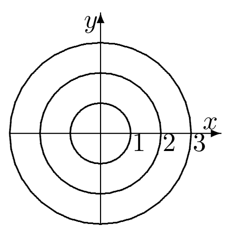
Definitsioon 20. Pinda punktiruumis $\mathbf{R}_n$ võrrandiga

$$f(x_1,\ldots,x_n)=C,$$

kus $C\in\mathbf{R}$ on etteantud konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x_1,\ldots,x_n)$ *nivoopinnaks*. Juhul $n=2$ nimetatakse nivoopinda *nivoojooneks* . Funktsiooni $z=f(x,y)$ nivoopinda võrrandiga $f(x,y)=C$ võime käsitleda kui funktsiooni $z=f(x,y)$ graafiku ja tasandi $z=C$ lõikejoone projektsiooni xy-tasandile.

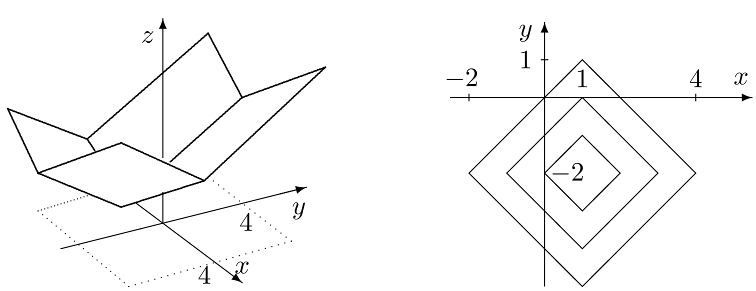
Näide 7. Leiame funktsiooni $z=x^2+y^2$ nivoojooned.

Nende võrrandid on: $x^2+y^2=C$. Reaalse joone saame vaid juhul, kui $C>0$. Olgu $C=r^2$. Skitseerime nivoojooned $r=1;2;3$ korral



$\diamondsuit$

Näide 8. Skitseerime funktsiooni $z=|x-1|+|y+2|$ graafiku ja nivoojooned $|x-1|+|y+2|=C\quad(C=1;2;3)$:

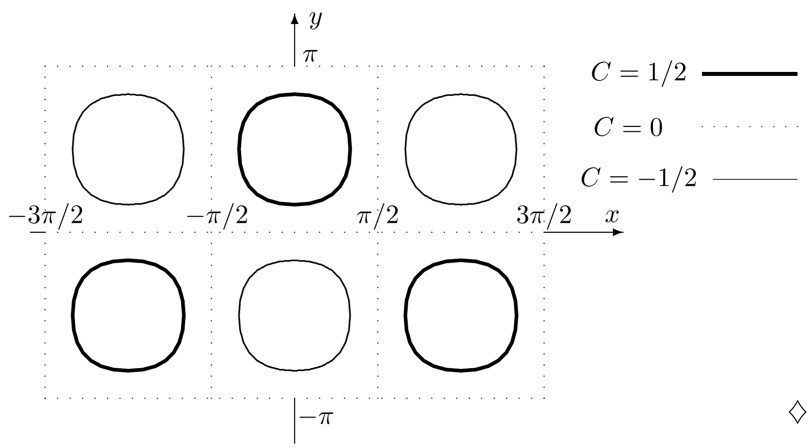


$\diamondsuit$

Näide 9. Skitseerime SWP abil funktsiooni

$$z = (\cos x)(\sin y) \quad \{(x, y) \mid (-5 \le x \le 5) \wedge (-5 \le y \le 5)\}$$

nivoojooned $(\cos x)(\sin y) = C \quad (C = -0.5; 0; 0.5)$:



♢

1.2 Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Intuitiivselt mõistame me oma eelnevate teadmiste põhjal, et arvu a nimetame funktsiooni $u = f(P)$ piirväärtuseks punktis A, kui punkti P lähenemisel punktile A funktsiooni väärtus läheneb arvule a. Paneme järgnevalt funktsiooni piirväärtuse definitsiooni kirja matemaatiliselt korrektselt.

Definitsioon 1. Arvu α nimetatakse *funktsiooni* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *piirväärtuseks* punktis $A(a_1, \ldots, a_n)$, kui arvu α suvalise ε-ümbruse $U_\varepsilon(\alpha)$ korral leidub selline punkti $A(a_1, \ldots, a_n)$ δ-ümbrus $U_\delta(A)$, et $f(U_\delta(A) \setminus A) \subset U_\varepsilon(\alpha)$. Seda fakti tähistatakse $\lim\limits_{P \to A} f(P) = \alpha$.

Seega

$$\left(\lim_{P \to A} f(P) = \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < d(P, A) < \delta \Rightarrow |f(P) - \alpha| < \varepsilon).$$

Kui kasutada n muutuja funktsiooni $u = f(P)$ jaoks tähistust $u = f(\mathbf{x})$, siis on eelnev definitsioon kirja pandav kujul

$$\left(\lim_{\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) = \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |\Delta\mathbf{x}| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon),$$

kusjuures

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \; \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \; \Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \; \mathbf{x} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}.$$

Enamik mitme muutuja funktsiooni omadusi on sarnased vastavate omadustega ühe muutuja funktsiooni korral, näiteks lineaarsuse omadus

$$\left(\lim_{P\to A} f_1(P) = \alpha_1\right) \wedge \left(\lim_{P\to A} f_2(P) = \alpha_2\right) \wedge (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{P\to A} (c_1 f_1(P) + c_1 f_1(P)) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2\right).$$

Samuti kehtib omadus, et punktis A piirväärtust omav funktsioon $f(P)$ on selle punkti ümbruses esitatav kujul $f(P) = \alpha + \gamma$, kus

$$\alpha = \lim_{P\to A} f(P)$$

ja γ on lõpmata väike suurus piirprotsessis $P \to A$, st $\lim\limits_{P\to A} \gamma = 0$. Seega

$$\left(\lim_{P\to A} f(P) = \alpha\right) \Leftrightarrow \left((f(P) = \alpha + \gamma) \wedge \left(\lim_{P\to A} \gamma = 0\right)\right).$$

Vaatleme järgnevalt mõningaid ainult mitme muutuja funktsioonile iseloomulikke momente.

Definitsioon 2. Piirväärtust

$$\lim_{x_1\to a_1} \lim_{x_2\to a_2} \ldots \lim_{x_n\to a_n} f(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def.}}{=}$$

$$= \lim_{x_1\to a_1} \left(\lim_{x_2\to a_2} \ldots \left(\lim_{x_n\to a_n} f(x_1, \ldots, x_n)\right)\right)$$

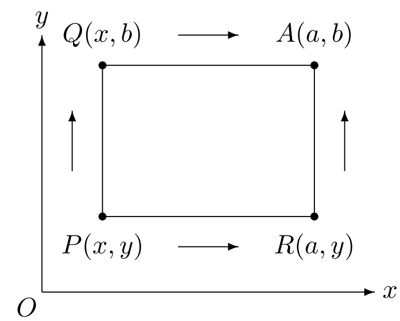
nimetatakse *korduvaks piirväärtuseks*, st järjest võetud ühe muutuja funktsioonide piirväärtusteks, kusjuures muutuja x_i $(1 \le i \le n)$ järgi piirväärtuse arvutamisel loetakse muutujaid x_k $(k < i)$ konstantseteks.

Lause 1. Piirväärtus $\lim\limits_{P\to A} f(x, y)$ eksisteerib parajasti siis, kui $f(x, y) \to \alpha$ sõltumata punkti $P(x, y)$ punktile $A(a, b)$ lähenemise viisist, kusjuures

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,b)} f(x, y) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y) = \alpha, \\ \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y) = \alpha. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Implikatsioon (1.2.1) ei ole pööratav.

Tõestus. Väite esimene osa järeldub funktsiooni piirväärtuse Definitsioonist 1. Väite teises osas kasutatakse kaht punkti P punktile A lähenemise teed. Esiteks, punkt $P(x, y)$ läheneb punktile $A(a, b)$ piki murdjoont PQA. Teiseks, punkt $P(x, y)$ läheneb punktile $A(a, b)$ piki murdjoont PRA. Skitseerime need lähenemisteed:



Implikatsiooni (1.2.1) mittepööratavus järeldub järgmisest näitest. □

Näide 1. Uurime korduvaid piirväärtusi ja kahe muutuja funktsiooni $2xy/\left(x^2+y^2\right)$ piirväärtust piirprotsessis $(x,\, y) \to (0;0)$.

Leiame

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

st korduvad piirväärtused on võrdsed. Teisalt,

$$\lim_{(x,\,y)\to(0;0)}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{c}\text{kasutame üleminekut polaarkoordinaatidesse}\\ \text{valemitega } x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\\ \text{kusjuures } ((x,\,y)\to(0;0)) \Leftrightarrow (\rho\to 0)\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \sin 2\varphi,$$

st tulemus jääb sõltuma lähenemisnurgast φ. Lause 1 esimese osa põhjal uuritavat piirväärtust ei eksisteeri, st

$$\nexists \lim_{(x,\,y)\to(0;0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Seega implikatsioon (1.2.1) ei ole pööratav. ♢

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse uurimise kahe võttega puutusime kokku Näites 1. Kolmas võte kasutab punktile $(0;0)$ lähenemist piki sirget $y=kx$.

Näide 2. Leiame piirväärtuse $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0;0)}\frac{2x^2y^3}{x^4+y^4}$.

Kui läheneme nullpunktile piki sirget $y=kx$, siis

$$((x,\,y)\to(0;0)) \overset{y=kx}{\Leftrightarrow} (x\to 0)$$

ja

$$\lim_{(x,\,y)\to(0;0)} \frac{2x^2y^3}{x^4+y^4} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2\,(kx)^3}{x^4+(kx)^4} = \lim_{x\to0} x\frac{2k^3}{1+k^4} = \left[\left|\frac{2k^3}{1+k^4}\right| \le 1\right] = 0$$

ühtlaselt $k \in \mathbf{R}$ suhtes. Nullpunkti läbib ka y-telg ja ta on kirjeldatav mitte võrrandi $y = kx$, vaid $x = 0$ abil. Uurime lähenemist piki seda sirget

$$\lim_{(x,\,y)\to(0;0)} \frac{2x^2y^3}{x^4+y^4} = [x=0] = \lim_{y\to0} \frac{2\cdot 0^2y^3}{0^4+y^4} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y\to0} 0 = 0.$$

Uuritav kahe muutuja funktsiooni piirväärtus eksisteerib ja võrdub nulliga. $\diamondsuit$

Kui kolmanda võtte rakendamisel jääb tulemus sõltuma lähenemiseks kasutatava sirge tõusunurga tangensist k, siis Lause 1 põhjal uuritavat piirväärtust ei eksisteeri. Lisame kaks väidet eriti usinale tudengile.

Lause 2. Kui

$$f(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi) = \alpha + \rho^{\lambda}F(\varphi,\rho),$$

kus $\lambda > 0$ ja $F(\varphi,\rho) = O\,(1)\ \ (0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \rho < r)$, siis

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,b)} f\,(x,y) = \alpha \ \Leftrightarrow\ \lim_{\rho\to0} f(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi) = \alpha.$$

Lause 3. Kui

$$f(a+kt, b+nt) = \alpha + t^{\mu}G(t,k,n),$$

kus $\mu > 0$ ja $G(t,k,n) = O(1)\ \ (0 < |t| < \beta,\ |k| < \infty,\ |n| < \infty)$, siis

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,b)} f\,(x,y) = \alpha \ \Leftrightarrow\ \lim_{\rho\to0} f(a+\rho\cos\varphi, b+\rho\sin\varphi) = \alpha.$$

Definitsioon 3. Funktsiooni $u = f\,(x_1,\ldots,x_n)$ nimetatakse *pidevaks punktis* $A(a_1,\ldots,a_n)$, kui

$$\lim_{P\to A} f\,(P) = f\,(A)\,, \tag{1.2.2}$$

st on täidetud kolm tingimust:

1. $\exists\, f\,(A)\,;$
2. $\exists \lim\limits_{P\to A} f\,(P)\,;$
3. $\lim\limits_{P\to A} f\,(P) = f\,(A)\,.$

Definitsioon 4. Funktsiooni $u = f\,(P)$ nimetatakse *pidevaks piirkonnas* $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathbf{R}_n$, kui see funktsioon on pidev piirkonna Ω_0 igas punktis.

Asjaolu, et funktsioon $f(P)$ on pidev piirkonnas Ω_0, tähistatakse $f(P) \in C\,(\Omega_0)\,.$ Kui $P\,(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n)\,,\ \ \Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ ja

$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$, siis tingimus (2.2) on esitatav kujul

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \left(f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \right) = 0$$

ehk kujul

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \to \mathbf{0}} \Delta u = 0, \tag{1.2.3}$$

st mitme muutuja funktsioon $u = f(P)$ on pidev punktis A parajasti siis, kui argumendi muutude vektori lähenemisel nullvektorile funktsiooni muut läheneb nullile.

Näide 3. Uurime funktsiooni

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^3}{x^4+y^4}, & \text{kui } (x,y) \neq (0;0), \\ 0, & \text{kui } (x,y) = (0;0) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

pidevust punktis $O(0;0)$.

Definitsiooni 3 kõik kolm tingimust on rahuldatud. Tõesti,

1. $f(O) = [\text{vaadake funktsiooni definitsiooni}] = 0,$
2. $\lim\limits_{P \to O} f(P) = [\text{vaadake Näidet 2}] = 0,$
3. $\lim\limits_{P \to O} f(P) = 0 = f(O).$

   Seega on uuritav funktsioon $f(x,y)$ pidev punktis $O(0;0)$. $\diamondsuit$

Ka mitme muutuja elementaarfunktsioonide korral kehtib järgmine väide.

Lause 4. Iga mitme muutuja elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonna sisepunktides.

Funktsiooni $2x^2y^3/\left(x^4+y^4\right)$ määramispiirkond Ω on kogu xy-tasandi lõplik osa, v.a nullpunkt. Et hulk Ω on lahtine, st ta koosneb vaid sisepunktidest, siis on funktsioon $2x^2y^3/\left(x^4+y^4\right)$ pidev hulga Ω igas punktis. Kui siia lisada Näites 3 saadud tulemus, siis võib väita, et eeskirjaga (1.2.4) antud funktsioon $f(x,y)$ on pidev kogu xy-tasandil.

Ühe muutuja funktsiooni korral on eriline osa lõigul pidevate funktsioonide omadustel. Analoogilised omadused on ka kinnisel tõkestatud sidusal hulgal $\Omega_0 \subset \Omega$ pidevatel mitme muutuja funktsioonidel, kusjuures hulka Ω_0 nimetame *sidusaks*, kui iga kaht selle hulga punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva joonega.

1.3 Funktsiooni osatuletised

Vaatleme järgnevalt mitme muutuja funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_n)$ osatuletisi punktis $P(x_1, \dots, x_n)$. Anname koordinaadile x_i $(1 \le i \le n)$ muudu Δx_i. Olgu koordinaadi x_i muudule Δx_i vastav *funktsiooni muut* $\Delta_{\Delta x_i} u \overset{def}{=} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) -$
$-f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
Kasutades vektoreid $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $(\Delta x_i)\,\mathbf{e}_i$, saame funktsiooni muudu $\Delta_{\Delta x_i} u$ esitada kujul $\Delta_{\Delta x_i} u = f(\mathbf{x} + (\Delta x_i)\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})$.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{\Delta x_i} u}{\Delta x_i}$, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_n)$ *(esimest järku) osatuletiseks* punktis $P(x_1, \dots, x_n)$ muutuja x_i $(1 \le i \le n)$ järgi ja tähistatakse $\dfrac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$, st

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{\Delta x_i} u}{\Delta x_i}.$$

Funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_n)$ osatuletise jaoks kasutatakse sümboli $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ asemel ka tähistusi $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i} u$, f_{x_i}, f'_{x_i} ja u_{x_i}.

Järeldus 1. Osatuletise võtmisel mitme muutuja funktsioonist f muutuja x_i järgi võetakse selle muutuja järgi tavaline tuletis, kusjuures selle funktsiooni teisi muutujaid käsitletakse kui konstante.

Järeldus 2. Kui hulgal Ω määratud funktsioonil $u = f(P)$ eksisteerib osatuletis $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n)$ hulga $\Omega_0 \subset \Omega$ igas punktis, siis kujutab see osatuletis $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ endast funktsiooni, mis on määratud hulgal Ω_0.

Järeldus 3. Kui tegemist on kahe muutuja funktsiooniga $z = f(x, y)$, siis

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^y$ osatuletised $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Võttes sellest funktsioonist osatuletist muutuja x järgi, käsitleme suurust y kui konstanti, st muutub vaid astmealus, saame $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$. Võttes sellest funktsioonist osatuletist muutuja y järgi, käsitleme suurust x kui konstanti, st muutub vaid astmenäitaja, saame $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. $\diamondsuit$

Näide 2. Leiame funktsiooni $u = z\arctan\dfrac{y}{x}$ osatuletised u_x, u_y ja u_z :

$$u_x = \frac{\partial\left(z\arctan\frac{y}{x}\right)}{\partial\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial x} = z\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{yz}{x^2+y^2},$$

$$u_y = \frac{\partial\left(z\arctan\frac{y}{x}\right)}{\partial\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\frac{y}{x}}{\partial y} = z\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{xz}{x^2+y^2},$$

$$u_z = \arctan\frac{y}{x}. \qquad \diamondsuit$$

Et n-muutuja funktsiooni $u = f(P)$ esimest järku osatuletis $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ on n-muutuja funktsioon, siis võime võtta sellest esimest järku osatuletise muutuja x_j $(1 \le j \le n)$ järgi. Saadud tulemust nimetatakse funktsiooni $u = f(P)$ *teist järku osatuletiseks*, võetuna esiteks muutuja x_i järgi ja siis muutuja x_j järgi. Seega,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad (1 \le i,\ j \le n).$$

Lisaks tähistusele $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ kasutatakse selle teist järku osatuletise jaoks veel tähistusi $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f$, $u_{x_i x_j}$, $f''_{x_i x_j}$ ja $f_{x_i x_j}$. Kui $i \ne j$, siis teist järku osatuletist $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ nimetatakse segaosatuletiseks. Juhul $i = j$ kasutatakse sümboli $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$ asemel tähistust $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ ja sümboli $u_{x_i x_i}$ asemel tähistust $u_{x_i^2}$. Viimase tähistuse kasutamisel tuleb olla ettevaatlik, sest mõnikord soovime muutuvast suurusest u leida ka osatuletist suuruse x_i^2 järgi. Kolmandat järku osatuletised defineeritakse kui esimest järku osatuletised teist järku osatuletistest. Analoogiliselt defineeritakse $(n+1)$-järku osatuletised kui esimest järku osatuletised n-järku osatuletistest.

Näide 3. Leiame funktsiooni $z = x^y$ kõik teist järku osatuletised:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\left(yx^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}\right) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = x^y(\ln x)^2. \qquad \diamondsuit$$

Märgime, et teist järku segaosatuletised on selle funktsiooni korral võrdsed, nimelt $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Kehtib järgmine väide.

Lause 1. Kui funktsiooni $z = f(x,y)$ teist järku segaosatuletised z_{xy} ja z_{yx} on pidevad punktis $P(x,y)$, siis selles punktis $z_{xy} = z_{yx}$.

Tõestus. Olgu

$$\omega \stackrel{def}{=} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y),$$

kus Δx ja Δy on esialgu konstantsed. Kui

$$\varphi\,(x,y) \stackrel{def}{=} f(x, y+\Delta y) - f(x,y), \quad \psi\,(x,y) \stackrel{def}{=} f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$

siis kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi, saame

$$\omega = \varphi\,(x+\Delta x, y) - \varphi\,(x,y) = \varphi_x\,(x+\theta_1\Delta x, y)\,\Delta x, \tag{1.3.1}$$

$$\omega = \psi\,(x, y+\Delta y) - \psi\,(x,y) = \psi_y\,(x, y+\theta_2\Delta y)\,\Delta y, \tag{1.3.2}$$

kusjuures

$$\begin{aligned}\varphi_x\,(x+\theta_1\Delta x, y) = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x+\theta_1\Delta x, y) = \\ = f_{xy}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_3\Delta y)\Delta y,\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

$$\begin{aligned}\psi_y\,(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y) - f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = \\ = f_{yx}(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\Delta x.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Seoste ahelatest (1.3.1) , (1.3.2), (1.3.3) ja (1.3.4) järeldub, et

$$\begin{gathered} f_{xy}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y = f_{yx}(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x, \\ f_{xy}\,(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_3\Delta y) = f_{yx}\,(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\,, \end{gathered}$$

kus $0 < \theta_i < 1 \quad (i = 1;2;3;4)$ ja

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_{xy}\,(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_3\Delta y) = \\ = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_{yx}\,(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\,.\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Kui segaosatuletised $f_{xy}\,(x,y)$ ja $f_{yx}\,(x,y)$ on pidevad punktis $P(x,y)$, siis seosest (1.3.5) järeldub Lause 1 väide $f_{xy}\,(x,y) = f_{yx}\,(x,y)\,.$ $\square$

Lause 1 väitega sarnane väide kehtib ka funktsiooni $z = f(x,y)$ kõrgemat järku segaosatuletiste korral ja n-muutuja funktsiooni $(n \geq 3)$ segaosatuletiste korral.

1.4 Funktsiooni täisdiferentsiaalid

Funktsiooni $z = f(x, y)$ argumentide muudule $(\Delta x, \Delta y)$ vastav funktsiooni muut Δz avaldub kujul

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\
&= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) = \\
&= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y = \\
&= [\text{eeldame osatuletiste } f_x \text{ ja } f_y \text{ pidevust punktis } (x, y)] = \\
&= (f_x(x, y) + \alpha)\,\Delta x + (f_y(x, y) + \beta)\,\Delta y = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \gamma,
\end{aligned}$$

kusjuures

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)} \alpha = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)} \beta = 0 \tag{1.4.1}$$

ja suurus $\gamma = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ on kõrgemat järku lõpmata väike võrreldes vektori $(\Delta x, \Delta y)$ pikkusega $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Tõesti, võrratuste ahelast

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| &\le \frac{|\alpha|\,|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\beta|\,|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le \\
&\le |\alpha| + |\beta|
\end{aligned}$$

ja tingimustest (1.4.1) järeldub, et suurus $\gamma = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ on kõrgemat järku lõpmata väike võrreldes vektori $(\Delta x, \Delta y)$ pikkusega.

Definitsioon 1. Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse *diferentseeruvaks* punktis $P(x, y)$, kui argumendi muudule $(\Delta x, \Delta y)$ vastav funktsiooni muut

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y f(x, y)$$

on esitatav kujul

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \gamma, \tag{1.4.2}$$

kus γ on kõrgemat järku lõpmata väike suurus võrreldes vektori $(\Delta x, \Delta y)$ pikkusega $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \to (0; 0)$.

Järeldus 1. Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ on pidevad punktis $P(x, y)$, siis on funktsioon $z = f(x, y)$ diferentseeruv punktis $P(x, y)$.

Tõestus järeldub alajaotuse algul esitatud arutelust. Nimelt lähtudes osatuletiste f_x ja f_y pidevusest õnnestus funktsiooni muudule Δz anda esitus (1.4.2). $\square$

Saab näidata, et igal diferentseeruval funktsioonil on olemas esimest järku osatuletised.

Järeldus 2. Kui funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentseeruv punktis $P(x, y)$, siis funktsioon f on pidev selles punktis.

Tõestus. Et

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0;0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0;0)} (f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \gamma) = 0,$$

siis on täidetud tingimus (1.2.3), mis on tarvilik ja piisav funktsiooni f pidevuseks punktis $P\,(x,y)$.

Definitsioon 2. Suurust

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy, \tag{1.4.3}$$

kus $dx \stackrel{\text{def.}}{=} \Delta x$ ja $dy \stackrel{\text{def.}}{=} \Delta y$, nimetatakse funktsiooni $z = f(x,y)$ *täisdiferentsiaaliks.* Funktsiooni $z = f(x,y)$ täisdiferentsiaali dz võib esitada kujul

$$d\,z = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dy$$

või formaalselt kujul

$$d\,z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) f(x,y),$$

kus operaatori $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ rakendamisel funktsioonile $f(x,y)$ tuleb mõlemas liidetavas sümboli ∂ taha kirjutada $f(x,y)$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = \sin\frac{y}{x}$ täisdiferentsiaali. Et

$$z_x = \left(\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right),\ z_y = \left(\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right),$$

siis

$$dz = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\,dx + \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy. \qquad \diamondsuit$$

Võrreldes valemeid (1.4.2) ja (1.4.3), näeme, et funktsiooni $z = f(x,y)$ muut Δz ja täisdiferentsiaal dz erinevad teineteisest suuruse γ võrra. Seejuures on γ piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)$ kõrgemat järku lõpmata väike, võrreldes suurusega
$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Seega $\Delta z \approx dz$ ja valemist (1.4.3) saame ligikaudse seose $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$, millest järeldub rakendusteks sobilik valem

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y. \tag{1.4.4}$$

Näide 2. Arvutame valemi (1.4.4) abil $\ln(\sqrt[3]{1.06}+\sqrt[4]{0.96}-1)$.

Abifunktsiooni $f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ korral leiame osatuletised:

$$f_x(x,y) = 1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)\right),$$

$$f_y(x,y) = 1/\left(4\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)\right).$$

Kui $x=1$, $\Delta x = 0.06$, $y=1$, $\Delta y = -0.04$, siis

$$f(1,1) = \ln\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1\right) = 0, \quad f_x(1,1) = 1/3, \quad f_y(1,1) = 1/4.$$

Valemi (1.4.4) abil saame

$$\ln(\sqrt[3]{1.06}+\sqrt[4]{0.96}-1) \approx 0 + \frac{1}{3}0.06 - \frac{1}{4}0.04 = 0.01. \qquad \diamondsuit$$

Funktsiooni $z = f(x,y)$ täisdiferentsiaal dz on nelja muutuja funktsioon $dz = dz\,(x,y,dx,dy)$. Kui vaadelda suurusi dx ja dy kui konstante, siis dz on vaid muutujate x ja y funktsioon ning saame leida suuruse dz täisdiferentsiaali $d\,(dz)$.

Definitsioon 3. Suurust $d\,(dz)$ nimetatakse funktsiooni $z = f(x,y)$ *teist järku täisdiferentsiaaliks* ja tähistatakse d^2z, st $d^2z = d\,(dz)$. Et

$$\begin{aligned} d^2z &= d\,(dz) = \\ &= \left(f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy\right)_x dx + \left(f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy\right)_y dy = \\ &= f_{xx}(x,y)\,(dx)^2 + f_{yx}(x,y)dydx + f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yy}(x,y)\,(dy)^2 = \\ &= [\text{eeldame segaosatuletiste } f_{yx} \text{ ja } f_{xy} \text{ pidevust punktis } (x,y)] = \\ &= f_{xx}(x,y)\,(dx)^2 + 2f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yy}(x,y)\,(dy)^2, \end{aligned}$$

siis pidevate f_{yx} ja f_{xy} korral punktis $P(x,y)$ saame

$$d^2z = f_{xx}(x,y)\,(dx)^2 + 2f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yy}(x,y)\,(dy)^2. \tag{1.4.5}$$

Viimast valemit võib esitada kujul

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y),$$

kus pärast summa ruudu leidmist tuleb igas liidetavas sümboli ∂^2 järele kirjutada $f(x,y)$. Tõesti,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right) f(x,y) = \\ &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,(dy)^2. \end{aligned}$$

Näide 3. Olgu $z = x^y$. Leiame d^2z.

Näites 1.3.3 leidsime vajalikud teist järku osatuletised. Paigutame need valemisse (1.4.5):
$d^2z = y(y-1)x^{y-2}(dx)^2 + 2\left(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\right)dxdy + x^y(\ln x)^2(dy)^2$. $\diamondsuit$

Definitsioon 4. Funktsiooni $z = f(x,y)$ *n-järku täisdiferentsiaal* d^nz defineeritakse kui esimest järku täisdiferentsiaal $(n-1)$-järku täisdiferentsiaalist, st

$$d^nz \stackrel{def}{=} d\left(d^{n-1}z\right).$$

Kehtib valem

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

Analoogilised tulemused kehtivad ka n-muutuja funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ korral. Kui tähistada

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),\ dx_i = \Delta x_i,\ du = \textstyle\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x})dx_i,$$

$$\Delta u = f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}),\ d^mu = d\left(d^{m-1}u\right)\ (m \geq 2),$$

siis

$$d^mu = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^m f(\mathbf{x}).$$

Kehtib seos

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x})dx_i + \gamma, \tag{1.4.6}$$

kus γ on kõrgemat järku lõpmata väike suurus, võrreldes suurusega $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$. Kuna $\Delta u \approx du$, siis saame rakendusteks sobiva valemi

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x})\Delta x_i. \tag{1.4.7}$$

Kehtib järgmine väide (võrrelge seda Lausega 1.3.1).

Lause 1. Kui funktsiooni $f(x,y)$ osatuletised f_x ja f_y on diferentseeruvad punktis (x,y), siis selles punktis $f_{xy} = f_{yx}$.

1.5 Liitfunktsiooni osatuletised

1° Olgu funktsioonid $x_i = x_i(t)$ $(i = 1; \ldots; n)$ diferentseeruvad punktis t ja funktsioon $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferentseeruv punktis $P(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Leiame liitfunktsiooni $u|_{x_i=x_i(t)} = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = u(t)$ tuletise du/dt punktis t. Et funktsioon $u = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$ on diferentseeruv punktis P, siis argumendi $\mathbf{x}$ muudule $\Delta\mathbf{x}$ vastav funktsiooni $u = f(\mathbf{x})$ muut Δu avaldub valemi (1.4.6) abil

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\Delta x_i + \gamma,$$

kus

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}} \overset{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}}{\to} 0.$$

Et funktsioonid $x_i = x_i(t)$ $(i = 1; \ldots; n)$ on diferentseeruvad punktis t, siis argumendi t juurdekasvule Δt vastav funktsiooni x_i juurdekasv Δx_i avaldub kujul $\Delta x_i = \dfrac{dx_i}{dt}\Delta t + \alpha_i$, kusjuures

$$\frac{\alpha_i}{\Delta t} \overset{\Delta t\to 0}{\to} 0 \ \ (i = 1; \ldots; n)\,.$$

Seega saame

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}) \left(\frac{dx_i}{dt}\Delta t + \alpha_i\right) + \gamma = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\frac{dx_i}{dt}\right)\Delta t + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\alpha_i + \gamma = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\frac{dx_i}{dt}\right)\Delta t + \delta,\end{aligned}$$

kus $\delta = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\alpha_i + \gamma$. Et kehtib võrratuste ahel

$$\begin{aligned}\left|\frac{\delta}{\Delta t}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x})\frac{\alpha_i}{\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathbf{x})| \left|\frac{\alpha_i}{\Delta t}\right| + \left|\frac{\gamma}{\Delta t}\right| \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathbf{x})| \left|\frac{\alpha_i}{\Delta t}\right| + \frac{|\gamma|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2} \overset{\Delta t\to 0}{\to} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'(t))^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{piirväärtust omav}\\ \text{suurus on tõkestatud}\\ \text{selles piirprotsessis}\end{array}\right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2} = O(1),\end{aligned}$$

ning $\alpha_i/\Delta t \overset{\Delta t \to 0}{\to} 0 \ \ (i = 1; \ldots; n)$, $\gamma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2} \overset{\Delta \mathbf{x} \to \mathbf{0}}{\to} 0$, siis $\delta/\Delta t \overset{\Delta t \to 0}{\to} 0$. Seega oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 1. Kui funktsioonid $x_i = x_i(t) \ \ (i = 1; \ldots; n)$ on diferentseeruvad punktis t ja funktsioon $u = f(\mathbf{x})$ on diferentseeruv punktis $P(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, siis liitfunktsiooni

$$u|_{x_i = x_i(t)} = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = f(\mathbf{x}(t)) = u(t)$$

tuletis punktis t avaldub kujul

$$\frac{du(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_i(t)}{dt}. \tag{1.5.1}$$

Näide 1. Olgu

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \ x = \sin 2t, \ y = 1 - \cos 2t, \ z = \cos t.$$

Leiame tuletise $\dfrac{du}{dt}$.

Kasutame valemit (1.5.1), kusjuures muutujate x_1, x_2 ja x_3 asemel kasutame vastavalt muutujaid x, y ja z. Saame

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} + u_z \frac{dz}{dt} = \\ &= 2x\,(2\cos 2t) + 2y\,(2\sin 2t) + 2z\,(-\sin t) = \\ &= 2\,(2\sin 2t \cos 2t + 2\,(1 - \cos 2t) \sin 2t - \cos t \sin t) = \\ &= 3\sin 2t.\end{aligned}$$

Märgime, et sama tulemuseni jõuame, kui kõigepealt asendada võrrandis $u = x^2 + y^2 + z^2$ suurused x, y ja z muutuja t kaudu

$$\begin{aligned}u(t) &= x^2|_{x=\sin 2t} + y^2|_{y=1-\cos 2t} + z^2|_{z=\cos t} = \\ &= (\sin 2t)^2 + (1 - \cos 2t)^2 + \cos^2 t = 4 - 3\cos^2 t\end{aligned}$$

ning võtta siis tuletis

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\left(4 - 3\cos^2 t\right)}{dt} = 6\cos t \sin t = 3\sin 2t. \qquad \diamondsuit$$

2° Olgu funktsioonid $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ diferentseeruvad punktis $P(u, v)$ ning funktsioon $z = z(x, y)$ diferentseeruv punktis $(x(P), y(P))$. Leiame liitfunktsiooni $z = z\,(x(P), y(P)) = z(u, v)$ osatuletised z_u ja z_v. Valemi (1.4.2) abil saame

$$\begin{aligned}\Delta z &= z_x \Delta x + z_y \Delta y + \gamma, \\ \Delta x &= x_u \Delta u + x_v \Delta v + \alpha, \\ \Delta y &= y_u \Delta u + y_v \Delta v + \beta,\end{aligned}$$

kus

$$\gamma/\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \overset{(\Delta x,\Delta y)\to(0;0)}{\longrightarrow} 0, \tag{1.5.2}$$

$$\alpha/\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2} \overset{(\Delta u,\Delta v)\to(0;0)}{\longrightarrow} 0 \tag{1.5.3}$$

ja

$$\beta/\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2} \overset{(\Delta u,\Delta v)\to(0;0)}{\longrightarrow} 0. \tag{1.5.4}$$

Seega leiame

$$\begin{aligned}\Delta z &= z_x\Delta x + z_y\Delta y + \gamma = \\ &= z_x\left(x_u\Delta u + x_v\Delta v + \alpha\right) + z_y\left(y_u\Delta u + y_v\Delta v + \beta\right) + \gamma = \\ &= \left(z_x x_u + z_y y_u\right)\Delta u + \left(z_x x_v + z_y y_v\right)\Delta v + \left(z_x\alpha + z_y\beta + \gamma\right)\end{aligned}$$

ehk

$$\Delta z = \left(z_x x_u + z_y y_u\right)\Delta u + \left(z_x x_v + z_y y_v\right)\Delta v + \delta, \tag{1.5.5}$$

kus $\delta = z_x\alpha + z_y\beta + \gamma$. Valime seoses (1.5.5) $\Delta v = 0$ ja tähistame argumendi u muudule Δu vastavat funktsiooni z muutu sümboliga $\Delta_{\Delta u} z$. Jagame siis mõlemat poolt suurusega Δu. Saame

$$\frac{\Delta_{\Delta u} z}{\Delta u} = z_x x_u + z_y y_u + \frac{\delta}{\Delta u}.$$

Kasutades seoseid (1.5.2), (1.5.3) ja (1.5.4), leiame valiku $\Delta v = 0$ korral

$$\begin{aligned}\left|\frac{\delta}{\Delta u}\right| &\overset{\Delta v=0}{=} \left|\frac{z_x\alpha + z_y\beta + \gamma}{\Delta u}\right| \le \left|\frac{z_x\alpha}{\Delta u}\right| + \left|\frac{z_y\beta}{\Delta u}\right| + \left|\frac{\gamma}{\Delta u}\right| \le \\ &\le |z_x|\frac{|\alpha|}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}} + |z_y|\frac{|\beta|}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}} + \\ &+ \frac{|\gamma|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{|\Delta u|} \overset{\Delta u\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

sest

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{|\Delta u|} \overset{\Delta u\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{x_u^2+y_u^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{piirväärtust omav}\\ \text{suurus on tõkestatud}\\ \text{selles piirprotsessis}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{|\Delta u|} = O(1).$$

Seega

$$z_u = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_{\Delta u} z}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(z_x x_u + z_y y_u + \frac{\delta}{\Delta u}\right) = z_x x_u + z_y y_u.$$

Analoogiliselt saab näidata, et $z_v = z_x x_v + z_y y_v$. Oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 2. Kui funktsioonid $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ on diferentseeruvad punktis $P(u, v)$ ning funktsioon $z = z(x, y)$ on diferentseeruv punktis $(x(P), y(P))$, siis liitfunktsiooni $z = z\,(x(P), y(P)) = z(u, v)$ osatuletised avalduvad kujul

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u\,, \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v. \tag{1.5.6}$$

Tähistusega $z = z(x, y)$ rõhutame fakti, et me käsitleme suurust z kui muutujate x ja y funktsioooni. Analoogiliselt näitab tähistus $z = z(u, v)$, et suurus z on muutujate u ja v funktsioon. Lisaks on $z = z(x, y)$ eeskiri, mille järgi seatakse punktile $P\,(x, y)$ vastavusse arv z. Rõhutame, et vastavusse seadmise eeskirjad $z(x, y)$ ja $z(u, v)$ on erinevad.

Näide 2. Olgu $z = z(x, y)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Leiame seosed osatuletiste z_x, z_y ja z_φ, z_ρ vahel.

Rakendame Lauset 2, kusjuures muutuja u asemel kasutame muutujat φ ja muutuja v asemel muutujat ρ. Valemite (1.5.6) abil leiame, et

$$\begin{aligned} z_\varphi &= z_x x_\varphi + z_y y_\varphi = z_x\,(-\rho\sin\varphi) + z_y\,(\rho\cos\varphi) = x z_y - y z_x, \\ z_\rho &= z_x x_\rho + z_y y_\rho = z_x\cos\varphi + z_y\sin\varphi = \frac{1}{\rho}\,(x z_x + y z_y) \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{cases} x z_y - y z_x = z_\varphi \\ x z_x + y z_y = \rho z_\rho. \end{cases}$$

Viimastest seostest õnnestub avaldada z_x ja z_y :

$$\begin{cases} xy z_y - y^2 z_x = y z_\varphi \\ x^2 z_x + xy z_y = x\rho z_\rho \end{cases} \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right) z_x = x\rho z_\rho - y z_\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_x = z_\rho\cos\varphi - (z_\varphi/\rho)\sin\varphi,$$

$$\begin{cases} x^2 z_y - xy z_x = x z_\varphi \\ yx z_x + y^2 z_y = y\rho z_\rho \end{cases} \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right) z_y = x z_\varphi + y\rho z_\rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_y = z_\rho\sin\varphi + (z_\varphi/\rho)\cos\varphi. \qquad \diamondsuit$$

1.6 Ilmutamata funktsiooni osatuletised

Selles punktis uurime, kuidas leida tuletist või osatuletist ilmutamata funktsioonist. Tõestuskäigu lihtsuse huvides eeldame rohkem kui on antud väidete tõestamiseks vaja.

1° Alustame lihtsamast juhust, kui funktsioon $y = f(x)$ on antud võrrandiga

$$F\,(x, y) = 0. \tag{1.6.1}$$

ilmutamata kujul. Olgu punkt $P(x,y)$ funktsiooni $y = f(x)$ graafikul ja olgu funktsioon F diferentseeruv punktis P. Anname muutujale x sellise muudu Δx, et $x + \Delta x$ kuulub funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda. Saame leida muutuja x muudule Δx vastava muutuja y muudu $\Delta_{\Delta x} y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Sel korral

$$F\left(x + \Delta x, y + \Delta_{\Delta x} y\right) = 0. \tag{1.6.2}$$

Olgu argumentide (x, y) muuduvektorile $(\Delta x, \Delta_{\Delta x} y)$ vastav kahe muutuja funktsiooni $F\left(x, y\right)$ muut

$$\Delta F = F\left(x + \Delta x, y + \Delta_{\Delta x} y\right) - F\left(x, y\right).$$

Ühelt poolt on seoste (1.6.1) ja (1.6.2) põhjal $\Delta F = 0$. Teisalt eeldusel, et funktsioon F on diferentseeruv punktis $\left(x, y\right)$, leiame seose (1.4.2) põhjal

$$\Delta F = F_x\left(x, y\right)\Delta x + F_y\left(x, y\right)\Delta_{\Delta x} y + \gamma,$$

kusjuures suurus γ on kõrgemat järku lõpmata väike, võrreldes suurusega $\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta_{\Delta x} y\right)^2}$. Seega

$$F_x\left(x, y\right)\Delta x + F_y\left(x, y\right)\Delta_{\Delta x} y + \gamma = 0,$$

millest leiame, et

$$\frac{\Delta_{\Delta x} y}{\Delta x} = -\frac{F_x\left(x, y\right)}{F_y\left(x, y\right)} - \frac{\gamma}{\left(\Delta x\right) F_y\left(x, y\right)},$$

kusjuures

$$\left|\frac{\gamma}{\left(\Delta x\right) F_y\left(x, y\right)}\right| = \frac{|\gamma|}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta_{\Delta x} y\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta_{\Delta x} y\right)^2}}{|\Delta x|} \cdot \frac{1}{\left|F_y\left(x, y\right)\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|\gamma|}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta_{\Delta x} y\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_{\Delta x} y}{\Delta x}\right)^2}}{\left|F_y\left(x, y\right)\right|} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0.$$

Saame

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{\Delta x} y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{F_x\left(x, y\right)}{F_y\left(x, y\right)} - \frac{\gamma}{\left(\Delta x\right) F_y\left(x, y\right)}\right) = -\frac{F_x\left(x, y\right)}{F_y\left(x, y\right)}.$$

Vormistame tõestatud tulemuse.

Lause 1. Kui funktsioon $y = f(x)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga (1.6.1) ja $P(x, y)$ on selle võrrandiga esitatud joone punkt ja funktsioon F on diferentseeruv punktis P ja selles punktis $F_y \neq 0$, siis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x\left(x,\, y\right)}{F_y\left(x,\, y\right)} \tag{1.6.3}$$

ehk lühidalt $y' = -F_x/F_y$.

Uurige, millistel tingimustel

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y\,(x,\,y)}{F_x\,(x,\,y)}.$$

Näide 1. Olgu $y = f(x)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga $x^2+y^2-xy = 0$. Antud juhul $F\,(x, y) = x^2+y^2-xy$. Et funktsioonid $F_x = 2x-y$ ja $F_y = 2y-x$ on pidevad kõikjal, siis Järelduse 1.4.1 põhjal on $F(x, y)$ kõikjal diferentseeruv. Kuna $2y - x \neq 0 \Rightarrow F_y \neq 0$, siis Lause 1 abil saame

$$y' = -\frac{\left(x^2+y^2-xy\right)_x}{\left(x^2+y^2-xy\right)_y} = -\frac{2x-y}{2y-x} \quad (2y-x \neq 0)\,. \qquad \diamondsuit$$

Formaalselt (kontrollimata mingi piisava tingimuste komplekti täidetust) võime Näite 1 lahendada ka teisiti. Diferentseerime seose $x^2 + y^2 - xy = 0$ mõlemat poolt muutuja x järgi, vaadeldes muutujat y muutuja x funktsioonina $y = y(x)$. Saame

$$2x + 2yy' - y - xy' = 0 \;\Rightarrow\; y' = (y-2x)\,/\,(2y-x)\,.$$

2° Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$F\,(x, y, z) = 0. \tag{1.6.4}$$

Olgu $P(x, y, z)$ võrrandiga $z = f(x, y)$ esitatud pinna punkt ja funktsioon F diferentseeruv punktis P. Anname muutujale x muudu Δx. Kui $Q\,(x+\Delta x, y)$ kuulub funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkonda, siis saame leida argumendi x muudule Δx vastava funktsiooni z muudu

$$\Delta_{\Delta x} z = f\,(x+\Delta x, y) - f\,(x, y)\,.$$

Kehtib seos

$$F\,(x+\Delta x, y, z+\Delta_{\Delta x} z) = 0. \tag{1.6.5}$$

Olgu

$$\Delta F = F\,(x+\Delta x, y, z+\Delta_{\Delta x} z) - F\,(x, y, z)\,.$$

Seoste (1.6.4) ja (1.6.5) põhjal $\Delta F = 0$. Kui funktsioon F on diferentseeruv punktis (x, y, z), siis kehtib valemi (1.4.6) põhjal seos

$$\Delta F = F_x\,(x, y, z)\,\Delta x + F_y\,(x, y, z)\cdot 0 + F_z\,(x, y, z)\,\Delta_{\Delta x} z + \gamma,$$

kusjuures suurus γ on kõrgemat järku lõpmata väike, võrreldes suurusega $\sqrt{(\Delta x)^2 + 0^2 + (\Delta_{\Delta x} z)^2}$. Seega saame

$$F_x\,(x, y, z)\,\Delta x + F_z\,(x, y, z)\,\Delta_{\Delta x} z + \gamma = 0,$$

millest täiendaval eeldusel $F_z(x,y,z) \neq 0$ avaldame

$$\frac{\Delta_{\Delta x} z}{\Delta x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} - \frac{\gamma}{\Delta x}\frac{1}{F_z(x,y,z)}. \tag{1.6.6}$$

Et

$$\left|\frac{\gamma}{\Delta x}\right| = \frac{|\gamma|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta_{\Delta x} z)^2}} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta_{\Delta x} z)^2}}{|\Delta x|} =$$

$$= \frac{|\gamma|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta_{\Delta x} z)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_{\Delta x} z}{\Delta x}\right)^2} \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

siis seose (1.6.6) põhjal saame

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{\Delta x} z}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma}{\Delta x}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

Analoogiliselt tõestatakse, et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

Formuleerime saadud tulemuse.

Lause 2. Olgu funktsioon $z = f(x,y)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga (1.6.4). Olgu $P(x,y,z)$ selle võrrandiga esitatud pinna punkt. Kui funktsioon F on diferentseeruv punktis P ja selles punktis $F_z \neq 0$, siis

$$f_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad f_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \tag{1.6.7}$$

ehk lühidalt $z_x = -F_x/F_z$ ja $z_y = -F_y/F_z$.

Näide 2. Olgu $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 0$. Leiame z_x ja z_y.

Veenduge Lause 2 tingimuste täidetuses. Valemite (1.6.7) abil leiame soovitud osatuletised

$$z_x = -\frac{2x/4}{-2z} = \frac{x}{4z}, \; z_x = -\frac{2y/9}{-2z} = \frac{y}{9z}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Olgu $F(x,y,z) = 0$. Näitame, et $x_y \cdot y_x = 1$ ja $y_z \cdot z_x \cdot x_y = -1$.

Veenduge Lause 2 tingimuste täidetuses. Kirjapilt x_y eeldab selle ülesande korral vaikimisi, et $x = x(y,z)$. Kasutades valemi (1.6.7) modifikatsiooni vaadeldava juhu jaoks, leiame, et $x_y = -F_y/F_x$. Et kirjapilt y_x eeldab vaikimisi $y = y(x,z)$, siis jõuame tulemuseni $y_x = -F_x/F_y$. Seega saame

$$x_y \cdot y_x = (-F_y/F_x)(-F_x/F_y) = 1,$$

st esimene nõutud seostest on tõestatud. Kirjapildid y_z ja z_x eeldavad vastavalt sõltuvust $y = y(x, z)$ ja sõltuvust $z = z(x, y)$. Leiame, et $y_z = -F_z/F_y$ ja $z_x = -F_x/F_z$. Seega saame

$$y_z \cdot z_x \cdot x_y = (-F_z/F_y)(-F_x/F_z)(-F_y/F_x) = -1,$$

st ka teine seostest on tõestatud. $\diamondsuit$

1.7 Pinna puutujatasand ja normaal

Olgu pind Σ antud võrrandiga $z = f(x, y)$, kusjuures $f(x, y)$ on diferentseeruv funktsioon. Saab tõestada, et funktsiooni $f(x, y)$ diferentseeruvus punktis $T(x, y)$ on tarvilik ja piisav pinna Σ puutujatasandi olemasoluks punktis $P(x, y, f(x, y))$. Meie piirdume selle puutujatasandi võrrandi leidmisega. Valime sel pinnal veel punktid

$$Q\left(x + \Delta x, y,\ f(x + \Delta x, y)\right),\ R\left(x, y + \Delta y,\ f(x, y + \Delta y)\right).$$

Pinna Σ puutujatasandi punktis $P\left(x, y,\ f(x, y)\right)$ saame punkte P, Q ja R läbiva lõikajatasandi piirseisuna, punktide Q ja R piiramatul lähenemisel punktile P. Olgu $S\left(\xi, \eta, \varsigma\right)$ selle lõikajatasandi suvaline punkt. Punkt S on selle lõikajatasandi punkt parajasti siis, kui vektorid $\overrightarrow{PS} = \left(\xi - x, \eta - y, \varsigma -\ f(x, y)\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\Delta x; 0; f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\right)$, $\overrightarrow{PR} = \left(0; \Delta y; f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\right)$ on komplanaarsed, st nende vektorite segakorrutis on null. Seega leiame, et

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \varsigma -\ f(x, y) \\ \Delta x & 0 & \Delta_{\Delta x} z \\ 0 & \Delta y & \Delta_{\Delta y} z \end{vmatrix} = 0,$$

kus $\Delta_{\Delta x} z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ ja $\Delta_{\Delta y} z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Peale lihtsustamist saame võrrandiks

$$-\left(\Delta_{\Delta x} z\right)(\Delta y)(\xi - x) - \left(\Delta_{\Delta y} z\right)(\Delta x)(\eta - y) + (\Delta x)(\Delta y)\left(\varsigma -\ f(x, y)\right) = 0$$

ehk

$$\varsigma -\ f(x, y) = \frac{\Delta_{\Delta x} z}{\Delta x}(\xi - x) + \frac{\Delta_{\Delta y} z}{\Delta y}(\eta - y).$$

Võtame viimase seose mõlemast poolest piirväärtuse, valides piirprotsessiks $(\Delta x, \Delta y) \to (0; 0)$. Soovitud puutujatasandi võrrandiks on

$$\varsigma -\ f(x, y) = f_x(x, y)(\xi - x) + f_y(x, y)(\eta - y) \tag{1.7.1}$$

ehk

$$f_x(x, y)(\xi - x) + f_y(x, y)(\eta - y) - \left(\varsigma -\ f(x, y)\right) = 0.$$

Viimasest võrrandist on leitav võrrandiga $z = f(x, y)$ antud pinna normaalvektor punktis $P(x, y,\ f(x, y))$: $\mathbf{n} = \left(f_x(x, y), f_y(x, y), -1\right)$. Et vektor $\mathbf{n}$ on punktis P pinna *normaali (normaalsirge)* sihivektor, siis soovitud normaali võrranditeks on

$$\frac{\xi - x}{f_x(x,y)} = \frac{\eta - y}{f_y(x,y)} = \frac{\varsigma - f(x,y)}{-1}, \tag{1.7.2}$$

kusjuures $S(\xi, \eta, \varsigma)$ on selle normaalsirge suvaline punkt. Kui aga P on pinna fikseeritud punkt, näiteks $P(a,b,\ f(a,b))$, siis puudub vajadus kolmiku (ξ, η, ς) kasutamiseks. Sel korral anname punktis $P(a,b,\ f(a,b))$ pinnale $z = f(x,y)$ puutujatasandi ja normaali võrranditele vastavalt kuju

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \tag{1.7.3}$$

ja

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z - f(a,b)}{-1}. \tag{1.7.4}$$

Sõnastame viimased tulemused.

Lause 1. Kui pind Σ on antud võrrandiga $z = f(x,y)$ ja $f(x,y)$ on diferentseeruv punktis $A(a,b)$, siis (1.7.3) on pinnale punktis $P(a,b,\ f(a,b))$ puutujatasandi võrrandiks ja (1.7.4) normaali võrranditeks.

Näide 1. Olgu antud pöördparaboloid võrrandiga $z = x^2+y^2$. Leiame sellele pinnale punktis $P(-2;3;13)$ tõmmatud puutujatasandi ja normaali võrrandid.

Punkt P asub pöördparaboloidil. Leiame $f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = 2y,$ $f_x(-2,3) = -4$ ja $f_y(-2,3) = 6$. Et funktsioonid $2x$ ja $2y$ on pidevad punktis $A(-2;3)$, siis funktsioon $f(x,y)$ on Järelduse 1.4.1 põhjal diferentseeruv punktis A. Rakendame Lauset 1. Soovitud puutujatasandi võrrandiks on valemi (1.7.3) põhjal

$$z - 13 = -4(x+2) + 6(y-3)$$

ja normaalsirge võrranditeks (1.7.4) põhjal

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-13}{-1}. \qquad \diamondsuit$$

Kui pind Σ on antud ilmutamata võrrandiga $F(x,y,z) = 0$, kusjuures F on diferentseeruv funktsioon, ja $F_z(x,y,z) \neq 0$, siis Lause 1.6.2 põhjal $z_x = -F_x/F_z$ ning $z_y = -F_y/F_z$. Seega $(-F_x/F_z,\ -F_y/F_z,\ -1)$ on pinna Σ normaalvektor punktis $P(x,y,z)$. Ka $(F_x,\ F_y,\ F_z)$ on pinna normaalvektor punktis P. Miks? Seega on Lause 1 modifikatsiooniks ilmutamata funktsiooni korral järgmine väide.

Lause 2. Kui $A(a,b,c)$ on võrrandiga $F(x,y,z) = 0$ esitatud pinna punkt, st $F(a,b,c) = 0$, ja funktsiooni $F(x,y,z)$ esimest järku osatuletised on pidevad punktis A ning

$$F_x^2(a,b,c) + F_y^2(a,b,c) + F_z^2(a,b,c) \neq 0, \tag{1.7.5}$$

siis

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0 \tag{1.7.6}$$

on pinna puutujatasandi võrrand punktis A ja

$$\frac{x-a}{F_x(a,b,c)} = \frac{y-b}{F_y(a,b,c)} = \frac{z-c}{F_z(a,b,c)}. \tag{1.7.7}$$

normaali võrrandid punktis A.

Tõestus. Tingimuse (1.7.5) põhjal on funktsiooni F vähemalt ühe esimest järku osatuletise väärtus punktis $A(a,b,c)$ nullist erinev. Olgu $F_z(a,b,c) \neq 0$. Kui asendame võrrandis (1.7.3) suurused $f(a,b)$, $f_x(a,b)$ ja $f_y(a,b)$ vastavalt suurustega c, $-F_x(a,b,c)/F_z(a,b,c)$ ja $-F_y(a,b,c)/F_z(a,b,c)$, on tulemuseks

$$z-c = -\frac{F_x(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}(x-a) - \frac{F_y(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}(y-b),$$

millest pärast mõlema poole korrutamist suurusega $F_z(a,b,c)$ ja teisendamist saame võrrandi (1.7.6). Analoogiliselt saadakse valemist (1.7.4) valem (1.7.7). Kuidas tõestada Lauset 2 juhul $F_z(a,b,c) = 0 \wedge F_x(a,b,c) \neq 0$ või juhul $F_z(a,b,c) = 0 \wedge F_y(a,b,c) \neq 0$? $\square$

Näide 2. Näitame, et pinna $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ iga puutujatasand lõikab koordinaattelgedel lõigud, mille pikkuste summa on a.

Seega $F(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$. Veenduge, et on täidetud Lause 2 eeldused. Kasutame võrrandi (1.7.6) analoogi, võttes puutepunktiks $P(x,y,z)$ ja puutujatasandi suvaliseks punktiks $S(\xi,\eta,\varsigma)$:

$$F_x(x,y,z)(\xi-x) + F_y(x,y,z)(\eta-y) + F_z(x,y,z)(\varsigma-z) = 0. \tag{1.7.8}$$

Leiame osatuletised $F_x(x,y,z) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $F_y(x,y,z) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ja $F_z(x,y,z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ ja paigutame võrrandisse (1.7.8):

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(\xi-x) + \frac{1}{2\sqrt{y}}(\eta-y) + \frac{1}{2\sqrt{z}}(\varsigma-z) = 0.$$

Lõikepunktis z-teljega on $\xi=0$ ja $\eta=0$ ning neil tingimustel saame ς määrata viimasest võrrandist:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(0-x) + \frac{1}{2\sqrt{y}}(0-y) + \frac{1}{2\sqrt{z}}(\varsigma-z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varsigma = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{z}.$$

Seega on lõigu pikkuseks z-teljel $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{z}$. Analoogiliselt saame lõikude pikkusteks x-teljel ja y-teljel vastavalt $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{x}$ ja $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{y}$. Leiame nende pikkuste summa

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{y} + \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\sqrt{z} =$$

$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) = \sqrt{a}\sqrt{a} = a,$$

mida oligi vaja näidata. $\diamondsuit$

1.8 Taylori valem

Definitsioon 1. Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse *n korda diferentseeruvaks* punktis $P(x, y)$, kui selle funktsiooni kõik $(n-1)$-järku osatuletised on diferentseeruvad punktis P.

Uurime, kuidas leida $n+1$ korda diferentseeruva funktsiooni $f(x, y)$ väärtust punktis $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$, st suurust $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$, kui teame selle funktsiooni ja tema osatuletiste väärtusi punktis $P(x, y)$. Kui suurused x, y, Δx ja Δy on fikseeritud, siis abifunktsioon

$$g(t) = f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y)$$

on vaid muutuja t funktsioon, kusjuures $g(1) = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ja $g(0) = f(x, y)$. Funktsiooni $f(x, y)$ $n+1$ korda diferentseeruvusest punktis $P(x, y)$ järeldub funktsiooni $g(t)$ $n+1$ korda diferentseeruvus punktis 0, kusjuures valemi (1.5.1) abil saame

$$g'(t) = f_x(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y)\Delta x + f_y(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y)\Delta y,$$

$$g''(t) = f_{xx}(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y)\,(\Delta x)^2 + 2f_{xy}(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y)\Delta x\Delta y +$$

$$+ f_{yy}(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y)\,(\Delta y)^2, \quad \ldots \quad ,$$

$$g^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x+t\,\Delta x, y+t\,\Delta y) \quad (0 \le k \le n+1)$$

ja

$$g^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x, y) \quad (0 \le k \le n)\,.$$

Et funktsiooni $g(t)$ n-järku Maclaurini valem on kujul

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)\,, \tag{1.8.1}$$

siis

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = g(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)\,,$$

mille abil jõuame n-järku Taylori valemini

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x, y) + R_n(x, y) \tag{1.8.2}$$

kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ jaoks, kusjuures

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y) \;\; (0 < \theta < 1)\,. \tag{1.8.3}$$

Lause 1. Kui funktsioon $f(x,y)$ on $n+1$ korda diferentseeruv punktis $P(x,y)$, siis kehtib n-järku Taylori valem (1.8.2), mille jääkliige $R_n(x,y)$ avaldub kujul (1.8.3).

Erijuhul $n=1$ saame tulemuseks

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + R_1(x,y)\,, \qquad (1.8.4)$$

kus

$$\begin{gathered} R_1(x,y) = \frac{1}{2!}(f_{xx}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,(\Delta x)^2 + \\ +2f_{xy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,(\Delta y)^2). \end{gathered} \qquad (1.8.5)$$

Võrrelge valemeid (1.4.4) ja (1.8.4).

Näide 1. Näites 1.4.2 leidsime valemi (1.4.4) abil, et

$$\ln(\sqrt[3]{1.06} + \sqrt[4]{0.96} - 1) \approx 0.01.$$

Hindame viga.

Leiame abifunktsiooni $f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$ teist järku osatuletised

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\frac{1}{9\sqrt[3]{x^5}}\frac{3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{y} - 2}{\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= -\frac{1}{12\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)^2\sqrt[4]{y^3}}, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{16\sqrt[4]{y^7}}\frac{3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{y} - 3}{\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

Valemi (1.8.5) abil saame

$$\begin{gathered} R_1(1,1) = \frac{1}{2!}(-\frac{1}{9\sqrt[3]{(1+\,0.06\cdot\theta)^5}}\frac{3\sqrt[3]{1+\,0.06\cdot\theta} + 2\sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} - 2}{\left(\sqrt[3]{1+\,0.06\cdot\theta} + \sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} - 1\right)^2}0.06^2 + \\ -\frac{2\,(0.06)\,(-0.04)}{12\sqrt[3]{(1+\,0.06\cdot\theta)^2}\left(\sqrt[3]{1+\,0.06\cdot\theta} + \sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} - 1\right)^2\sqrt[4]{(1-0.04\cdot\theta)^3}} - \\ -\frac{1}{16\sqrt[4]{(1-0.04\cdot\theta)^7}}\frac{3\sqrt[3]{1+\,0.06\cdot\theta} + 4\sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} - 3}{\left(\sqrt[3]{1+\,0.06\cdot\theta} + \sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} - 1\right)^2}\,(-0.04)^2). \end{gathered}$$

Et $0<\theta<1$ korral

$$1 \le \sqrt[3]{1+0.06\cdot\theta} \le \sqrt[3]{1+0.06} \le 1.06$$

ja

$$0.96 \le \sqrt{0.96} \le \sqrt{1-0.04\cdot\theta} \le 1, \;\; 0.96 \le \sqrt[4]{0.96} \le \sqrt[4]{1-0.04\cdot\theta} \le 1,$$

siis

$$|R_1(1,1)| \leq \frac{(3\cdot 1.06+2-2)}{18\cdot 1\cdot\left(1+\sqrt[4]{0.96}-1\right)^2}(0.06)^2+$$
$$+\frac{0.06\cdot 0.04}{12\cdot 1\cdot\left(1+\sqrt[4]{0.96}-1\right)^2\sqrt[4]{0.96^3}}+\frac{3\cdot 1.06+4-3}{32\sqrt[4]{0.96^7}\left(1+\sqrt[4]{0.96}-1\right)^2}0.04^2 \leq$$
$$\leq \frac{3.18}{18\cdot\sqrt{0.96}}(0.06)^2+\frac{0.06\cdot 0.04}{12\cdot\sqrt{0.96}}+\frac{4.18}{32\cdot\sqrt[4]{0.96^9}}0.04^2 \leq 1.1\times 10^{-3}.$$

Leiame ka arvuti abil $\ln(\sqrt[3]{1.06}+\sqrt[4]{0.96}-1) = 9.4148\times 10^{-3}$. $\diamondsuit$

1.9 Lokaalne ekstreemum

Öeldakse, et mitme muutuja funktsioonil $f(P)$ on punktis A *lokaalne maksimum (lokaalne miinimum),* kui punkti A küllalt väikeses ümbruses on $f(P) \leq f(A)$ $(f(P) \geq f(A))$. Kui diferentseeruval mitme muutuja funktsioonil $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ on punktis $A(a_1, \ldots, a_n)$ *lokaalne ekstreemum* (lokaalne maksimum või *lokaalne miinimum*), siis ka ühe muutuja x_1 funktsioonil $f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ on kohal $x_1 = a_1$ lokaalne ekstreemum. Seega peab ühe muutuja funktsiooni ekstreemumi tarviliku tingimuse põhjal $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)$ punktis A võrduma nulliga. Analoogilise arutelu põhjal jõuame tingimusteni, et ka funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ ülejäänud esimest järku osatuletised peavad punktis A võrduma nulliga. Järelikult on diferentseeruva funktsiooni ekstreemumpunktis täidetud tingimused

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.9.1}$$

Definitsioon 1. Punkti, milles on täidetud tingimused (1.9.1), nimetatakse funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *statsionaarseks punktiks.* **Näide 1.** Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ statsionaarsed punktid. Koostame selle funktsiooni korral süsteemi (1.9.1). Et $z_x = 2x$ ja $z_y = 2y$, siis

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

ja antud funktsioonil on ainult üks statsionaarne punkt, $O(0;0)$. $\diamondsuit$

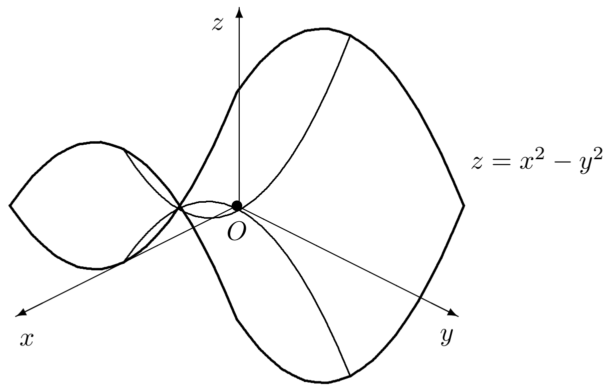
Näide 2. Leiame funktsiooni $z = x^2 - y^2$ statsionaarsed punktid.

Koostame selle funktsiooni korral süsteemi (1.9.1). Et $z_x = 2x$ ja $z_y = -2y$, siis

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

ja ka sel funktsioonil on ainult üks statsionaarne punkt ja nimelt $O(0;0)$.

Osutub, et funktsiooni iga statsionaarne punkt ei ole ekstreemumpunkt. Skitseerime funktsiooni $z = x^2 - y^2$ graafiku



Tegu on sadulpinnaga ja punkt $O\,(0;0)$ on selle sadulpunkt, milles funktsioon omandab muutuja x järgi lokaalse miinimumi ning muutuja y järgi lokaalse maksimumi. Järelikult punkt $(0;0)$ ei ole funktsiooni $z = x^2 - y^2$ ekstreemumpunkt. $\diamondsuit$

Leiame järgnevas piisavad tingimused selleks, et kaks korda pidevalt diferentseeruval funktsioonil $z = f(x,y)$ oleks lokaalne ekstreemum stasionaarses punktis $P\,(x,y)$. Seoste (1.8.4) ja (1.8.5) põhjal leiame, et

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + R_1\,(x,y) = \\ = \left[\begin{array}{c} f_x\,(x,y) = 0, \\ f_y\,(x,y) = 0 \end{array}\right] = f(x,y) + R_1,$$

kus

$$R_1 = \frac{1}{2!}(f_{xx}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,(\Delta x)^2 + \\ +2f_{xy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,(\Delta y)^2).$$

Uurime tähistuse $A = f_{xx}(x,y)$, $B = f_{xy}(x,y)$ ja $C = f_{yy}(x,y)$ korral suuruse

$$\alpha = A\,(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\,(\Delta y)^2$$

märki. Kui $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, siis teist järku osatuletiste f_{xx}, f_{xy} ja f_{yy} pidevuse korral punktis (x,y) on suurused R_1 ja α küllalt väikeste vektorite $(\Delta x, \Delta y)$ korral samamärgilised. Kui $A = 0$ ja $B \neq 0$, siis suurus α ei säilita vektori $(\Delta x, \Delta y)$ nullist erinevate väärtuste korral märki. Miks? Olgu $A \neq 0$. Sel juhul on suurusele α võimalik anda kuju

$$\alpha = A\left[(\Delta x)^2 + 2\Delta x\frac{B}{A}\Delta y + \left(\frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \frac{C}{A}\,(\Delta y)^2 - \left(\frac{B}{A}\Delta y\right)^2\right] = \\ = A\left[\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A^2}\,(\Delta y)^2\right].$$

Et $\left(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y\right)^2\geq 0$, siis selleks, et suurus α säilitaks vektori $(\Delta x,\Delta y)$ nullist erinevate väärtuste korral märki, peab $\frac{AC-B^2}{A^2}(\Delta y)^2$ olema mittenegatiivne. Seega $\frac{AC-B^2}{A^2}>0$, st $AC-B^2>0$. Tõesti, kui suurus $\frac{AC-B^2}{A^2}$ on negatiivne, siis $\left(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}(\Delta y)^2$ omandab vektori $(\Delta x,\Delta y)$ erinevate väärtuste korral nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi, st suurus α ei säilita märki. Kui $AC-B^2=0$, siis mõningate kui tahes väikeste vektorite $(\Delta x,\Delta y)$ korral on $\alpha=0$ ja meil ei ole võimalik määrata suuruse R_1 märki. Järelikult suudame suuruse α märki määrata juhul, kui $AC-B^2>0$.

Vormistame saadud tulemuse.

Lause 1. Kui funktsiooni $z=f(x,y)$ osatuletised f_{xx}, f_{xy} ja f_{yy} on pidevad selle funktsiooni statsionaarses punktis $S(a,b)$ ja $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$ ning $C=f_{yy}(a,b)$, siis

$$\begin{aligned}
&AC-B^2<0 \;\Rightarrow\; \text{punktis } (a,b) \text{ ei ole lokaalset ekstreemumit}\\
&AC-B^2>0 \,\wedge\, A>0 \Rightarrow \text{punktis } S(a,b) \text{ on lokaalne miinimum,}\\
&AC-B^2>0 \,\wedge\, A<0 \Rightarrow \text{punktis } S(a,b) \text{ on lokaalne maksimum.}
\end{aligned}$$

Näites 1 on punkt $O(0;0)$ statsionaarne. Leiame, et $f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$ ja $f_{yy}=2$. Seega $A=2$, $B=0$ ja $C=2$ ning $AC-B^2=4$. Lause 1 põhjal on funktsioonil $z=x^2+y^2$ punktis $O(0;0)$ lokaalne ekstreemum. Et $A>0$, siis on tegemist lokaalse miinimumiga.

Näites 2 on punkt $O(0;0)$ statsionaarne. Leiame, et $f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$ ja $f_{yy}=-2$. Seega $A=2$, $B=0$ ja $C=-2$ ning $AC-B^2=-4$. Lause 1 põhjal ei ole funktsioonil $z=x^2+y^2$ punktis $O(0;0)$ lokaalset ekstreemumi.

1.10 Tinglik ekstreemum

Käsitleme järgnevalt *tinglikku ekstreemumülesannet*, nn *lisatingimustega ekstreemumülesannet.* Probleemiks on leida funktsiooni

$$u=f(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.10.1}$$

ekstreemumpunktid piirkonnas, mis on määratud tingimustega

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_m(x_1,\ldots,x_n)=0,\end{array}\right. \tag{1.10.2}$$

kusjuures $m<n$. Edaspidi piirdutakse tingliku ekstreemumi tarvilike tingimuste esitamisega juhul, kui funktsioonid f ja F_i $(1\leq i\leq m)$ on vaadeldavas piirkonnas diferentseeruvad. Tingliku ekstreemumi piisavate tingimuste uurimine on

keerukam probleem ja sellega me järgnevas üldjuhul ei tegele. Vastuse küsimusele, kas leitud punktis on tegemist tingliku ekstreemumiga või mitte, saame sageli anda lähtudes ülesande sisust. Kui vaadeldavas piirkonnas on punkte, milles funktsioonid f ja F_i $(1 \le i \le m)$ on mittediferentseeruvad, siis tuleb neis punktides esitatud probleemi täiendavalt uurida.

Alustame lihtsamate erijuhtude 1° ja 2° käsitlusega.

1° Uurime funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstremaalseid väärtusi joone

$$F(x, y) = 0 \tag{1.10.3}$$

punktides. Lause 1.6.1 tingimustel on võrrandist $F(x, y) = 0$ avaldatava funktsiooni $y = y(x)$ korral

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}. \tag{1.10.4}$$

Joone (1.10.3) punktides saame ühe muutuja funktsiooni

$$z|_{y=y(x)} = f(x, y(x)),$$

mille lokaalse ekstreemumi tarvilikuks tingimuseks on

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = 0. \tag{1.10.5}$$

Seostest (1.10.4) ja (1.10.5) õnnestub elimineerida suurus $y'(x)$. Saame tulemuseks

$$f_x(x, y(x)) - f_y(x, y(x))\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))} = 0$$

ehk

$$\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} = \frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}. \tag{1.10.6}$$

Lisatingimusel (1.10.3) funktsiooni $z = f(x, y)$ võimalike tinglike ekstreemumkohtade, st funktsiooni $z|_{y=y(x)}$ statsionaarsete punktide leidmiseks tuleb seega lahendada võrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} = \dfrac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))} \\ F(x, y) = 0. \end{array} \right. \tag{1.10.7}$$

Süsteemini (1.10.7) võib jõuda ka abifunktsiooni

$$\Phi(x, y, \lambda) \overset{\text{def.}}{=} f(x, y) + \lambda F(x, y), \tag{1.10.8}$$

kus λ on abimuutuja, statsionaarsete punktide leidmisel. Nimelt,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi_\lambda = 0 \end{array} \right. , \tag{1.10.9}$$

st

$$\left\{\begin{array}{r} f_x(x,y)+\lambda F_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda F_y(x,y)=0 \\ F(x,y)=0 \end{array}\right. . \tag{1.10.10}$$

Elimineerides süsteemi (1.10.10) kahe esimese võrrandi abil abimuutuja λ ja lisades süsteemi kolmanda võrrandi, jõuame süsteemini (1.10.7).

Lause 1. Funktsiooni $z=f(x,y)$ tinglik ekstreemum lisatingimusel (1.10.3) võib olla abifunktsiooni (1.10.8) statsionaarses punktis.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z=xy$ tingliku ekstreemumi lisatingimusel $x-y-1=0$.

Moodustame abifunktsiooni $\Phi = xy+\lambda\,(x-y-1)$ korral süsteemi (1.10.9):

$$\left\{\begin{array}{r} y+\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \lambda=-y \\ \lambda=x \\ x-y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} y=-x \\ x-y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x=1/2 \\ y=-1/2 \end{array}\right.$$

Leidsime abifunktsiooni Φ statsionaarse punkti $P\,(1/2,-1/2)\,,$ kusjuures $z|_P=-1/4$. Osutub, et

$$\nexists \max_{x-y-1=0} z, \quad \sup_{x-y-1=0} z=+\infty,$$
$$\min_{x-y-1=0} z = z|_P = -1/4.$$

Tõesti, tasandi $x-y-1=0$ ja sadulpinna $z=xy$ lõikejooneks on parabool, mis avaneb z-telje positiivses suunas. Kui lisatingimusest $x-y-1=0$ avaldame muutuja y, leiame $y=x-1$. Asendades selle avaldise funktsiooni z avaldisse, saame

$$z|_{y=x-1} = x\,(x-1) = x^2-x$$

ja

$$\frac{dz|_{y=x-1}}{dx} = 2x-1.$$

Funktsiooni $z|_{y=x-1}$ statsionaarses punktis $x=1/2$ on lokaalne (ka globaalne) miinimum. Kontrollige! Funktsiooni $z|_{y=x-1}$ väärtused on ülalt tõkestamata. $\diamondsuit$

Näide 2. Leiame funktsiooni $z=x^2+y^2$ tingliku ekstreemumi lisatingimusel $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1=0$. Moodustame abifunktsiooni $\Phi=x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1\right)$ korral süsteemi (1.10.9):

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+\dfrac{\lambda x}{2}=0 \\ 2y+\dfrac{2\lambda y}{9}=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x\left(2+\dfrac{\lambda}{2}\right)=0 \\ y\left(2+\dfrac{2\lambda}{9}\right)=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1. \end{array}\right.$$

Lahendame viimase süsteemi. Kuna $\lambda = -9 \Rightarrow x = 0 \wedge y = \pm 3$, siis saame kaks punkti $P_1\,(0;-3)$ ning $P_2\,(0;3)$. Et $y = 0 \Rightarrow \lambda = -4$, $x = \pm 2$, siis saame veel kaks punkti $P_3\,(-2;0)$ ja $P_4\,(2;0)$. Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ väärtused neis punktides:

$$z|_{P_1} = 9,\ z|_{P_2} = 9,\ z|_{P_3} = 4,\ z|_{P_4} = 4.$$

Ellipsi $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$ punktide hulk on kinnine tõkestatud hulk. Sellisel hulgal omandab pidev funktsioon ekstremaalsed väärtused. Seega,

$$\exists \max_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0} z \quad \wedge \quad \exists \min_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0} z.$$

Et võetud osatuletised on pidevad vaadeldavas piirkonnas, siis ekstremaalsed väärtused saavutatakse statsionaarsetes punktides. Statsionaarseid punkte on neli, kusjuures punktides P_1 ja P_2 saavutatakse väärtus 9 ning punktides P_3 ja P_4 väärtus 4. Seega,

$$\begin{aligned} \max_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0} z &= z|_{P_1} = z|_{P_2} = 9, \\ \min_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0} z &= z|_{P_3} = z|_{P_4} = 4. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

2° Uurime funktsiooni $u = f(x,y,z)$ ekstremaalseid väärtusi pinna

$$F(x,y,z) = 0 \tag{1.10.11}$$

punktides. Lause 1.6.2 tingimustel on võrrandist $F(x,y,z) = 0$ avaldatav $z = z(x,y)$, kusjuures

$$\begin{aligned} z_x(x,y) &= -F_x(x,y,z(x,y))/F_z(x,y,z(x,y)), \\ z_y(x,y) &= -F_y(x,y,z(x,y))/F_z(x,y,z(x,y)). \end{aligned} \tag{1.10.12}$$

Pinna (1.10.11) punktides saame kahe muutuja funktsiooni

$$u|_{z=z(x,y)} = f(x,y,z(x,y)),$$

mille statsionaarsed punktid leitakse süsteemist

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y,z(x,y)) + f_z(x,y,z(x,y))z_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y,z(x,y)) + f_z(x,y,z(x,y))z_y(x,y) = 0 \end{array} \right. . \tag{1.10.13}$$

Seoste (1.10.12) abil elimineerime süsteemist (1.10.13) suurused $z_x(x,y)$ ja $z_y(x,y)$. Tulemuseks on süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y,z(x,y)) - f_z(x,y,z(x,y))\dfrac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} = 0 \\ f_y(x,y,z(x,y)) - f_z(x,y,z(x,y))\dfrac{F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} = 0 \end{array} \right.$$

ehk

$$\begin{cases} \dfrac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = \dfrac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} \\ \dfrac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = \dfrac{F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} \end{cases}.$$

Lisatingimusel (1.10.11) funktsiooni $u = f(x, y, z)$ võimalike tinglike ekstreemumkohtade, st funktsiooni $u|_{z=z(x,y)}$ statsionaarsete punktide leidmiseks tuleb seega lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = \dfrac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\ \dfrac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = \dfrac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}. \tag{1.10.14}$$

Süsteemini (1.10.14) võib jõuda ka abifunktsiooni

$$\Phi(x,y,z,\lambda) \overset{\text{def.}}{=} f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z), \tag{1.10.15}$$

kus λ on abimuutuja, statsionaarsete punktide leidmisel. Leiame, et

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi_z = 0 \\ \Phi_\lambda = 0 \end{cases}, \tag{1.10.16}$$

st

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) + \lambda F_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda F_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda F_z(x,y,z) = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}. \tag{1.10.17}$$

Elimineerides süsteemi (1.10.17) kahest esimesest võrrandist abimuutuja λ ja siis selle süsteemi teisest ning kolmandast võrrandist λ ning lisades võrrandi (1.10.11), jõuame süsteemini (1.10.14). Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 2. Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ tinglik ekstreemum lisatingimusel (1.10.11) võib olla abifunktsiooni (1.10.15) statsionaarses punktis.

Näide 3. Leiame funktsiooni $u = x^2+y^2+z^2$ tingliku ekstreemumi lisatingimusel $x-y+z+2 = 0$. Kasutame Lauset 2. Lahendame abifunktsiooni $\Phi = x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y+z+2)$ korral süsteemi (1.10.16):

$$\begin{cases} 2x+\lambda = 0 \\ 2y-\lambda = 0 \\ 2z+\lambda = 0 \\ x-y+z+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda/2 \\ y = \lambda/2 \\ z = -\lambda/2 \\ x-y+z+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda/2 - \lambda/2 - \lambda/2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4/3$$

ja $x = -2/3$, $y = 2/3$ ning $z = -2/3$. Leiame punkti $P(-2/3; 2/3; -2/3)$, milles funktsiooni väärtuseks on $4/3$. Uuritav funktsioon saavutab antud tasandi punktides kui tahes suuri väärtusi. Järelikult,

$$\nexists \max_{x-y+z+2=0} \left(x^2+y^2+z^2\right) \quad \wedge \sup_{x-y+z+2=0} \left(x^2+y^2+z^2\right) = +\infty.$$

Et igas punktis on selle pideva funktsiooni väärtused mittenegatiivsed, siis selle funktsiooni korral leidub tasandil $x - y + z + 2 = 0$ punkt, milles funktsioon saavutab minimaalse väärtuse. Kasutatavad osatuletised on meid huvitavas piirkonnas pidevad. See minimaalne väärtus saavutatakse statsionaarses punktis. Et statsionaarseid punkte on vaid üks, siis saavutatakse tinglik miinimum punktis P :

$$\min_{x-y+z+2=0} \left(x^2+y^2+z^2\right) = u|_P = 4/3. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame funktsiooni $u = x^2+y^2-z^2$ tingliku ekstreemumi lisatingimusel $x - y + z + 2 = 0$.

Kasutame Lauset 2. Lahendame abifunktsiooni

$$\Phi = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda\,(x - y + z + 2)$$

korral süsteemi (1.10.16):

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ -2z + \lambda = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda/2 \\ y = \lambda/2 \\ z = \lambda/2 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda/2 - \lambda/2 + \lambda/2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

ja $x = -2$, $y = 2$ ning $z = 2$. Leidsime punkti $P(-2; 2; 2)$, milles funktsiooni väärtuseks on 4. Osutub, et uuritav funktsioon ei saavuta selles punktis ekstremaalset väärtust. Kui tasandi $x - y + z + 2 = 0$ punkt läheneb lõpmatusele nii, et $x = y$, siis funktsiooni väärtused lähenevad pluss lõpmatusele. Kui aga tasandi punkt läheneb lõpmatusele nii, et $x = -y$, siis funktsiooni väärtused lähenevad miinus lõpmatusele. Antud ülesande korral ekstremaalsed väärtused puuduvad. Seega

$$\nexists \max_{x-y+z+2=0} u \quad \wedge \nexists \min_{x-y+z+2=0} u \quad \wedge \sup_{x-y+z+2=0} u = +\infty \quad \wedge \inf_{x-y+z+2=0} = -\infty.$$

Antud tulemuseni võib jõuda ka teisel teel. Uurime kahe muutuja funktsiooni

$$u|_{z=-x+y-2} = x^2 + y^2 - (-x + y - 2)^2 = 2xy - 4x + 4y - 4$$

ekstremaalseid väärtusi. Et

$$\frac{\partial u|_{z=-x+y-2}}{\partial x} = 2y - 4, \ \frac{\partial u|_{z=-x+y-2}}{\partial y} = 2x + 4,$$

siis funktsiooni $u|_{z=-x+y-2}$ ainsa statsionaarse punkti määrame süsteemist

$$\left\{\begin{array}{c} 2y-4=0 \\ 2x+4=0 \end{array}\right. .$$

Leiame, et selleks punktiks on $P(-2;2)$. Rakendame Lauset 1.9.1. Et

$$\frac{\partial^2 u|_{z=-x+y-2}}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 u|_{z=-x+y-2}}{\partial x \partial y}=2,\ \frac{\partial u|_{z=-x+y-2}}{\partial y}=0,$$

siis $A=C=0$ ja $B=2$ ning $AC-B^2=-4<0$, st punktis P ei ole funktsioonil $u|_{z=-x+y-2}$ lokaalset ekstreemumit. Märgime, et kuigi funktsioonil $u|_{z=-x+y-2}$ puuduvad ekstremaalsed väärtused, eksisteerivad

$$\inf\ u|_{z=-x+y-2}=-\infty,\ \sup\ u|_{z=-x+y-2}=+\infty. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Konstrueerime poolkerasse, mille raadius on R, maksimaalse ruumalaga risttahuka. Olgu tegemist kera $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ülemise poolega $(z \geq 0)$. Valime xy-tasandil risttahuka põhja tippudega $(x,y,0)$, $(-x,y,0)$, $(x,-y,0)$ ja $(-x,-y,0)$. Ristahuka ülemised tipud (x,y,z), $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$ ja $(-x,-y,z)$ valime sfääril $x^2+y^2+z^2=R^2$, st ülemiste tippude koordinaadid rahuldavad selle sfääri võrrandit. Seega lahendame tingliku ekstreemumi ülesande: leiame funktsiooni $V=(2x)(2y)z$ tingliku ekstreemumi lisatingimusel $x^2+y^2+z^2=R^2$. Moodustame abifunktsiooni (1.10.15) korral süsteemi (1.10.16) ja lahendame selle. Seega leiame, et

$$\Phi=4xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right),$$

ja

$$\left\{\begin{array}{c} 4yz+2\lambda x=0 \\ 4xz+2\lambda y=0 \\ 4xy+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda=-2yz/x \\ +\lambda=-2xz/y \\ \lambda=2xy/z \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{2yz}{x}=\dfrac{2xz}{y} \\ \dfrac{2xz}{y}=\dfrac{2xy}{z} \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x)(y+x)z=0 \\ (z-y)(z+y)x=0 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=y=z \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{array}\right. \Rightarrow x=y=z=\frac{R\sqrt{3}}{3}$$

ning $V=\dfrac{4R^3\sqrt{3}}{9}$. $\diamondsuit$

Sõnastame tulemuse punkti alguses esitatud tingliku ekstreemumülesande korral.

Lause 3. Funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ tinglik ekstreemum lisatingimustel (1.10.2) võib olla abifunktsiooni

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1.10.18)$$

statsionaarses punktis. Statsionaarsete punktide leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \Phi_{x_i} = 0 & (1 \le i \le n) \\ \Phi_{\lambda_k} = 0 & (1 \le k \le m) \end{cases}. \qquad (1.10.19)$$

Näide 6. Leiame funktsiooni $u = x^2+y^2+z^2$ tingliku ekstreemumi lisatingimustel $x-y+z+2 = 0$ ja $x+y = 1$. Kasutame Lauset 3. Lahendame abifunktsiooni (1.10.18) korral võrrandisüsteemi (1.10.19). Leiame, et

$$\Phi\left(x, y, z, \lambda, \mu\right) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x - y + z + 2\right) + \mu\left(x + y - 1\right)$$

ja

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi_z = 0 \\ \Phi_\lambda = 0 \\ \Phi_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda + \mu = 0 \\ 2y - \lambda + \mu = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/6 \\ y = 7/6 \\ z = -2/3 \\ \lambda = 4/3 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

ning tinglik ekstreemum võib olla punktis $P\left(-\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. Kas on ekstreemuum ja milline? Et võrranditega $x - y + z + 2 = 0$ ja $x + y = 1$ määratud tasandid ei ole paralleelsed, siis nad lõikuvad piki sirget. Kui aga selle sirge punkt läheneb lõpmatusele, siis uuritava funktsiooni $u = x^2 + y^2 + z^2$ väärtused lähenevad pluss lõpmatusele. Seega ei eksisteeri antud ülesande korral funktsiooni tinglikku maksimumi, küll aga eksisteerib tinglik miinimum. Miks? Et kasutatavad osatuletised on pidevad meid huvitavas piirkonnas ja statsionaarseid punkte on vaid üks, siis selles punktis saavutab uuritav funktsioon tingliku miinimumi. Seega leiame, et

$$\min_{x-y+z+2=0,\, x+y=1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = u|_P = \frac{3}{2},$$
$$\sup_{x-y+z+2=0,\, x+y=1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = +\infty.$$

Kui esitatud arutelu tehnilise poole pealt kirja panna, siis punkt $(0; 1; -1)$ on tasandite lõikesirge üks punkt ja sirge sihivektoriks on $\mathbf{s} = (-1; 1; 2)$. Võrrandid

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

on selle lõikesirge parameetrilised võrrandid. Uurime ühe muutuja funktsiooni

$$u(t) = u|_{\substack{x=-t \\ y=1+t \\ z=-1+2t}} = (-t)^2 + (1+t)^2 + (-1+2t)^2 = 6t^2 - 2t + 2$$

käitumist. Et $\dfrac{du}{dt} = 12t - 2$ ja $12t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{6}$ ning $\dfrac{d^2u}{dt^2} = 12 > 0$, siis kohal $t = \dfrac{1}{6}$ on funktsioonil lokaalne miinimum. Seega saame tulemuseks, et

$$\min_{x-y+z+2=0,\ x+y=1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = u|_P = \frac{3}{2},$$
$$\sup_{x-y+z+2=0,\ x+y=1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = +\infty. \qquad \diamondsuit$$

1.11 Globaalne ekstreemum

Uurime diferentseeruva funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ ekstremaalseid väärtusi kinnisel sidusal tõkestatud hulgal Ω. Tähistame sümboliga $\partial\,\Omega$ selle hulga raja. Funktsiooni f diferentseeruvusest hulgal Ω järeldub selle funktsiooni pidevus sel hulgal. Et kinnisel sidusal tõkestatud hulgal pidev funktsioon omandab sel hulgal vähima ja suurima väärtuse, siis

$$\exists \max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega} f(x_1, \ldots, x_n) \quad \wedge\ \exists \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Kinnisel sidusal tõkestatud hulgal Ω diferentseeruv funktsioon saab ekstremaalse väärtuse omandada kas hulka Ω kuuluvas funktsiooni f statsionaarses punktis või hulga Ω rajapunktis. Seega tuleb

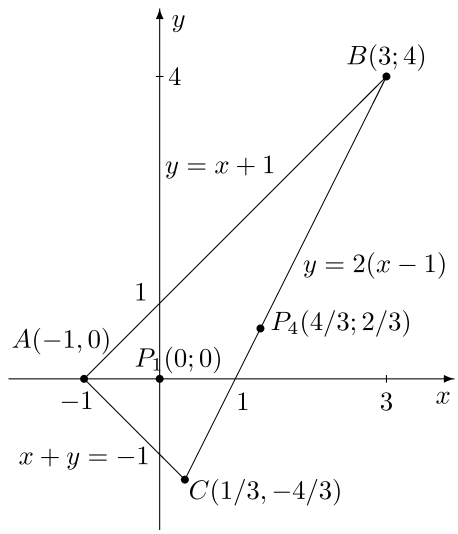
1) leida kõik hulka Ω kuuluvad funktsiooni f statsionaarsed punktid P_i $(1 \le i \le k)$ ja arvutada neis funktsiooni väärtused $f(P_i)$ $(1 \le i \le k)$;

2) leida raja $\partial\,\Omega$ punktid P_i $(k + 1 \le i \le m)$, milles funktsioon f võib omandada ekstremaalse väärtuse, ja arvutada neis funktsiooni väärtused $f(P_i)$ $(k + 1 \le i \le m)$;

3) leida $\min\limits_{1\le i\le m} f(P_i)$ ja $\max\limits_{1\le i\le m} f(P_i)$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^2 - y^2$ ekstremaalsed väärtused sirgetega

$y = x + 1$, $y = 2(x-1)$ ja $x + y = -1$ määratud kolmnurgas



Leiame kolmnurga tipud: $A(-1;0)$, $B(3;4)$, ja $C\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$. Statsionaarse punkti leiame süsteemist:

$$\left\{\begin{array}{l} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow P_1(0;0).$$

Statsionaarne punkt P_1 kuulub kolmnurka ABC. Leiame, et $z|_{P_1} = 0$. Kolmnurga ABC raja jaotame kolmeks osaks: lõigud AB, BC ja CA. Igal neist lõikudest uurime funktsiooni käitumist eraldi. Esiteks valime lõigu AB. Selleks tuleb uurida funktsiooni $z|_{y=x+1} = x^2 - (x+1)^2 = -2x - 1$ ekstremaalseid väärtusi lõigul $[-1;3]$. Lõigul diferentseeruv ühe muutuja funktsioon omandab ekstremaalsed väärtused kas sellesse lõiku kuuluvas statsionaarses punktis või lõigu otspunktides. Et

$$\frac{dz|_{y=x+1}}{dx} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{statsionaarseid punkte ei ole,}$$

siis tuleb leida funktsiooni $z|_{y=x+1}$ väärtused lõigu $[-1;3]$ otspunktides, st funktsiooni z väärtused punktides $P_2(-1;0) = A$ ja $P_3(3;4) = B$: $z|_{P_2} = 1$ ja $z|_{P_3} = -7$. Analoogiliselt leiame lõigu BC korral, et

$$z|_{y=2(x-1)} = x^2 - (2x-2)^2 = -3x^2 + 8x - 4$$

ja

$$\frac{dz|_{y=2(x-1)}}{dx} = -6x + 8 \ \wedge\ -6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \in \left[\frac{1}{3};3\right],$$

$$P_4\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right),\ z|_{P_4} = \frac{4}{3},\ P_5\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right),\ z|_{P_5} = -\frac{5}{3}.$$

Lõigu AC korral leiame, et $z|_{y=-1-x} = -1-2x$ ja $\dfrac{dz|_{y=-1-x}}{dx} = -2 \neq 0$, st statsionaarseid punkte ei ole ning lõigu mõlemad otspunktid on juba käsitletud. Tulemuseks saame, et

$$\min_{1\le i\le 5} z|_{P_i} = z|_{P_3} = -7,\ \max_{1\le i\le 5} z|_{P_i} = z|_{P_4} = \frac{4}{3}.$$

Seega on kolmnurgas ABC funktsiooni $z = x^2 - y^2$ vähim väärtus -7 ja suurim väärtus $4/3$ ning funktsioon omandab need vastavalt punktides $P_3\,(3;4)$ ja $P_4\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$. $\diamondsuit$

1.12 Väljateooria põhimõisted

Olgu $u = f(x,y,z)$ ja $\mathbf{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$. Öeldakse, et funktsioon f määrab *skalaarvälja* ja vektorväärtustega funktsioon $\mathbf{F}$ *vektorvälja*, st f seab igale punktile $P\,(x,y,z)$ funktsiooni f määramispiirkonnast vastavusse skalaari ja $\mathbf{F}$ seab igale punktile $P\,(x,y,z)$ funktsioonide X, Y ning Z määramispiirkondade ühisosast vastavusse vektori. Skalaarvälja näiteks sobib temperatuuriväli ja vektorvälja näiteks kiiruste väli.

Definitsioon 1. Vektorit $(f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z))$ nimetatakse skalaarvälja f *gradiendiks* punktis $P(x,y,z)$ ja tähistatakse $\operatorname{grad} f$, st

$$(\operatorname{grad} f)\,(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)) \tag{1.12.1}$$

ehk lühidalt $\operatorname{grad} f = (f_x,\ f_y,\ f_z)$.

Näide 1. Olgu $u = \cos\dfrac{z}{xy}$. Leiame $\operatorname{grad} u$.

Vastavalt Definitsioonile 1 saame

$$\operatorname{grad} u = (u_x,\ u_y,\ u_z) = \left(\frac{z}{x^2y}\sin\frac{z}{xy}, \frac{z}{xy^2}\sin\frac{z}{xy}, -\frac{1}{xy}\sin\frac{z}{xy}\right). \quad \diamondsuit$$

Definitsioon 2. Skalaari $X_x(x,y,z) + Y_y(x,y,z) + Z_z(x,y,z)$ nimetatakse vektorvälja $\mathbf{F}$ *divergentsiks* punktis $P(x,y,z)$ ja tähistatakse $\operatorname{div}\mathbf{F}$, st

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})\,(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} X_x(x,y,z) + Y_y(x,y,z) + Z_z(x,y,z) \tag{1.12.2}$$

ehk lühidalt $\operatorname{div}\mathbf{F} = X_x + Y_y + Z_z$.

Näide 2. Kui $\mathbf{F} = \left(xy, -x^2 + z^3, \dfrac{xy}{z}\right)$, siis

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = y + 0 - \frac{xy}{z^2} = y - \frac{xy}{z^2}. \quad \diamondsuit$$

Definitsioon 3. Vektorit

$$(Z_y(x,y,z)-Y_z(x,y,z), X_z(x,y,z)-Z_x(x,y,z), Y_x(x,y,z)-X_y(x,y,z))$$

nimetatakse vektorvälja $\mathbf{F}$ *rootoriks* punktis $P(x,y,z)$ ja tähistatakse $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, st

$$(\operatorname{rot}\mathbf{F})(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \tag{1.12.3}$$

$$= (Z_y(x,y,z)-Y_z(x,y,z), X_z(x,y,z)-Z_x(x,y,z), Y_x(x,y,z)-X_y(x,y,z))$$

ehk lühidalt $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y)$.

Näide 3. Kui $\mathbf{F} = \left(xy, -x^2+z^3, \frac{xy}{z}\right)$, siis

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{x}{z} - 3z^2, 0 - \frac{y}{z}, -2x - x\right) = \left(\frac{x}{z} - 3z^2, -\frac{y}{z}, -3x\right).$$

Definitsioon 4. *Hamiltoni operaatoriks* ehk *nablaoperaatoriks* nimetatakse operaatorit $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ja tähistatakse sümboliga ∇, st

$$\nabla \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{1.12.4}$$

Lause 1. Hamiltoni operaator võimaldab gradienti, divergentsi ja rootorit kirja panna kujul

$$\operatorname{grad} f = \nabla f,\ \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}. \tag{1.12.5}$$

Tõestus. Suurust ∇f käsitleme kui vektorit, milles ∇ iga koordinaati on funktsiooniga f läbi korrutatud, ja sümbolite $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ja $\frac{\partial}{\partial z}$ korrutised funktsiooniga f olgu vastavalt $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f}{\partial z}$. Suurust $\nabla\mathbf{F}$ vaatleme kui vektorite ∇ ja $\mathbf{F}$ skalaarkorrutist. Kui vektorid on antud koordinaatkujul, siis vektorite skalaarkorrutis on vastavate koordinaatide korrutiste summa,

$$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(X,Y,Z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Olgu **i, j** ja **k** vastavalt x-telje, y-telje ja z-telje suunalised ühikvektorid. Et

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= (Z_y(x,y,z) - Y_z(x,y,z))\,\mathbf{i} + (X_z(x,y,z) - Z_x(x,y,z))\,\mathbf{j} +$$

$$+\left(Y_x(x,y,z)-X_y(x,y,z)\right)\mathbf{k}=$$
$$=\left(Z_y(x,y,z)-Y_z(x,y,z), X_z(x,y,z)-Z_x(x,y,z), Y_x(x,y,z)-X_y(x,y,z)\right),$$

siis $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}$. $\square$

Definitsioon 5. *Laplace'i operaatoriks* nimetatakse operaatorit ∇^2 ja tähistatakse sümboliga $\triangle$, st

$$\triangle \overset{\text{def.}}{=} \nabla^2.$$

Seega

$$\triangle=\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Lause 2. Kehtib seos

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\, f=\triangle\mathbf{f}.$$

Tõestus. Leiame, et

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f\ =\operatorname{div}\ (f_x,\ f_y,\ f_z)=f_{xx}+\ f_{yy}+\ f_{zz}. \qquad \square$$

Lause 3. Kui kasutada tähistust $v=g\,(x,y,z)$, $\varphi=\varphi(t)$ ja $\mathbf{G}=\left(U(x;y;z),V(x;y;z),W(x;y;z)\right)$, siis

- $\operatorname{grad}(u\cdot v)=u\cdot\operatorname{grad}v+v\cdot\operatorname{grad}u$,
- $\operatorname{grad}(\varphi(u))=\varphi'(u)\cdot\operatorname{grad}u$,
- $\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\,\nabla^2u+2\nabla u\nabla v$,
- $\operatorname{div}(u\mathbf{F})=u\operatorname{div}\mathbf{F}+\mathbf{F}\operatorname{grad}u$,
- $\operatorname{rot}\,(u\mathbf{F})=u\operatorname{rot}\mathbf{F}+(\operatorname{grad}u)\times\mathbf{F}$,
- $\operatorname{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{G}-\mathbf{F}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{G})$.

Tõestus. Tõestame esimese ja viienda neist seostest. Palun tõestage ülejäänud seosed iseseisvalt. Et

$$\operatorname{grad}(u\cdot v)=\Big((uv)_x,(uv)_y,(uv)_z\Big)=$$
$$=(u_xv+uv_x,u_yv+uv_y,u_zv+uv_z)=$$
$$=u\,(v_x,v_y,v_z)+v\,(u_x,u_y,u_z)=$$
$$=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u,$$

esimene seos peab paika. Leiame viienda seose vasaku poole

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{F}) = \nabla\times(u\mathbf{F}) = \nabla\times(uX, uY, uZ) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uX & uY & uZ \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \left((uZ)_y - (uY)_z\right)\mathbf{i} - ((uZ)_x - (uX)_z)\,\mathbf{j} + \left((uY)_x - (uX)_y\right)\mathbf{k} = \\ &= (u_yZ + uZ_y - u_zY - uY_z)\,\mathbf{i} - (u_xZ + uZ_x - u_zX - uX_z)\,\mathbf{j} + \\ &+ (u_xY + uY_x - u_yX - uX_y)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

ja siis uuritava seose parema poole

$$u\operatorname{rot}\mathbf{F} + (\operatorname{grad} u)\times\mathbf{F} =$$

$$\begin{aligned} &= u(Z_y - Y_z)\,\mathbf{i} + u(X_z - Z_x)\,\mathbf{j} + u(Y_x - X_y)\,\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= (uZ_y - uY_z)\,\mathbf{i} + (uX_z - uZ_x)\,\mathbf{j} + (uY_x - uX_y)\,\mathbf{k} + \\ &\quad + (u_yZ - u_zY)\,\mathbf{i} - (u_xZ - u_zX)\,\mathbf{j} + (u_xY - u_yX)\,\mathbf{k} = \\ &= (u_yZ + uZ_y - u_zY - uY_z)\,\mathbf{i} - (u_xZ + uZ_x - u_zX - uX_z)\,\mathbf{j} + \\ &+ (u_xY + uY_x - u_yX - uX_y)\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Seega kehtib viies seos. $\square$

Definitsioon 6. Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ *suunatuletiseks* punktis $P(x, y, z)$ vektori $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ suunas nimetatakse suurust

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x + tl_x, y + tl_y, z + tl_z) - f(x, y, z)}{\sqrt{(tl_x)^2 + (tl_y)^2 + (tl_z)^2}} \tag{1.12.6}$$

ja tähistatakse sümboliga $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x, y, z)$, st

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x, y, z) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{f(x + tl_x, y + tl_y, z + tl_z) - f(x, y, z)}{\sqrt{(tl_x)^2 + (tl_y)^2 + (tl_z)^2}}.$$

Kui tähistada $Q(x + tl_x, y + tl_y, z + tl_z)$, siis $\overrightarrow{PQ} = (tl_x, tl_y, tl_z)$ ja $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(tl_x)^2 + (tl_y)^2 + (tl_z)^2}$ ning

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(P) = \lim_{Q\to P} \frac{f(Q) - f(P)}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}, \tag{1.12.7}$$

kus punkt Q paikneb punktist P vektori $\mathbf{l}$ suunas lähtuval kiirel. Seega näitab funktsiooni f suunatuletis punktis P funktsiooni f muutumise kiirust selles punktis vektori l suunas.

Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis (x, y, z), siis

$$f(x+tl_x, y+tl_y, z+tl_z) - f(x,y,z) =$$

$$= f_x(x,y,z)\, tl_x + f_y(x,y,z)\, tl_y + f_z(x,y,z)\, tl_z + \delta,$$

kusjuures

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\delta}{\sqrt{(tl_x)^2 + (tl_y)^2 + (tl_z)^2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{\delta}{t\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}} = 0,$$

ja suunatuletis $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ avaldub kujul

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x,y,z) &= \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+tl_x, y+tl_y, z+tl_z) - f(x,y,z)}{t\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}} = \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{f_x(x,y,z)\, tl_x + f_y(x,y,z)\, tl_y + f_z(x,y,z)\, tl_z + \delta}{t\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}} = \\
&= \frac{f_x(x,y,z)\cdot l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}} + \frac{f_y(x,y,z)\cdot l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}} + \frac{f_z(x,y,z)\cdot l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}.
\end{aligned}$$

Olgu $\mathbf{l}^o$ vektori $\mathbf{l}$ suunaline ühikvektor, st

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^o &= \frac{1}{|\mathbf{l}|}\mathbf{l} = \frac{1}{|\mathbf{l}|}(l_x, l_y, l_z) = \frac{1}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}(l_x, l_y, l_z) = \\
&= \left(\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}, \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}, \frac{l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}}\right) = \\
&= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),
\end{aligned}$$

kus suurused $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ on vektori $\mathbf{l}$ suunakoosinused. Tuletame meelde, et vektori suunakoosinused on koosinused nurkadest, mille see vektor moodustab vastavalt x-telje, y-telje ja z-telje positiivse suunaga, kusjuures kehtib seos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Seega saame suunatuletise $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ avaldada kujul

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x,y,z) &= f_x(x,y,z)\cos\alpha + f_y(x,y,z)\cos\beta + f_z(x,y,z)\cos\gamma = \\
&= (\operatorname{grad} f(x,y,z))\cdot \mathbf{l}^o.
\end{aligned}$$

Oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 4. Kui $\mathbf{l}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ on vektori $\mathbf{l}$ suunaline ühikvektor, siis punktis $P(x,y,z)$ diferentseeruva funktsiooni $u = f(x,y,z)$ suunatuletis vektori $\mathbf{l}$ suunas avaldub kujul

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\cos\alpha + f_y(x,y,z)\cos\beta + f_z(x,y,z)\cos\gamma \qquad (1.12.8)$$

ehk lühidalt

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = (\operatorname{grad} f)\cdot \mathbf{l}^o, \qquad (1.12.9)$$

kus $\mathbf{l}^o = \frac{1}{|\mathbf{l}|}\mathbf{l}$.

Et

$$\frac{\partial f}{\partial \operatorname{grad} f} = (\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} f)^o = (\operatorname{grad} f)\cdot\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}(\operatorname{grad} f) =$$
$$= \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}(\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|}|\operatorname{grad} f|^2 = |\operatorname{grad} f|$$

ja

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right| = |(\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{l}^o| = \left||\operatorname{grad} f|\,|\mathbf{l}^o|\cos\left(\widehat{\operatorname{grad} f, \mathbf{l}^o}\right)\right| =$$
$$= |\operatorname{grad} f|\,|\mathbf{l}^o|\left|\cos\left(\widehat{\operatorname{grad} f, \mathbf{l}^0}\right)\right| \le |\operatorname{grad} f|,$$

siis funktsiooni suunatuletis on absoluutväärtuse poolest suurim selle funktsiooni gradiendi sihis, kusjuures gradiendi suunas funktsioon kasvab kõige kiiremini ja vastassuunas kahaneb kõige kiiremini.

Funktsiooni $u = f(x,y,z)$ nivoopinna $f(x,y,z) = C$ normaalvektor selle pinna punktis (x,y,z) avaldub kujul $(f_x,\ f_y,\ f_z)$. Järelikult on funktsiooni $u = f(x,y,z)$ gradient nivoopinna punktis risti seda punkti läbiva nivoopinnaga.

Näide 4. Leiame funktsiooni $u = xy\sin z$ suunatuletise punktis $P\left(1;-2;\frac{\pi}{2}\right)$ vektori $\mathbf{l} = (2;1;-2)$ suunas. Et

$$\operatorname{grad} u = (y\sin z, x\sin z, xy\cos z),\ \ (\operatorname{grad} u)|_P = (-2;1;0),$$
$$\mathbf{l}^o = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\mathbf{l} = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right),$$

siis

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right)|_P = (-2;1;0)\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right) =$$
$$= -2\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -1. \quad \diamondsuit$$

Näide 5. Leiame, millises suunas muutub funktsioon

$$u = \cos(xy) + \sin(yz)$$

punktis $P(2; \pi/4; 1)$ kõige kiiremini.

Et funktsioon kasvab gradiendi suunas kõige kiiremini ja vastassuunas kahaneb kõige kiiremini, siis leiame funktsiooni u gradiendi

$$\operatorname{grad} u = (-y\sin(xy), -x\sin(xy) + z\cos(yz), y\cos(yz)).$$

Seega kasvab vektori

$$(\operatorname{grad} u)|_{P(2;\pi/4;1)} = \left(-\frac{1}{4}\pi, -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\pi\sqrt{2}\right)$$

suunas funktsioon u punktis P kõige kiiremini ja selle vektori vastassuunas kahaneb kõige kiiremini. $\diamondsuit$

Funktsiooni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ gradient punktis $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ defineeritakse kujul

$$(\operatorname{grad} f)(\mathbf{x}) \overset{\text{def.}}{=} \nabla f = (f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

ja funktsiooni f suunatuletis selles punktis vektori $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ suunas avaldub kujul

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(\mathbf{x})\cos\alpha_1 + f_{x_2}(\mathbf{x})\cos\alpha_2 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\cos\alpha_n$$

ehk lühidalt

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{l}^o,$$

kus $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $\mathbf{l}^o = \frac{1}{|\mathbf{l}|}\mathbf{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ on vektori $\mathbf{l}$ suunaline ühikvektor, st

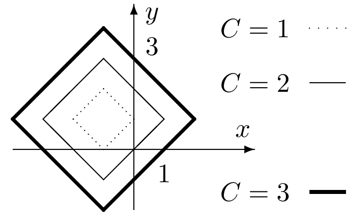
$$\cos\alpha_k = \frac{l_k}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

1.13 Ülesanded

Ülesannetes 1–10 leidke funktsiooni määramispiirkond ja kujutage see graafiliselt.
1. $z=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{y^2-4}$. V: $|x|\le 2\wedge|y|\ge 2$.
2. $z=\ln(e-x-y)$. V: $x+y<e$.
3. $z=\sqrt{x\sin y}$.
V: $n\in\mathbf{Z}$,
$(x\ge 0\wedge\ 2n\pi\le y\le(2n+1)\pi)\vee\ (x\le 0\wedge\ (2n+1)\pi\le y\le(2n+2)\pi)$.
4. $z=\arcsin\dfrac{x}{y-x}$.
V: $((x\ge 0)\wedge((y\le 0)\vee(y\ge 2x)))\vee((x\le 0)\wedge((y\ge 0)\vee(y\le 2x)))$.
5. $z=\sqrt{\sin(\pi(x^2+y^2))}$.
V: $2n\le x^2+y^2\le 2n+1\wedge\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.
6. $z=\ln\dfrac{\sin x}{\cos y}$. V: $n,m\in\mathbf{Z}$,
$\Big(2n\pi<x<(2n+1)\pi\ \wedge\ 2m\pi-\dfrac{\pi}{2}<y<2m\pi+\dfrac{\pi}{2}\Big)\vee$
$\vee\ \left((2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\ \wedge\ 2m\pi+\dfrac{\pi}{2}<y<2m\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
7. $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}$.
V: $|x|<R\wedge|y|<R$.
8. $z=\ln[(x-y)\ln(x+y)]$.
V: $(y>x\ \wedge\ 0<x+y<1)\vee\ (1-x<y<x)$.
9. $z=(1/\ln(1-x^2-y^2))\sqrt{4x-y^2}$.
V: $0<x^2+y^2<1\ \wedge\ x\ge y^2/4$.
10. $z=\arccos\left(2x\left(1+y^2\right)-1\right)$.
V: $0\le x\le 1/\left(1+y^2\right)$.
Ülesannetes 11–18 leidke funktsiooni nivoojooned ja kujutage need graafiliselt.
11. $z=4x^2+9y^2$. V: ellipsid $x^2/9+y^2/4=C^2$.
12. $z=4x^2-9y^2$. V: hüperboolid $4x^2-9y^2=C$.

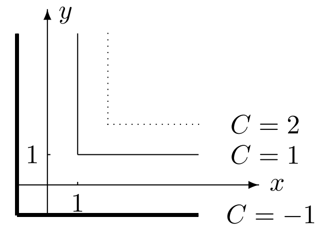
13. $z=|x+1|+|y-1|$.

V: $|x+1|+|y-1|=C$, $C=1;\,2;\,3$:



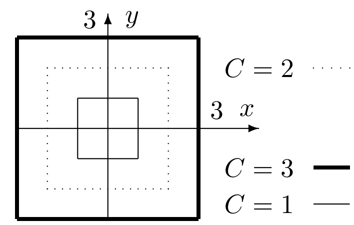
14. $z = \min(x, y)$.

V: $\min(x, y) = C$, $C = -1;\ 1;\ 2$:



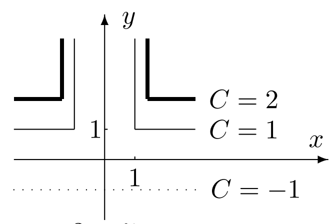
15. $z = \max(|x|, |y|)$.

V: $\max(|x|, |y|) = C$, $C = 1;\ 2;\ 3$:



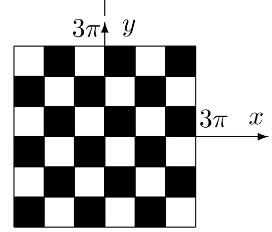
16. $z = \min(x^2, y)$

V: $\min(x^2, y) = C$, $C = -1;\ 1;\ 2$:



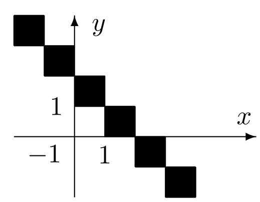
17. $z =\mathrm{sgn}(\sin(x)\sin(y))$ $(|x| \le 3\pi) \wedge |y| \le 3\pi)$.

V: $\mathrm{sgn}(\sin(x)\sin(y)) = C$, $C = 1$:



18. $z = [x] + [y]$, kus $[x]$ on arvu x täisosa.

V: $[x] + [y] = C$, $C = 1$:



Ülesannetes 19–21 leidke funktsiooni nivoopinnad. Skitseerige.
19. $w = x + y + z - 1$. V: tasandid $x + y + z - 1 = C$.
20. $w = x^2 + y^2 + z$. V: pöördparaboloidid $x^2 + y^2 + z = C$.
21. $w = z + \sqrt{x^2 + y^2}$. V: koonused $z + \sqrt{x^2 + y^2} = C$.
22. Näidake, et $\varphi(x, y) = xy$ rahuldab seost

$$\varphi(ax + bz, cy + dw) = ac\varphi(x, y) + bc\varphi(z, y) + ad\varphi(x, w) + bd\varphi(z, w).$$

23. Näidake, et positiivsete x, y, z ja w korral rahuldab $\psi(x, y) = (\ln x)(\ln y)$ seost

$$\psi(xy, zw) = \psi(x, z) + \psi(x, w) + \psi(y, z) + \psi(y, w).$$

Ülesannetes 24 ja 25 leidke $f(x,y)$.

24. $f(x-y,x+y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. V: $\dfrac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$.

25. $f\left(\dfrac{x}{y},x+y\right)=xy$. V: $\dfrac{xy^2}{(x+1)^2}$.

Ülesannetes 26–32 on esitatud pinna võrrand ristkoordinaatides. Leidke selle pinna võrrand: 1) silinderkoordinaatides; 2) sfäärkoordinaatides.

26. $x+y+z=1$.
V: $\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z=1, \rho\sin\psi\cos\varphi+\rho\sin\psi\sin\varphi+\rho\cos\psi=1$.

27. $x^2+y^2+z^2=R^2$. V: $\rho^2+z^2=R^2$, $\rho=R$.

28. $x^2+y^2-z^2=0$. V: $\rho^2=z^2$, $\psi=\pi/4\vee\psi=3\pi/4$.

29. $x^2+y^2+z=1$. V: $\rho^2+z=1$, $\rho^2\sin^2\psi+\rho\cos\psi=1$.

30. $z=xy$. V: $z=\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$, $\cos\psi=\rho\sin^2\psi\cos\varphi\sin\varphi$.

31. $z^2=xy$. V: $z^2=\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$, $\cos^2\psi=\sin^2\psi\cos\varphi\sin\varphi$.

32. $z=\tan(y/x)$. V: $z=\tan(\tan\varphi)$, $\rho\cos\psi=\tan(\tan\varphi)$.

Ülesannetes 33–36 on antud joone võrrand xy-tasandil. Leida selle joone pöörlemisel ümber y-telje tekkiva pöördpinna võrrand. Ümber x-telje? Skitseerige saadud pinnad.

33. $x+y=1$. V: $x^2+z^2=(1-y)^2$, $y^2+z^2=(1-x)^2$.

34. $xy=1$. V: $\left(x^2+z^2\right)y^2=1$, $x^2\left(y^2+z^2\right)=1$.

35. $y=x^2$. V: $y=x^2+z^2$, $y^2+z^2=x^4$.

36. $x^2-2x+y^2+4y=1$. V: $4x^2+4z^2=\left(1-x^2-z^2-y^2-4y\right)^2$,
$16\left(y^2+z^2\right)=\left(1-x^2+2x-y^2-z^2\right)$.

Ülesannetes 37–41 uurige funktsiooni piirväärtust.

37. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^2y^3}{x^4+y^4}$. V: 0. 38. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$. V: $\nexists$.

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. V: $\nexists$. 40. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{1/(x^2+y^2)}$. V: 0.

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2y^2+1}-1)/(x^2+y^2)$. V: 0.

42. Uurige funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{7x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

pidevust punktis $(0;0)$. V: pidev.

43. Uurige funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{7xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

pidevust punktis $(0;0)$. V: katkev.
44. Uurige funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}\,, & \text{kui } x-y\neq 0;\\ 1\,, & \text{kui } x-y=0.\end{cases}$$

pidevust punktis $(0;0)$. V: katkev.
Ülesannetes 45–50 leidke funktsiooni esimest ja teist järku osatuletised.
45. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. V: $z_x=-xy/\sqrt{(x^2-y^2)^3}$, $z_y=x^2/\sqrt{(x^2-y^2)^3}$,
$z_{xx}=y\left(2x^2+y^2\right)/\sqrt{(x^2-y^2)^5}$, $z_{xy}=-x\left(x^2+2y^2\right)/\sqrt{(x^2-y^2)^5}$,
$z_{yy}=3yx^2/\sqrt{(x^2-y^2)^5}$.
46. $w=\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$. V: $w_x=\left(\dfrac{z}{y}\right)^x\ln\dfrac{z}{y}$, $w_y=-\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$, $w_z=\dfrac{x}{z}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$,
$w_{xx}=\left(\dfrac{z}{y}\right)^x\ln^2\dfrac{z}{y}$, $w_{yy}=\dfrac{x\,(x+1)}{y^2}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$, $w_{xy}=-\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x\left(x\ln\dfrac{z}{y}+1\right)$,
$w_{zz}=\dfrac{x\,(x-1)}{z^2}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$, $w_{xz}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x\left(x\ln\dfrac{z}{y}+1\right)$, $w_{yz}=-\dfrac{x^2}{zy}\left(\dfrac{z}{y}\right)^x$.
47. $z=\arctan\dfrac{x}{y}$. V: $z_x=\dfrac{y}{y^2+x^2}$, $z_y=-\dfrac{x}{y^2+x^2}$, $z_{xx}=-\dfrac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$,
$z_{xy}=\dfrac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}$, $z_{yy}=\dfrac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$.
48. $z=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. V: $z_x=-\dfrac{y}{y^2+x^2}$, $z_y=\dfrac{x}{y^2+x^2}$, $z_{xx}=\dfrac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$,
$z_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$, $z_{yy}=-\dfrac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$.
49. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. V: $z_x=\dfrac{x}{y^2+x^2}$, $z_y=\dfrac{y}{y^2+x^2}$, $z_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$,
$z_{xy}=-\dfrac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$, $z_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}$.
50. $z=(\cos x)^{\sin y}$.
V: $z_x=-\cos^{(\sin y-1)}x\sin y\sin x$, $z_y=\cos^{\sin y}x\cos y\ln(\cos x)$,
$z_{xx}=\left(\cos^{(\sin y-2)}x\right)\left(1-\cos^2 x-\cos^2 y+\cos^2 y\cos^2 x-\sin y\right)$,
$z_{xy}=-\left(\cos^{(\sin y-1)}x\cos y\sin x\right)(\sin y\ln(\cos x)+1)$,
$z_{yy}=\cos^{\sin y}x\cos^2 y\ln^2(\cos x)-\cos^{\sin y}x\sin y\ln(\cos x)$.
51. Näidake, et funktsiooni

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\left(x^2-y^2\right)/\left(x^2+y^2\right), \text{ kui } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \text{ kui } x^2+y^2=0\end{cases}$$

korral $f_{xy}(0;0)=-1$ ja $f_{yx}(0;0)=1$, st $f_{xy}(0;0)\neq f_{yx}(0;0)$.
52. Näidake, et $z=x^y y^x$ rahuldab seost

$$xz_x+yz_y=(x+y+\ln z)\,z.$$

53. Näidake, et $w = \dfrac{x-y}{u-v} + \dfrac{x-v}{u-y}$ rahuldab seost

$$w_x + w_y + w_u + w_v = 0.$$

Ülesannetes 54–56 näidake, et funktsioon $z = z(x, y)$ rahuldab seost

$$z_{xx} + z_{yy} = 0.$$

54. $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. 55. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$. 56. $z = \arctan\dfrac{x}{y}$.

57. Näidake, et $z = f(x^2 - y^2)$, kus $f(t)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon, rahuldab seost

$$yz_x + xz_y = 0.$$

58. Näidake, et $z = f(y/x)$, kus $f(t)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon, rahuldab seost

$$xz_x + yz_y = 0.$$

59. Olgu $z = y\,/\,f(x^2 - y^2)$. Näidake, et suvalise diferentseeruva funktsiooni $f(u)$ korral

$$z_x/x + z_y/y = z/y^2.$$

60. Näidake, et $u = x^k f(z/x; y/x)$, kus $f\,(p, q)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon, rahuldab seost

$$xu_x + yu_y + zu_z = ku\,.$$

61. Näidake, et $u = x^k f(z/x; y/x)$, kus $f\,(p, q)$ on suvaline diferentseeruv kahe muutuja funktsioon, rahuldab seost

$$xu_x + yu_y + zu_z = ku\,.$$

62. Olgu $x = a\rho\cos\varphi$ ja $y = b\rho\sin\varphi$, kus a ja b on konstandid. Leidke jakobiaan (funktsionaaldeterminant) $J\,(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix}$. V: $ab\rho$.

63. Teisendage võrrand $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ polaarkoordinaatidesse. V: $\dfrac{d\rho}{d\varphi} = \rho$.

Ülesannetes 64–66 leidke ilmutamata funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised.

64. $x^2 - y^2 + z^2 = a^2$. V: $z_x = -\dfrac{x}{z}$, $z_y = \dfrac{y}{z}$, $z_{xx} = -\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$, $z_{xy} = \dfrac{xy}{z^3}$, $z_{yy} = \dfrac{z^2-y^2}{z^3}$.

65. $\dfrac{y}{z} = \ln\dfrac{z}{x} - 3$. V: $z_x = \dfrac{z^2}{x\,(y+z)}$, $z_y = \dfrac{z}{y+z}$, $z_{yy} = -\dfrac{z^2}{(y+z)^3}$, $z_{xy} = \dfrac{yz^2}{x\,(y+z)^3}$, $z_{xx} = -\dfrac{z^2y^2}{x^2\,(y+z)^3}$.

66. $x + y + z = \exp\,(x+y+z)\,$. V: $z_x = z_y = -1$, $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 0$.

Ülesannetes 67–68 leidke ilmutamata funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest järku osatuletised.

67. $z^3 + 3x^2z = 2xy$. V: $z_x = \dfrac{2y - 6xz}{3z^2 + 3x^2}$, $z_y = \dfrac{2x}{3z^2 + 3x^2}$.

68. $f(x - y + z, xyz) = 0$. V: kui $f\,(u, v)$, siis

$z_x = -\dfrac{f_u(x - y + z, xyz) + yzf_v(x - y + z, xyz)}{f_u(x - y + z, xyz) + xyf_v(x - y + z, xyz)}$,

$z_y = \dfrac{f_u(x - y + z, xyz) - xzf_v(x - y + z, xyz)}{f_u(x - y + z, xyz) + xyf_v(x - y + z, xyz)}$.

69. Näidake, et seosest

$$f(cx - az, cy - bz) = 0,$$

kus $\varphi\,(u, v)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon, järeldub seos

$$az_x + bz_y = c.$$

70. Näidake, et $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow x_y \cdot y_x = 1 \ \wedge \ x_y \cdot y_z \cdot z_x = -1$.

71. Näidake, et

$$\begin{cases} y = f(x, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f_x g_z - f_z g_x}{f_z g_y + g_z}.$$

72. Näidake, et

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (f_x g_z - g_x f_z)/(g_y f_z - f_y g_z).$$

Ülesannetes 73–75 leidke funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal.

73. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. V: $du = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$.

74. $v = \arctan\dfrac{y}{x}$. V: $dv = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

75. $u = x^y / y^z$.
V: $du = x^{y-1}y^{1-z}dx + \left(x^y y^{-z}\ln x - zx^y y^{-z-1}\right)dy - x^y y^{-z}\ln y dz$.

Ülesannetes 76–78 leidke funktsiooni esimest ja teist järku täisdiferentsiaalid.

76. $w = \ln\,(x - y + z)$. V: $dw = \dfrac{dx - dy + dz}{x - y + z}$,

$d^2w = \dfrac{-\,(dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 + 2\,dxdy - 2\,dxdz + 2\,dydz}{(x - y + z)^2}$.

77. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. V: $du = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$d^2u = \dfrac{y^2\,(dx)^2 - 2xy\,dxdy + x^2\,(dy)^2}{\left(\sqrt{(x^2 + y^2)^3}\right)}$.

78. $u = xyz$. V: $du = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, $d^2u = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz$.

Ülesannetes 79–81 leidke ligikaudu, kasutades täisdiferentsiaali.

79. $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$. V: ≈ 0.005.

80. $\sqrt{6.02^2+7.97^2}$. V: ≈ 9.976
81. $1.03^{0.96}$. V: ≈ 1.03.
82. Näidake, et funktsiooni $z=\sqrt{x^2+y^2}$ korral $d^2z\geq 0$.
83. Olgu $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Leidke $df(1;1)$ ja $d^2f(1;1)$.
V: $df(1;1)=\dfrac{dx-dy}{2}$, $d^2f(1;1)=\dfrac{1}{4}\Big(3(dy)^2-(dx)^2-2\,dxdy\Big)$.
84. Leidke funktsiooni $z=\dfrac{1}{x+y}$ esimest järku Taylori arendus punkti $(2;3)$ ümbruses.
V: $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}(x-2)-\dfrac{1}{25}(y-3)+\dfrac{(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2}{(2+\theta(x-2)+3+\theta(y-3))^3}$.
85. Leidke funktsiooni $z=\sqrt{x+y}$ esimest järku Taylori arendus punkti $(1;1)$ ümbruses.
V: $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)-\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+(y-1)^2}{8\sqrt{(1+\theta(x-1)+1+\theta(y-1))^3}}$.
86. Leidke funktsiooni $w=xy+yz-xz$ teist järku Taylori arendus punkti $(1;0;-1)$ ümbruses.
V: $1+(x-1)-(z+1)+(x-1)y+y(z+1)-(x-1)(z+1)$.
87. Leidke funktsiooni $z=x^y$ teist järku Taylori polünoom punkti $(1;1)$ ümbruses. Leidke selle abil ligikaudu $1.1^{1.02}$. V: $1+(x-1)+(x-1)(y-1)$, ≈ 1.102.
88. Leidke punktis $\left(2;-2;-\dfrac{\pi}{4}\right)$ pinnale $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ konstrueeritud puutujatasandi ja normaali võrrandid.
V: $z+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{4}(y+2)$, $\dfrac{x-2}{1/4}=\dfrac{y+2}{1/4}=\dfrac{z+\pi/4}{-1}$.
89. Leidke punktis $(3;-4;5)$ pinnale $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konstrueeritud puutujatasandi ja normaali võrrandid.
V: $z-5=\dfrac{3}{5}(x-3)-\dfrac{4}{5}(y+4)$, $\dfrac{x-3}{3/5}=-\dfrac{y+4}{4/5}=\dfrac{z-5}{-1}$.
90. Leidke punktis $(-1;-\pi;-1)$ pinnale $z=\cos(y/x)$ konstrueeritud puutujatasandi ja normaali võrrandid. V: $z+1=0$, $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+\pi}{0}=\dfrac{z+1}{-1}$.
91. Leidke ellipsoidi $x^2+2y^2+z^2=1$ puutujatasandid, mis on paralleelsed tasandiga $x-y+2z=0$. V: $\left(x\pm\dfrac{2}{\sqrt{22}}\right)-\left(y\mp\dfrac{1}{\sqrt{22}}\right)+2\left(z\pm\dfrac{4}{\sqrt{22}}\right)=0$.
92. Leidke sfääri $x^2+y^2+z^2=2y$ puutujatasandid, mis on risti tasandiga $x+y-z=3$, kui ka tasandiga $x-2y+z=1$.
V: $\left(x\mp\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)+2\left(y\mp\dfrac{2}{\sqrt{14}}-1\right)+3\left(z\mp\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)=0$.
93. Näidake, et pindadel $x+2y-\ln z=-4$ ja $x^2-xy-8x+z=-5$ on ühine puutujatasand punktis $(2;-3;1)$.
94. Leidke ellipsoidi $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ puutujatasand, mis lõikab koordinaattelgedel võrdse pikkusega lõigud. V: $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

95. Näidake, et pinnale $xyz = a^3$ suvalises selle pinna punktis konstrueeritud puutujatasand moodustab koos koordinaattasanditega tetraeedri, mille ruumala ei sõltu pinnapunkti valikust.
96. Tõestage, et pöördpinna $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ kõik normaalsirged lõikavad $z-$telge.

Ülesannetes 97–102 leidke funktsiooni $z = z(x,y)$ statsionaarsed punktid.
97. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$. V: $(1/3; 4/3)$.
98. $z = xy\left(1 - x^2 - y^2\right)$. V: $P_1\,(0;0)$, $P_2\,(1;0)$, $P_3\,(0;1)$, $P_4\,(-1;0)$, $P_5\,(0;-1)$, $P_6\,(0.5;0.5)$, $P_7\,(0.5;-0.5)$, $P_8\,(-0.5;0.5)$, $P_9\,(-0.5;-0.5)$.
99. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. V**:** $P_1\,(0;0)$, $P_2\,(1;1)$.
100. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$. V: $P_1\,(1;1;4)$, $P_2\,(-1;-1;-4)$.
101. $z = \sin x + \cos y$. V: $P\,(\pi/2 + k\pi; n\pi)$, kus $k, n \in \mathbf{Z}$.
102. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. V: $P_1\,(-2;0;1)$, $P_2\,(16/7;0;-8/7)$.
103. Veenduge, et funktsioonil $z = x^2 + xy + y^2 + a^3/x + a^3/y$ on punktis $\left(a/\sqrt[3]{3}, a/\sqrt[3]{3}\right)$ lokaalne miinimum.
104. Veenduge, et funktsioonil $z = 2x^2 + 4xy + 2y^2 - x^4 - y^4$ on punktides $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ja $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ lokaalne maksimum.

Ülesannetes 105–108 leidke funktsiooni $z = z(x,y)$ lokaalsed ekstreemumid.
105. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$. V: $\min z = z\,(1/3; 4/3) = -7/3$.
106. $z = xy\,(1 - x - y)$. V: $\max z = z\,(1/3; 1/3) = 1/27$.
107. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. V: $\min z = z\,(-1;1) = 0$.
108. $z = x + y^2 - 2\ln(xy)$. V: $\min z = z(2;1) = 3 - \ln 4$.

Ülesannetes 109–112 uurige funktsiooni tinglikke ekstreemume.
109. $z = \exp(xy)$, $x + y = 1$. V: $\min\limits_{x+y=1} z = z\,(1/2;1/2) = \sqrt[4]{e}$.
110. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$.
V: $\min\limits_{x^2+y^2=1} z = z\left(1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}\right) = z\left(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right) = -1/2$,
$\max\limits_{x^2+y^2=1} z = z\left(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right) = z\left(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right) = 1/2$.
111. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $x + y = 1$. V: $\min\limits_{x+y=1} z = z\,(1/2;1/2) = 4$.
112. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y = \dfrac{\pi}{4}$.
V: $\max\limits_{x-y=\pi/4} z = z\,(\pi/8 + k\pi, -\pi/8 + k\pi) = 1 + \sqrt{2}/2$,
$\min\limits_{x-y=\pi/4} z = z\,(5\pi/8 + k\pi, 3\pi/8 + k\pi) = 1 - \sqrt{2}/2 \quad (k \in \mathbf{Z})$.

113. Leidke sirgele $x - 3y - 9 = 0$ lähim ellipsi $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ punkt. Kaugeim?
V: $\left(3/\sqrt{5}; -4/\sqrt{5}\right)$, $\left(-3/\sqrt{5}; 4/\sqrt{5}\right)$.
114. Leidke funktsiooni $z = x - 2y - 3$ suurim ja vähim väärtus võrratustega $0 \le x$, $0 \le y$, $x + y \le 1$ määratud piirkonnas D.
V: $\min\limits_D z = z(0;1) = -5$, $\max\limits_D z = z\,(1;0) = -2$.
115. Leidke funktsiooni $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 3$ suurim ja vähim väärtus ruudus $D = [0;1] \times [0;1]$. V: $\min\limits_D z = z(1/2;0) = -13/4$, $\max\limits_D z = z\,(1;1) = 18$.

116. Leidke funktsiooni $z = x^2y(4-x-y)$ suurim ja vähim väärtus sirgetega $x=0$, $y=0$ ja $x+y=6$ määratud kolmnurgas D. V: $\min\limits_D z = z(4;2) = -64$, $\max\limits_D z = z\,(2;1) = 4$.

117. Leidke funktsiooni $z = x^2 - y^2$ suurim ja vähim väärtus ringis $x^2+y^2 \le 4$. V: $\min\limits_D z = z(0;\pm 2) = -4$, $\max\limits_D z = z\,(\pm 2;0) = 4$.

Ülesannetes 118–120 leidke $\operatorname{grad} u$.

118. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$. V: $\left(\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z, -\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z, \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \ln\dfrac{x}{y}\right)$.

119. $u = \arctan\dfrac{xy}{z}$. V: $\left(\dfrac{yz}{z^2+x^2y^2}, \dfrac{xz}{z^2+x^2y^2}, -\dfrac{xy}{z^2+x^2y^2}\right)$.

120. $x^2+u^2 = y^2+z^2$. V: $(-x/u, y/u, z/u)$.

Ülesannetes 121–124 leidke $\operatorname{div}\mathbf{F}$ ja $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

121. $\mathbf{F} = \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. V: $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}$, $\left(y/z^2, z/x^2, x/y^2\right)$.

122. $\mathbf{F} = \left(\ln(x^2-y^2), \arctan(z-y), xyz\right)$.

V: $\dfrac{2x}{x^2-y^2} - \dfrac{1}{1+z^2-2zy+y^2} + xy$, $\left(xz - \dfrac{1}{1+(z-y)^2}, -yz, \dfrac{2y}{x^2-y^2}\right)$.

123. $\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\ln(x+y-z))$. V: $-3/(x+y-z)^2$, $\mathbf{0}$.

124. $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, $\mathbf{G} = \left(x^2y, y^2z, x^2z\right)$. V: 0, $(2x, 2x, 2y-2z)$.

Ülesannetes 125–126 leidke funktsiooni w suunatuletis punktis A vektori $\overline{AB}$ suunas.

125. $w = x^2y^2z^2$, $A(1;-1;3)$, $B(0;1;1)$. V: -22.

126. $w = x^2-y^2+z^2$, $A(0;1;1)$, $B(-1;1;0)$. V: $-\sqrt{2}$.

127. Leidke funktsiooni $z = \sqrt{x^2+y^2}$ suunatuletis punktis $(-3;4)$, seda punkti läbiva funktsiooni nivoojoone normaali suunas. V: 1.

Peatükk 2

Read

2.1 Arvread

Read on aluseks paljude probleemide lahendamisel matemaatikas. Eriti lihtne on ridade abil leitud lahendusalgoritmide realiseerimine arvutil.

Definitsioon 1. Avaldist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \ , \tag{2.1.1}$$

kus a_k $(k \in \mathbf{N})$ on reaalarvud, nimetatakse *arvreaks.* Arve a_1, a_2, a_3, ... nimetatakse *rea liikmeteks* ja suurust a_k nimetatakse *rea üldliikmeks.*

Järgnevalt nimetame arvrida lihtsalt *reaks.* Teatud juhtudel on otstarbekas uurida rida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, st alustada rea nullindast liikmest.

Definitsioon 2. Rea (2.1.1) esimese n liikme summat S_n nimetatakse selle rea *n-ndaks osasummaks*, st

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, . \tag{2.1.2}$$

Reale (2.1.1) võime vastavusse seada selle rea osasummade jada $\{S_n\}$.

Definitsioon 3. Rida (2.1.1) nimetatakse *koonduvaks*, kui selle rea osasummade jada $\{S_n\}$ on koonduv, st

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

kusjuures suurust S nimetatakse selle *rea summaks.* Kui ei eksisteeri lõplikku piirväärtust

$$\lim_{n\to\infty} S_n,$$

siis nimetatakse rida *hajuvaks.*

Tähistame sümboliga c kõigi koonduvate ridade hulka. Asjaolu, et rida (2.1.1) on koonduv, tähistame lühidalt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in c$, ja asjaolu, et rida on hajuv, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \notin c$. Juhtudel $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ või $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ on tegemist hajuva reaga.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ koonduvust.

Et $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

st uuritav rida on hajuv. $\diamondsuit$

Esitame kaks lihtsat näidet, mis on edaspidi olulised.

Näide 2. Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, kus q on mingi reaalarv, nimetatakse *geomeetriliseks reaks.* Uurime selle rea koonduvust.

Et rea osasumma S_n avaldub kujul

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \overset{q\neq 1}{=} \frac{\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{kui } |q| < 1, \\ \nexists, & \text{kui } |q| > 1. \end{cases}$$

Kui $q = 1$, siis Näite 1 põhjal on tegemist hajuva reaga. Kui $q = -1$, siis $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1, \ldots$ ja ka sel juhul on tegemist hajuva reaga. Seega geomeetriline rida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub, kui $|q| < 1$, ja hajub, kui $|q| \geq 1$. $\diamondsuit$

Näide 3. Arvrida $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ nimetatakse *harmooniliseks reaks.* Osutub, et harmooniline rida on koonduv, kui $\alpha > 1$, ja hajuv, kui $\alpha \leq 1$. Tõestame selle edaspidi.

Näide 4. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ koonduvust. Koonduvuse korral leiame rea summa.

Selleks et lihtsustada osasumma $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ avaldist, lahutame rea üldliikme osamurdudeks

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(k+1) + Bk = 1 \ (\forall k \in \mathbf{N}_0) \ \Rightarrow \ A = 1 \wedge B = -1.$$

Jõuame tulemuseni

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Et
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$
siis uuritav rida koondub, kusjuures rea summa on 1. ♢

Näide 5. Uurime rea $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{4^k+6^k}{5^k}$ koonduvust.

Kuna
$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4^k+6^k}{5^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{6}{5}\right)^k \overset{(2.1.3)}{=}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}+\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^n}{1-\frac{6}{5}}=$$
$$=5\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)+5\left(\left(\frac{6}{5}\right)^n-1\right),$$
siis $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$. Tegemist on hajuva reaga. ♢

Näide 6. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2k^2}$ koonduvust. Koonduvuse korral leiame rea summa.

Leiame osasummale S_n lihtsama kuju. Nendime, et
$$S_1=\arctan\frac{1}{2}.$$
Järgnevate osasummade leidmisel kasutame seost
$$\arctan x+\arctan y \overset{|xy|<1}{=} \arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$
Leiame, et
$$S_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3}$$
ja
$$S_3=S_2+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=$$
$$=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4}.$$
Püstitame hüpoteesi
$$S_n=\arctan\frac{n}{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

mille tõestame induktsioonimeetodil. Et hüpotees on tõene $n = 1$ korral, siis induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Selleks uurime suurust S_{n+1}. Tulemuseks saame

$$S_{n+1} = S_n + \arctan \frac{1}{2\,(n+1)^2} = \arctan \frac{n}{n+1} + \arctan \frac{1}{2\,(n+1)^2} =$$
$$= \arctan \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2\,(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{2\,(n+1)^2}} = \arctan \frac{n+1}{n+2} =$$
$$= \arctan \frac{n+1}{(n+1)+1},$$

st induktsioonisamm on lubatav ja püstitatud hüpotees on tõene. Seega

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \arctan \frac{n}{n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \qquad \diamondsuit$$

Rea (2.1.1) osasummad S_{n-1} ja S_n rahuldavad seost

$$S_n - S_{n-1} = a_n. \tag{2.1.3}$$

Kui rida (2.1.1) koondub ja selle rea summa on S, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \tag{2.1.4}$$

ja seostest (2.1.3) ning (2.1.4) järeldub, et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.1.5}$$

Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 1. Koonduva rea (2.1.1) üldliige a_n rahuldab seost (2.1.5).

Seega

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in c \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Tingimust (2.1.5) nimetatakse *rea* (2.1.1) *koonduvuse tarvilikuks tingimuseks.* Tingimus (2.1.5) ei osutu piisavaks. Näites 3 esitatud harmooniline rida on hajuv $0 < \alpha < 1$ korral. Ometi on selle rea korral täidetud rea koonduvuse tarvilik tingimus (2.1.5), sest $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^{\alpha} \overset{0<\alpha<1}{=} 0$.

Koos reaga (2.1.1) uurime rida

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k \ (m \geq 2), \tag{2.1.6}$$

mis on lähtereast (2.1.1) saadav $m-1$ esimese liikme ärajätmisel. Kui tähistada rea (2.1.1) esimese n liikme summat sümboliga S_n^I ja rea (2.1.6) esimese n liikme summat sümboliga S_n^{II}, siis kehtib seos

$$S^I_{n+m-1} = (a_1 + \ldots + a_{m-1}) + S_n^{II}. \tag{2.1.7}$$

Kui rida (2.1.1) koondub ja rea (2.1.1) summa on S, siis ka

$$\lim_{n\to\infty} S^I_{n+m-1} = S.$$

Seega eksisteerib piirväärtus seose (2.1.7) vasakust poolest piirprotsessis $n \to \infty$. Järelikult eksisteerib selles piirprotsessis piirväärtus ka seose (2.1.7) paremast poolest. Et suurus $a_1 + \ldots + a_{m-1}$ ei sõltu muutujast n, siis eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{II}$, st rida (2.1.6) on koonduv. Rea (2.1.6) koonduvusest saab järeldada rea (2.1.1) koonduvuse. Seega on read (2.1.1) ja (2.1.6) kas mõlemad koonduvad või on mõlemad hajuvad. Analoogilise tulemuseni jõuame lõpliku arvu liikmete juurdevõtmisel. Vormistame tulemuse.

Lause 2. Lõpliku arvu liikmete ärajätmine või lisamine ei mõjuta rea koonduvust. Rea koonduvuse korral muutub vaid rea summa.

Olgu S koonduva rea (2.1.1) summa. Lause 2 põhjal on koonduv ka rida

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Kui tähistada selle rea summat sümboliga R_n, siis kehtib seos

$$S = S_n + R_n,$$

kusjuures $R_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Cauchy kriteerium annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et jadal $\{S_n\}$ oleks lõplik piirväärtus. Nimelt, jadal $\{S_n\}$ on lõplik piirväärtus parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub niisugune naturaalarv n_0, et iga naturaalarvu p puhul

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

kui $n > n_0$. Et $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$, siis saame Cauchy kriteeriumi alusel tarviliku ja piisava tingimuse arvrea (2.1.1) koonduvuseks.

Lause 3 (*Cauchy kriteerium*)**.** Arvrida (2.1.1) koondub parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub selline naturaalarv n_0, et iga naturaalarvu p puhul

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

kui $n > n_0$.

Selleks et defineerida tehted ridadega, vaatleme veel rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{2.1.8}$$

Kui kahele reale (2.1.1) ja (2.1.8) on vastavusse seatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)\,, \tag{2.1.9}$$

siis öeldakse, et on defineeritud *ridade liitmine*, st ridade liitmisel saadava rea üldliige on liidetavate üldliikmete summa. Kui arvule $\gamma \in \mathbf{R}$ ja reale (2.1.1) on vastavusse seatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma a_k, \tag{2.1.10}$$

siis öeldakse, et on defineeritud *rea arvuga korrutamine.*

Definitsioon 4. Ridade $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *Cauchy korrutiseks* nimetatakse rida $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, kus

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}. \tag{2.1.11}$$

Näide 7. Leiame ridade $\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ Cauchy korrutise $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$.

Kui $p \neq q$, siis valemi (2.1.11) abil saame meid huvitava Cauchy korrutise üldliikme

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{k}p^iq^{k-i}=q^k\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{p}{q}\right)^i=$$
$$=q^k\frac{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{p}{q}}=\frac{q^{k+1}-p^{k+1}}{q-p}.$$

Kui $p = q$, siis

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=0}^{k}p^iq^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}p^ip^{k-i}=(k+1)\,p^k. \qquad \diamondsuit$$

Lause 4. Kui read (2.1.1) ja (2.1.8) on koonduvad, siis koondub ka rida (2.1.9), kusjuures rea (2.1.9) summa saadakse ridade (2.1.1) ning (2.1.8) summade liitmisel. Kui rida (2.1.1) koondub, siis koondub ka rida (2.1.10), kusjuures rea (2.1.10) summaks on rea (2.1.1) summa korrutis arvuga γ.

Tõestus. Olgu read (2.1.1) ja (2.1.8) koonduvad. Kui tähistame ridade (2.1.1), (2.1.8) ja (2.1.9) esimese n liikme summat vastavalt sümbolitega S_n^a, S_n^b ja S_n^{a+b}, siis kehtib seos

$$S_n^{a+b}=S_n^a+S_n^b.$$

Et piirprotsessis $n \to \infty$ selle seose parema poole mõlemast liidetavast eksisteerib piirväärtus, siis eksisteerib piirväärtus ka vasakust poolest, st rida (2.1.9) on koonduv, kusjuures rea (2.1.9) summaks on ridade (2.1.1) ning (2.1.8) summade summa. Seega oleme tõestanud Lause 4 esimese osa. Lause 4 teine osa järeldub võrduste ahelast

$$S_n^{\gamma a} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \gamma a_k = \gamma \sum_{k=1}^{n} a_k = \gamma S_n^a. \qquad \square$$

2.2 Positiivsete arvridade võrdlustunnused

Definitsioon 1. Kui $a_k \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$, siis arvrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.2.1}$$

nimetatakse *positiivseks arvreaks.*

Tähistame sümboliga S_n^a rea (2.2.1) n-ndat osasummat. Leiame, et

$$S_{n+1}^a = S_n^a + a_{n+1} \geq S_n^a.$$

Seega on positiivse arvrea (2.2.1) osasummmade jada $\{S_n^a\}$ monotoonselt kasvav, st $S_n^a \uparrow$. Monotoonselt kasvav jada koondub aga parajasti siis, kui see jada on ülalt tõkestatud. Formuleerime selle tulemuse.

Lause 1. Positiivne arvrida (2.2.1) koondub parajasti siis, kui selle rea osasummade jada on ülalt tõkestatud, ja hajub parajasti siis, kui osasummade jada on ülalt tõkestamata.

Seega

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in c \Leftrightarrow (\exists\, M > 0 : S_n^a \leq M \quad (n \in \mathbf{N}))\,,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \notin c \Leftrightarrow (\nexists\, M > 0 : S_n^a \leq M \quad (n \in \mathbf{N}))\,.$$

Olgu ka

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{2.2.2}$$

positiivne arvrida.

Lause 2. Kui positiivne arvrida (2.2.1) koondub ja

$$b_k \leq a_k \ \ (k \in \mathbf{N}), \tag{2.2.3}$$

siis koondub ka positiivne arvrida (2.2.2).

Tõestus. Olgu

$$S_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Lause 1 põhjal järeldub rea (2.2.1) koonduvusest hinnang $S_n^a \leq M \quad (n \in \mathbf{N})$. Seoste (2.2.3) põhjal saame $S_n^b \leq S_n^a \ \ (n \in \mathbf{N})$. Seega leiame $S_n^b \leq M \ \ (n \in \mathbf{N})$, st rida (2.2.2) on koonduv. □

Lause 3. Kui positiivne arvrida (2.2.2) hajub ja ridade (2.2.2) ja (2.2.1) liikmed rahuldavad võrratusi (2.2.3), siis hajub ka positiivne arvrida (2.2.1).

Tõestus. Lause 1 põhjal järeldub rea (2.2.2) hajuvusest, et jada $\left\{S_n^b\right\}$ on ülalt tõkestamata. Järelikult võrratustest $S_n^b \leq S_n^a \quad (n \in \mathbf{N})$ leiame, et ka jada $\{S_n^a\}$ on ülalt tõkestamata. Lause 1 põhjal on rida (2.2.1) hajuv. □

Märkus 1. Lausete 2 ja 3 väited jäävad kehtima, kui eeldus (2.2.3) asendada nõrgemaga:

$$b_k \leq a_k \quad (k \geq k_0 \in \mathbf{N}).$$

Märkus 1 järeldub Lausest 2.1.2. Nimelt, rea lõpliku arvu esimeste liikmete ärajätmine ei mõjuta rea koonduvust.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(k+1)\,2^k}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga, sest $\dfrac{1}{(k+1)\,2^k} \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$. Võrdleme seda rida geomeetrilise reaga $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. See geomeetriline rida on koonduv, sest $q = \dfrac{1}{2}$ ja $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$. Et

$$\frac{1}{(k+1)\,2^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \ \ (k \in \mathbf{N}),$$

siis Lause 2 põhjal on uuritav rida koonduv. ♢

Näide 2. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln(k+2)}{k}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga, sest $\dfrac{\ln(k+2)}{k} \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$. Võrdleme seda rida harmoonilise reaga $\alpha = 1$ korral. Et harmooniline rida on $\alpha = 1$ korral hajuv ja

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k+2)}{k} \quad (k \in \mathbf{N}),$$

st uuritava rea üldliige on suurem kui hajuva positiivse arvrea üldliige, siis Lause 3 põhjal on uuritav rida hajuv. ♢

Lause 4. Kui (2.2.1) ja (2.2.2) on positiivsed arvread ja eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus nende üldiikmete suhtest

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\gamma>0, \tag{2.2.4}$$

siis read (2.2.1) ja (2.2.2) koonduvad või hajuvad samaaegselt, st

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\in c \;\;&\Leftrightarrow\;\; \sum_{k=1}^{\infty}b_k\in c,\\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k\notin c \;\;&\Leftrightarrow\;\; \sum_{k=1}^{\infty}b_k\notin c.\end{aligned}$$

Tõestus. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, leiame

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\gamma\neq 0\right)\;\Leftrightarrow\;\left(\forall\varepsilon>0\;\exists\, k_0=k_0\left(\varepsilon\right):\left|\frac{a_k}{b_k}-\gamma\right|<\varepsilon\;\;\left(k\geq k_0\right)\right).$$

Lause 2.1.2 põhjal võime piirduda juhuga $k_0=1$. Et

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_k}{b_k}-\gamma\right|<\varepsilon\;\;&\Leftrightarrow\;\;-\varepsilon<\frac{a_k}{b_k}-\gamma<\varepsilon\;\;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\;\;\gamma-\varepsilon<\frac{a_k}{b_k}<\gamma+\varepsilon\;\;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\;\;\left(\gamma-\varepsilon\right)b_k<a_k<\left(\gamma+\varepsilon\right)b_k,\end{aligned}$$

siis saame tulemuseks võrratuste ahela

$$\left(\gamma-\varepsilon\right)b_k<a_k<\left(\gamma+\varepsilon\right)b_k\quad\left(k\in\mathbf{N}\right). \tag{2.2.5}$$

Käsitleme kaht juhtu.
1° Eeldame, et rida (2.2.1) on koonduv. Olgu arv $\varepsilon>0$ selline, et $\gamma-\varepsilon>0$. Ahela (2.2.5) esimese võrratuse põhjal $\left(\gamma-\varepsilon\right)b_k<a_k\;\;\left(k\in\mathbf{N}\right)$. Rakendame Lauset 2. Selle põhjal koondub positiivne arvrida $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma-\varepsilon\right)b_k$, mis aga Lause 2.1.4 põhjal koondub parajasti siis, kui koondub rida (2.2.2). Seega on rida (2.2.2) ka koonduv.
2° Eeldame, et rida (2.2.2) on koonduv. Siis koondub ka rida, mille üldliikmeks on $\left(\gamma+\varepsilon\right)b_k$. Ahela (2.2.5) viimase võrratuse põhjal $a_k<\left(\gamma+\varepsilon\right)b_k\;\;\left(k\in\mathbf{N}\right)$. Lause 2 põhjal koondub ka rida (2.2.1).

Järelikult rea (2.2.1) koonduvusest järeldub rea (2.2.2) koonduvus, ja vastupidi, rea (2.2.2) koonduvusest järeldub rea (2.2.1) koonduvus. Seega read (2.2.1) ja (2.2.2) kas koonduvad või hajuvad samaaegselt. □

Näide 3. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2+2}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga, sest $\dfrac{2k+1}{k^2+2} \geq 0 \quad (k \in \mathbf{N})$. Võrdleme seda rida harmoonilise reaga $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}}$. Leiame, et

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{2k+1}{k^2+2}}{\dfrac{1}{k^{\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^{1+\alpha}+k^{\alpha}}{k^2+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^{\alpha-1}+k^{\alpha-2}}{1+\dfrac{2}{k^2}} =$$

$$= \begin{cases} \infty, \text{ kui } \alpha > 1, \\ 0, \text{ kui } \alpha < 1, \\ 2, \text{ kui } \alpha = 1. \end{cases}$$

Rakendame Lauset 4. Kuna harmooniline rida on hajuv $\alpha = 1$ korral, siis ka uuritav rida on hajuv. $\diamondsuit$

Näide 4. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{2k}$ koonduvust.

Tegemist on positiivse arvreaga, sest

$$(k \in \mathbf{N}) \Rightarrow \left(0 < \frac{\pi}{2k} \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\sin \frac{\pi}{2k} > 0\right).$$

Võrdleme uuritavat rida harmoonilise reaga $\alpha = 1$ korral. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin \dfrac{\pi}{2k}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin \dfrac{\pi}{2k}}{\dfrac{1}{k}} = \left[\sin \frac{\pi}{2k} \overset{k\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2k}\right] = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2k}}{\dfrac{1}{k}} = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Lause 4 põhjal on uuritav rida hajuv. $\diamondsuit$

Näide 5. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3}{\sqrt{k^3+2k}}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Võrdleme seda rida harmoonilise reaga. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{3}{\sqrt{k^3+2k}}}{\dfrac{1}{k^{\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{\sqrt{k^{3-2\alpha}+2k^{1-2\alpha}}} = \begin{cases} \infty, \text{ kui } \alpha > 1.5, \\ 0, \text{ kui } \alpha < 1.5, \\ 3, \text{ kui } \alpha = 1.5. \end{cases}$$

Kuna harmooniline rida on koonduv $\alpha = 1.5$ korral, siis on uuritav rida Lause 4 põhjal koonduv. $\diamondsuit$

Näide 6. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Võrdleme seda rida harmoonilise reaga. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\dfrac{1}{k^{\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}{k^{-\alpha}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k^{1-2\alpha}} + \sqrt{k^{1-2\alpha} - k^{-2\alpha}}} =$$

$$= \begin{cases} \infty, \text{ kui } \alpha > \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ kui } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1, \text{ kui } \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rakendame Lauset 4. Et harmooniline rida on $\alpha = \frac{1}{2}$ korral hajuv, siis ka uuritav rida on hajuv. $\diamondsuit$

2.3 D'Alembert'i tunnus

Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiivne arvrida. Eksisteerigu lõplik piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q. \tag{2.3.1}$$

Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist leiame

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - q \right| < \varepsilon \ \ (k \geq k_0)$$

ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : -\varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} - q < \varepsilon \ \ (k \geq k_0)$$

või

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : (q - \varepsilon)\, a_k < a_{k+1} < (q + \varepsilon)\, a_k \ \ (k \geq k_0)\,. \tag{2.3.2}$$

Et Lause 2.1.2 alusel ei mõjuta lõpliku arvu rea esimeste liikmete ärajätmine või lisamine rea koonduvust, siis piisab vaid uurida juhtu $k_0 = 1$.

Kui $q < 1$, siis võime ette anda sellise arvu $\varepsilon > 0$, et ka $q + \varepsilon < 1$. Võrratuste ahela (2.3.2) viimase võrratuse põhjal leiame

$$a_{k+1} < (q + \varepsilon)\, a_k \quad (k \in \mathbf{N})$$

ja

$$a_k < (q + \varepsilon)\, a_{k-1} < (q + \varepsilon)^2\, a_{k-2} < \ldots < (q + \varepsilon)^{k-1}\, a_1 \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Võrdleme positiivseid arvridu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} (q + \varepsilon)^{k-1}\, a_1$. Et

$$|q + \varepsilon| < 1 \overset{\text{Näide 2.1.2}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (q + \varepsilon)^{k-1} \in c \overset{\text{Lause 2.1.4}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (q + \varepsilon)^{k-1}\, a_1 \in c$$

ja $a_k < (q + \varepsilon)^{k-1}\, a_1 \ \ (k \in \mathbf{N})$, siis Lause 2.2.2 põhjal on koonduv ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Kui $q > 1$, siis võime ette anda sellise arvu $\varepsilon > 0$, et ka $q-\varepsilon > 1$. Võrratuste ahela (2.3.2) esimese võrratuse põhjal leiame

$$a_{k+1} > (q-\varepsilon)\, a_k \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Seega

$$a_k > (q-\varepsilon)\, a_{k-1} > (q-\varepsilon)^2\, a_{k-2} > \ldots > (q-\varepsilon)^{k-1}\, a_1 \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Võrreldes positiivseid arvridu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} (q-\varepsilon)^{k-1} a_1$, jõuame Lause 2.2.3 põhjal tulemuseni, et hinnangust $a_k > (q-\varepsilon)^{k-1} a_1$ $(k \in \mathbf{N})$ ja absoluutväärtuse poolest ühest suurema teguriga geomeetrilise rea $\sum_{k=1}^{\infty} (q-\varepsilon)^{k-1} a_1$ hajuvusest järeldub rea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajuvus. Kui $q = 1$, siis eelnevalt kasutatud metoodika ei ole rakendatav. Sõnastame tõestatud väite.

Lause 1 (*d'Alembert'i tunnus*)**.** Kui positiivse arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus (2.3.1), siis

1) juhul $q < 1$ on uuritav rida koonduv,

2) juhul $q > 1$ on uuritav rida hajuv.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^k}{k!}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Et

$$a_k = \frac{3^k}{k!} \;\Rightarrow\; a_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{(k+1)!},$$

siis

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{3^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1} k!}{(k+1)!3^k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\, k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\, k\cdot (k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{(k+1)} = 0 < 1$$

ja Lause 1 põhjal on uuritav rida koonduv. $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(3k-2)!!!}{(2k-1)!!}$ koonduvust.

Selgitame tähistusi:

$$(3k-2)!!! \overset{def}{=} 1\cdot 4\cdot 7\cdots (3k-5)\cdot (3k-2) \quad (k \in \mathbf{N})\,,$$

$$(2k-1)!! \overset{def}{=} 1\cdot 3\cdot 5\cdots (2k-3)\cdot (2k-1) \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Tegu on positiivse arvreaga. Kuna

$$a_k = \frac{(3k-2)!!!}{(2k-1)!!} \ \Rightarrow\ a_{k+1} = \frac{(3\,(k+1)-2)!!!}{(2\,(k+1)-1)!!} = \frac{(3k+1)!!!}{(2k+1)!!},$$

siis

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(3k+1)!!!}{(2k+1)!!}}{\dfrac{(3k-2)!!!}{(2k-1)!!}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(3k+1)!!!\,(2k-1)!!}{(2k+1)!!\,(3k-2)!!!} = \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3k-2)\,(3k+1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)\,(2k+1)\cdot 1\cdot 4\cdots(3k-2)} = \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{3k+1}{2k+1} = \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

ja uuritav rida on Lause 1 põhjal hajuv. $\diamondsuit$

Näide 3. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!e^k}$ koonduvust. Tegu on positiivse arvreaga. Et

$$a_k = \frac{k^{k-1}}{k!e^k} \ \Rightarrow\ a_{k+1} = \frac{(k+1)^{(k+1)-1}}{(k+1)!e^{(k+1)}} = \frac{(k+1)^k}{(k+1)!e^{k+1}},$$

siis

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+1)^k}{(k+1)!e^{k+1}}}{\dfrac{k^{k-1}}{k!e^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^k\,k!e^k}{(k+1)!e^{k+1}k^{k-1}} = \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k-1}}{ek^{k-1}} = \frac{1}{e}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{e}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\dfrac{k-1}{k}} = \left[\begin{array}{c}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k \overset{k\to\infty}{\to} e, \\ \dfrac{k-1}{k} \overset{k\to\infty}{\to} 1\end{array}\right] = 1\end{aligned}$$

ja Lause 1 põhjal ei ole d'Alembert'i tunnus rakendatav. Selle rea koonduvuse täiendaval uurimisel kasutame *Stirlingi valemit*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} \quad (n\to\infty)\,, \tag{2.3.3}$$

st

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = 1.$$

Märgime, et

$$n! - \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty,$$

st suuruste $n!$ ja $\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ vahe $n! - \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ on madalamat järku lõpmata suur suurus, võrreldes suurustega $n!$ ja $\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ piirprotsessis $n \to \infty$. Võrdleme positiivseid arvridu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k! e^k}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^{k-1}}{k! e^k}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \left[\begin{array}{c} k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \\ (k \to \infty) \end{array} \right] = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+\alpha-1}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} e^k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k\to\infty} k^{\alpha-1.5} \overset{\alpha=1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Rakendame Lauset 2.2.4. Harmoonilise rea koonduvusest $\alpha = 1.5$ korral järeldub uuritava rea koonduvus. $\diamondsuit$

2.4 Cauchy tunnus

Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiivne arvrida. Eksisteerigu lõplik piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q. \tag{2.4.1}$$

Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist leiame, et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) : \ |\sqrt[k]{a_k} - q| < \varepsilon \quad (k \ge k_0)$$

ja

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) : \ -\varepsilon < \sqrt[k]{a_k} - q < \varepsilon \quad (k \ge k_0)$$

või

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) : \ q - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < q + \varepsilon \quad (k \ge k_0)$$

ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) : \ (q-\varepsilon)^k < a_k < (q+\varepsilon)^k \quad (k \ge k_0)\,. \tag{2.4.2}$$

Lause 2.1.2 põhjal piisab uurida vaid juhtu $k_0 = 1$. Kui $q < 1$, siis võime ette anda sellise arvu $\varepsilon > 0$, et ka $q + \varepsilon < 1$. Võrdleme positiivseid arvridu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} (q+\varepsilon)^k$. Geomeetriline rida $\sum_{k=1}^{\infty} (q+\varepsilon)^k$ on teguri $q + \varepsilon$, kusjuures $|q + \varepsilon| < 1$, korral koonduv. Kasutame võrratuste ahela (2.4.2) viimast võrratust

$$a_k < (q+\varepsilon)^k \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Lause 2.2.2 alusel võime väita, et ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on koonduv. Kui $q > 1$, siis võime ette anda sellise arvu $\varepsilon > 0$, et ka $q - \varepsilon > 1$. Kasutame võrratuste ahela (2.4.2) esimest võrratust

$$(q-\varepsilon)^k < a_k \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Võrreldes positiivseid arvridu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} (q-\varepsilon)^k$, võime Lause 2.2.3 põhjal väita, et geomeetrilise rea $\sum_{k=1}^{\infty} (q-\varepsilon)^k$ hajuvusest teguri $q-\varepsilon$, kusjuures $|q-\varepsilon| > 1$, korral järeldub rea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajuvus. Kui $q = 1$, siis eelnevalt kasutatud metoodika ei ole rakendatav. Sõnastame tõestatud väite.

Lause 1 (*Cauchy tunnus*)**.** Kui positiivse arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus (2.4.1), siis

1) juhul $q < 1$ on uuritav rida koonduv,

2) juhul $q > 1$ on uuritav rida hajuv.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{3k-1}\right)^k$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Rea üldiikmest on vajalik juur lihtsalt võetav. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k+1}{3k-1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{3k-1} = \frac{2}{3}.$$

Cauchy tunnuse põhjal on uuritav rida koonduv. $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{-k^2}$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Et uuritava rea üldliikmest on lihtsalt võetav k-ndat järku juur, siis rakendame Cauchy tunnust. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{3^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{-k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3}{\left[\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\right]^{\frac{k}{k+1}}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1} \overset{k\to\infty}{\to} e \\ \dfrac{k}{k+1} \overset{k\to\infty}{\to} 1 \end{array}\right] = \frac{3}{e} > 1.$$

Cauchy tunnuse põhjal on uuritav rida hajuv. $\diamondsuit$

Näide 3. Uurime Cauchy tunnuse abil rea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^{k-1}}{k!e^k}$ koonduvust.
Tegu on positiivse arvreaga. Kui kasutada lisaks Stirlingi valemit, saame

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^{k-1}}{k!e^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{2\pi k}k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{2\pi k}}\sqrt[k]{k}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 1}{\left(\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{2\pi k}}\right)\left(\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)} = \left[\sqrt[k]{k} \overset{k\to\infty}{\to} 1\right] = 1.$$

Seega Cauchy tunnus ei ole rakendatav. Vaadake Näites 2.3.3 esitatud lahendust.
$\diamondsuit$

2.5 Integraaltunnus

Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiivne arvrida. Leidugu selline funktsioon $f(x)$, mille korral on täidetud tingimused

$$f(k) = a_k, \tag{2.5.1}$$

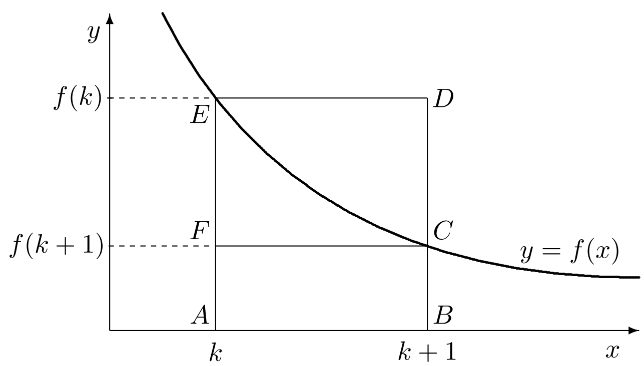
$$f(x) \geq 0 \quad (x \in [1; +\infty)) \tag{2.5.2}$$

ja

$$f(x) \downarrow \ (x \in [1; +\infty))\,. \tag{2.5.3}$$

Tingimusest (2.5.3) järeldub, et

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \quad (x \in [k, k+1]\,,\ k \in \mathbf{N})\,. \tag{2.5.4}$$



Integreerime võrratuste ahela (2.5.4) iga liiget muutuja x järgi lõigul $[k, k+1]$. Määratud integraali monotoonsuse põhjal leiame

$$\int_k^{k+1} f(k)\,dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \quad (k \in \mathbf{N})$$

(joonisel $S_{ABDE} \geq S_{ABCE} \geq S_{ABCF}$) ehk

$$f(k)\int_k^{k+1} dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)\int_k^{k+1} dx \quad (k \in \mathbf{N})$$

või

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1) \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Viimasest ahelast saame tingimuse (2.5.1) abil, et

$$a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq a_{k+1} \quad (k \in \mathbf{N})\,.$$

Seega kehtivad seosed

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \quad (n \in \mathbf{N})$$

ja

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geq S_{n+1} - a_1 \quad (n \in \mathbf{N})\,. \tag{2.5.5}$$

Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in c$. Et viimane tingimus on positiivse arvrea korral samaväärne selle rea osasummade jada $\{S_n\}$ tõkestatusega, st $\exists\, M > 0 : S_n \leq M \quad (n \in \mathbf{N})$, siis ahela (2.5.5) esimesest võrratusest leiame, et

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq M \quad (n \in \mathbf{N})\,. \tag{2.5.6}$$

Kuna on täidetud tingimus (2.5.2), siis päratu integraal $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ koondub parajasti siis, kui integraalide jada $\left\{\int_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ on ülalt tõkestatud. Seega tingimusest (2.5.6) järeldub, et päratu integraal $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ on koonduv. Teistpidi, olgu vastav päratu integraal koonduv. Et tingimuse (2.5.2) korral järeldub päratu integraali koonduvusest tingimuse (2.5.6) täidetus, siis ahela (2.5.5) viimase võrratuse abil jõuame hinnanguni

$$S_{n+1} \leq M + a_1 \quad (n \in \mathbf{N})\,,$$

mis positiivse arvrea korral on piisav selle rea koonduvuseks. Seega päratu integraali $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ koonduvusest järeldub rea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ koonduvus. Formuleerime tõestatud tulemuse.

Lause 1 (*integraaltunnus*)**.** Kui positiivse arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ korral on täidetud tingimused (2.5.1), (2.5.2) ja (2.5.3), siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja päratu integraal $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ kas koonduvad või hajuvad samaaegselt.

Näide 1. Uurime harmoonilse rea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ koonduvust.

Kui $\alpha \le 0$, siis ei ole täidetud rea koonduvuse tarvilik tingimus, sest

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty, \text{ kui } \alpha < 0, \\ 1, \text{ kui } \alpha = 0. \end{cases}$$

Seega juhul $\alpha \le 0$ on harmooniline rida hajuv. Juhul $\alpha > 0$ rahuldab abifunktsioon $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ tingimusi (2.5.1), (2.5.2) ja (2.5.3). Et

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} \overset{\alpha\ne1}{=} \lim_{A\to\infty} \left(\frac{A^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \infty, \text{ kui } 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, \text{ kui } \alpha > 1 \end{cases}$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty,$$

siis juhul $0 < \alpha \le 1$ päratu integraal hajub ja juhul $\alpha > 1$ koondub. Rakendame Lauset 1. Seega harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ koondub, kui $\alpha > 1$, ja hajub, kui $\alpha \le 1$. $\diamondsuit$

Vormistame Näite 1 tulemuse.

Lause 2. Harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ koondub, kui $\alpha > 1$, ja hajub, kui $\alpha \le 1$.

Näide 2. Uurime rea $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)(\ln\ln k)^\beta}$ $(\beta > 1)$ koonduvust.

Tegu on positiivse arvreaga. Uurime vastava päratu integraali koonduvust. Et

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^\beta} = \left[d(\ln\ln x) = (\ln\ln x)' \, dx = \frac{dx}{x(\ln x)} \right] =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \int_3^A (\ln\ln x)^{-\beta} \, d(\ln\ln x) =$$
$$= \frac{1}{1-\beta} \lim_{A\to+\infty} \left((\ln\ln A)^{1-\beta} - (\ln\ln 3)^{1-\beta} \right) =$$
$$= (\ln\ln 3)^{1-\beta} / (\beta - 1),$$

siis koondub vastav päratu integraal. Vastavalt Lause 1 väitele on koonduv ka uuritav rida. $\diamondsuit$

Esitame tõestuseta veel ühe tunnuse.

Lause 2 (*Raabe tunnus*)**.** Kui positiivse arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = r,$$

siis

1) juhul $r > 1$ on uuritav rida koonduv,
2) juhul $r < 1$ on uuritav rida hajuv.

Näide 3. Uurime Raabe tunnuse abil rea $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ koonduvust. Tegemist on positiivse arvreaga. Kuna

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(1-\left(\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right)^p \Big/ \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^p\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left(1-\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^p\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(1-\left(\frac{(2k+2)-1}{2k+2}\right)^p\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left(1-\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)^p\right) = \left[(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x\to 0)\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{kp}{2k+2} = \frac{p}{2},$$

siis on uuritav rida juhul $\frac{p}{2} > 1 \ \Leftrightarrow\ p > 2$ Lause 2 põhjal koonduv. $\diamondsuit$

2.6 Leibnizi tunnus

Definitsioon 1. Arvrida

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \tag{2.6.1}$$

kus $a_k > 0 \ \ (k \in \mathbf{N}_0)$, nimetatakse *vahelduvate märkidega reaks.*

Lause 1 *(Leibnizi tunnus).* Kui vahelduvate märkidega rea (2.6.1) korral on täidetud rea kooduvuse tarvilik tingimus ja jada $\{a_k\}$ on monotoonselt kahanev, siis rida (2.6.1) on koonduv.

Tõestus. Uurime rea (2.6.1) esimese $2n+1$ liikme summat S_{2n+1}. Et

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

kus $a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0 \ \ (1 \leq k \leq n)$, siis jada $\{S_{2n+1}\}$ on monotoonselt kahanev. Et teisalt,

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n},$$

kus $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n-1)$, siis $S_{2n+1} \geq 0$. Seega on jada $\{S_{2n+1}\}$ monotoonselt kahanev ja alt tõkestatud. Järelikult on jada $\{S_{2n+1}\}$ koonduv:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S. \tag{2.6.2}$$

Et

$$S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n},$$

siis tingimustest $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ saame, et

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S. \tag{2.6.3}$$

Seostest (2.6.2) ja (2.6.3) järeldub, et

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

mida oligi vaja tõestada. $\square$

Definitsioon 2. Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Kasutame tähistust

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in ac\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \in c\right).$$

Definitsioon 3. Koonduvat arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nimetatakse *tingimisi koonduvaks,* kui ta ei ole absoluutselt koonduv.

Näide 1. Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ koonduvust.

Tegu on vahelduvate märkidega reaga, mille korral on koonduvuse tarvilik tingimus täidetud. Juhul $0 < \alpha < 1$ leiame, et $\dfrac{1}{k^\alpha} \downarrow 0,$ kui $k \to \infty.$ Rakendame Leibnizi tunnust. Rida on koonduv. Et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k^\alpha}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

ja juhul $0 < \alpha < 1$ on harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ hajuv, siis on uuritav rida koonduv, kuid ei ole absoluutselt koonduv. Seega on rida $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ tingimisi koonduv. $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime rea $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{\ln k}$ koonduvust.

Tegu on vahelduvate märkidega reaga, mille korral on koonduvuse tarvilik tingimus täidetud. Et $(1/\ln k) \downarrow$, siis on võimalik rakendada Leibnizi tunnust. Leiame, et uuritav rida on koonduv. Leiame

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{\ln k}\right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}.$$

Et

$$(k \geq 2) \Rightarrow \left(\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}\right)$$

ja harmooniline rida $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ on hajuv, siis Lause 2.2.3 põhjal $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \notin c$. Seega on uuritav rida $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$ koonduv, kuid ei ole absoluutselt koonduv. Tegemist on tingimisi koonduva reaga. $\diamondsuit$

Näide 3. Uurime rea $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(0.3k\pi)}{k^2+1}$ koonduvust.

Tegemist on arvreaga. Uurime selle rea absoluutset koonduvust. Et

$$\left|\frac{\cos(0.3k\pi)}{k^2+1}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

ja harmooniline rida $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ on koonduv, siis koondub uuritav rida absoluutselt. $\diamondsuit$

Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_0} + a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots$$

nimetatakse rea (2.1.1) *ümberjärjestuseks.* Esitame tõestuseta kaks järgmist väidet, mille tõestused leiab huviline G. Kangro õpikust [9], lk 29–32.

Lause 2 (*Dirichlet' teoreem*). Absoluutselt koonduva rea iga ümberjärjestus koondub samaks summaks.

Lause 3 (*Riemanni teoreem*). Tingimisi koonduval real (2.1.1) leidub selline ümberjärjestus, mille summaks on suvaliselt ette antud arv või $+\infty$ või $-\infty$.

2.7 Funktsionaalread

Järgnevalt uurime ridu, millel on matemaatilises analüüsis oluline osa funktsioonide esitamisel.

Definitsioon 1. Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x), \tag{2.7.1}$$

mille liikmed $u_k(x)$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ on funktsioonid, nimetatakse *funktsionaalreaks.*

Olgu X_k funktsiooni $u_k(x)$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ määramispiirkond ja $X = \cap_{k=0}^{\infty} X_k$. Fikseerime arvu $x \in X$. Arvutame selle x korral funktsioonide $u_k(x)$ väärtused ja uurime saadud arvrea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ koonduvust. Kui saadud arvrida koondub, siis öeldakse, et funktsionaalrida koondub punktis x ja selle arvrea summat nimetatakse funktsionaalrea summaks punktis x. Kui saadud arvrida hajub, siis öeldakse, et funktsionaalrida hajub punktis x. Nii uurime iga $x \in X$ korral.

Üldjuhul lahutub hulk X kaheks alamhulgaks: hulgaks X_c, mille igas punktis funktsionaalrida koondub, ja hulgaks $X \setminus X_c$, mille igas punktis funktsionaalrida hajub. Hulka X_c nimetatakse funktsionaalrea koonduvuspiirkonnaks. Tulemusena saame hulgal X_c määratud funktsiooni, *funktsionaalrea summa,* mis funktsionaalrea koonduvuspiirkonna X_c igale punktile x seab vastavusse funktsionaalrea summa selles punktis x. Olgu $S(x)$ funktsionaalrea summa tähistus. Seega on funktsioon $S(x)$ määratud hulgal X_c.

Näide 1. Uurime funktsionaalrida $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Antud juhul $X_k = \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$. Seega $X = \cap_{k=0}^{\infty} X_k = \mathbf{R}$. Fikseerime arvu $x \in X$. Arvutame selle x korral funktsioonide x^k väärtused ja uurime saadud arvrea $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ koonduvust. Tegu on geomeetrilise reaga, mis koondub, kui $|x| < 1$, ja hajub, kui $|x| \geq 1$. Seega $X_c = (-1;1)$ ja $S(x) = 1/(1-x)$. ♢

Näide 2. Uurime funktsionaalrea $x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(x^k - x^{k-1}\right)$ koonduvust.

Leiame $X_k = \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$, $X = \mathbf{R}$ ja $S_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Iga fikseeritud $x \in (-1;1] = X_c$ korral uuritava rea osasummade jada $\{x^n\}$ koondub, kusjuures

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-1;1), \\ 1, & \text{kui } x = 1. \end{cases}$$

Uurime täiendavalt rea koonduvust vahemikus $(0;1)$. Kui $x \in (0;1)$ on fikseeritud, siis arvjada $\{x^n\}$ koondub arvuks 0. Vastavalt arvjada piirväärtuse definitsioonile leidub suvalise $\varepsilon > 0$ korral selline naturaalarv n_0, et

$$|x^n - 0| < \varepsilon \quad (n > n_0). \tag{2.7.2}$$

Kuna $x \in (0;1)$, siis seos (2.7.2) on esitatav kujul

$$x^n < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

ehk

$$(n \ln x < \ln \varepsilon \;\; (n > n_0)) \;\Leftrightarrow \left(n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \;\; (n > n_0)\right).$$

Viimasest seosest selgub, et naturaalarv n_0 tuleb valida suurem kui suuruse $(\ln \varepsilon)/(\ln x)$ täisosa. Seega ei ole võimalik valida sellist arvu n_0, mis sobiks iga $x \in (0;1)$ korral. Järelikult saame Näite 2 korral tulemuseks $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$. ♢

Definitsioon 2. Öeldakse, et funktsionaalrida (2.7.1) *koondub ühtlaselt* hulgal $X_{uc} \subset X_c$ summaks $S(x)$, kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline naturaalarv n_0, et

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

iga $x \in X_{uc}$ korral, kusjuures $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x)$.

Rõhutame, kui funktsionaalrida (2.7.1) koondub ühtlaselt hulgal X_{uc}, siis arv n_0 ei sõltu argumendi $x \in X_{uc}$ valikust, vaid ainult suurusest ε, st $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Seega ei koondu Näites 2 uuritav rida ühtlaselt vahemikus $(0;1)$. Kasutame Lauses 2.1.3 esitatud arvrea koonduvuse tarvilikke ja piisavaid tingimusi.

Lause 1. Funktsionaalrida (2.7.1) koondub ühtlaselt hulgal X_{uc} parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub selline naturaalarv n_0, et iga $p \in \mathbf{N}$ ja $x \in X_{uc}$ puhul

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

kui $n > n_0$.

Järeldus 1. Kui funktsionaalrida (2.7.1) koondub ühtlaselt hulgal X_{uc}, siis suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline naturaalarv n_0, et

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in X_{uc},\ n > n_0)\,,$$

kusjuures $R_n(x)$ on rea $\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)$ summa.

Esitame kriteeriumi, mida praktikas rea ühtlase koonduvuse uurimisel tihti kasutatakse.

Lause 2 *(Weierstrassi tunnus).* Kui leidub selline koonduv positiivne arvrida

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \tag{2.7.3}$$

et

$$|u_k(x)| \le a_k \quad (x \in X_{uc},\ k \in \mathbf{N}_0)\,, \tag{2.7.4}$$

siis koondub funktsionaalrida (2.7.1) ühtlaselt hulgal X_{uc}.

Tõestus. Kui (2.7.3) on koonduv positiivne arvrida, siis Lause 2.1.3 põhjal iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline naturaalarv n_0, et tingimusest $n > n_0$ järeldub iga $p \in \mathbf{N}$ korral hinnang

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Et $a_k \ge 0$, siis omandab eelmine võrratus kuju

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

millest hinnangute (2.7.4) põhjal järeldub

$$|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + |u_{n+3}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (\forall\, x \in X_{uc})\,.$$

Seega iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $n_0 \in \mathbf{N}$, et $n > n_0$ korral

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \ \ (\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in X_{uc})\,.$$

Rakendame Lauset 1. $\square$

Definitsioon 3. Positiivset arvrida (2.7.3), mille liikmed rahuldavad tingimust (2.7.4), nimetatakse funktsionaalrea (2.7.1) *majorantreaks* hulgal X_{uc}.

Näide 3. Uurime rea $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^2+1}$ ühtlast koonduvust.

Positiivne arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}$ on koonduv. Tõesti

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A\to+\infty} (\arctan A - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Seega integraaltunnuse põhjal on arvrida koonduv. Kehtib hinnang

$$\left| \frac{\cos kx}{k^2+1} \right| \le \frac{1}{k^2+1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Rakendame Lauset 2. Uuritav funktsionaalrida koondub ühtlaselt kõigi reaalarvude hulgal $\mathbf{R}$. ♢

Lause 3. Kui rea (2.7.1) liikmed $u_k(x)$ on pidevad hulgal X_{uc} ja rida (2.7.1) koondub ühtlaselt sel hulgal, siis rea (2.7.1) summa $S(x)$ on hulgal X_{uc} pidev funktsioon.

Tõestus. Kui $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x)$ ja $R_n(x)$ rea $\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)$ summa, st $R_n(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \sum_{k=n}^{p} u_k(x)$, siis

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \ \ (x \in X_{uc},\ n \in \mathbf{N}).$$

Järelduse 1 põhjal leidub suvalise $\varepsilon > 0$ korral selline naturaalarv n_0, et

$$|R_n(x)| < \varepsilon/3 \quad (x \in X_{uc},\ n > n_0).$$

Olgu $a \in X_{uc}$. Et funktsioon $S_n(x)$, kui n pideva funktsiooni summa, on pidev punktis a, siis vastavalt etteantud arvule $\varepsilon > 0$ leidub selline arv δ, et

$$(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|S_n(x) - S_n(a)| < \varepsilon/3).$$

Leiame, et

$$\begin{aligned} |S(x) - S(a)| &= |(S_n(x) + R_n(x)) - (S_n(a) + R_n(a))| \le \\ &\le |S_n(x) - S_n(a)| + |R_n(x)| + |R_n(a)| \overset{|x-a|<\delta,\ n>n_0}{\le} \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

st funktsioon $S(x)$ on pidev punktis a. □

Lause 4. Kui lõigul $[a, b]$ integreeruvate funktsioonide rida (2.7.1) koondub sel lõigul ühtlaselt, siis rida (2.7.1) võib lõigul $[a, b]$ liikmeti integreerida, st

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\, dx. \tag{2.7.5}$$

Tõestus. Kui $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x)$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ja $R_n(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \sum_{k=n}^{p} u_k(x)$, siis leiame, et

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \ \ (x \in [a,b]\,,\ n \in \mathbf{N})$$

ning

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b u_k(x)\,dx &= \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx = \\ &= \int_a^b (S(x) - S_n(x))\,dx = \\ &= \int_a^b R_n(x)dx.\end{aligned}$$

Rea (2.7.1) ühtlase koonduvuse tõttu saame Järelduse 1 abil

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad (n > n_0) \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Seega

$$\left|\int_a^b R_n(x)dx\right| \le \int_a^b |R_n(x)|\,dx \overset{n>n_0}{<} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

ja

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b u_k(x)\,dx\right| \overset{n>n_0}{<} \varepsilon,$$

mis tähendab, et integraal $\int_a^b S(x)dx$ on rea $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$ n-nda osasumma $\sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b u_k(x)\,dx$ piirväärtus piirprotsessis $n \to \infty$. Järelikult kehtib seos (2.7.5), kus sümboliga $\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right) dx$ tähistatakse integraali rea (2.7.1) summast. $\square$

Analoogiliselt tõestatakse järgmine väide.

Lause 5. Kui rea (2.7.1) korral $u_k'(x) \in C[a,b]$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$ koondub ühtlaselt lõigul $[a,b]$, siis funktsionaalrida (2.7.1) võib lõigul $[a,b]$ liikmeti diferentseerida, st

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(u_k(x)).$$

Seejuures tähistatakse sümboliga $\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right)$ tuletist rea (2.7.1) summast.

2.8 Abeli teoreem

Järgnevas uurime teatavas mõttes lihtsamaid funktsionaalridu.

Definitsioon 1. Funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{2.8.1}$$

nimetatakse *astmereaks.* Suurusi a_k $(k \in \mathbf{N}_0)$ nimetatakse *astmerea kordajateks.*

Teostame rea (2.8.1) korral muutujate vahetuse $y = x - a$. Tulemuseks saame astmerea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$. Seega piisab uurida astmeridu kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2.8.2}$$

Lause 1 (*Abeli teoreem*). Kui astmerida (2.8.2) koondub punktis x_0, siis rida (2.8.2) koondub absoluutselt iga x korral, mis rahuldab võrratust

$$|x| < |x_0|\,, \tag{2.8.3}$$

ja hulgal

$$X = \{x : |x| \le q < |x_0|\}\,, \tag{2.8.4}$$

kus q on mingi positiivne arv, koondub rida (2.8.2) ühtlaselt. Kui astmerida (2.8.2) hajub punktis x_1, siis rida (2.8.2) hajub iga x korral, mis rahuldab võrratust

$$|x| > |x_1|\,. \tag{2.8.5}$$

Tõestus. Lause 1 väide koosneb kolmest osast.

1. Juhul $x_0 = 0$ on Lause 1 esimene väide ilmne. Olgu rida (2.8.2) koonduv punktis x_0, kusjuures $x_0 \neq 0$. Arvrea koonduvuse tarviliku tingimuse põhjal leiame, et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \in c\right) \Rightarrow \left(\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0\right).$$

Kuna iga koonduv arvjada on tõkestatud, siis

$$\left(\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0\right) \Rightarrow \left(\exists M > 0 : \left|a_k x_0^k\right| \le M \quad (k \in \mathbf{N}_0)\right). \tag{2.8.6}$$

Fikseerime punkti x, mis rahuldab võrratust (2.8.3). Saame hinnangu

$$\left|a_k x^k\right| \le \left|a_k x_0^k\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \overset{(2.8.6)}{\le} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad (k \in \mathbf{N}_0)\,,$$

st

$$\left|a_k x^k\right| \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad (k \in \mathbf{N}_0)\,. \tag{2.8.7}$$

Võrdleme positiivseid arvridu, mille üldliikmeteks on $\left|a_k x^k\right|$ ja $M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^k$. Et $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| \overset{(2.8.3)}{<} 1$, siis geomeetriline rida $\sum_{k=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^k$ on koonduv. Võrratuse (2.8.7) ning Lause 2.2.2 põhjal on rida $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k x^k\right|$ koonduv. Seega meie poolt fikseeritud tingimust (2.8.3) rahuldava x korral on arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absoluutselt koonduv. Kuna tingimust (2.8.3) rahuldava arvu x fikseerisime suvaliselt, siis oleme tõestanud Lause 1 esimese väite.

2. Kui x kuulub tingimusega (2.8.4) määratud hulka X, siis tingimusest $q < |x_0|$ ja rea (2.8.2) koonduvusest punktis x_0 järeldub Lause 1 esimese osa põhjal rea (2.8.2) absoluutne koonduvus punktis q, st positiivse arvrea $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k q^k\right|$ koonduvus. Lisaks kehtib tingimuse (2.8.4) põhjal hinnang

$$\left|a_k x^k\right| \le \left|a_k q^k\right| \quad (x \in X)\,.$$

Rakendame Weierstrassi tunnust. Sellest järeldub astmerea (2.8.2) ühtlane koonduvus hulgal X.

3. Olgu astmerida (2.8.2) hajuv punktis x_1. Eeldame väitevastaselt, et leidub selline tingimust (2.8.5) rahuldav punkt x, milles rida (2.8.2) koondub. Sel juhul järeldub Lause 1 esimesest väitest, et rida (2.8.2) koondub punktis x_1 absoluutselt. See tulemus on aga vastuolus meie eeldusega. $\square$

Definitsioon 2. Astmerea (2.8.2) *koonduvusraadiuseks* R nimetatakse suurust, mis on defineeritud valemiga

$$R = \sup_{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,\in\, c} |x|\,.$$

Seega defineeritakse astmerea (2.8.2) koonduvusraadius R kui suuruste x, milles astmerida koondub, absoluutväärtuste hulga vähim ülemine tõke, kusjuures R võib olla ka $+\infty$.

Järeldus 1. Arv R on astmerea (2.8.2) koonduvusraadius parajasti siis, kui astmerida (2.8.2) koondub vahemikus $(-R, R)$ absoluutselt ja $R \ne +\infty$ korral hajub hulgal $\{x : |x| > R\}$.

Lause 2. Kui astmerea (2.8.2) korral $a_k \ne 0 \;\; (k \ge k_0)$ ja leidub lõplik või lõpmatu piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

siis astmerea (2.8.2) koonduvusraadius avaldub kujul

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}. \tag{2.8.8}$$

Tõestus. Fikseerime rea (2.8.2) korral punkti x. Saame arvrea. Veenduge, et $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = 0$ korral on Lause 2 väide ilmne. Olgu $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \ne 0$. Uurime D'Alembert'i tunnuse abil selle arvrea absoluutset koonduvust, st positiivse arvrea $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x^k\right|$ koonduvust. Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|a_{k+1}x^{k+1}\right|}{\left|a_k x^k\right|} = \left[\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \neq 0\right] = |x| \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}}.$$

Seega koondub astmerida (2.8.2) absoluutselt, kui

$$|x| \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

ja ei ole absoluutselt koonduv, kui

$$|x| \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}} > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Järelduse 1 põhjal avaldub astmerea (2.8.2) koonduvusraadius R valemiga (2.8.8). Seda oligi vaja tõestada. $\square$

Analoogiliselt tõestatakse järgnev väide.

Lause 3. Kui astmerea (2.8.2) korral $a_k \neq 0$ $(k \geq k_0)$ ja leidub lõplik või lõpmatu piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}},$$

siis astmerea (2.8.2) koonduvusraadius avaldub kujul

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{2.8.9}$$

Näide 1. Uurime astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k} \tag{2.8.10}$$

koonduvust.

Lahendusvariant A. Teostame uurimist vahetult, samm-sammult.

1. Fikseerime arvu x. Saame arvrea $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k x^k}{k}$.
2. Uurime saadud arvrea absoluutset koonduvust, st positiivse arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{2^k x^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} |x|^k$$

koonduvust. Kasutame Cauchy tunnust:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k} |x|^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,|x|}{\sqrt[k]{k}} = 2\,|x| < 1.$$

3. Kui esimesel sammul fikseerisime arvu x nii, et $2|x| < 1$, st $|x| < \dfrac{1}{2}$, siis saadud arvrida koondub absoluutselt. Seega vahemikus $(-0.5; 0.5)$ rida (2.8.10) koondub absoluutselt.
4. Uurime rea (2.8.10) koonduvust vahemiku $(-0.5; 0.5)$ otspunktides. Kui $x = -0.5$, siis saame vahelduvate märkidega arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (-0.5)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Rakendame Leibnizi tunnust. Saadud vahelduvate märkidega rida on koonduv, kuid ei ole absoluutselt koonduv, sest harmooniline rida $\alpha = 1$ korral on hajuv. Seega koondub rida (2.8.10) otspunktis $x = -0.5$ tingimisi. Kui $x = 0.5$, siis saame hajuva harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (0.5)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Seega on astmerea (2.8.10) absoluutse koonduvuse piirkond vahemik $(-0.5; 0.5)$ ja tingimisi koonduvuse piirkond üheelemendiline hulk $\{-0.5\}$ ning koonduvuspiirkond on poollõik $[-0.5; 0.5)$. Rea (2.8.10) koonduvusraadius on $R = 0.5$.

Lahendusvariant B. Antud ülesande võime lahendada ka valemi (2.8.8) või (2.8.9) abil. Leiame

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\dfrac{2^k}{k}\right|}{\left|\dfrac{2^{k+1}}{k+1}\right|} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2}$$

ehk

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left|\dfrac{2^k}{k}\right|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vahemiku $(-0.5; 0.5)$ otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida, nii nagu tegime variant A korral.

Nii lahendusvariandil A kui ka B on omad eelised. Variant A lahendus on pikem, kuid üldisem. Miks? Variant B on lühem, kuid ei ole alati rakendatav. Miks? $\diamondsuit$

Näide 2. Uurime astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k (x+e)^k}{k!} \tag{2.8.11}$$

koonduvust. Piisab uurida rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k x^k}{k!} \tag{2.8.12}$$

koonduvust. Kasutame varianti B. Leiame valemi (2.8.8) abil esiteks rea (2.8.12) koonduvusraadiuse:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|(-1)^k \dfrac{k^k}{k!}\right|}{\left|(-1)^{k+1} \dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\right|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}.$$

Vahemiku $(-1/e, 1/e)$ otspunktides uurime rea (2.8.12) koonduvust eraldi. Leiame, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{k!} \left(-\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!e^k},$$

kusjuures

$$\frac{k^k}{k!e^k} \sim \left[\begin{array}{c} \text{Kasutame Stirlingi valemit} \\ k! \sim \sqrt{2\pi k}k^k e^{-k} \quad (k\to\infty) \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \frac{k^k}{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k} e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Positiivne arvrida üldliikmega $1/\sqrt{k}$ kui harmooniline rida $\alpha = 0.5$ korral on hajuv. Seega on rida (2.8.12) vahemiku $(-1/e, 1/e)$ otspunktis $-1/e$ hajuv. Vahemiku parempoolses otspunktis $1/e$ saame vahelduvate märkidega rea, mis on tingimisi koonduv. Järelikult on rida (2.8.12) vahemikus $(-1/e, 1/e)$ absoluutselt koonduv ja punktis $x = 1/e$ tingimisi koonduv ning poollõigus $(-1/e, 1/e]$ koonduv. Seega on rida (2.8.11) vahemikus $(-e-1/e, -e+1/e)$ absoluutselt koonduv ja punktis $x = -e+1/e$ tingimisi koonduv ning poollõigus $(-e-1/e, -e+1/e]$ koonduv. $\diamondsuit$

Lause 4. Astmerida (2.8.2) võib hulgal $X = \{x : |x| \le r < R\}$, kus R on rea (2.8.2) koonduvusraadius, liikmeti integreerida või liikmeti diferentseerida, kusjuures koonduvusraadius ei muutu.

Tõestus. Rakendame Abeli teoreemi. Selle põhjal koondub astmerida (2.8.2) hulgal X ühtlaselt. Rea (2.8.2) liikmed on nii integreeruvad kui ka pidevalt diferentseeruvad funktsioonid hulgal X. Lause 2.7.4 põhjal võib ühtaselt koonduvat integreeruvate funktsioonide rida liikmeti integreerida. Lause 2.7.5 põhjal võib pidevalt diferentseeruvate funktsioonide rida liikmeti diferentseerida, kui saadud rida on ühtlaselt koonduv. Olgu $-r \le x_0 < x \le r$, kus x_0 on fikseeritud punkt ja x muutuv punkt. Lõik $[x_0, x]$ kuulub hulka X ja rida (2.8.2) koondub ühtlaselt ka lõigul $[x_0, x]$. Integreerime rida (2.8.2) lõigul $[x_0, x]$ liikmeti:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} x^k dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} |_{x_0}^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(x^{k+1} - x_0^{k+1} \right).$$

Kui $x_0 = 0$, siis saame tulemuseks

$$\int_{0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1},$$

st leidsime astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k. \tag{2.8.13}$$

Diferentseerime rida (2.8.2) hulgal X liikmeti

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Saame astmerea

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}. \tag{2.8.14}$$

Näitame, et nii rea (2.8.13) kui ka rea (2.8.14) koonduvusraadius on R. Seda on lihtne teha, kui rea (2.8.2) koonduvusraadius R on leitav kas valemi (2.8.8) või valemi (2.8.9) abil. Rakendame rea (2.8.13) koonduvusraadiuse leidmiseks valemit (2.8.8). Leiame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left| \dfrac{a_{k-1}}{k} \right|}{\left| \dfrac{a_k}{k+1} \right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k-1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R.$$

Valemi (2.8.9) abil saame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left| \dfrac{a_{k-1}}{k} \right|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{|a_{k-1}|}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt[k-1]{|a_{k-1}|} \right)^{\dfrac{k-1}{k}}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\left(\sqrt[k]{|a_k|} \right)} \right)^{\dfrac{k}{k+1}} = R.$$

Seega on antud tingimustel ka rea (2.8.13) koonduvusraadius R. Analoogiliselt leiame valemi (2.8.8) või (2.8.9) abil, et ka rea (2.8.14) koonduvusraadius on R.

Üldjuhul, kui loobuda valemi (2.8.8) või (2.8.9) kasutamisest, on lihtne positiivsete arvridade võrdlustunnuse abil näidata, et astmerea (2.8.2) liikmeti integreerimisel saadud rea koonduvusraadius on suurem-võrdne kui rea (2.8.2) koonduvusraadius ja astmerea (2.8.2) liikmeti diferentseerimisel saadud rea koonduvusraadius on väiksem-võrdne kui rea (2.8.2) koonduvusraadius. Palun näidake seda! Üldjuhu tõestuse leiate G. Kangro õpikust [9], lk 70–71. □

Järeldus 2. Astmerea (2.8.2) summa $S(x)$ on selle rea koonduvusvahemikus $(-R,\, R)$ lõpmata arv kordi diferentseeruv funktsioon, kusjuures

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\, a_k x^{k-m} \qquad (m \in \mathbf{N}).$$

Näide 3. Leiame astmerea $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k+1}$ summa.

Teame

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{|x|<1}{=} \frac{1}{1-x},$$

st $R = 1$. Rida $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ võime Lause 4 põhjal lõigul $[0, x]$, kus $0 < |x| < 1$, liikmeti integreerida, kusjuures ka saadud rea koonduvusraadius on 1. Leiame

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x} \overset{\text{Lause 4}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x x^k dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x}$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Leiame astmerea $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k kx^{2k}$ summa.

Teame

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \overset{|x|<1}{=} \frac{1}{1+x^2},$$

kus $R = 1$. Rida $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ võime Lause 4 põhjal vahemikus $(-1; 1)$ liikmeti diferentseerida, kusjuures saadud rea koonduvusraadius on 1. Leiame

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x^2} \overset{\text{Lause 4}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left((-1)^k x^{2k}\right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Seega

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2kx^{2k-1} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Korrutades viimase seose mõlemat poolt suurusega $x/2$, ei muutu astmerea koonduvusraadius. Miks? Tulemuseks on

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k kx^{2k} = \frac{-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}. \quad \diamondsuit$$

2.9 Taylori rida

Järeldus 2.8.2 põhjal on astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k. \tag{2.9.1}$$

summa $S(x)$ koonduvusvahemikus $(a-R,\, a+R)$ lõpmata arv kordi diferentseeruv funktsioon. Seejuures seosest

$$S(x) \overset{|x-a|<R}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{2.9.2}$$

järeldub

$$S^{(m)}(x) \overset{|x-a|<R}{=} \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\, a_k (x-a)^{k-m} \quad (m \in \mathbf{N}). \tag{2.9.3}$$

Seoste (2.9.2) ja (2.9.3) abil saame leida astmerea (2.9.1) kordajad a_k $(k \in \mathbf{N}_0)$. Valides seoses (2.9.2) $x = a$, saame $S(a) = a_0$ ehk $a_0 = S^{(0)}(a)/0!$ Valides seoses (2.9.3) $m = 1$ ja $x = a$, leiame $S^{(1)}(a) = 1!a_1$ ehk $a_1 = S^{(1)}(a)/1!$ Valides seoses (2.9.3) $m = 2$ ja $x = a$, leiame $S^{(2)}(a) = 2!a_2$ ehk $a_2 = S^{(2)}(a)/2!$ Nii jätkates saame kõik astmerea (2.9.1) kordajad a_k avaldada selle astmerea summa $S(x)$ abil. Saame

$$a_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \mathbf{N}_0)$$

ja

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Seni piirdusime astmerea (2.9.1) järgi tema summa $S(x)$ leidmisega. Järgnevas üritame lõpmata arv kordi diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ korral leida selleks funktsiooniks koonduvat astmerida. Seame punkti a mingis ümbruses lõpmata arv kordi diferentseeruvale funktsioonile $f(x)$ vastavusse astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \tag{2.9.4}$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Taylori reaks* kohal a. Selle vastavuse jaoks kasutatakse tähistust

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k .$$

Funktsiooni $f(x)$ *Taylori rida* kohal 0 nimetatakse funktsiooni *Maclaurini reaks.* Osutub, et funktsiooni $f(x)$ kui tahes kõrget järku tuletiste olemasolust punktis a ei järeldu selle funktsiooni Taylori rea (2.9.4) koonduvus punkti a mingis ümbruses. Isegi siis, kui funktsiooni $f(x)$ Taylori rida (2.9.4) koondub punkti a mingis ümbruses, ei pruugi ta koonduda funktsiooniks $f(x)$. Uurime, millistel tingimustel funktsiooni $f(x)$ Taylori rida koondub punktis x funktsiooni väärtuseks $f(x)$. Funktsiooni $f(x)$ Taylori rea (2.9.4) osasumma

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

on Taylori valemi juures käsitlemist leidnud Taylori polünoom. Funktsiooni $f(x)$ Taylori valem kohal a on kujul

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n-1}(x),$$

kus

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}\left(a+\theta\left(x-a\right)\right)}{n!} (x-a)^n \quad (0<\theta<1)\,. \tag{2.9.5}$$

Seega kehtib väide.

Lause 1. Funktsiooni $f(x)$ Taylori rida (2.9.4) koondub punktis x funktsiooni f väärtuseks $f(x)$ parajasti siis, kui $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n-1}(x) = 0$.

Olgu R rea (2.9.4) koonduvusraadius. Fakti, et funktsiooni $f(x)$ Taylori rida (2.9.4) koondub hulga $X = (a-R, a+R)$ igas punktis x funktsiooni f väärtuseks $f(x)$, tähistatakse lühidalt kujul

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x\in X)\,. \tag{2.9.6}$$

Näide 1. Leiame funktsiooni e^x Taylori rea kohal -1.
Et $(e^x)^{(k)} = e^x$, siis $f^{(k)}(-1) = e^{-1}$. Leiame soovitud Taylori rea

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!} (x-(-1))^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!e} (x+1)^k .$$

Valemi (9.5) abil saame, et

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}\left(-1+\theta\left(x+1\right)\right)}{n!} (x+1)^n = \frac{e^{-1+\theta(x+1)}}{n!} (x+1)^n ,$$

kusjuures muutuja x fikseeritud väärtuse korral

$$\lim_{n\to\infty} R_{n-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1+\theta(x+1)}}{n!}(x+1)^n = \left[\begin{array}{c}\text{kasutame Stirlingi}\\ \text{valemit}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1+\theta(x+1)}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}(x+1)^n = O(1)\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{(x+1)\,e}{n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}|(x+1)\,e| < n, \text{ kui } n \text{ on piisavalt suur}\\ \text{iga fikseeritud väärtuse } x \text{ korral}\end{array}\right] = 0.$$

Seega koondub funktsiooni $f(x)$ Taylori rida kohal -1 iga $x \in \mathbf{R}$ korral funktsiooni e^x väärtuseks punktis x, st

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!e}(x+1)^k. \qquad \diamondsuit$$

Lause 2. Kui

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in (a-R, a+R))$$

ja on leitud punkti a mingis ümbruses funktsiooniks $f(x)$ koonduv astmerida (2.9.1), siis see langeb kokku funktsiooni $f(x)$ Taylori reaga (2.9.4), st funktsiooni $f(x)$ arendus astmeritta $x-a$ astmete järgi on ühene.

Tõestus. Olgu lisaks funktsiooni $f(x)$ Taylori reaksarendusele (2.9.6) veel mingi teine funktsiooni $f(x)$ arendus astmeritta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{2.9.7}$$

koonduvusraadiusega ρ. Seostest (2.9.7) ja

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\,a_k (x-a)^{k-m} \qquad (m \in \mathbf{N})$$

saame leida kordajad $a_m = f^{(m)}(a)/m!\ (m \in \mathbf{N}_0)$. $\square$

Esitame mõningate lihtsamate elementaarfunktsioonide Maclaurini reaksarendused:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (R = \infty); \tag{2.9.8}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (R = \infty); \tag{2.9.9}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (R = \infty); \tag{2.9.10}$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (R=\infty)\,; \tag{2.9.11}$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (R=\infty)\,; \tag{2.9.12}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{x^{k}}{k} \quad (R=1)\,; \tag{2.9.13}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^{k} \quad (R=1)\,. \tag{9.14}$$

Viimane reaksarendus kannab *binoomrea* nime. Binoomrea (2.9.14) erijuhuks $\alpha=-1$ korral on *geomeetriline rida*

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!}(-x)^{k}=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k} \quad (R=1)\,.$$

Näide 2. Arendame funktsiooni $\sin\dfrac{2x}{3}$ Maclaurini ritta.

Rakendame Lauset 2. Asendame valemis (2.9.10) suuruse x suurusega $\dfrac{2x}{3}$:

$$\sin\frac{2x}{3}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\,\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\,\frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!3^{2k+1}}.$$

Et

$$\left(\left|\frac{2x}{3}\right|<+\infty\right)\Leftrightarrow(|x|<+\infty)\,,$$

siis ka $\sin\dfrac{2x}{3}$ Maclaurini reaksarenduse koonduvusraadius R on ∞. $\diamondsuit$

Näide 3. Arendame funktsiooni $\ln(2-3x^2)$ Maclaurini ritta.

Teisendame

$$\ln(2-3x^2)=\ln\big(2(1-3x^2/2)\big)=\ln 2+\ln(1-3x^2/2).$$

Rakendame Lauset 2, kusjuures funktsiooni $\ln(1-3x^2/2)$ arendamisel Maclaurini ritta kasutame valemit (2.9.13), asendades selles suuruse x suurusega $-3x^2/2$:

$$\ln\left(1-3x^2/2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{\left(-3x^2/2\right)^{k}}{k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{k}\frac{x^{2k}}{k}.$$

Et

$$\left(\left|-3x^2/2\right| < 1\right) \Leftrightarrow \left(|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

siis

$$\ln(2-3x^2) = \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{x^{2k}}{k} \qquad \left(R = \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \qquad \diamondsuit$$

Näide 4. Arendame funktsiooni $\dfrac{x}{\sqrt[3]{3-x^3}}$ Maclaurini ritta.

Teisendame

$$\frac{x}{\sqrt[3]{3-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(1 - \frac{x^3}{3}\right)^{-1/3}.$$

Rakendame Lauset 2, kusjuures funktsiooni $\left(1 - \dfrac{x^3}{3}\right)^{-1/3}$ arendamisel Maclaurini ritta kasutame valemit (2.9.14), asendades selles suuruse x suurusega $-x^3/3$:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x^3}{3}\right)^{-1/3} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/3)\,(-1/3-1)\cdots(-1/3-k+1)}{k!} \left(-\frac{x^3}{3}\right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3k-2}{3}\right)}{k!} \left(-\frac{x^3}{3}\right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{(3k-2)!!!}{3^{2k} k!} x^{3k}.\end{aligned}$$

Et

$$\left(\left|-x^3/3\right| < 1\right) \Leftrightarrow \left(|x| < \sqrt[3]{3}\right),$$

siis soovitud Maclaurini reaksarenduse

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt[3]{3-x^3}} &= \frac{x}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(1 - \frac{x^3}{3}\right)^{-1/3} = \\ &= \frac{x}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3^{2k} k!} x^{3k}\right) = \\ &= \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3^{2k+1/3} k!} x^{3k+1}\end{aligned}$$

koonduvusraadius on $\sqrt[3]{3}$. $\diamondsuit$

Näide 5. Arendame funktsiooni $\frac{1}{x-1}$ Taylori ritta $x+4$ astmete järgi. Leiame

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x+4)-5}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{5}}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{5}}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{rakendame geomeetrilise rea}\\ \text{summa valemit, kusjuures}\\ \left(\left|\frac{x+4}{5}\right|<1\right)\Leftrightarrow|x+4|<5\end{array}\right]=-\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{5}\right)^k=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+4)^k}{5^{k+1}}\quad(R=5)\,.\qquad\diamondsuit$$

Näide 6. Arendame funktsiooni $\arctan x$ Maclaurini ritta. Et

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\left[\begin{array}{c}\text{geomeetriline rida, } q=-x^2,\\ \left|-x^2\right|<1\Leftrightarrow|x|<1\end{array}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\quad(R=1)$$

ja

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x,$$

siis rea $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ liikmeti integreerimisel leiame soovitud reaksarenduse:

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^k x^{2k}dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\quad(R=1)\,.\quad\diamondsuit$$

2.10 Astmeridade rakendused

2.10.1 Elementaarfunktsiooni väärtuste arvutamine

Põhiliste elementaarfunktsioonide väärtuste arvutamisel arvuti abil kasutatakse nende funktsioonide Maclaurini reaksarendusi.

Näide 1. Leiame suuruse $1/\sqrt{e}$ täpsusega 10^{-3}.

Kasutame suuruse $e^{-0.5}$ ligikaudse väärtuse arvutamisel reaksarendust (2.9.8). Et rida

$$e^{-0.5}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-0.5)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{2^k k!}$$

on vahelduvate märkidega arvrida, kusjuures $\frac{1}{2^k k!}\downarrow$, siis viga, mida me teeme selle rea summa S asendamisel osasummaga S_n, on absoluutväärtuse poolest väiksem esimese ärajäetud liikme absoluutväärtusest. Miks? Järelikult õnnestub suurus n määrata võrratusest:

$$\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Et

$$\frac{1}{2^{1+1}\,(1+1)!} = \frac{1}{8},\; \frac{1}{2^{2+1}\,(2+1)!} = \frac{1}{48},\; \frac{1}{2^{3+1}\,(3+1)!} = \frac{1}{384}$$

ja

$$\frac{1}{2^{4+1}\,(4+1)!} = \frac{1}{3840},$$

siis $n = 4$. Leiame suuruse $1/\sqrt{e}$ täpsusega 10^{-3} :

$$e^{-0.5} \approx \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \, \frac{1}{2^k k!} = \frac{233}{384} \approx 0.607. \qquad \diamondsuit$$

2.10.2 Integraalide leidmine

Näide 2. Arvutame integraali

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$$

Funktsiooni $e^{-x^2/2}$ algfunktsioon ei ole elementaarfunktsioon. Kasutame integreeritava funktsiooni reaksarendust (2.9.8) ja liikmeti integreerimist:

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2/2\right)^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{1}{k!2^k} \int_0^1 x^{2k} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{k!2^k\,(2k+1)}\bigg|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{1}{k!2^k\,(2k+1)}. \quad \diamondsuit$$

Saadud rea abil leidke selle integraali väärtus täpsusega 10^{-5}.

Näide 3. Leiame reaksarenduse abil integraali

$$\int \frac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x^2} dx.$$

Funktsiooni $\ln\left(1-2x^3\right)$ arendamiseks astmeritta kasutame valemit (2.9.13), asendades selles valemis suuruse x suurusega $-2x^3$, kusjuures

$$\left|-2x^3\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt[3]{2},$$

st funktsiooni $\ln\left(1-2x^3\right)$ reaksarenduse korral $R = 1/\sqrt[3]{2}$. Leiame

$$\int \frac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \, \frac{\left(-2x^3\right)^k}{k} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k+1} \, \frac{2^k}{k} \int x^{3k-2} dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{3k-1}}{k\,(3k-1)} + C. \qquad \diamondsuit$$

2.10.3 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni, selle tuletisi ja argumenti. *Diferentsiaalvõrrandi järguks* nimetatakse otsitava funktsiooni tuletiste kõrgeimat järku selles võrrandis. Kasutame järgnevas diferentsiaalvõrrandi lahendamisel selle funktsiooni arendust astmeritta.

Näide 4. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$y' - y = 1 \tag{2.10.1}$$

algtingimust $y(1) = 2$ rahuldava erilahendi.

Kasutame kaht lahendusvarianti.

Variant A. Avaldame diferentsiaalvõrrandist (2.10.1) suuruse $y\prime$ (üldjuhul kõrgeimat järku tuletise) ja leiame $y'(1)$:

$$y' = 1 + y \Rightarrow y'(1) = 1 + y(1) = 3.$$

Analoogiliselt, diferentseerides eelneva funktsionaalse seose mõlemat poolt muutuja x järgi, leiame

$$\begin{gathered} y'' = y' \ \Rightarrow \ y''(1) = y'(1) = 3, \\ y''' = y'' \ \Rightarrow \ y'''(1) = y''(1) = 3, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y^{(n+1)} = y^{(n)} \ \Rightarrow \ y^{(n+1)}(1) = y^{(n)}(1) = 3 \quad (n \geq 0). \end{gathered}$$

Rakendades valemit (2.9.6), saame võrrandi (2.10.1) erilahendi Taylori reana

$$y = 2 + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}.$$

Variant B. Otsime diferentsiaalvõrrandi lahendit astmerea kujul

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k \tag{2.10.2}$$

ehk

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots + a_k(x-1)^k + \ldots .$$

Selle lahendi tuletis avaldub astmereana $y' = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (x-1)^{k-1}$ ehk

$$y' = 1a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \ldots + ka_k(x-1)^{k-1} + \ldots .$$

Paigutades suuruste y ja $y\prime$ arendused võrrandisse (2.10.1), saame iga x korral vahemikust $(1-R, 1+R)$:

$$1a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \ldots + ka_k(x-1)^{k-1} + \ldots -$$

$$-a_0 - a_1(x-1) - a_2(x-1)^2 - a_3(x-1)^3 - \ldots - a_k(x-1)^k - \ldots = 1.$$

Seda seost võib tõlgendada kui kahe suuruse $x-1$ astmete järgi astmerea võrdumise tingimust. Selleks peavad kõik vastavate astmete kordajad olema võrdsed, st

$$\left\{\begin{array}{c} 1a_1 - a_0 = 1 \\ 2a_2 - a_1 = 0 \\ 3a_3 - a_2 = 0 \\ 4a_4 - a_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (k+1)\,a_{k+1} - a_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. . \tag{2.10.3}$$

Seosest (2.10.2) ja algtingimusest $y(1) = 2$ järeldub $a_0 = 2$. Süsteemi (2.10.3) esimesest võrrandist leiame $a_1 = 1 + a_0 = 3/1!$. Järgmisena leiame süsteemi teisest võrrandist $a_2 = a_1/2 = 3/2!$. Süsteemi kolmandast võrrandist saame $a_3 = a_2/3 = 3/3!$ ja neljandast $a_4 = a_3/4 = 3/4!$ jne. Induktsioonimeeetodil saab tõestada, et $a_k = 3/k!$ $(k \in \mathbf{N})$. Saame diferentsiaalvõrrandi (2.10.1) lahendi astmerea (2.10.2) kujul

$$y = 2 + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 5. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - y = e^x \tag{2.10.4}$$

algtingimusi $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$ rahuldava erilahendi.

Kasutame kaht lahendusvarianti

Variant A. Avaldame diferentsiaalvõrrandist (2.10.4) suuruse y'' ja leiame $y''(0)$:

$$y'' = y + e^x \Rightarrow y''(0) = y(0) + e^0 = 1 + 1 = 2.$$

Diferentseerides seose (2.10.4) mõlemat poolt muutuja x järgi, leiame

$$y''' = y' + e^x \Rightarrow y'''(0) = y'(0) + e^0 = 0 + 1 = 1.$$

Jätkates seda laadi samme, saame

$$y^{(4)} = y'' + e^x \Rightarrow y^{(4)}(0) = y''(0) + e^0 = 2 + 1 = 3,$$

$$y^{(5)} = y''' + e^x \Rightarrow y^{(5)}(0) = y'''(0) + e^0 = 1 + 1 = 2,$$

$$y^{(6)} = y^{(4)} + e^x \Rightarrow y^{(6)}(0) = y^{(4)}(0) + e^0 = 3 + 1 = 4,$$

$$y^{(7)} = y^{(5)} + e^x \Rightarrow y^{(7)}(0) = y^{(5)}(0) + e^0 = 2 + 1 = 3,$$

$$y^{(8)} = y^{(6)} + e^x \Rightarrow y^{(8)}(0) = y^{(6)}(0) + e^0 = 4 + 1 = 5,$$

Induktsioonimeetodil saab näidata, et $k \in \mathbf{N}_0$ korral

$$y^{(2k)} = y^{(2k-2)} + e^x \Rightarrow y^{(2k)}(0) = y^{(2k-2)}(0) + e^0 = k + 1.$$

ja

$$y^{(2k+1)} = y^{(2k-1)} + e^x \Rightarrow y^{(2k+1)}(0) = y^{(2k-1)}(0) + e^0 = (k-1) + 1 = k.$$

Seega avaldub võrrandi (2.10.4) lahend y Taylori reana

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{(2k)!} x^{2k} + \frac{k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right).$$

Leiame selle rea koonduvusraadiuse R :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{k+1}{(2k)!}\right|}{\left|\frac{k}{(2k+1)!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(2k+1)!}{k(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{k} = \infty,$$

kui ka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{k}{(2k+1)!}\right|}{\left|\frac{k+2}{(2k+2)!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(2k+2)!}{(k+2)(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(2k+2)}{k+2} = \infty.$$

Seega $R = \infty$.

Variant B. Otsime diferentsiaalvõrrandi (2.10.4) lahendit astmerea kujul

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.10.5}$$

ehk

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k + \ldots .$$

Lahendi tuletis y' avaldub astmereana $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ ehk

$$y' = 1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots .$$

Samuti leiame teise tuletise

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

ehk

$$y'' = 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \ldots .$$

Paigutades suuruste y ja y'' arendused võrrandisse (2.10.4), saame

$$2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \ldots -$$

$$-a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots - a_k x^k - \ldots =$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \quad (x \in (-R, R))\,.$$

Kõik vastavate astmete kordajad peavad olema võrdsed:

$$\left\{\begin{array}{c} 2 \cdot 1 a_2 - a_0 = 1, \\ 3 \cdot 2 a_3 - a_1 = \dfrac{1}{1!}, \\ 4 \cdot 3 a_4 - a_2 = \dfrac{1}{2!}, \\ 5 \cdot 4 a_5 - a_3 = \dfrac{1}{3!}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ (k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_k = \dfrac{1}{k!}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}\right. . \tag{2.10.6}$$

Astmerea kujust (2.10.4) ja algtingimustest $y(0) = 1$ ning $y'(0) = 0$ järeldub $a_0 = 1$ ja $a_1 = 0$. Süsteemi (2.10.6) esimesest võrrandist leiame

$$a_2 = (1 + a_0)\,/2! = 2/2!\,.$$

Järgmisena leiame süsteemi (2.10.6) teisest võrrandist

$$a_3 = \left(\frac{1}{1!} + a_1\right) / \,(3 \cdot 2) = \frac{1}{3!}.$$

Kolmandast võrrandist saame

$$a_4 = \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{2!}\right) / \,(4 \cdot 3) = \frac{3}{4!},$$

neljandast

$$a_5 = \left(\frac{1}{3!} + a_3\right) / \,(5 \cdot 4) = \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) / \,(5 \cdot 4) = \frac{2}{5!}$$

ja kuuendast

$$a_6 = \left(\frac{1}{4!} + a_4\right) / \,(6 \cdot 5) = \left(\frac{1}{4!} + \frac{3}{4!}\right) / \,(6 \cdot 5) = \frac{4}{6!}$$

ning seitsmendast

$$a_7 = \left(\frac{1}{5!} + \frac{2}{5!}\right) / \,(7 \cdot 6) = \left(\frac{1}{5!} + \frac{2}{5!}\right) / \,(7 \cdot 6) = \frac{3}{7!}$$

jne. Induktsioonimeeetodil saab tõestada, et

$$a_{2k} = \frac{(k+1)}{(2k)!},\ a_{2k+1} = \frac{k}{(2k+1)!} \quad (k \in \mathbf{N}_0)\,.$$

Seega saame diferentsiaalvõrrandi (2.10.4) algtingimusi $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$ rahuldava erilahendi astmerea (2.10.6) kujul

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(k+1)}{(2k)!} x^{2k} + \frac{k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right). \qquad \diamondsuit$$

Millal kasutada varianti A ja millal varinti B?

2.10.4 Võrrandite lahendamine

Olgu $A\left(a, y\left(a\right)\right)$ ilmutamata kujul võrrandiga

$$F\left(x, y\right) = 0 \tag{2.10.7}$$

määratud funktsiooni $y = y\left(x\right)$ graafiku punkt. Kuna funktsiooni tuletis on teatud tingimustel avaldatav võrrandist (2.10.7) kujul

$$y'\left(x\right) = -\frac{F_x\left(x, y\left(x\right)\right)}{F_y\left(x, y\left(x\right)\right)}, \tag{2.10.8}$$

siis saame selle tuletise väärtuse punktis a :

$$y'\left(a\right) = -\frac{F_x\left(a, y\left(a\right)\right)}{F_y\left(a, y\left(a\right)\right)}.$$

Diferentseerides seose (2.10.8) mõlemat poolt muutuja x järgi, saame

$$y''\left(x\right) = -\frac{\left(F_{xx}\left(x, y\left(x\right)\right) + F_{xy}\left(x, y\left(x\right)\right) y'\left(x\right)\right) F_y\left(x, y\left(x\right)\right)}{\left(F_y\left(x, y\left(x\right)\right)\right)^2} + \\ + \frac{\left(F_{yx}\left(x, y\left(x\right)\right) + F_{yy}\left(x, y\left(x\right)\right) y'\left(x\right)\right) F_x\left(x, y\left(x\right)\right)}{\left(F_y\left(x, y\left(x\right)\right)\right)^2}$$

ja selle abil

$$y''\left(a\right) = -\frac{\left(F_{xx}\left(a, y\left(a\right)\right) + F_{xy}\left(a, y\left(a\right)\right) y'\left(a\right)\right) F_y\left(a, y\left(a\right)\right)}{\left(F_y\left(a, y\left(a\right)\right)\right)^2} + \\ + \frac{\left(F_{yx}\left(a, y\left(a\right)\right) + F_{yy}\left(a, y\left(a\right)\right) y'\left(a\right)\right) F_x\left(a, y\left(a\right)\right)}{\left(F_y\left(a, y\left(a\right)\right)\right)^2}.$$

Nii jätkates on võimalik leida kõrgemat järku tuletiste väärtused kohal a. Kui on arvutatud $y^{(k)}\left(a\right) \quad \left(k = 0; 1; 2; \ldots; n\right)$, siis on võimalik leida funktsiooni $y = y(x)$ Taylori rea osasumma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(x - a\right)^k,$$

mille abil on võimalik leida funktsiooni $y = y(x)$ ligikaudseid väärtusi punkti a mingis ümbruses.

Näide 6. Olgu $A\,(1;0)$ võrrandiga

$$\exp(xy) - x = 0$$

määratud ilmutamata funktsiooni $y = y\,(x)$ graafiku punkt. Leiame funktsiooni $y(x)$ Taylori rea osasumma $S_3(x)$ punktis $x = 1$.

Et otsitava funktsiooni tuletis on valemi (2.10.8) abil avaldatav kujul

$$y' = -\frac{y\exp(xy) - 1}{x\exp(xy)}, \tag{2.10.9}$$

siis

$$y'\,(1) = 1.$$

Diferentseerides seose (2.10.9) mõlemat poolt muutuja x järgi, saame

$$\begin{aligned} y'' = &-\frac{(y'\exp(xy) + y\exp(xy)(y + xy'))(x\exp(xy))}{(x\exp(xy))^2} \\ &+ \frac{(y\exp(xy) - 1)(\exp(xy) + x\exp(xy)(y + xy'))}{(x\exp(xy))^2}. \end{aligned}$$

Seega

$$y''\,(1) = -3.$$

Järelikult

$$S_3(x) = 0 + (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

on funktsiooni $y = y(x)$ Taylori rea soovitud osasumma. $\diamondsuit$

2.11 Ortogonaalsed polünoomid

Selle peatüki ülejäänud osas on otstarbekas kasutada üldisemat integreeruvuse mõistet, võttes kokku määratud ja päratu integraali.

Definitsioon 1. Öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on lõigul $[a,b]$ *integreeruv*, kui eksisteerib määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$ või koondub päratu integraal $\int_a^b f(x)dx$.

Definitsioon 2. Öeldakse, et lõigul $[a,b]$ integreeruv funktsioon $f(x)$ on *integreeruva ruuduga* sel lõigul, kui eksisteerib määratud integraal $\int_a^b f^2(x)dx$ või koondub päratu integraal $\int_a^b f^2(x)dx$.

Näide 1. Näitame, et funktsioon $f(x) = 1/\sqrt{x-1}$ on integreeruv lõigul $[1;2]$, kuid ei ole sel lõigul integreeruva ruuduga.

See funktsioon ja tema ruut ei ole tõkestatud punkti 1 ümbruses. Saame

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{a\to 1+} \left(2\sqrt{2-1} - 2\sqrt{a-1}\right) = 2$$

ja

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2 dx = \int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \\ = \lim_{a\to 1+} \left(\ln|2-1| - \ln|a-1|\right) = +\infty.$$

Seega funktsioon $f(x) = 1/\sqrt{x-1}$ on lõigul $[1;2]$ integreeruv, kuid ei ole sel lõigul integreeruva ruuduga. $\diamondsuit$

Et

$$(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; f^2(x) - 2\,|f(x)|\,|g(x)| + g^2(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2} \geq |f(x)g(x)|\,,$$

siis määratud integraali monotoonsuse omaduse põhjal saame järgmise väite.

Lause 1. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on lõigul $[a,b]$ integreeruva ruuduga, siis nende funktsioonide korrutis $f(x)g(x)$ on sel lõigul integreeruv funktsioon.

Definitsioon 3. Suurust $\langle f,g\rangle$, kus

$$\langle f,g\rangle \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{2.11.1}$$

nimetatakse lõigul $[a,b]$ integreeruva ruuduga funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ *skalaarkorrutiseks.*

Näide 2. Leiame lõigul $[0;1]$ integreeruva ruuduga funktsioonide x ja x^2 skalaarkorrutise.

Valemi (2.11.1) abil saame

$$\left\langle x,x^2\right\rangle = \int_0^1 x\cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \qquad \diamondsuit$$

Integreeruva ruuduga funktsioonide skalaarkorrutisel $\langle f,g\rangle$ on järgmised omadused:

1) $\langle f,\,f\rangle \geq 0$;

2) $\langle f,\,g\rangle = \langle g,\,f\rangle$;

3) $\langle \lambda f,g\rangle = \lambda\,\langle f,g\rangle \quad (\lambda\in\mathbf{R})$;

4) $\langle f_1+f_2,\,g\rangle = \langle f_1,\,g\rangle + \langle f_2,\,g\rangle$.

Märkus 1. Kuna Definitsiooni 3 abil defineeritud skalaarkorrutise korral

$$\langle f,\,f\rangle = 0 \not\Rightarrow (f(x)\equiv 0 \;\; (x\in[a,b]))\,,$$

siis oleks korrektsem (vt [16], lk 232) nimetuse skalaarkorrutis asemel kasutada nimetust *poolskalaarkorrutis.*

Märkus 2. Juhul kui lõigul $[a, b]$ vaadeldavate funktsioonide väärtused on kompleksarvulised, siis

$$\langle f, g\rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

kus $\overline{g(x)}$ on kompleksarvu $g(x)$ kaaskompleksarv. Omadused 2 ja 3 on siis vastavalt kujul

$$\langle f,\, g\rangle = \overline{\langle g,\, f\rangle}, \quad \langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

kusjuures

$$\langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda} \langle f, g\rangle .$$

Definitsioon 4. Integreeruva ruuduga funktsioonide süsteemi

$$\{\varphi_k\} \ \ (k \in \mathbf{N}_0)$$

nimetatakse *ortogonaalseks* lõigul $[a, b]$, kui

$$\langle \varphi_k, \varphi_m\rangle = 0 \quad (k \neq m),$$

kusjuures skalaarkorrutis on defineeritud valemiga (2.11.1).

Definitsioon 5. Integreeruva ruuduga funktsioonide süsteemi

$$\{\varphi_k\} \ \ (k \in \mathbf{N}_0)$$

nimetatakse *ortonormeerituks* lõigul $[a, b]$, kui

$$\langle \varphi_k, \varphi_m\rangle = \delta_{k,m},$$

kusjuures

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 0, \text{ kui } k \neq m, \\ 1, \text{ kui } k = m \end{cases}$$

on Kroneckeri sümbol.

Definitsioon 6. Suurust $\sqrt{\langle f,\, f\rangle}$ nimetatakse integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ normiks ja tähistatakse sümboliga $\|f\|$, s.o

$$\|f\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\langle f,\, f\rangle}. \tag{2.11.2}$$

Märkus 3. Kuna Definitsiooni 6 abil defineeritud integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ normi korral

$$\|f\| = 0 \not\Rightarrow (f(x) = 0 \ \ (\forall x \in [a, b])),$$

siis oleks korrektsem (vt [16], lk 130) nimetuse norm asemel kasutada *poolnormi* nimetust.

Definitsioon 7. Kui

$$\|f_n - f\| \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

st

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 \, dx \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

siis öeldakse, et jada $\{f_n(x)\}$ *koondub* lõigul $[a, b]$ *keskmiselt* funktsiooniks $f(x)$.

Definitsioon 8. Kui

$$\|S_n - f\| \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

kus $S_n(x)$ on funktsionaalrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \tag{2.11.3}$$

osasumma, siis öeldakse, et see rida koondub lõigul $[a, b]$ keskmiselt funktsiooniks $f(x)$.

Lause 2. Kui rida (2.11.3), mille liikmed $u_k(x)$ on integreeruva ruuduga funktsioonid lõigul $[a, b]$, koondub lõigul $[a, b]$ keskmiselt funktsiooniks $f(x)$, siis iga integreeruva ruuduga funktsiooni $g(x)$ korral kehtib valem

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x u_k(t)g(t)dt, \tag{2.11.4}$$

kus võrduse paremal poolel olev rida koondub muutuja x suhtes ühtlaselt lõigul $[a, b]$.

Tõestuse leiate G. Kangro õpikust [9], lk 99-100. □

Näide 3. Näitame, et 2π-perioodiline *trigonomeetriline süsteem*

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\} \tag{2.11.5}$$

on ortogonaalne lõigul $[-\pi, \pi]$. Seejärel leiame vastava ortonormeeritud süsteemi.

Näitame kõigepealt, et selle süsteemi esimene element 1 on ortogonaalne ülejäänutega. Leiame

$$\begin{aligned}\langle 1, \cos kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx \, dx \overset{k\in\mathbf{N}}{=} \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{k}\left(\sin k\pi - \sin(-k\pi)\right) = \frac{2\sin k\pi}{k} = 0\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\langle 1, \sin kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx \overset{k\in\mathbf{N}}{=} -\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{k}\left(-\cos k\pi + \cos(-k\pi)\right) = \\ &= \frac{1}{k}\left(-\cos k\pi + \cos(k\pi)\right) = 0.\end{aligned}$$

Järgmisena näitame, et elemendid $\cos kx$ ja $\sin mx$ on ortogonaalsed

$$\begin{aligned}\langle \cos kx, \sin mx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \sin mx\, dx = \\ &= \left[\begin{array}{c}\text{integrand on paaritu funktsioon,} \\ \text{rajad sümmeetrilised nullpunkti suhtes}\end{array}\right] = 0.\end{aligned}$$

Näitame, et elemendid $\cos kx$ ja $\cos mx$ $(k \neq m)$ on ortogonaalsed

$$\begin{aligned}\langle \cos kx, \cos mx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \cos mx\, dx = \\ &= \left[\begin{array}{c}\text{integrand on paarisfunktsioon,} \\ \text{rajad sümmeetrilised nullpunkti suhtes}\end{array}\right] = \\ &= 2\int_{0}^{\pi} \cos kx\, \cos mx\, dx = \\ &= \int_{0}^{\pi} \left(\cos(kx - mx) + \cos(kx + mx)\right)\, dx \overset{k\neq m}{=} \\ &= \left.\frac{\sin((k-m)\,x)}{k-m}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{\sin((k+m)\,x)}{k+m}\right|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame $k \neq m$ korral

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \sin mx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \sin mx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin kx\, \sin mx\, dx = \\ &= \int_{0}^{\pi} \left(\cos(kx - mx) - \cos(kx + mx)\right)\, dx \overset{k\neq m}{=} \\ &= \left.\frac{\sin((k-m)\,x)}{k-m}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{\sin((k+m)\,x)}{k+m}\right|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Järelikult on 2π-perioodiline trigonomeetriline süsteem (2.11.3) ortogonaalne lõigul $[-\pi, \pi]$. Lisaks leiame elementide 1, $\cos kx$ ja $\sin kx$ skalaarruudud. Leiame

$$\langle 1; 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1\, dx = 2\pi,$$

$$\begin{aligned}\langle \cos kx, \cos kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 + \cos 2kx)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\right|_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \sin kx\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \sin kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2kx)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right)\right|_0^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Avaldame elementide 1, $\cos kx$ ja $\sin kx$ normid:

$$\|1\| = \sqrt{2\pi},\ \|\cos kx\| = \sqrt{\pi},\ \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}.$$

Normeerides süsteemi (2.11.5) elemendid, saame 2π-perioodilise ortonormeeritud trigonomeetrilise süsteemi

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\} \tag{2.11.6}$$

lõigul $[-\pi, \pi]$. $\diamondsuit$

Näide 4. Leiame lõigul $[-1;1]$ ortonormeeritud polünoomide süsteemi $\{P_k(x)\}$, kus $P_k(x)$ on k-ndat järku polünoom. Sellise omadusega polünoome $P_k(x)$ nimetatakse *Legendre'i polünoomideks.* Kõik polünoomid on integreeruva ruuduga lõigul $[-1;1]$. Veenduge, et polünoomide süsteem $\left\{x^k\right\}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ ei ole ortogonaalne lõigul $[-1;1]$. Valime nullindat järku polünoomi $P_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Selle polünoomi norm on 1, sest

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx} = 1.$$

Ortonormaalse süsteemi järgmiste polünoomide saamiseks kasutame *Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi* (vt [16], lk 250-251 või[18], lk 116-117). Ortogonaalsed polünoomid $P_k(x)$ $(k \in \mathbf{N})$ leitakse samm-sammult, kasutades algoritmi

$$Q_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \left\langle x^k, Q_j(x)\right\rangle Q_j(x),\ P_k(x) = Q_k(x)/\left\|Q_k(x)\right\| \quad (k \in \mathbf{N}). \tag{2.11.7}$$

Esimesena leiame algoritmi (2.11.7) abil polünoomi $P_1(x)$:

$$Q_1(x) = x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = x,$$

$$\|Q_1(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ P_1(x) = Q_1(x)/\left\|Q_1(x)\right\| = \frac{x}{\sqrt{2/3}} = \frac{1}{2}x\sqrt{6}.$$

Järgmisena leiame valemi (2.11.7) abil polünoomid $P_2(x)$ ja $P_3(x)$:

$$\begin{aligned}
Q_2(x) &= x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \frac{1}{2}x\sqrt{6} \right\rangle \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{6} = \\
&= x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}x\sqrt{6} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^3\sqrt{6}dx = \\
&= x^2 - \frac{1}{3}, \\
\|Q_2(x)\| &= \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \frac{2}{15}\sqrt{10}, \\
P_2(x) &= \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) / \left(\frac{2}{15}\sqrt{10}\right) = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 1\right)\sqrt{10};
\end{aligned}$$

$$Q_3(x) = x^3 - \left\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^3, \frac{1}{2}x\sqrt{6} \right\rangle \frac{1}{2}x\sqrt{6} -$$

$$- \left\langle x^3, \frac{1}{4}\left(3x^2 - 1\right)\sqrt{10} \right\rangle \frac{1}{4}\left(3x^2 - 1\right)\sqrt{10} =$$

$$= x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x^4\sqrt{6}}{2} dx -$$

$$-\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{10} \int_{-1}^{1} \frac{3x^3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{10}dx = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\begin{aligned}
\|Q_3(x)\| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx} = \frac{2}{35}\sqrt{14}, \\
P_3(x) &= \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) / \left(\frac{2}{35}\sqrt{14}\right) = \frac{5\sqrt{14}}{4}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab leida järgmised polünoomid $P_k(x)$ $(k \geq 4)$. $\diamondsuit$

Legendre'i ortonormaalsed polünoomid $P_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ avalduvad *Rodrigues'i valemi* abil

$$P_n(x) = \left(\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n\right) / \left\| \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \right\|. \tag{2.11.8}$$

Veenduge, et Rodrigues'i valem kehtib $n = 0; 1; 2; 3$ korral.

2.12 Fourier' rida ortogonaalse süsteemi korral

Olgu integreeruva ruuduga funktsioonide süsteem

$$\{\varphi_k(x)\} \ \ (k \in \mathbf{N}_0) \tag{2.12.1}$$

ortogonaalne lõigul $[a, b]$.

Definitsioon 1. Funktsionaalrida

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \tag{2.12.2}$$

nimetatakse *ortogonaalreaks* süsteemi (2.12.1) järgi. Oletame, et rida (2.12.2) koondub keskmiselt funktsiooniks $f(x)$, s.o

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x). \tag{2.12.3}$$

Avaldame seosest (2.12.3) kordajad c_k funktsiooni $f(x)$ kaudu. Korrutades seose (2.12.3) mõlemat poolt suurusega $\varphi_k(x)$ ja integreerides seejärel saadud seose mõlemat poolt, saame

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)dx. \tag{2.12.4}$$

Lause 2.11.2 põhjal võime seose (2.12.4) paremas pooles muuta integreerimise ja summeerimise järjekorda. Saame

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)dx$$

ehk

$$\langle f, \varphi_m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \langle \varphi_k, \varphi_m\rangle. \tag{2.12.5}$$

Et süsteem $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ on ortogonaalne lõigul $[a, b]$, siis $\langle \varphi_k, \varphi_m\rangle = 0$ $(k \neq m)$, ja seosest (2.12.5) saame

$$\langle f, \varphi_m\rangle = c_m \langle \varphi_m, \varphi_m\rangle \ \Rightarrow \ c_m = \frac{\langle f, \varphi_m\rangle}{\langle \varphi_m, \varphi_m\rangle} \quad (m \in \mathbf{N}_0)$$

ehk

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k\rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k\rangle} \quad (k \in \mathbf{N}_0). \tag{2.12.6}$$

Erijuhul, kui tegemist on ortonormeeritud süsteemiga $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$, omandab valem (2.12.6) kuju

$$c_k = \langle f, \varphi_k\rangle \quad (k \in \mathbf{N}_0). \tag{2.12.7}$$

Definitsioon 2. Ortogonaalrida (2.12.2), mille kordajad on leitud valemi (2.12.6) abil, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' reaks* ortogonaalse süsteemi (2.12.1) järgi. Kordajaid c_k $(k \in \mathbf{N}_0)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' kordajateks* süsteemi (2.12.1) järgi.

2.13 Besseli võrratus. Parsevali võrdus

Olgu

$$\{\varphi_k(x)\} \ \ (k \in \mathbf{N}_0)$$

ortonormeeritud süsteem lõigul $[a, b]$. Käsitleme lõigul $[a, b]$ integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ lähendamist ortogonaalrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \varphi_k\,(x) \tag{2.13.1}$$

osasummaga

$$\sigma_n\,(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k \varphi_k\,(x)\,. \tag{2.13.2}$$

Olgu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k\,(x) \tag{2.13.3}$$

funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida selle ortonormeeritud süsteemi järgi, st $a_k = \langle f,\, \varphi_k \rangle$. Uurime vahe $f\,(x) - \sigma_n\,(x)$ normi ruutu. Leiame

$$0 \leq \|f\,(x) - \sigma_n\,(x)\|^2 = \langle f - \sigma_n,\ f - \sigma_n \rangle = \langle f,\, f \rangle - 2\,\langle f,\, \sigma_n \rangle + \langle \sigma_n, \sigma_n \rangle =$$

$$= \langle f,\, f \rangle - 2 \left\langle f,\, \sum_{k=0}^{n} d_k \varphi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n} d_k \varphi_k,\, \sum_{m=0}^{n} d_m \varphi_m \right\rangle =$$

$$= \langle f,\, f \rangle - 2 \sum_{k=0}^{n} d_k\, \langle f,\, \varphi_k \rangle + \sum_{k=0}^{n} d_k \sum_{m=0}^{n} d_m\, \langle \varphi_k, \varphi_m \rangle =$$

$$= \langle f,\, f \rangle - 2 \sum_{k=0}^{n} d_k\, a_k + \sum_{k=0}^{n} d_k^2 = \langle f,\, f \rangle + \sum_{k=0}^{n} (d_k\, - a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

ehk

$$\|f\,(x) - \sigma_n\,(x)\|^2 = \langle f,\, f \rangle + \sum_{k=0}^{n} (d_k\, - a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{2.13.4}$$

Seosest (2.13.4) selgub, et valiku $d_k\, = a_k\ \ (k \in \mathbf{N}_0)$ korral minimiseerime vahe $f\,(x) - \sigma_n\,(x)$ normi $\|f\,(x) - \sigma_n\,(x)\|$. Oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 1. Ortonormeeritud süsteemi $\{\varphi_k(x)\}$ korral integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ Fourier' rea (2.13.3) osasumma

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k\,(x)$$

kujutab endast funktsiooni $f(x)$ parimat keskmist lähendit võrreldes teiste sama süsteemi järgi moodustatud ortonormaalridade (2.13.1) n-ndat järku osasummadega (2.13.2).

Valiku $d_k = a_k$ korral järeldub seosest (2.13.4)

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \langle f, f\rangle - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \quad (n \in \mathbf{N}_0) \tag{2.13.5}$$

ja

$$\langle f, f\rangle - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

või

$$\langle f, f\rangle \geq \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \quad (n \in \mathbf{N}_0). \tag{2.13.6}$$

Minnes soses (2.13.5) piirile $n \to \infty$, saame *Besseli võrratuse*

$$\langle f, f\rangle \geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2.$$

Võrdust

$$\langle f, f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \tag{2.13.7}$$

nimetatakse *Parsevali võrduseks.* Seostest (2.13.5) ja (2.13.7) järeldub järgmine väide.

Lause 2. Funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida (2.13.3) koondub keskmiselt funktsiooniks $f(x)$ parajasti siis, kui funktsiooni $f(x)$ korral kehtib Parsevali võrdus (2.13.7).

Definitsioon 1. Ortonormaalset süsteemi $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$, mille korral Parsevali võrdus (2.13.7) kehtib iga integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ korral, nimetatakse *täielikuks süsteemiks.*

2.14 Fourier' rida trigonomeetrilise süsteemi järgi

Vaatleme kaht juhtu, esiteks Fourier' rida 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi ja teiseks $2l$-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi.

1° Jaotises 2.11 näitasime 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi (2.11.5) ortogonaalsust lõigul $[-\pi, \pi]$. Koondugu rida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{2.14.1}$$

keskmiselt integreeruva ruuduga funktsiooniks $f(x)$, st

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (x \in [-\pi, \pi]). \tag{2.14.2}$$

Korrutame skalaarselt seose (2.14.2) mõlemat poolt funktsiooniga 1. Leiame, et

$$\langle f(x), 1\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, 1 \right\rangle,$$

millest Lause 2.11.2 põhjal saame

$$\left(\langle f(x), 1\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2}, 1\right\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \cos kx, 1\rangle + b_k \langle \sin kx, 1\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\langle \cos kx, 1\rangle \overset{k\in\mathbf{N}}{=} 0,\ \langle \sin kx, 1\rangle \overset{k\in\mathbf{N}}{=} 0,\ \langle 1; 1\rangle = 2\pi\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi \ \Leftrightarrow\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Järgmise sammuna korrutame skalaarselt seose (2.14.2) mõlemat poolt funktsiooniga $\cos mx \quad (m \in \mathbf{N})$. Saame

$$\left(\langle f(x), \cos mx\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \cos mx \right\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \langle f(x), \cos mx\rangle = \\ = \left\langle \frac{a_0}{2}, \cos mx\right\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \cos kx, \cos mx\rangle + b_k \langle \sin kx, \cos mx\rangle \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \langle 1, \cos mx\rangle \overset{m\in\mathbf{N}}{=} 0,\ \langle \cos kx, \cos mx\rangle \overset{k,m\in\mathbf{N}}{=} \pi\delta_{k,m}, \\ \langle \sin kx, \cos mx\rangle \overset{k,m\in\mathbf{N}}{=} 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m\pi \ \Rightarrow\ a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Korrutades skalaarselt seose (2.14.2) mõlemat poolt funktsiooniga $\sin mx$ $(m \in \mathbf{N})$, jõuame tulemuseni

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Seega näitasime, et kui lõigul $[a, b]$ integreeruva ruuduga funktsioon $f(x)$ on 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi koostatud rea (2.14.1) summa, siis rea (2.14.1) kordajad avalduvad kujul

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \quad (k \in \mathbf{N}_0) \tag{2.14.3}$$

ja

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \quad (k \in \mathbf{N}). \tag{2.14.4}$$

Kui lõigul $[-\pi,\pi]$ on antud mingi integreeruva ruuduga funktsioon $f(x)$, siis me võime koostada rea (2.14.1), arvutades valemite (2.14.3) ja (2.14.4) abil suurused a_k $(k \in \mathbf{N}_0)$ ja b_k $(k \in \mathbf{N})$. Nii koostatud rida (2.14.1) nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Fourier' reaks 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi ja suurusi a_k ja b_k Fourier' rea kordajateks.

Lause 1. Funktsioon $f(x)$, mis on lõigul $[-\pi,\pi]$ integreeruva ruuduga, on sellel lõigul arendatav 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi Fourier' ritta

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kusjuures Fourier' kordajad a_k ja b_k on leitavad valemite (2.14.3) ja (2.14.4) abil.

Integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida trigonomeetrilise süsteemi järgi koondub keskmiselt funktsiooniks $f(x)$, st

$$\|f(x) - S_n(x)\| \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{2.14.5}$$

Rõhutame, et

$$\|f(x) - S_n(x)\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \;\not\Rightarrow\; S_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x) \;\; \forall x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Tingimus, et funktsioon $f(x)$ on integreeruva ruuduga lõigul $[-\pi,\pi]$, on piisav valemites (2.14.3) ja (2.14.4) esinevate integraalide olemasoluks või koonduvuseks, kuid ei ole tarvilik. Integraalid valemites (2.14.3) ja (2.14.4) on leitavad ka lõigul $[-\pi,\pi]$ absoluutselt integreeruva funktsiooni $f(x)$ korral. Sel juhul on funktsiooni $f(x)$ Fourier' rea koonduvuse uurimine keerukam ülesanne. Fakti, et trigonomeetriline rida (2.14.1) on funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida, tähistame järgmiselt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Rõhutame, et 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi leitud Fourier' rea summa on 2π-perioodiline funktsioon.

Näide 1. Leiame funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x \in [-\pi, 0)\,, \\ 1, & \text{kui } x \in [0, \pi]\,, \end{cases}$$

Fourier' rea 2π- perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi.

See funktsioon on lõigul $[-\pi,\pi]$ integreeruva ruuduga. Arvutame valemite

(2.14.3) ja (2.14.4) abil Fourier' rea kordajad:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos kx\,dx =\\
&= -\left.\frac{\sin kx}{k\pi}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\sin kx}{k\pi}\right|_{0}^{\pi} = 0 \quad (k\in\mathbf{N}),\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin kx\,dx =\\
&= \left.\frac{\cos kx}{k\pi}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos kx}{k\pi}\right|_{0}^{\pi} = \frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k-(-1)^k+1\right) =\\
&= \frac{1}{k\pi}\left(2-2\,(-1)^k\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \Rightarrow \begin{cases} b_{2k}=0 \\ b_{2k-1} = \dfrac{4}{(2k-1)\,\pi} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Vormistame saadud tulemuse:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\,(2k-1)\,x.$$

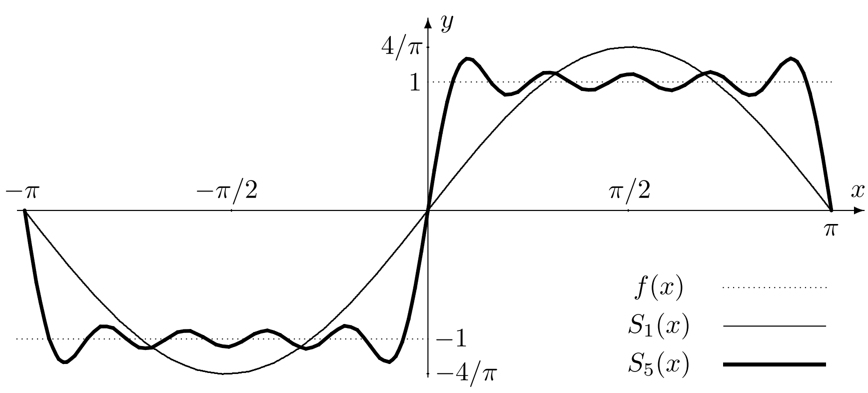
Skitseerime lõigul $[-\pi,\pi]$ funktsiooni $f(x)$ ja tema Fourier' rea osasummade

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2k-1}\sin\,(2k-1)\,x$$

ning

$$S_5(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}\sin\,(2k-1)\,x$$

graafikud



♢

2° Vaatleme analoogilist probleemi trigonomeetrilise süsteemi

$$\left\{1,\, \cos\frac{\pi x}{l},\, \sin\frac{\pi x}{l},\, \cos\frac{2\pi x}{l},\, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l},\, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots\right\} \tag{2.14.6}$$

korral. Süsteemi (2.14.6) funktsioonid on perioodiga $2l$. Tõesti konstantse funktsiooni 1 perioodiks sobib suvaline positiivne arv ja

$$\cos\frac{k\pi\left(x+\dfrac{2l}{k}\right)}{l} = \cos\left(\frac{k\pi x}{l}+2\pi\right) = \cos\frac{k\pi x}{l} \quad (k\in\mathbf{N})$$

ja

$$\sin\frac{k\pi\left(x+\dfrac{2l}{k}\right)}{l} = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}+2\pi\right) = \sin\frac{k\pi x}{l} \quad (k\in\mathbf{N})\,.$$

Seega on selle süsteemi elementide ühine periood $2l$. Süsteemi (2.14.6) funktsioonid on ortogonaalsed lõigul $[-l, l]$, st kehtivad seosed

$$\left\langle 1, \cos\frac{k\pi x}{l}\right\rangle = 0,\ \left\langle 1, \sin\frac{k\pi x}{l}\right\rangle = 0 \quad (k\in\mathbf{N})\,,$$

$$\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{m\pi x}{l}\right\rangle = 0 \quad (k, m\in\mathbf{N})\,,$$
$$\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \cos\frac{m\pi x}{l}\right\rangle = 0,\ \left\langle \sin\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{m\pi x}{l}\right\rangle = 0 \ (k, m\in\mathbf{N},\, k\neq m)\,.$$

Tõestame neist kolmanda seose

$$\begin{aligned}\left\langle \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{m\pi x}{l}\right\rangle &= \int_{-l}^{l-} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \\ &= \left[t=\frac{\pi x}{l},\ x=\frac{lt}{\pi},\ dx=\frac{l}{\pi}dt\right] = \\ &= \frac{l}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,\sin mt\,dt = 0 \quad (k, m\in\mathbf{N})\,.\end{aligned}$$

Olgu antud trigonomeetriline rida

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$2l$-perioodilise süsteemi (2.14.6) järgi, kusjuures lõigul $[-l, l]$ olgu selle rea summa $f(x)$ integreeruva ruuduga funktsioon. Seega kehtib seos

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.14.7}$$

Korrutades seose (2.14.7) mõlemat poolt skalaarselt kas funktsiooniga $\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ $(k \in \mathbf{N}_0)$ või funktsiooniga $\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ $(k \in \mathbf{N})$. Pärast teisendamist jõuame vastavalt valemiteni

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k \in \mathbf{N}_0) \tag{2.14.8}$$

ja

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad (k \in \mathbf{N})\,. \tag{2.14.9}$$

Lause 2. Kui lõigul $[-l, l]$ on antud integreeruva ruuduga funktsioon $f(x)$, siis võime funktsioonile $f(x)$ vastavusse seada tema Fourier' rea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{2.14.10}$$

süsteemi (2.14.6) järgi, arvutades valemite (2.14.8) ja (2.14.9) abil Fourier' rea kordajad.

Näide 2. Leiame lõigul $[-1; 1]$ funktsiooni

$$f(x) = |x|$$

Fourier' rea perioodilise trigonomeetrilise süsteemi, perioodiga 2, järgi.

See funktsioon on lõigul $[-1; 1]$ integreeruva ruuduga. Antud juhul $l = 1$. Arvutame valemite (2.14.9) ja (2.14.10) abil Fourier' rea kordajad

$$b_m \overset{m\in\mathbf{N}}{=} \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\sin(m\pi x)\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{integreeritav funktsioon on}\\ \text{paaritu, rajad sümmeetrilised}\\ \text{nullpunkti suhtes}\end{array}\right] = 0$$

ja

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\cos(m\pi x)\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{integreeritav funktsioon on}\\ \text{paaris, rajad sümmeetrilised}\end{array}\right] = \\
&= 2\int_0^1 x\cos(m\pi x)\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \cos(m\pi x)\,dx & v = \dfrac{\sin(m\pi x)}{m\pi}\end{array}\right] = \\
&= 2\frac{x\sin(m\pi x)}{m\pi}\bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}dx = 0 + 2\frac{\cos(m\pi x)}{m^2\pi^2}\bigg|_0^1 = \\
&= 2\left(\frac{\cos(m\pi)}{m^2\pi^2} - \frac{1}{m^2\pi^2}\right) = \frac{2\left((-1)^m - 1\right)}{m^2\pi^2} \quad (m \in \mathbf{N})\,,
\end{aligned}$$

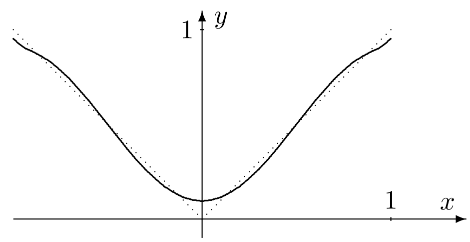
st $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = -4/\left((2n-1)^2\pi^2\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ ning

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 x dx = 1.$$

Seega saame tulemuseks

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)\,\pi x\right)}{(2n-1)^2}.$$

Skitseerime lõigul $[-1;1]$ funktsiooni $|x|$ ja tema Fourier' rea osasumma $S_1(x)$ graafikud vastavalt punktiirjoone ja pideva joonega



$\diamondsuit$

Lisame tõestuseta veel ühe olulise väite.

Lause 3. Kui funktsioon $f(x)$ on tõkestatud lõigul $[-l,l]$ ja tükiti pidev ning tükiti monotoonne sel lõigul, siis funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida koondub lõigu $[-l,l]$ igas punktis. Seejuures vahemiku $(-l,l)$ igas punktis, milles $f(x)$ on pidev, koondub rida funktsiooni $f(x)$ väärtuseks ja vahemiku igas punktis, milles $f(x)$ on katkev, koondub rida funktsiooni ühepoolsete piirväärtuste aritmeetiliseks keskmiseks. Lõigu $[-l,l]$ otspunktides koondub rida suuruseks $0.5\left(f(l-0)+f(-l+0)\right).$

2.15 Koosinusrida ja siinusrida

Valemitest (2.14.8) ja (2.14.9) järeldub, et lõigul $[-l,l]$ paarisfunktsiooni $f(x)$ Fourier' rida (2.14.10) on koosinusrida ja paaritu funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida (2.14.10) on siinusrida. Käsitleme järgnevalt probleemi, kuidas lõigul $[0,l]$ integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ arendada lõigul $[0,l]$ süsteemi (2.14.6) järgi *(Fourier') koosinusritta* või *(Fourier') siinusritta*. Uurime lähemalt koosinusritta arendamist.

Defineerime funktsiooni

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in [0,l]\,, \\ f(-x), & \text{kui } x \in [-l,0)\,. \end{cases}$$

Funktsioon $g(x)$ on lõigul $[-l,l]$ paarisfunktsioon ja on integreeruva ruuduga sel lõigul. Leiame valemite (2.14.9) ja (2.14.8) abil funktsiooni Fourier' kordajad

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \left[\begin{array}{c} g(x) \text{ on} \\ \text{paarisfunktsioon} \end{array}\right] = \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} g(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = [\text{lõigul } [0,l] \;\; g(x)=f(x)] = \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad (m \in \mathbf{N}_0) \end{aligned}$$

ja

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \left[\begin{array}{c} g(x) \text{ on} \\ \text{paarisfunktsioon}\end{array}\right] = 0 \ \ (m \in \mathbf{N})\,.$$

Lause 1. Suvaline funktsioon $f(x)$, mis on lõigul $[0, l]$ integreeruva ruuduga, on sel lõigul arendatav koosinusritta

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{2.15.1}$$

kusjuures

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \ \ (k \in \mathbf{N}_0)\,. \tag{2.15.2}$$

Näide 1. Leiame lõigul $[0; 1]$ funktsiooni

$$f(x) = \sin x$$

arenduse koosinusritta perioodilise trigonomeetrilise süsteemi, perioodiga 2, järgi.

Valemi (2.15.2) abil saame

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 \sin x \cos(k\pi x)\ dx = \int_0^1 (\sin(x - k\pi x) + \sin(x + k\pi x))\,dx = \\ &= -\left(\frac{\cos(x - k\pi x)}{1 - k\pi} + \frac{\cos(x + k\pi x)}{1 + k\pi}\right)\Bigg|_0^1 = \\ &= \frac{1}{1 - k\pi} + \frac{1}{1 + k\pi} + (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{1 - k\pi} + \frac{1}{1 + k\pi}\right)\cos 1 = \\ &= \frac{2\left(1 + (-1)^{k+1}\cos 1\right)}{1 - k^2\pi^2} \quad (k \in \mathbf{N}_0)\,. \end{aligned}$$

Seose (2.15.1) abil leiame soovitud arenduse

$$\sin x \sim 1 - \cos 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + (-1)^{k+1}\cos 1\right)}{1 - k^2\pi^2}\cos(k\pi x) \quad (x \in [0; 1])\,. \ \diamondsuit$$

Sarnaselt Lausega 1 tõestatakse järgmine väide.

Lause 2. Funktsioon $f(x)$, mis on lõigul $[0, l]$ integreeruva ruuduga, on sel lõigul arendatav siinusritta

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{2.15.3}$$

kusjuures

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \ \ (k \in \mathbf{N})\,. \tag{2.15.4}$$

Näide 2. Leiame lõigul $[0;3]$ funktsiooni

$$f(x) = x^2$$

arenduse siinusritta perioodilise trigonomeetrilise süsteemi, perioodiga 6, järgi.

Valemi (2.15.4) abil saame

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \sin\frac{k\pi x}{3}\,dx = [\text{SWP30}] =$$

$$= 18\frac{(-1)^{k+1}\left(k^2\pi^2 - 2\right) - 2}{k^3\pi^3} \quad (k \in \mathbf{N}_0)\,.$$

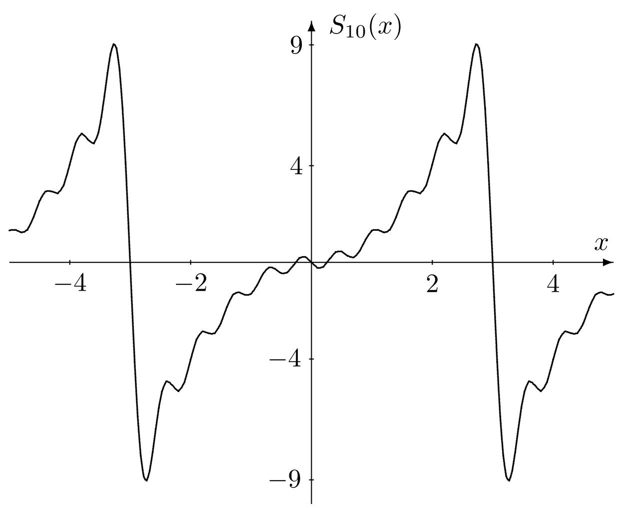
Seosest (2.15.3) leiame, et $x \in [0;3]$ korral

$$x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} 18\frac{(-1)^{k+1}\left(k^2\pi^2 - 2\right) - 2}{k^3\pi^3}\sin\frac{k\pi x}{3}.$$

Skitseerime Fourier' rea osasumma

$$S_{10}(x) = \sum_{k=1}^{30} 18\frac{(-1)^{k+1}\left(k^2\pi^2 - 2\right) - 2}{k^3\pi^3}\sin\frac{k\pi x}{3}$$

graafiku lõigul $[-5;5]$



Võrrelge funktsioonide x^2 ja $S_{30}(x)$ käitumist lõigul $[0;3]$ ja väljaspool seda lõiku. $\diamondsuit$

2.16 Fourier' rea kompleksskuju

Euleri valemist

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{2.16.1}$$

järeldub

$$\cos\varphi = \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} \tag{2.16.2}$$

ja

$$\sin\varphi = \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i}, \tag{2.16.3}$$

kusjuures $\exp(i\varphi) = e^{i\varphi}$.

Lause 1. Funktsioonide süsteem

$$\{\exp(ik\pi x/l)\} \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{2.16.4}$$

on perioodiga $2l$ ja on ortogonaalne lõigul $[-l, l]$ ning süsteem

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\exp(ik\pi x/l)\right\} \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{2.16.5}$$

on ortonormeeritud lõigul $[-l, l]$.

Tõestus. Kuna $k \in \mathbf{Z}$ korral

$$\exp(ik\pi(x+2l)/l) = \exp(ik\pi x/l + i2k\pi) = \exp(i2k\pi)\exp(ik\pi x/l) \overset{(2.16.1)}{=}$$
$$= (\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))\exp(ik\pi x/l) = \exp(ik\pi x/l),$$

siis on süsteem (2.16.4) $2l$-perioodiline. Et $k \neq m$ $(k, m \in \mathbf{Z})$ korral, kasutades Märkust 2.11.2, saame

$$\langle\exp(ik\pi x/l), \exp(im\pi x/l)\rangle = \int_{-l}^{l}\exp(ik\pi x/l)\overline{\exp(im\pi x/l)}dx =$$

$$= \int_{-l}^{l}\exp(ik\pi x/l)\exp(-im\pi x/l)\,dx = \int_{-l}^{l}\exp(i(k-m)\pi x/l)\,dx =$$

$$= \frac{l}{i(k-m)\pi}\exp(i(k-m)\pi x/l)\Big|_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{l}{i(k-m)\pi}(\exp(i(k-m)\pi) - \exp(-i(k-m)\pi)) \overset{(2.16.3)}{=}$$

$$= \frac{2}{(k-m)\pi}\sin((k-m)\pi) = 0,$$

siis süsteem (2.16.4) on ortogonaalne. Kuna süsteem (2.16.4) on ortogonaalne ja

$$\langle\exp(ik\pi x/l), \exp(ik\pi x/l)\rangle = \int_{-l}^{l}\exp(ik\pi x/l)\overline{\exp(ik\pi x/l)}dx =$$

$$= \int_{-l}^{l}\exp(ik\pi x/l)\exp(-ik\pi x/l)\,dx = \int_{-l}^{l}dx = 2l,$$

siis süsteem (2.16.5) on ortonormaalne. $\square$

Lähtudes seosest (2.14.10), saame

$$
\begin{aligned}
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\exp(ik\pi x/l) + \exp(-ik\pi x/l)}{2} + \\
+ b_k \frac{\exp(ik\pi x/l) - \exp(-ik\pi x/l)}{2i} = \\
= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \exp(ik\pi x/l) + \frac{a_k + ib_k}{2} \exp(-ik\pi x/l) \right) = \\
= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ik\pi x/l),
\end{aligned}
$$

kus $c_0 = a_0/2$, $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 \quad (k \in \mathbf{N})$. Seoste (2.14.8) ja (2.14.9) abil leiame, et $k \in \mathbf{N}$ korral

$$
\begin{aligned}
c_k &= \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos(k\pi x/l)\ dx - \frac{i}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(k\pi x/l)\ dx \right) /2 = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \left(\cos(-k\pi x/l) + i \sin(-k\pi x/l)\right)\ dx = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \exp(-ik\pi x/l)\, dx
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
c_{-k} &= \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos(k\pi x/l)\ dx + \frac{i}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(k\pi x/l)\ dx \right) /2 = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \left(\cos(k\pi x/l) + i \sin(k\pi x/l)\right)\ dx = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \exp(-i(-k)\pi x/l)\, dx.
\end{aligned}
$$

Et ka

$$
c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos(0\pi x/l)\ dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \exp(-i0\pi x/l)\, dx,
$$

siis kõik suurused c_k avalduvad valemi

$$
c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) \exp(-ik\pi x/l)\, dx \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{2.16.6}
$$

abil. Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 1. Suvaline funktsioon $f(x)$, mis on lõigul $[-l,l]$ integreeruva ruuduga, on sel lõigul arendatav $2l$-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi *Fourier' ritta komplekskujul*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(ik\pi x/l\right), \qquad (2.16.7)$$

kusjuures Fourier' kordajad c_k on leitavad valemi (2.16.6) abil.

Näide 1. Leiame lõigul $[-2;2]$ Haari funktsiooni

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui} \quad x < 0 \\ 1, & \text{kui} \quad 0 \le x < 0.5 \\ -1, & \text{kui} \quad 0.5 \le x < 1 \\ 0, & \text{kui} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

arenduse Fourier' ritta komplekskujul, kusjuures trigonomeetrilise süsteemi periood olgu $2l = 4$.

Valemi (2.16.6) abil leiame, et

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \psi(x) \exp\left(-ik\pi x/2\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} 0 \cdot \exp\left(-ik\pi x/2\right) dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{0.5} 1 \cdot \exp\left(-ik\pi x/2\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{0.5}^{1} (-1) \cdot \exp\left(-ik\pi x/2\right) dx + \frac{1}{4}\int_{1}^{2} 0 \cdot \exp\left(-ik\pi x/2\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi i} \exp\left(-ik\pi x/2\right)\Big|_0^{0.5} + \frac{1}{2k\pi i} \exp\left(-ik\pi x/2\right)\Big|_{0.5}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2k\pi i}\left(-\exp\left(-ik\pi/4\right) + 1 + \exp\left(-ik\pi/2\right) - \exp\left(-ik\pi/4\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2k\pi i}\left(1 - \exp\left(-ik\pi/4\right)\right)^2 \qquad (k \in \mathbf{Z} \wedge k \neq 0)$$

ja

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \psi(x) \exp\left(-i0\pi x/2\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \psi(x) dx = 0.$$

Valemi (2.16.7) abil saame soovitud reaksarenduse

$$\psi(x) \sim \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{2k\pi i}\left(1 - \exp\left(-ik\pi/4\right)\right)^2 \exp\left(ik\pi x/2\right). \qquad \diamondsuit$$

2.17 Fourier' integraalvalem. Fourier' teisendus

Fourier' rea summa on perioodiline funktsioon. Seega vahemikus $(-\infty, +\infty)$ saame esitada Fourier' rea summana vaid perioodilisi funktsioone. Järgnevas uurime mõningaid mitteperioodiliste funktsioonide esitamisvõimalusi vahemikus $(-\infty, +\infty)$.

Definitsioon 1. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *lokaalselt tükiti siledaks* vahemikus $(-\infty, +\infty)$, kui see on tükiti sile igal lõigul $[a, b]$, st igal lõigul $[a, b]$ on funktsiooni tuletis $f'(x)$ pidev, välja arvatud ülimalt lõplikus arvus punktides, mis on tuletisele $f'(x)$ esimest liiki katkevuspunktideks.

Olgu funktsioon $f(x)$ lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus. Neil eeldustel on funktsiooni $f(x)$ jaoks leitavad valemi (2.16.6) abil Fourier' kordajad c_k $(k \in \mathbf{Z})$ ja Fourier' rea komplekskuju (2.16.7). Asendades need kordajad reaksarendusse (2.16.7), saame lõigul $[-l, l]$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{ik\pi x}{l}\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{l}\right) dt\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{l}\right).$$

Kui tähistada $k\pi/l = \omega_k$, siis

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = k\pi/l - (k-1)\pi/l = \pi/l \overset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ja

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \exp(-i\omega_k t)\, dt\right) \exp(i\omega_k x)\, \Delta\omega_k.$$

Käsitleme seda rida kui integraalsummat. Minnes piirile $l \to +\infty$, saame teatud tingimustel

$$f(x) \sim \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \exp(-i\omega_k t)\, dt\right) \exp(i\omega_k x)\, \Delta\omega_k =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x)\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt.$$

Seega

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x)\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt. \tag{2.17.1}$$

Seost (2.17.1) nimetatakse *Fourier' integraalvalemiks.*

Lause 1. Kui funktsioon $f(x)$ lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis kehtib seos (2.17.1) ja igas punktis x, milles $f(x)$ on diferentseeruv, kehtib võrdus

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega x)\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt. \tag{2.17.2}$$

Definitsioon 2. Kujutist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\, dx \tag{2.17.3}$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' teisendiks* ja tähistatakse sümboliga $\widehat{f}(\omega)$ ning kujutist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp(i\omega x)\, d\omega \tag{17.4}$$

nimetatakse funktsiooni $g(\omega)$ *Fourier' pöördteisendiks* ja tähistatakse $\widetilde{g}(x)$, kusjuures kujutust $f \longmapsto \widehat{f}$ nimetatakse *Fourier' teisenduseks* ja kujutust $g \longmapsto \widetilde{g}$ nimetatakse *Fourier' pöördteisenduseks.*

Seega

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\, dx, \quad \widetilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp(i\omega x)\, d\omega.$$

Lauses 1 on esitatud piisavad tingimused selleks, et $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$, st kehtib seos (2.17.2).

Näide 1. Olgu

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } x \in [0;1], \\ 0, \text{ kui } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisendi.

Valemi (2.17.3) abil leiame

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\omega x)\, dx = \int_0^1 1\cdot\exp(-i\omega x)\, dx =$$
$$= \left.\frac{\exp(-i\omega x)}{-i\omega}\right|_0^1 = \frac{1-\exp(-i\omega)}{i\omega}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Olgu

$$f(\omega) = \begin{cases} \sin\omega, \text{ kui } x \in [-\pi;\pi], \\ 0, \text{ kui } x \notin [-\pi;\pi]. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni $f(\omega)$ Fourier' pöördteisendi.

Valemi (2.17.4) abil leiame

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\,(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\omega\cdot\exp(i\omega x)\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(i\omega)-\exp(-i\omega)}{2i}\exp(i\omega x)\,d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\exp(i(x+1)\omega)-\exp(i(x-1)\omega)\right)d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{\exp(i(x+1)\omega)}{i(x+1)}-\frac{\exp(i(x-1)\omega)}{i(x-1)}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{-1}{4\pi i}\left(\frac{\exp(ix\pi)-\exp(-ix\pi)}{i(x+1)}+\frac{\exp(-ix\pi)-\exp(ix\pi)}{i(x-1)}\right) = \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{\sin(x\pi)}{x+1}-\frac{\sin(x\pi)}{x-1}\right) = \frac{-i\sin(x\pi)}{\pi(x^2-1)}. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Märkus 1. Kui arendame $2l$-perioodilist funktsiooni $f(x)$ kogu arvteljel Fourier' ritta kujul (2.14.10) või (2.16.7), siis kasutame sagedusi $\omega_k = (k\pi)/l$, vastavalt $k \in \mathbf{N}_0$ või $k \in \mathbf{Z}$. Sel korral kõneldakse *diskreetsest spektrist.* Kui aga kasutame mitteperioodilise funktsiooni kirjeldamiseks Fourier' integraalvalemit (2.17.1), siis kasutame üldjuhul kõiki sagedusi ω vahemikust $(-\infty;\infty)$ või selle vahemiku osavahemikust. Sel korral kõneldakse *pidevast spektrist.*

Teatud erijuhul on ka mitteperioodiline funktsioon kogu arvteljel kirjeldatav diskreetse spektri abil.

Lause 2 (*Shannoni teoreem*). Kui funktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty;\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus ning selle funktsiooni Fourier' teisendus $\widehat{f}(\omega)$ on nullist erinev vaid lõigul $[-l,l]$, siis

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{l}\right)\frac{\sin(lx-n\pi)}{lx-n\pi}.$$

Fourier' teisenduse rakendustes on kasulik järgmine väide.

Lause 3. Kui $f(x)$ on pidev lokaalselt tükiti sile funktsioon ja funktsioonid $f(x)$ ning $xf(x)$ on absoluutselt integreeruvad vahemikus $(-\infty,+\infty)$, siis

$$\widehat{f\,'}(\omega) = i\omega\widehat{f}\,(\omega)\,.$$

2.18 Koosinusteisendus ja siinusteisendus

Kui funktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty,+\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis Lause 2.17.1 põhjal kehtib seos (2.17.1), st

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega x)\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt. \qquad (2.18.1)$$

Kasutades Euleri valemit (2.16.1), saame võrdusest (2.18.1)

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(\omega x) + i\sin(\omega x))\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x))\,(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\cos(\omega x)\cos(\omega t) + \sin(\omega x)\sin(\omega t))\, dt +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\cos(\omega t)\sin(\omega x) - \cos(\omega x)\sin(\omega t))\, dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{funktsioon } f(x) \text{ on reaalsete väärtustega funktsioon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{imaginaarühiku } i \text{ kordaja on } 0 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\cos(\omega x)\cos(\omega t) + \sin(\omega x)\sin(\omega t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(-\omega(x-t))\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt.$$

Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 1. Kui funktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt \tag{2.18.2}$$

ja igas punktis x, milles $f(x)$ on diferentseeruv, kehtib võrdus

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt. \tag{2.18.3}$$

Integraali

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega(x-t))\, dt$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' integraaliks.* Et

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(\omega\left(x-t\right)\right)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\left(\omega x\right)\cos\left(\omega t\right)+\sin\left(\omega x\right)\sin\left(\omega t\right)\right)dt,$$

siis juhul kui $f(x)$ on paarisfunktsioon, saame

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(\omega x\right)\cos\left(\omega t\right)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\left(\omega x\right)\cos\left(\omega t\right)dt$$

ja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\left(\omega x\right)\sin\left(\omega t\right)dt = 0$$

ning

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\left(\omega x\right)d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\cos\left(\omega t\right)dt. \tag{2.18.4}$$

Analoogiliselt saame paaritu funktsiooni $f(x)$ korral, et

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\left(\omega x\right)d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\sin\left(\omega t\right)dt. \tag{2.18.5}$$

Vormistame saadud tulemused.

Lause 2. Kui paarisfunktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis kehtib seos (2.18.4) ja igas punktis x, milles $f(x)$ on diferentseeruv, kehtib võrdus

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\left(\omega x\right)d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\cos\left(\omega t\right)dt. \tag{2.18.6}$$

Lause 3. Kui paaritu funktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis kehtib seos (2.18.5) ja igas punktis x, milles $f(x)$ on diferentseeruv, kehtib võrdus

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\left(\omega x\right)d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\sin\left(\omega t\right)dt. \tag{2.18.7}$$

Definitsioon 1. Integraale

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\left(\omega x\right)dx \tag{2.18.8}$$

ja

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\left(\omega x\right)dx \tag{2.18.9}$$

nimetatakse vastavalt funktsiooni $f(x)$ *Fourier' koosinusteisendiks* ja *Fourier' siinusteisendiks* ning kujutusi, mis funktsioonile $f(x)$ seavad vastavusse tema koosinusteisendi ja siinusteisendi, nimetatakse vastavalt *Fourier' koosinusteisenduseks* ja *Fourier' siinusteisenduseks.*

Näide 1. Leiame funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} |x|\,, \text{ kui } |x|\le 1, \\ 0, \text{ kui } |x|>1 \end{cases}$$

Fourier' koosinusteisendi.

Tegu on paarisfunktsiooniga. Rakendades eeskirja (2.18.8), saame

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^1 x\cos(\omega x)\,dx+\int_1^{+\infty}0\cdot\cos(\omega x)\,dx\right)=$$

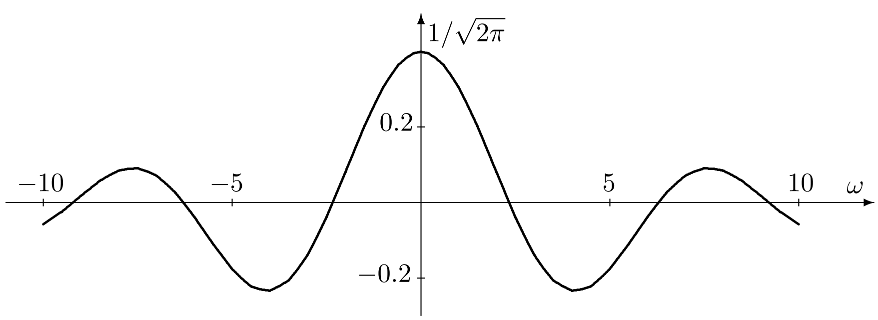
$$=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos(\omega x)\,dx & v=\dfrac{\sin(\omega x)}{\omega}\end{bmatrix}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left.\frac{x\sin(\omega x)}{\omega}\right|_0^1-\int_0^1\frac{\sin(\omega x)}{\omega}dx\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+\left.\frac{\cos(\omega x)}{\omega^2}\right|_0^1\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{\cos\omega}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}.$$

Skitseerime leitud koosinusteisendi graafiku lõigul $[-10;10]$



♢

Näide 2. Leiame funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ kui } x\in(0;2]\,, \\ -1, \text{ kui } x\in[-2;0)\,, \\ 0, \text{ kui } x=0 \text{ või } x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$$

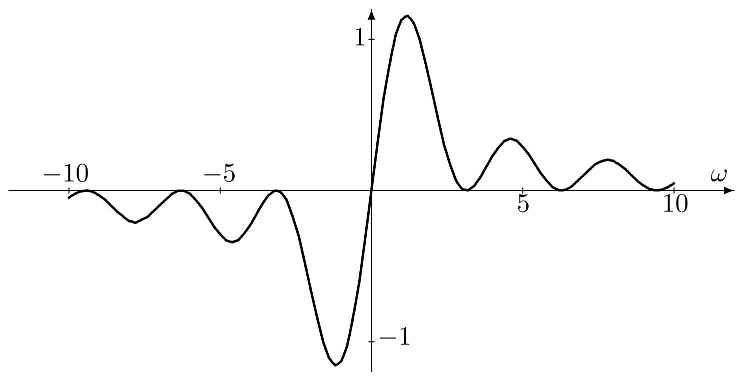
Fourier' siinusteisendi.

Tegemist on paaritu funktsiooniga. Rakendades eeskirja (2.18.9), saame

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^2 1\cdot\sin(\omega x)\,dx + \int_2^{+\infty} 0\cdot\sin(\omega x)\,dx\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\omega x)}{\omega}\bigg|_0^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(2\omega)}{\omega}.$$

Skitseerime leitud siinusteisendi graafiku lõigul $[-10; 10]$



2.19 Ülesanded

Ülesannetes 1–3 on antud rea neli esimest liiget. Leida nende põhjal rea üldliikme võimalik kuju.

1. $\sqrt{3}\arctan\frac{2}{5}+\sqrt{4}\arctan\frac{3}{9}+\sqrt{5}\arctan\frac{4}{13}+\sqrt{6}\arctan\frac{5}{17}+\ldots$

   V: $\sqrt{k+2}\arctan\frac{k+1}{4k+1}$.

2. $\frac{3}{6}-\frac{7}{12}+\frac{11}{24}-\frac{15}{48}+\ldots$ V: $\frac{4k-1}{3\cdot 2^k}$.

3. $\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 6\cdot 10}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}+\ldots$ V: $(-1)^{k+1}\,\frac{(2k-1)!!}{(4k-2)!!!!}$.

Ülesannetes 4–12 leidke rea osasumma S_n ja rea summa S.

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$. V: $\frac{n}{n+1}$, 1.

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$. V: $\frac{n(5n+13)}{12(n^2+5n+6)}$, $\frac{5}{12}$.

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)}$. V: $\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{n+1+\alpha}$, $\frac{1}{1+\alpha}$.

7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)(k+\alpha+2)}$.

V: $\dfrac{1}{2(\alpha+n+2)} - \dfrac{1}{2(\alpha+n+1)} + \dfrac{1}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}$, $\dfrac{1}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}$.

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)$. V: $1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$, $1-\sqrt{2}$.

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}$. V: $\dfrac{n}{1+2n}$, $\dfrac{1}{2}$.

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$. V: $\dfrac{n(n+3)}{4(n+2)(n+1)}$, $\dfrac{1}{4}$.

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$. V: $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^{2^n}}$; $\dfrac{x}{1-x}$, kui $|x|<1$, ja $\dfrac{1}{1-x}$, kui $|x|>1$.

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2k^2}$. Kasutage valemit $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ $(xy<1)$. V: $\arctan(n/(n+1))$, $\pi/4$.

13. Tõestage matemaatilise induktsiooni meetodil, et $\dfrac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)}$ on rea $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)\cdots(k+\alpha+p)}$ summa.

Ülesannetes 14–45 uurige rea koonduvust.

14. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^k}$ $(a>0)$. V: hajub, kui $a\le 1$ ja koondub, kui $a>1$.

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3k-1)3^k}$. V: koonduv.

16. $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\dfrac{3\pi}{4^k}$. V: koonduv. 17. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{3k+2}{k^2+2}$. V: hajuv.

18. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(k+2)(k+4)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$. V: hajuv.

19. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt[5]{k^2}}$. V: koonduv.

20. $\sum_{k=1}^{\infty}\tan\dfrac{2\pi}{5k}$. V: hajuv. 21. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(2k+3)}$. V: hajuv.

22. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{k}}{1+\sqrt[3]{k^2}}\right)^7$. V: koonduv.

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}\right)^2$. V: koonduv.

24. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{3^k}{(3k+1)!}$. V: koonduv. 25. $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\dfrac{k\pi}{3^k}$. V: koonduv.

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{(3k-2)!!!}$. V: koonduv. 27. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k}{(k+1)^4}$. V: hajuv.

28. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{1/k}-1\right)$. V: hajuv. 29. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+1/k)$. V: hajuv.

30. $\sum_{k=1}^{\infty}q^{k+\sqrt{k}}$ $(q>0)$. V: koonduv, kui $q<1$, ja hajuv, kui $q\ge 1$.

31. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{k}\right)$. V: koonduv.

32. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\dfrac{1+\tan\frac{\pi}{k}}{1-\tan\frac{\pi}{k}}$. V: hajuv. 33. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^{k-1}}{k!e^k}$. V: koonduv.

34. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{-k^2}$. V: koonduv. 35. $\sum_{k=1}^{\infty} \tan^k \frac{\pi}{3k}$. V: koonduv.

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^k \frac{2k+3}{k+1}$. V: koonduv. 37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^k(2k+3)}$. V: koonduv.

38. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}\ \ (p>0)$. V: hajuv, sest $(\ln k)^p < k\ \ (k > k_0)$.

39. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$. V: koonduv, sest $\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln \ln k}} < \frac{1}{k^2}\ \ (k > k_0)$.

40. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)(\ln \ln k)}$. V: hajuv.

41. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{1+\alpha} k}\ \ (\alpha > 0)$. V: koonduv.

42. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)\ln \ln^{1+\alpha} k}\ \ (\alpha > 0)$. V: koonduv.

43. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{e^{2k}+1}$. V: koonduv. 44. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{3k^2}$. V: hajuv.

45. $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{2k-1}{4k+3}$. V: koonduv.

Ülesannetes 46–51 uurige rea absoluutset ja tingimisi koonduvust.

46. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt[3]{k}+2}{\sqrt{k}+7}$. V: tingimisi koonduv.

47. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{k} \sin \frac{\pi}{2k}$. V: tingimisi koonduv.

48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2+1}$. V: absoluutselt koonduv.

49. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\ln k)(\ln(k+1))}{\sqrt[10]{k+2}}$. V: tingimisi koonduv.

50. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{10k+2} \sin \frac{k\pi}{2}$. V: hajuv.

51. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{k! e^k}$. V: tingimisi koonduv.

Ülesannetes 52–57 leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond.

52. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \arcsin^k x$. V: $(-\sin 1; \sin 1)$.

53. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln^k (ex)$. V: $\left(e^{-2}; 1\right)$. 42. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(3^k x\right)}{\sqrt{k^3+1}}$. V: $\mathbf{R}$.

54. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \tan \frac{x}{\pi^k}$. V: $(-\pi; \pi)$.

55. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^k$. V: $(-\infty; 1/3) \cup (1; +\infty)$.

56. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^3 x}$. V: $(0; +\infty)$.

57. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{(x+2)^k}$. V: $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Ülesannetes 58–66 leidke astmerea koonduvuspiirkond ja koonduvusraadius.

58. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 3^{k+1} x^k$. V: $(-1/3; 1/3)$, 1/3.

59. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^k}{k(k+1)}$. V: $[-1;1]$, 1.

60. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^k(x+3)^k}{k!}$. V: $\mathbf{R}$, $+\infty$.

61. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(k+1)(x-2)^k}{3^k}$. V: $(-1;5)$, 3.

62. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(kx)^k}{k!}$. V: $\left[-e^{-1},e^{-1}\right)$, e^{-1}.

63. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k(x+2)^k}{3^k}$. V: $(-5;1)$, 3.

64. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(k!)^2}{(2k)!}\dfrac{(x-3)^k}{3^k}$. V: $(-9;15)$, 12.

65. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)^{k+1}\dfrac{(x+1)^k}{3^k}$. V: $\{-1\}$, 0.

66. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k+1}{k+3}\dfrac{(x+2)^{2k}}{(2k)!}$. V: $\mathbf{R}$, $+\infty$.

Ülesannetes 67–70 leidke astmerea summa.

67. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k+1}$. V: $-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

68. $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$. V: $x/(x-1)^2$. 69. $\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)x^k$. V: $2x/(1-x)^3$.

70. $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^k}{k(k+1)}$. V: $1+(3\ln(3-x)-(\ln(3-x))x)/(x-2)$.

Ülesannetes 71–77 leidke funktsiooni $f(x)$ Maclaurini rida ja selle koonduvuspiirkond.

71. $f(x)=\cos\dfrac{2x}{3}$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{2^{2k}x^{2k}}{3^{2k}(2k)!}$, $\mathbf{R}$.

72. $f(x)=e^{3x/7}$. V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3^kx^k}{7^kk!}$, $\mathbf{R}$.

73. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$. V: $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{2^{2k+0.5}k!}x^{2k+1}$, $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

74. $f(x)=\sin^2 2x$. V: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{2^{4k-1}x^{2k}}{(2k)!}$, $\mathbf{R}$.

75. $f(x)=x^2\ln\left(3-x^2\right)$. V: $x^2\ln 3-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{2k+2}}{k3^k}$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

76. $f(x)=\cos\left(\pi-x^3\right)$. V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{x^{6k}}{(2k)!}$, $\mathbf{R}$.

77. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

V: $1+\dfrac{x}{3}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(3k-2)!!!x^{3k}}{k!3^{4k}}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(3k-2)!!!x^{3k+1}}{k!3^{4k+1}}$, $(-3;3)$.

Ülesannetes 78–81 leidke funktsiooni $f(x)$ Taylori rida punkti a ümbruses. Leidke selle rea koonduvuspiirkond.

78. $f(x)=\cos x,\quad a=\pi/2.\quad$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{(x-\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\mathbf{R}$.

79. $f(x)=\sin x,\quad a=\pi.\quad$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{(x-\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\mathbf{R}$.

80. $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\quad a=-1.\quad$ V: $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^k}{2^{k+1}}$, $(-3;1)$.

81. $f(x)=\ln x,\quad a=1.\quad$ V: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{(x-1)^k}{k}$, $[0;2)$.

Ülesannetes 82–88 avaldage integraal astmerea abil.

82. $\int_0^2 e^{-x^2}dx.\quad$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{2^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}$.

83. $\int\dfrac{\sin x}{x}dx.\quad$ V: $C+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}$.

84. $\int\dfrac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x^2}dx.\quad$ V: $C-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k x^{3k-1}}{k(3k-1)}$.

85. $\int\dfrac{1-\cos\left(3x^2\right)}{2x^3}dx.\quad$ V: $C+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{3^{2k}x^{4k-2}}{2\,(4k-2)\,(2k)!}$.

86. $\int_0^{0.5}\ln\left(3+\sqrt[3]{x}\right)dx.\quad$ V: $\ln\sqrt{3}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k\,(k/3+1)\,3^k 2^{k/3+1}}$.

87. $\int\dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{3x}dx.\quad$ V: $C+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{3\,(2k+1)\,(2k+1)!}$.

88. $\int_0^1\dfrac{1-\operatorname{ch}(3x)}{2x^2}dx.\quad$ V: $-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3^{2k}}{(4k-2)\,(2k)!}$.

89. Leidke funktsiooni $\arcsin x$ Maclaurini rida. Lähtuge seosest $\arcsin x=\int_0^x\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ja avaldage integraal astmerea abil. V: $x+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)!!\,x^{2k+1}}{2^k\,k!\,(2k+1)}$.

90. Leidke funktsiooni $\ln(1+x)$ Maclaurini rida. Lähtuge seosest $\ln(1+x)=\int_0^x\dfrac{dx}{1+x}$ ja avaldage integraal astmerea abil.

91. Leidke funktsiooni $\arctan x$ Maclaurini rida. Lähtuge seosest $\arctan x=\int_0^x\dfrac{dx}{1+x^2}$ ja avaldage integraal astmerea abil. V: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Ülesannetes 92–95 leidke astmeridade abil diferentsiaalvõrrandi erilahend või üldlahend.

92. $y'+y=x,\ y(-1)=1.\quad$ V: $1-2\,(x+1)+3\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(x+1)^k}{k!}$.

93. $y'-2y=e^x,\ y(0)=1.\quad$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^{k+1}-1}{k!}x^k$.

94. $y''-y'=0.\quad$ V: $C_2+(C_1-C_2)\,x+C_2\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^k}{k!}$.

95. $y''+4y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.\quad$ V: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$.

Ülesannetes 96–99 leidke Maclaurini arenduse abil täpsusega 10^{-4}. Millist järku osasumma annab juba sellise täpsuse?

96. $\sqrt{e^3}$. V: $4.481\,7$, 9. 97. $\sin 0.1$. V: 0.0998, 3.

98. $\cos 0.2$. V: $0.980\,0$, 2. 99. $\sqrt[10]{1000}$. V: $1.995\,3$, 1.

Ülesannetes 100–111 arendage funktsioon $f(x)$ Fourier' ritta vahemikus (a,b) $2l$-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi.

100. $f(x)=e^{-x}$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$.

V: $\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}+\dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx+k\sin kx)$.

101. $f(x)=e^{ax}$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$.

V: $\dfrac{2\operatorname{sh}\,(a\pi)}{\pi}\left\{\dfrac{1}{2a}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx-k\sin kx)\right\}$.

102. $f(x)=x$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$.

103. $f(x)=x^2$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$.

104. $f(x)=\operatorname{sh}x$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $\dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}k}{k^2+1}\sin kx$.

105. $f(x)=\operatorname{ch}x$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2+1}\cos kx\right)$.

106. $f(x)=\sin ax$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k k}{a^2-k^2}\sin kx$.

107. $f(x)=\cos ax$, $(-\pi;\pi)$, $l=\pi$. V: $\dfrac{2a\sin a\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a^2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k k}{a^2-k^2}\cos kx\right)$.

108. $f(x)=(\pi-x)/2$, $(0;2\pi)$, $l=\pi$. V: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$.

109. $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $(-1;1)$, $l=1$. V: $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin((2k+1)\pi x)}{2k+1}$.

110. $f(x)=1-|x|$, $(-1;1)$, $l=1$. V: $0.5+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}$.

111. $f(x)=H(x)-2H(x-0.5)+H(x-1)$, $(-1;1)$, $l=1$, kus $H(x)$ on Heaviside'i funktsioon.

V: $\dfrac{1}{\pi}\sum_{=1}^{\infty}\dfrac{2\sin\dfrac{k\pi}{2}}{k}\cos(k\pi x)+\dfrac{1+(-1)^k-2\cos\dfrac{k\pi}{2}}{k}\sin(k\pi x)$.

112. Arendage funktsioon x koosinusritta vahemikus $(0;\pi)$ 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi. V: $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

113. Arendage funktsioon $(\pi-x)/2$ koosinusritta vahemikus $(0;\pi)$ 2π-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi. V: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

114. Arendage funktsioon $\cos x$ siinusritta vahemikus $(0;1)$ 2-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi.
V: $2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\left(1+(-1)^{k+1}\cos 1\right)}{k^2\pi^2-1}\sin(k\pi x)$.
Ülesannetes 90–94 leidke funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisend.
115. $f(x)=H(x)-H(x-1)$. V: $\dfrac{\sin\omega}{\omega}+i\dfrac{\cos\omega-1}{\omega}$.
116. $f(x)=(1-|x|)\left(H(x+1)-H(x-1)\right)$. V: $2\left(1-\cos\omega\right)/\left(\omega^2\right)$.
117. $f(x)=(\operatorname{sgn} x)\left(H(x+a)-H(x-a)\right) \quad (a>0)$. V: $2i\dfrac{\cos a\omega-1}{\omega}$.
118. $f(x)=e^{-x}\left(H(x)-2H(x-0.5)+H(x-1)\right)$.
V: $\dfrac{1}{1+i\omega}\left(1+(\cos\omega-i\sin\omega)/e-2\left(\cos 0.5\omega-\sin 0.5\omega\right)/\sqrt{e}\right)$.
119. $f(x)=\left(H(x+\pi)-H(x-\pi)\right)\sin x$. V: $\dfrac{2i\sin(\pi\omega)}{\omega^2-1}$.
120. Leidke funktsiooni $g(\omega)=H(\omega+2\pi)-H(\omega+\pi)+H(\omega-\pi)-H(\omega-2\pi)$ Fourier' pöördteisend. V: $\dfrac{\sin(2\pi x)-\sin(\pi x)}{\pi x}$.
121. Leidke funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ kui } |x|\le 1, \\ 0, \text{ kui } |x|>1 \end{cases}$$

Fourier' koosinusteisend. V:$\sqrt{2}\left(\omega^2\sin\omega-2\sin\omega+2\omega\cos\omega\right)/\left(\sqrt{\pi}\omega^3\right)$.
122. Leidke funktsiooni

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ kui } x\in[-2;2], \\ 0, \text{ kui } x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$$

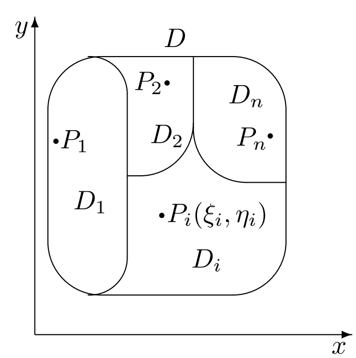
Fourier' siinusteisend. V: $2\sqrt{2}\left(\sin\omega\cos\omega-2\omega\cos^2\omega+\omega\right)/\left(\sqrt{\pi}\omega^2\right)$.

Peatükk 3

Integraalarvutus

3.1 Kahekordse integraali definitsioon. Omadused

Olgu D piirkond xy-tasandil. Rääkides selles peatükis mõistest *piirkond*, eeldame, et tegemist on kinnise, mõõtuva, tõkestatud hulgaga. Olgu funktsioon $f(x,y)$ määratud piirkonna D igas punktis $P\,(x,y)$, lühidalt $f\,(P)$. Jaotame piirkonna D tükiti siledate joontega n osapiirkonnaks D_i $(i = 1;\ldots;n)$



Olgu ΔS_i osapiirkonna D_i pindala ja d_i selle *piirkonna läbimõõt*, s.o suurim kaugus piirkonna D_i kahe punkti vahel. Rõhutame, et

$$\max d_i \to 0 \;\Rightarrow\; n \to \infty.$$

Valime igas osapiirkonnas D_i suvaliselt punkti $P_i\,(\xi_i, \eta_i)$, kusjuures $i = 1;\ldots;n$. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(P_i)\,\Delta S_i. \tag{3.1.1}$$

Märkus 1. Kui $f(P) \geq 0 \ \ (P \in D)$, siis suurus $f(P_i)\,\Delta S_i$ on püstsilindri, mille põhjaks on piirkond D_i ja kõrguseks $f(P_i)$, ruumala ning integraalsumma (3.1.1) on püstsilindrite ruumalade summa.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i,$$

mis ei sõltu piirkonna D osapiirkondadeks D_i jaotamise viisist ja punktide $P_i \in D_i$ valikust, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ *kahekordseks integraaliks* üle piirkonna D ning tähistatakse sümboliga

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS$$

ehk lühidalt $\iint_D f(P)\,dS$, st

$$\iint\limits_D f(P)dS \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i,$$

kus $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$.

Kasutatakse ka tähistusi $\iint_D f\,dxdy$ ja $\iint_D f\,dS$. Kui $\exists \iint_D f(P)\,dS$, siis öeldakse, et funktsioon $f(P)$ on *integreeruv* piirkonnas D ja tähistatakse $f(P) \in I(D)$.

Märkus 2. Kui $f(P) \geq 0 \ \ (P \in D)$ ja $f(P) \in C(D)$ ning

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid ((x,y) \in D) \wedge (0 \leq z \leq f(x,y))\},$$

siis piirkonna Ω *ruumalaks* V_Ω nimetatakse suurust

$$V_\Omega \overset{\text{def.}}{=} \iint\limits_D f(P)dS.$$

Paneme kirja mõningad kahekordse integraali omadused.

Lause 1 (vt [9], lk 267). Kui funktsioon $f(P)$ on pidev piirkonnas D, siis $f(P)$ on integreeruv selles piirkonnas, st

$$f(P) \in C(D) \Rightarrow f(P) \in I(D).$$

Märkus 3. Funktsiooni $f(P)$ pidevus piirkonnas D on piisav, kuid mitte tarvilik tingimus funktsiooni $f(P)$ integreeruvuseks selles piirkonnas.

Lause 2. Piirkonnas D on konstantne funktsioon 1 integreeruv, kusjuures integraali väärtuseks on piirkonna D pindala S_D, st

$$(1 \in I(D)) \wedge \left(\iint\limits_D 1\,dS = S_D\right).$$

Tõestus. Et vastav integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S_D$$

on konstantne suurus ja konstantse suuruse piirväärtus on see suurus ise, siis Lause 2 väide kehtib. □

Lause 3. Kui eksisteerib kahekordne integraal $\iint_D f(P)dS$ ja c on konstant, siis eksisteerib ka $\iint_D c\,f(P)dS$, kusjuures

$$\iint\limits_D c\,f(P)dS = c\iint\limits_D f(P)dS.$$

Tõestus. Kuna funktsiooni $c\,f(x,y)$ integraalsumma korral

$$\sum_{i=1}^{n} c\,f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i = c\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i$$

ja

$$\iint\limits_D cf(P)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf\left(P_i\right)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{\max d_i \to 0} c\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i =$$

$$= c\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i = c\iint\limits_D f(P)dS,$$

siis Lause 3 väide kehtib. □

Lause 4. Kui integraalid $\iint_D f(P)dS$ ja $\iint_D g(P)dS$ eksisteerivad, siis eksisteerib integraal $\iint_D \left(f(P)+g\left(P\right)\right)dS$, kusjuures

$$\iint\limits_D \left(f(P)+g\left(P\right)\right)dS = \iint\limits_D f(P)dS + \iint\limits_D g(P)dS.$$

Tõestame Lause 4 väite

$$\iint_D \left(f(P)+g\left(P\right)\right)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(P_i\right)+g\left(P_i\right)\right)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{\max d_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\Delta S_i + \sum_{i=1}^{n} g\left(P_i\right)\Delta S_i\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{kui mõlemast liidetavast piirväärtus eksisteerib,}\\ \text{siis summa piirväärtus on piirväärtuste summa}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i + \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g\left(P_i\right) \Delta S_i =$$

$$= \iint\limits_D f(P) dS + \iint\limits_D g(P) dS. \qquad \square$$

Lausetest 3 ja 4 järeldub kahekordse integraali lineaarsuse omadus.

Lause 5. Kui $D = D_I \cup D_{II}$, kus $D_I \cap D_{II}$ koosneb vaid piirkondade D_I ja D_{II} ühistest rajapunktidest, ning eksisteerivad integraalid $\iint_{D_I} f(P)dS$, $\iint_{D_{II}} f(P)dS$ ja $\iint_D f(P)dS$, siis

$$\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_{D_I} f(P)dS + \iint\limits_{D_{II}} f(P)dS. \tag{3.1.2}$$

Tõestus. Esitame integraalsumma kujul

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n_I} f\left(P_i\right) \Delta S_i + \sum_{i=n_I+1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i, \tag{3.1.3}$$

kusjuures piirkonna D osapiirkondadeks jagamisel on ühe joonena kasutatud piirkondade D_I ja D_{II} ühist rajajoont ja osapiirkonnad $D_1, \ldots, D_{n_I}$ on saadud piirkonna D_I jaotamisel ning $D_{n_I+1}, \ldots, D_n$ on saadud piirkonna D_{II} jaotamisel. Et

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i = \iint\limits_D f(P)dS$$

ja piirprotsessis $\max d_i \to 0$ eksisteerib piirväärtus mõlemast seose (3.1.3) paremal poolel esinevast summast, siis piirväärtus summast on piirväärtuste summa ning

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n_I} f\left(P_i\right) \Delta S_i +$$
$$+ \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=n_I+1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta S_i,$$

st seos (3.1.2) kehtib. $\square$

Lause 6. Kui eksisteerivad integraalid $\iint_D f(P)dS$ ja $\iint_D g(P)dS$ ning

$$f(P) \leq g(P) \quad (P \in D), \tag{3.1.4}$$

siis

$$\iint\limits_D f(P)dS \leq \iint\limits_D g(P)dS. \tag{3.1.5}$$

Tõestus. Et integraalid $\iint_D f(P)dS$ ja $\iint_D g(P)dS$ eksisteerivad, siis kahekordse integraali definitsioonis esinevad piirväärtused ei sõltu piirkonna D

osapiirkondadeks D_i jaotamise viisist ja punkti $P_i \in D_i$ valikust. Seega on võimalik nende integraalsummade koostamisel kasutada ühist piirkonna D osapiirkondadeks D_i jaotamist ja punkti $P_i \in D_i$ valikut. Et seose (3.1.4) põhjal saame $f(P_i) \leq g(P_i)$, siis rahuldavad integraalsummad võrratust

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\,\Delta S_i.$$

Võttes viimase võrratuse mõlema poole piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i \leq \lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\,\Delta S_i,$$

saame Lause 6 väite. $\square$

Lause 7. Kui eksisteerib integraal $\iint_D f(P)dS$ ja

$$m \leq f(P) \leq M \quad (P \in D)\,, \tag{3.1.6}$$

kus m ja M on konstandid, siis

$$m \cdot S_D \leq \iint\limits_D f(P)dS \leq M \cdot S_D. \tag{3.1.7}$$

Tõestus. Konstantne funktsioon kui pidev funktsioon on integreeruv. Seosest (3.1.6) järeldub Lause 6 põhjal võrratuste ahel

$$\iint\limits_D m\,dS \leq \iint\limits_D f(P)dS \leq \iint\limits_D M\,dS.$$

Viimasest ahelast saame Lausete 2 ja 3 abil Lause 7 väite. $\square$

Järeldus 1. Kui funktsioon $f(P)$ on pidev sidusas piirkonnas D, siis leidub piirkonnas D selline punkt Q, et

$$\iint\limits_D f(P)dS = f(Q) \cdot S_D. \tag{3.1.8}$$

Tõestus. Rääkides selles peatükis mõistest *piirkond*, me eeldame vaikimisi, et tegemist on kinnise tõkestatud mõõtuva hulgaga. Kinnisel tõkestatud sidusal hulgal omandab pidev funktsioon *ekstremaalsed väärtused* ja iga väärtuse nende ekstremaalsete väärtuste vahel. Seega leiduvad piirkonnas D sellised punktid P_1 ja P_2, et

$$f(P_1) = \min_{P\in D} f(P), \quad f(P_2) = \max_{P\in D} f(P).$$

Rakendame Lauset 7, valides $m = f(P_1)$ ja $M = f(P_2)$. Saame

$$\min_{P\in D} f(P) \cdot S_D \leq \iint\limits_D f(P)dS \leq \max_{P\in D} f(P) \cdot S_D.$$

Kuna kinnisel tõkestatud sidusal hulgal D pidev funktsioon $f(P)$ omandab iga väärtuse ekstremaalsete väärtuste vahel, siis leidub selline punkt $Q \in D$, mille korral kehtib seos (3.1.8). $\square$

3.2 Kahekordne integraal ristkoordinaatides

Definitsioon 1. Piirkonda D xy-tasandil nimetatakse *regulaarseks,* kui tema raja Γ koosneb lõplikust arvust pidevatest joontest tüüpi

$$y = \varphi(x) \text{ või } x = \psi\,(y)\,.$$

Definitsioon 2. Regulaarset piirkonda

$$D = \{(x, y) \mid (a \leq x \leq b) \wedge (\varphi\,(x) \leq y \leq \psi\,(x))\}\,, \tag{3.2.1}$$

kus funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on mingid pidevad funktsioonid lõigul $[a, b]$, nimetatakse *normaalseks* piirkonnaks xy-tasandil (x-telje suhtes).

Analoogiliselt defineeritakse normaalne piirkond

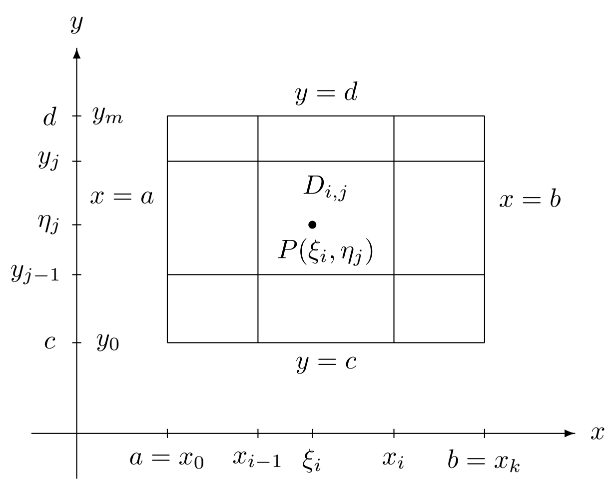
$$D = \{(x, y) \mid (a \leq y \leq b) \wedge (\varphi\,(y) \leq x \leq \psi\,(y))\} \tag{3.2.2}$$

y-telje suhtes.

Eksisteerigu integraal

$$\iint_D f(P)dS, \tag{3.2.3}$$

kus D on regulaarne piirkond. Uurime selle integraali arvutamise kolme juhtu.
1^0 Olgu $D = \{(x, y) : (a \leq x \leq b) \wedge (c \leq y \leq d)\}$, st D on ristkülik, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedaga



Integraali (3.2.3) olemasolust järeldub, et vastava integraalsumma piirväärtus ei sõltu piirkonna D osapiirkondadeks jaotamise viisist ja punktide valikust osapiirkondades. Kasutame seda järgnevas. Olgu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$ ja $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$. Jaotame ristküliku sirglõikudega

$$\{(x, y) \mid (x = x_i) \wedge (c \leq y \leq d)\}\,(i = 1, \ldots, k-1)$$

ja

$$\{(x, y) \mid (y = y_j) \wedge (a \le x \le b)\} \, (j = 1, \dots, m-1)$$

n osapiirkonnaks

$$D_{i,\,j} = \{(x, y) \mid (x_{i-1} \le x \le x_i) \wedge (y_{j-1} \le y \le y_j)\},$$

kusjuures $n = km$. Kui tähistada $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \dots, k)$ ja $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(j = 1, \dots, m)$, siis

$$\Delta S_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j, \; d_{i,j} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$

Rõhutame

$$\max d_{i,j} \to 0 \;\Rightarrow\; (k, m) \to (\infty, \infty).$$

Valime piirkonnas $D_{i,\,j}$ punkti $P_{i,\,j}(\xi_i, \eta_j)$. Saame

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{\max d_{i,j} \to 0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{kui eksisteerib funktsiooni piirväärtus,} \\ \text{siis eksisteerib korduv piirväärtus} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \; \lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy =$$

$$= \left[g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_c^d f(x, y)\, dy \right] = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Analoogiliselt saab näidata, et $\iint_D f(P)dS = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$. Sõnastame saadud tulemuse.

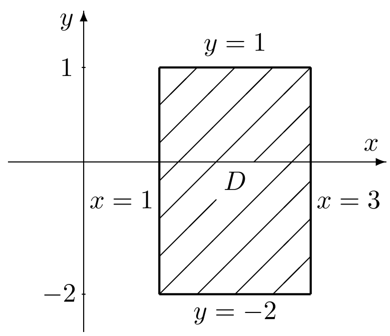
Lause 1. Kui $f(P) \in C(D)$, kus $D = \{(x, y) \mid (a \le x \le b) \wedge (c \le y \le d)\}$, st D on ristkülik, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedaga, siis

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx. \tag{3.2.4}$$

Rõhutame, et integraali $\int_c^d f(x,y)\,dy$ arvutamisel käsitletakse suurust x kui konstanti.

Näide 1. Olgu $D = \{(x,y) \mid (1 \le x \le 3) \wedge (-2 \le y \le 1)\}$. Arvutame integraali $\iint_D (1+x-y)^2\,dS$.

Skitseerime piirkonna D :



Funktsiooni $z = (1+x-y)^2$ pidevusest piirkonnas D järeldub vaadeldava kahekordse integraali olemasolu. Lause 1 põhjal saame

$$\iint_D (1+x-y)^2\,dS = \int_1^3 dx \int_{-2}^1 (1+x-y)^2\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{sisemise integraali all käsitletakse} \\ \text{muutujat } x \text{ kui konstantset suurust}\end{array}\right] =$$

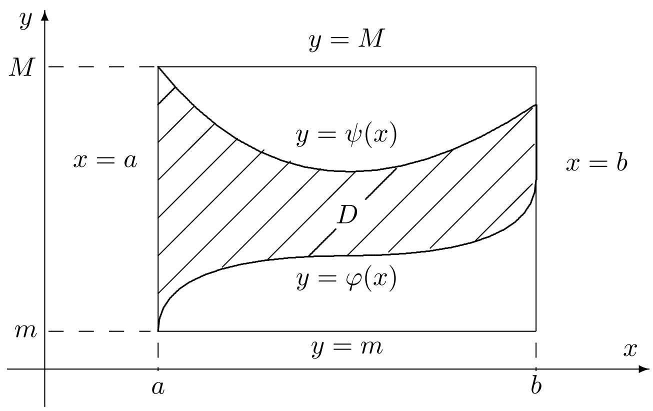
$$= -\int_1^3 dx \int_{-2}^1 (1+x-y)^2\,d(1+x-y) =$$

$$= -\int_1^3 \left.\frac{(1+x-y)^3}{3}\right|_{-2}^1 dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^3 \left[(1+x-1)^3 - (1+x+2)^3\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^3 \left[x^3 - (x+3)^3\right] dx = -\frac{1}{12}\left.\left(x^4 - (x+3)^4\right)\right|_1^3 = 80. \qquad \diamondsuit$$

2^0 Olgu x-teje suhtes normaalne integreerimispiirkond D antud seosega (3.2.1). Selle kõverjoonelise trapetsi alused on paralleelsed y-teljega. Leiduvad sellised arvud m ja M, et $m \le \varphi(x) \le \psi(x) \le M \quad (a \le x \le b)$



Olgu

$$D_\square = \{(x, y) \mid (a \le x \le b) \wedge (m \le y \le M)\}$$

ja

$$g(P) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(P), \text{ kui } P \in D, \\ 0, \text{ kui } P \in D_\square \setminus D. \end{cases}$$

Eelduse (3.2.3) põhjal eksisteerib $\iint_D g(P)dS$. Definitsiooni 3.1.1 abil saame, et $\exists \iint_{D_\square \setminus D} g(P)dS = 0$. Seega Lause 3.1.5 põhjal eksisteerib $\iint_{D_\square} g(P)dS$, kusjuures

$$\iint_{D_\square} g(P)dS = \iint_D g(P)dS + \iint_{D_\square \setminus D} g(P)dS = \iint_D f(P)dS.$$

Rakendame Lauset 1

$$\iint_{D_\square} g(P)dS = \int_a^b dx \int_m^M g(x, y)\, dy =$$

$$= \int_a^b dx \left(\int_m^{\varphi(x)} g(x, y)\, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x, y)\, dy + \int_{\psi(x)}^M g(x, y)\, dy \right) =$$

$$= \int_a^b dx \left(\int_m^{\varphi(x)} 0\, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\psi(x)}^M 0\, dy \right) =$$

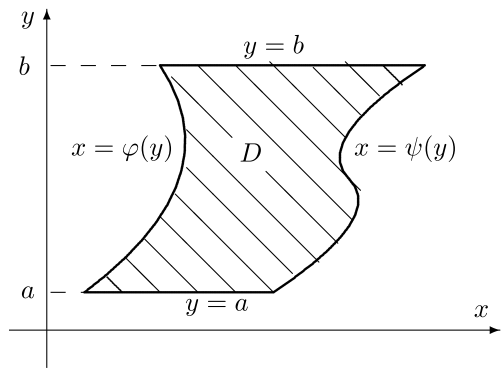
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

Sõnastame tõestatu.

Lause 2. Kui $\exists \iint_D f(P)dS$ ja piirkond D on antud seosega (3.2.1), siis

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy. \tag{3.2.5}$$

Märkus 1. Kui $\exists \iint_D f(P)dS$ ja piirkond D on antud seosega (3.2.2)

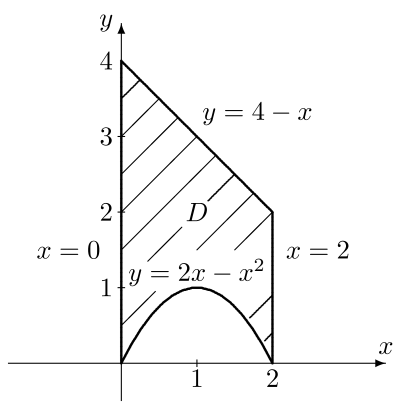


siis

$$\iint\limits_D f(P)dS = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx. \tag{3.2.6}$$

Näide 2. Olgu piirkond D määratud joontega $x=0$, $x=2$, $y=2x-x^2$ ja $y=4-x$, st $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (0\le x\le 2)\wedge\left(2x-x^2\le y\le 4-x\right)\right\}$. Arvutame $\iint_D (1+xy)\,dS$.

Skitseerime selle piirkonna D



Lause 2 abil saame

$$\iint\limits_D (1+xy)\,dS = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x-x^2}^{4-x} (1+xy)\,dy = \int\limits_0^2 dx \left(y+\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{2x-x^2}^{4-x} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left((4-x) + \frac{x(4-x)^2}{2} - \left(2x - x^2\right) - \frac{x\left(2x-x^2\right)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(4 + 5x - 3x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{x^5}{2} + 2x^4 \right) dx =$$

$$= \left(4x + \frac{5x^2}{2} - x^3 - \frac{3}{8}x^4 - \frac{x^6}{12} + \frac{2x^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{172}{15}. \qquad \diamondsuit$$

3^0 Integreerimispiirkond D on sirglõikudega, mis on paralleelsed kas x- või y-teljega, jaotatav lõplikuks arvuks tüüpi 1^0 või 2^0 normaalseteks integreerimispiirkondadeks. Lause 3.1.5 on üldistatav ka juhule, kui piirkond D on jaotatud m osapiirkonnaks. Selle üldistuse abil saame

$$\iint\limits_D f(P)dS = \sum_{k=1}^m \iint\limits_{D_k} f(P)dS, \tag{3.2.7}$$

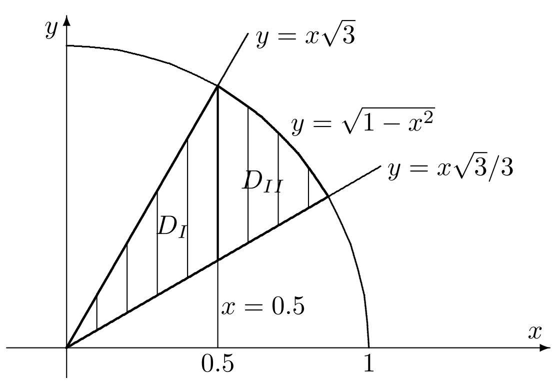
kusjuures iga liidetava korral on rakendatav kas Lause 1 või Lause 2.

Näide 3. Olgu

$$D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \left(\frac{x\sqrt{3}}{3} \le y \le x\sqrt{3} \right) \wedge \left(x^2 + y^2 \le 1\right) \right\}.$$

Paigutame rajad integraalis $\iint_D f(x,y)dS$.

Integreerimispiirkond D on sirgega $x = 0.5$ jaotatav kaheks osapiirkonnaks tüüpi 2°



Valemite (3.2.7) ja (3.2.5) abil saame

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_I} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_{II}} f(x,y)dS =$$

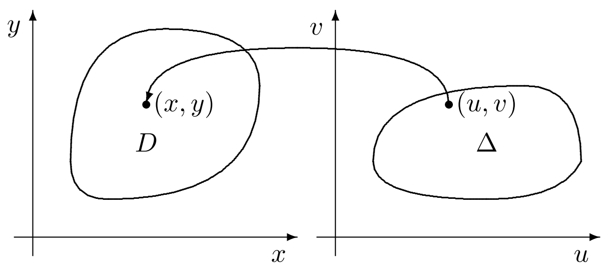
$$= \int\limits_0^{0.5} dx \int\limits_{x\sqrt{3}/3}^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy + \int\limits_{0.5}^{\sqrt{3}/2} dx \int\limits_{x\sqrt{3}/3}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy. \qquad \diamondsuit$$

3.3 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Vaatleme muutujate vahetust

$$\begin{cases} x = x\,(u,v) \\ y = y\,(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in \Delta \tag{3.3.1}$$

kahekordses integraalis $\iint_D f(x,y)dxdy$. Eeldame, et teisendus (3.3.1), mis teisendab uv-tasandil asetseva piirkonna Δ xy-tasandil paiknevaks piirkonnaks D,



on *regulaarne,* st

1) teisendus (3.3.1) on üksühene,

2) osatuletised $x_u\,(u,v)\,,\, x_v\,(u,v)\,,\, y_u\,(u,v)$ ja $y_v\,(u,v)$ on pidevad piirkonnas Δ,

3) teisenduse (3.1) *jakobiaan*

$$J(u,v) \overset{\text{def.}}{=} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad ((u,v) \in \Delta)\,.$$

Kehtib järgmine väide.

Lause 1 (vt [9], lk 282-285)**.** Kui funktsioon $f\,(x,y)$ on pidev piirkonnas D ja teisendus (3.3.1) on regulaarne piirkonnas Δ ning teisendab piirkonna Δ piirkonnaks D, siis

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x\,(u,v)\,, y\,(u,v))\,|\,J\,(u,v)|\;du\,dv. \tag{3.3.2}$$

Märkus 1. Valem (3.3.2) kehtib ka juhul, kui teisendus (3.3.1) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel, mille pindala on null.

Vaatleme üleminekut polaarkoordinaatidele, kus teisendus (3.3.1) on kujul

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (\varphi,\rho) \in \Delta$$

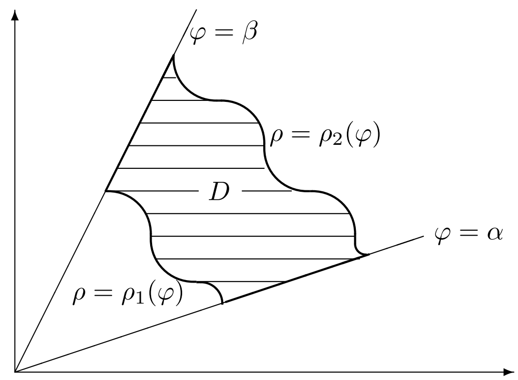
ja

$$J(\varphi,\rho) = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\rho \\ y_\varphi & y_\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho \neq 0,$$

kui $\rho \neq 0$. Lause 1 ja Märkuse 1 abil saame

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho. \tag{3.3.3}$$

Kui piirkond D on polaarkoordinaatides piiratud kiirtega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning kõveratega $\rho = \rho_1(\varphi)$ ja $\rho = \rho_2(\varphi)$,



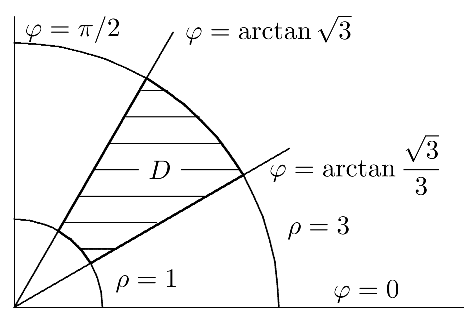
siis saame valemile (3.3.3) kuju

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\ d\rho. \tag{3.3.4}$$

Näide 1. Arvutame kahekordse integraali $\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}\, dx\, dy$, kus

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \left(\frac{x\sqrt{3}}{3} \le y \le x\sqrt{3}\right) \wedge \left(1 \le x^2+y^2 \le 9\right) \right\}.$$

Skitseerime piirkonna D



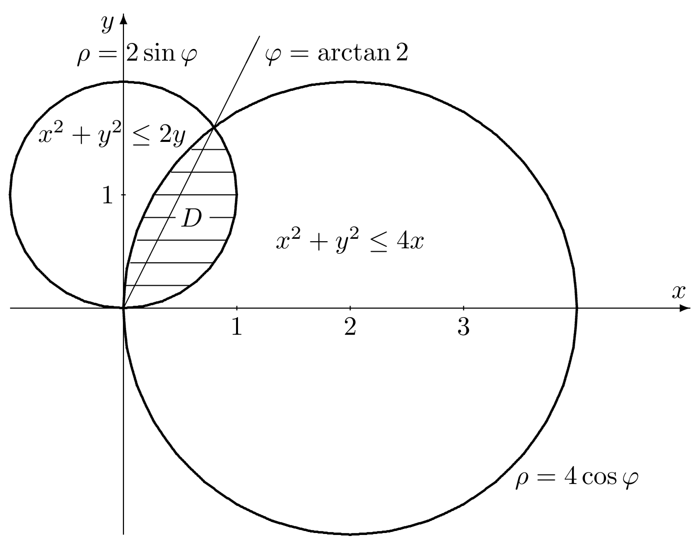
Et piirkonna D rajajoonte osad paiknevad joontel, mille võrrandid polaarkoordinaatides on $\varphi = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $\rho = 1$ ning $\rho = 3$, siis valemi (3.3.4) abil saame

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^3 \rho\,\arctan\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^3 \rho\,\varphi\,d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \int\limits_1^3 \rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)(9-1) = \frac{1}{6}\pi^2. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leida kahe ringi $x^2+y^2 \le 4\,x$ ja $x^2+y^2 \le 2y$ ühisosa D pindala. Skitseerime D



Integraal $\iint_D dx\,dy$ annab Lause 3.1.2 põhjal piirkonna D pindala. Kontrollige, et ringjoonte $x^2+y^2 = 4\,x$ ja $x^2+y^2 = 2y$ võrrandeiks on polaarkoordinaatides vastavalt $\rho = 4\cos\varphi$ ja $\rho = 2\sin\varphi$. Et

$$4\cos\varphi = 2\sin\varphi \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan 2,$$

siis võime ringide ühisosa jaotada kiirega $\varphi = \arctan 2$ kaheks osapiirkonnaks. Esimene neist on määratud kiirtega $\varphi = 0$ ja $\varphi = \arctan 2$ ning joontega $\rho = 0$ ja $\rho = 2\sin\varphi$. Teine on määratud kiirtega $\varphi = \arctan 2$ ja $\varphi = \pi/2$ ning joontega $\rho = 0$ ja $\rho = 4\cos\varphi$.

Rakendame mõlema osa jaoks valemit (3.3.4) eraldi. Saame

$$S_D = \iint_D dx\,dy = \int_0^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho\; d\rho + \int_{\arctan 2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho\; d\rho =$$

$$= \int_0^{\arctan 2} d\varphi\; \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{2\sin\varphi} + \int_{\arctan 2}^{\pi/2} d\varphi\; \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{4\cos\varphi} =$$

$$= \int_0^{\arctan 2} 2\sin^2\varphi d\varphi + \int_{\arctan 2}^{\pi/2} 8\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\arctan 2} (1-\cos 2\varphi) d\varphi + \int_{\arctan 2}^{\pi/2} 4(1+\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\bigg|_0^{\arctan 2} + (4\varphi + 2\sin 2\varphi)|_{\arctan 2}^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi - 3\arctan 2 - 2. \qquad \diamondsuit$$

3.4 Kahekordse integraali rakendused

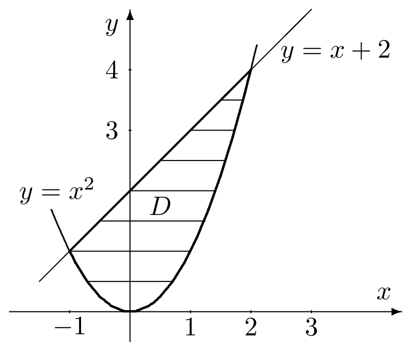
3.4.1 Tasandilise pinnatüki pindala arvutamine

Kui D on kinnine tõkestatud ühelisidus hulk xy-tasandil, siis Lause 3.1.2 põhjal

$$S_D = \iint_D dxdy. \tag{3.4.1}$$

Näide 1. Leiame joontega $y = x^2$ ja $y = x + 2$ määratud piirkonna D pindala.

Skitseerime piirkonna D



Et

$$\left\{\begin{array}{c} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right. \Rightarrow P_1\left(-1;1\right),\ P_1\left(2;4\right),$$

siis valemi (3.4.1) abil saame

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(2 + x - x^2\right) dx =$$

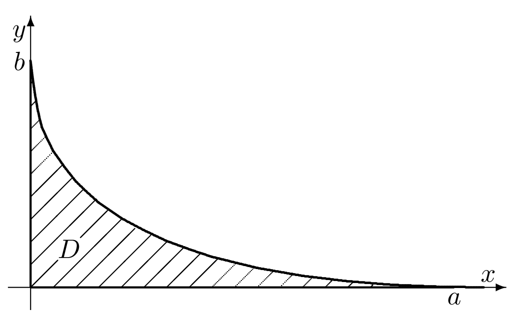
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \quad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame joontega

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \ \ (a, b > 0),\ x = 0,\ y = 0$$

piiratud piirkonna D pindala.

Skitseerime piirkonna D



Valemi (3.4.1) abil saame

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \left[\begin{array}{c} \text{kasutame muutujate vahetust} \left\{ \begin{array}{l} x = a\rho\cos^4\varphi \\ y = b\rho\sin^4\varphi \end{array} \right. \\ \Delta = \{ (\rho,\varphi) \mid (0 \le \rho \le 1) \ \wedge \ (0 \le \varphi \le \pi/2)\}, \\ D \longleftrightarrow \Delta,\ J = 4ab\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 4ab\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\rho = 2ab \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi\, d\varphi = -\frac{ab}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 2\varphi\right) d\left(\cos 2\varphi\right) =$$

$$= -\frac{ab}{8}\left(\cos 2\varphi - \frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{ab}{6}. \qquad \diamondsuit$$

3.4.2 Keha ruumala arvutamine

Olgu keha määratud ruumis $\mathbf{R}_3$ piirkonnaga Ω. Kui $f(P) \ge 0 \ \ (P \in D)$ ja $f(P) \in C(D)$ ning

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid ((x,y) \in D) \wedge (0 \le z \le f(x,y))\},$$

siis Märkuse 3.1.2 põhjal avaldub piirkonna Ω ruumala V_Ω kujul

$$V_\Omega = \iint\limits_D f(P)dS. \tag{3.4.2}$$

Tõestage järgmine väide.

Lause 1. Kui $f(P),\, g(P) \in C(D)$ ja $g(P) \ge f(P) \ \ (P \in D)$ ning

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid ((x,y) \in D) \wedge (f(x,y) \le z \le g(x,y))\},$$

siis piirkonna Ω ruumala V_Ω avaldub kujul

$$V_\Omega = \iint\limits_D \left(g(P) - f(P)\right) dS. \tag{3.4.3}$$

Näide 3. Leiame pindadega $z = x^2+y^2$ ja $z = x+y$ määratud keha ruumala. Olgu $f(x,y) = x^2+y^2$ ja $g(x,y) = x+y$. Kuna

$$\left\{ \begin{array}{c} z = x^2+y^2 \\ z = x+y \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{elimineerime} \\ \text{muutuja } z \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-y = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

siis (veenduge)

$$D = \left\{ (x,y) \mid (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 \le 1/2 \right\}$$

ja

$$x+y,\, x^2+y^2 \in C(D), \quad x+y \ge x^2+y^2 \ \ ((x,y)\in D).$$

Lause 1 tingimused on täidetud. Valemi (3.4.3) põhjal saame

$$V_\Omega = \iint\limits_D (g(P) - f(P))\, dS = \iint\limits_D \left(x+y-x^2-y^2\right) dS =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} x = 1/2 + \rho\cos\varphi & & J = \rho \\ & \Rightarrow & x^2+y^2-x-y = 0 \Leftrightarrow \\ y = 1/2 + \rho\sin\varphi & & \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}/2 \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8}. \qquad \diamondsuit$$

3.4.3 Pinnatüki pindala arvutamine

Definitsioon 1. Võrrandiga $z = f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ esitatud pinda Σ nimetatakse *siledaks,* kui

$$f_x(x,y),\ f_y(x,y) \in C(D).$$

Lause 2. Kui D on normaalne piirkond ja võrrandiga $z = f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ esitatud pind Σ on sile, siis tema pindala S_Σ on leitav valemiga

$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\, dxdy. \tag{3.4.4}$$

Tõestame Lause 2 juhul, kui

$$D_\square = \{(x,y) \mid (a \le x \le b) \wedge (c \le y \le d)\}.$$

Jaotame piirkonna $D_\square$ r osapiirkonnaks

$$D_{i,j} = \{(x,y) \mid (x_{i-1} \le x \le x_i) \wedge (y_{j-1} \le y \le y_j)\},$$

kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{q-1} < y_q = d$$

ja $r = pq$. Olgu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, p)$ ja $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ $(j = 1, \ldots, q)$ ning $\Delta S_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$. Valime piirkonnas $D_{i,\, j}$ punkti (ξ_i, η_j). Piirkonna $D_\square$ jaotusele osapiirkondadeks $D_{i,\, j}$ vastab pinna Σ jaotus osapindadeks

$$\Sigma_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \mid ((x, y) \in D_{i,\, j}) \wedge (z = f(x, y))\}.$$

Pinna Σ_{ij} punktis $P_{i,\, j}\,(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$ leiame puutujatasandi

$$z - f(\xi_i, \eta_j) = f_x(\xi_i, \eta_j)\,(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_j)\,(y - \eta_j).$$

Vaatleme selle tasandi osa

$$T_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{c} ((x, y) \in D_{i,\, j}) \wedge \\ \wedge\, (z - f(\xi_i, \eta_j) = f_x(\xi_i, \eta_j)\,(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_j)\,(y - \eta_j)) \end{array} \right\}$$

Seega $D_{i,\, j} \to \Sigma_{ij} \to T_{ij}$. Võrrandiga $z = f(x, y)$ $\;((x, y) \in D_\square)$ esitatud sileda pinna Σ *pindalaks* nimetame suurust

$$S_\Sigma \overset{\text{def.}}{=} \lim_{(\max \Delta x_i,\, \max \Delta y_j) \to (0;0)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} S_{T_{ij}}, \tag{3.4.5}$$

kus $S_{T_{ij}}$ on tasanditüki T_{ij} pindala. Vektor $\mathbf{n} = (-f_x(\xi_i, \eta_j),\, -f_y(\xi_i, \eta_j),\, 1)$ on pinnatüki Σ_{ij} normaalvektor punktis $P_{i,\, j}\,(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$. Veenduge, et

$$S_{T_{ij}} \cos\left(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{k}}\right) = \Delta S_{i,j},$$

kus $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ on z-telje suunaline ühikvektor. Kuna

$$\cos\left(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{k}}\right) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{(f_x(\xi_i, \eta_j))^2 + (f_y(\xi_i, \eta_j))^2 + 1}},$$

siis

$$S_{T_{ij}} = \frac{\Delta S_{i,j}}{\cos\left(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{k}}\right)} = \sqrt{1 + (f_x(\xi_i, \eta_j))^2 + (f_y(\xi_i, \eta_j))^2}\,\Delta x_i \Delta y_j$$

ja seose (3.4.5) põhjal

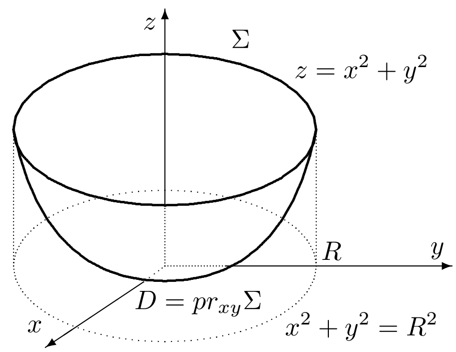
$$S_\Sigma = \lim_{(\max \Delta x_i,\, \max \Delta y_j) \to (0;0)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sqrt{1 + (f_x(\xi_i, \eta_j))^2 + (f_y(\xi_i, \eta_j))^2}\,\Delta x_i \Delta y_j$$

$$= \iint\limits_{D_\square} \sqrt{1 + (f_x\,(x, y))^2 + \;(f_y\,(x, y))^2}\,dxdy,$$

st ristkülikukujulise piirkonna $D_\square$ korral Lause 2 väide kehtib. $\square$

Näide 4. Leiame püstsilindri $x^2+y^2=R^2$ sees paikneva pöördparaboloidi $z=x^2+y^2$ osa pindala.

Skitseerime joonise



Olgu $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$. Kui $f(x,y)=x^2+y^2$, siis $f_x(x,y)=2x$ ja $f_y(x,y)=2y$. Veenduge, et on täidetud Lause 2 eeldused. Valemi (3.4.4) põhjal saame

$$S_\Sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+(2x)^2+\ (2y)^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\sqrt{(1+4\rho^2)^3}\Big|_0^R=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4R^2)^3}-1\right).\qquad\diamondsuit$$

Definitsioon 2. Parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad(u,v)\in\Delta\tag{3.4.6}$$

antud pinda Σ nimetatakse *siledaks,* kui funktsioonid $x(u,v)$, $y(u,v)$ ja $z(u,v)$ koos oma esimest järku osatuletistega on pidevad ning

$$\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_u & z_u\\ x_v & z_v\end{vmatrix}^2\neq 0$$

piirkonna Δ igas punktis.

Kehtib järgmine väide (täpsemalt vt [9], lk 297-299).

Lause 3. Kui parameetriliste võrranditega (3.4.6) antud pind Σ on sile ja vastavus piirkonna Δ ja pinna Σ vahel on üksühene, siis

$$S_\Sigma=\iint\limits_\Delta\sqrt{(x_uy_v-x_vy_u)^2+(z_uy_v-z_vy_u)^2+\ (z_vx_u-z_ux_v)^2}dudv.\tag{3.4.7}$$

Märkus 1. Lausest 3 järeldub Lause 2.

Tõestus. Pinna võrrandit $z = f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ saab esitada parameetrilisel kujul (3.4.6), valides

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u, v) \qquad ((u, v) \in \Delta = D)\,.$$

Sel korral saame

$$x_u = 1,\ x_v = 0,\ y_u = 0,\ y_v = 1$$

ja

$$x_u y_v - x_v y_u = 1,\ z_u y_v - z_v y_u = z_u = z_x,\ z_v x_u - z_u x_v = z_v = z_y$$

ning väide (3.4.7) omandab kuju (3.4.4). $\square$

Märkus 2. Kui parameetriliste võrranditega (3.4.6) antud sileda pinna Σ korral on vastavus piirkonna Δ ja pinna Σ vahel üksühene ja muutuja z on avaldatav muutujate x ja y kaudu $z = z(x, y)$, siis väide (3.4.4) on esitatav kujul (3.4.7).

Tõestus. Antud eeldustel on täidetud Lause 2 tingimused (veenduge!). Leiame

$$z = z(x, y) = z(x(u, v), y(u, v)) \Rightarrow [\text{rakendame Lauset } 1.5.2] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_u = z_x x_u + z_y y_u, \\ \\ z_v = z_x x_v + z_y y_v \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_x = \dfrac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ z_y = \dfrac{z_v x_u - z_u x_v}{x_u y_v - x_v y_u}. \end{array} \right].$$

Et teisenduse

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right. \qquad (u, v) \in \Delta \tag{3.4.8}$$

jakobiaan $J(u, v)$ avaldub kujul

$$J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u,$$

siis Lausete 2 ja 3.3.1 põhjal saame

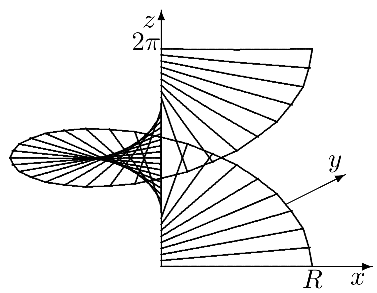
$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + \ (f_y(x, y))^2}\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}\right)^2 + \ \left(\frac{z_v x_u - z_u x_v}{x_u y_v - x_v y_u}\right)^2}\,|J|\,dudv =$$
$$= \iint\limits_\Delta \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (z_u y_v - z_v y_u)^2 + \ (z_v x_u - z_u x_v)^2}\,dudv. \quad \square$$

Näide 5. Leiame *helikoidi* (*kruvipinna*) osa

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \qquad ((u \in [0; R]) \wedge (v \in [0; 2\pi])) \\ z = v \end{cases}$$

pindala. See helikoid saadakse z-teljega ristuva kiire ühtlasel pöörlemisel ümber z-telje ja samaaegsel nihkumisel selle telje sihis, st kruviliikumisel.

Skitseerime helikoidi selle osa



Leiame, et

$$\begin{array}{lll} x_u = \cos v, & y_u = \sin v, & z_u = 0, \\ x_v = -u\sin v, & y_v = u\cos v, & z_v = 1 \end{array}$$

ja

$$x_u y_v - x_v y_u = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u,$$
$$z_u y_v - z_v y_u = -\sin v,\ z_v x_u - z_u x_v = \cos v$$

ning

$$(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (z_u y_v - z_v y_u)^2 + \ (z_v x_u - z_u x_v)^2 = u^2 + 1.$$

Veenduge, et on täidetud Lause 3 tingimused. Valemi (3.4.7) põhjal saame

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{u^2+1}\,dudv = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^R \sqrt{u^2+1}\,du =$$

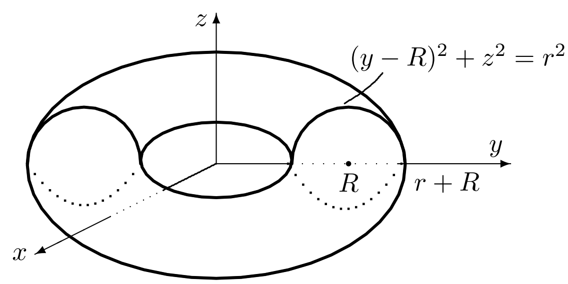
$$= \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sh} t,\ du = \operatorname{ch} t\,dt,\ t = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) \\ u = 0 \longleftrightarrow t = 0,\ u = R \longleftrightarrow t = \ln\left(R + \sqrt{R^2+1}\right) \end{array} \right] =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)} \operatorname{ch}^2 t\,dt = \pi \int\limits_0^{\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)} (1 + \operatorname{ch} 2t)\ dt =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)} (1+\operatorname{ch} 2t)\ dt = \pi \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)} =$$
$$= \pi \left(R\sqrt{R^2+1} + \ln\left(R + \sqrt{R^2+1}\right)\right). \qquad \diamondsuit$$

Näide 6. *Tooriks* nimetatakse pöördpinda, mis tekib ringjoone pöörlemisel selle ringjoonega samal tasandil asuva ning temaga mittelõikuva sirge ümber. Leiame ringjoone $(y-R)^2 + z^2 = r^2 \quad (0 < r < R)$ pöörlemisel ümber z-telje tekkiva toori $\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$ pindala.

Skitseerime selle toori



Veenduge, et

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \qquad ((u \in [0;2\pi]) \wedge (v \in [0;2\pi])) \\ z = r\sin v \end{cases}$$

on selle toori parameetrilised võrrandid. Leiame, et

$$\begin{array}{lll} x_u = -(R + r\cos v)\sin u, & y_u = (R + r\cos v)\cos u, & z_u = 0, \\ x_v = -r\sin v\cos u, & y_v = -r\sin v\sin u, & z_v = r\cos v, \end{array}$$

ja

$$\begin{array}{l} x_u y_v - x_v y_u = r(\sin v)R + r^2\sin v\cos v = r\sin v\,(R + r\cos v), \\ z_u y_v - z_v y_u = -(r\cos v)\left((R + r\cos v)\cos u\right), \\ z_v x_u - z_u x_v = -(r\cos v)(R + r\cos v)\sin u \end{array}$$

ning

$$(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (z_u y_v - z_v y_u)^2 + (z_v x_u - z_u x_v)^2 = r^2 (R + r\cos v)^2.$$

Veenduge, et Lause 3 tingimused on täidetud. Valemi (3.4.7) põhjal saame

$$S_\Sigma = \iint\limits_\Delta \sqrt{r^2 (R + r\cos v)^2} dudv \overset{R \geq r}{=} \iint\limits_\Delta r(R + r\cos v)\, dudv =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\, dv = 4\pi^2 Rr. \qquad \diamondsuit$$

3.4.4 Tasandilise kujundi mass, massikese ja inertsmomendid

Olgu xy-tasandi piirkond D kaetud massiga pindtihedusega $\rho(x,y)$. Nimetame *koorikuks* keha, mille üks mõõde on teistest oluliselt väiksem. Seega on tegemist koorikuga, mis paikneb piirkonnas D ja on pindtihedusega $\rho(x,y)$. Olgu D jaotatud osapiirkondadeks D_i $(i=1;\ldots;n)$. Olgu $P_i\left(\xi_i,\eta_i\right)\in D_i$. Kui ΔS_i on piirkonna D_i pindala, d_i piirkonna D_i läbimõõt ja $\rho(x,y)\in C\left(D\right)$, siis vaadeldava kooriku *massi* m defineerime kui piirväärtuse

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(P_i\right)\Delta S_i,$$

st

$$m=\iint\limits_D\rho\left(P\right)dS. \tag{3.4.9}$$

Analoogiliselt leitakse kooriku *staatilised momendid* M_x ja M_y vastavalt x- ja y-telje suhtes kui piirväärtused

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\rho\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i,$$

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\rho\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i.$$

Saame

$$M_x=\iint\limits_D y\rho\left(P\right)dS, \tag{3.4.10}$$

$$M_y=\iint\limits_D x\rho\left(P\right)dS. \tag{3.4.11}$$

Kooriku *massikeskme koordinaadid* x_c ja y_c avalduvad kujul

$$x_c=M_y/m,\ y_c=M_x/m. \tag{3.4.12}$$

Seega

$$x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho\left(P\right)dS, \tag{3.4.13}$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho\left(P\right)dS. \tag{3.4.14}$$

Kooriku *inertsmomendid* I_x ja I_y vastavalt x- ja y-telje suhtes on piirväärtused

$$\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\rho\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta S_i,$$

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta S_i.$$

Seega

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho\left(P\right) dS, \tag{3.4.15}$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \rho\left(P\right) dS. \tag{3.4.16}$$

Kuna kooriku inertsmoment I_O nullpunkti O suhtes avaldub kujul

$$I_O = I_x + I_y, \tag{3.4.17}$$

siis

$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \rho\left(P\right) dS. \tag{3.4.18}$$

Lause 4. Kui koorik on xy-tasandi piirkonnas D ja kooriku pindtihedus $\rho(x, y) \in C\left(D\right)$, siis selle kooriku mass m on leitav valemi (3.4.9) abil, staatilised momendid M_x ja M_y valemite (3.4.10) ja (3.4.11) abil, massikeskme koordinaadid x_c ja y_c kas valemite (3.4.12) või valemite (3.4.13) ja (3.4.14) abil ning inertsmomendid I_x, ja I_y valemite (3.4.15) ja (3.4.16) abil ning I_O valemi (3.4.17) või valemi (3.4.18) abil.

Näide 7. Olgu koorik xy-tasandi piirkonnas D, mis on määratud joontega $y = x^2$ ja $y = x + 2$. Olgu $\rho(x, y) = 1 + x + y^2$. Leiame selle kooriku massi, staatilised momendid, massikeskme koordinaadid ja inertsmomendid x-telje, y-telje ning nullpunkti suhtes.

Piirkond D on skitseeritud Näites 1. Kasutame Lauset 4. Kooriku massi saame valemi (3.4.9) abil

$$m = \iint\limits_D \rho\left(P\right) dS = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} \left(1 + x + y^2\right) dy =$$
$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{14}{3} + 7x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6\right) dx =$$
$$= \left(\frac{14}{3}x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{153}{7}.$$

Staatilised momendid M_x ja M_y on leitavad vastavalt valemite (3.4.10) ja (3.4.11) abil

$$M_x = \iint_D y\rho(P)\,dS = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} y\left(1+x+y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(6 + 12x + \frac{17}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{4}x^8\right) dx = \frac{1989}{40}$$

ja

$$M_y = \iint_D x\rho(P)\,dS = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} x\left(1+x+y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(7x^2 + \frac{14}{3}x + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7\right) dx = \frac{819}{40}.$$

Massikeskme koordinaadid x_c ja y_c leiame valemite (3.4.12) abil

$$x_c = M_y/m = \frac{819}{40}/\frac{153}{7} = \frac{637}{680},$$

$$y_c = M_x/m = \frac{1989}{40}/\frac{153}{7} = \frac{91}{40}.$$

Inertsmomendid I_x, ja I_y saame vastavalt valemite (3.4.15) ja (3.4.16) abil

$$I_x = \iint_D y^2\rho(P)\,dS = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} y^2\left(1+x+y^2\right) dy = \frac{398\,637}{3080}$$

ja

$$I_y = \iint_D x^2\rho(P)\,dS = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} x^2\left(1+x+y^2\right) dy = \frac{549}{20}.$$

Leiame inertsmomendi I_O valemi (3.4.17) abil

$$I_O = I_x + I_y = \frac{398\,637}{3080} + \frac{549}{20} = \frac{483\,183}{3080}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 8. Olgu $a, b > 0$. Leiame astroidiga

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

piiratud ühiktihedusega kooriku inertsmomendid I_x, I_y ja I_O.

Kasutame Lauset 4. Valemi (3.4.15) põhjal saame

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dS = \left[\begin{array}{c} \text{kasutame muutujate vahetust} \\ x = a\rho\cos^3\varphi,\ y = b\rho\sin^3\varphi, \\ J = 3ab\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi, \\ \Delta = \{(\rho,\varphi) \mid (0 \le \rho \le 1) \wedge (0 \le \varphi \le 2\pi)\} \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 3ab\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi b^2\rho^2\sin^6\varphi d\rho = \frac{3ab^3}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^8\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3ab^3}{4}\cdot\frac{7}{128}\pi = \frac{21}{512}ab^3\pi.$$

Analoogiliselt saame valemi (3.4.16) abil

$$I_y = 21a^3b\pi/512.$$

Seega leiame (3.4.17) põhjal

$$I_O = I_x + I_y = \frac{21}{512}ab^3\pi + \frac{21}{512}a^3b\pi = \frac{21}{512}ab\pi\left(a^2+b^2\right). \qquad \diamondsuit$$

3.5 Kolmekordne integraal

Olgu ruumis R_3 ehk lihtsalt xyz-ruumis antud *piirkond* (kinnine, tõkestatud, mõõtuv hulk) Ω. Olgu piirkonna Ω igas punktis $P(x,y,z)$ määratud funktsioon $f(x,y,z)$. Jaotame piirkonna Ω tükiti siledate pindadega n osapiirkonnaks Ω_i $(i = 1;\ldots;n)$. Olgu ΔV_i osapiirkonna Ω_i ruumala ja d_i selle piirkonna läbimõõt. Fikseerime igas osapiirkonnas Ω_i suvaliselt punkti $P_i(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ $(i = 1;\ldots;n)$. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\,\Delta V_i$$

ehk lühidalt

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\,\Delta V_i.$$

Märgime, et $\max d_i \to 0 \ \Rightarrow\ n \to \infty$.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max d_i \to 0}\sum_{i=1}^n f(P_i)\,\Delta V_i,$$

mis ei sõltu piirkonna Ω osapiirkondadeks Ω_i jaotamise viisist ja punktide $P_i \in \Omega_i$ valikust, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x,y,z)$ *kolmekordseks integraaliks* üle piirkonna Ω ning tähistatakse sümboliga

$$\iiint\limits_\Omega f(P)\,dV,$$

st
$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta V_i, \tag{3.5.1}$$

kus $f\left(P_i\right) = f\left(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i\right)$.

Olgu $I(\Omega)$ kõigi piirkonnas Ω integreeruvate funktsioonide hulk. Kolmekordse integraali omadused on analoogilised kahekordse integraali omadustega.

Lause 1. Kehtivad järgmised väited.
1. Funktsiooni pidevusest piirkonnas järeldub funktsiooni integreeruvus selles piirkonnas, st
$$f(P) \in C\left(\Omega\right) \Rightarrow f(P) \in I\left(\Omega\right).$$
2. Piirkonnas Ω on konstantne funktsioon 1 integreeruv, kusjuures integraali väärtuseks on piirkonna Ω ruumala V_Ω, st
$$\left(1 \in I\left(\Omega\right)\right) \wedge \iiint\limits_{\Omega} 1\,dV = V_\Omega.$$
3. Funktsiooni $f(P)$ integreeruvusest piirkonnas Ω järeldub funktsiooni $c\,f(P)$ integreeruvus selles piirkonnas, st
$$f(P) \in I\left(\Omega\right) \Rightarrow c\,f(P) \in I\left(\Omega\right) \quad \left(c - \text{konstant}\right),$$
kusjuures
$$\iiint\limits_{\Omega} c\,f(P)\,dV = c \iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV.$$
4. Kui funktsioonid $f(P)$ ja $g(P)$ on integreeruvad piirkonnas Ω, siis ka nende funktsioonide summa on integreeruv selles piirkonnas ning summa integraal on integraalide summa, st
$$\left(f(P), g(P) \in I\left(\Omega\right)\right) \Rightarrow \left(f(P) + g(P)\right) \in I\left(\Omega\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\iiint\limits_{\Omega} \left(f(P) + g(P)\right)\,dV = \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV + \iiint\limits_{\Omega} g(P)\,dV\right).$$
5. Kui funktsioon $f(P)$ on integreeruv piirkonnas Ω ja piirkond Ω on jaotatud kahe ühiseid sisepunkte mitteomava piirkonna Ω_I ja Ω_{II} summaks, siis funktsioon $f(P)$ on integreeruv piirkondades Ω_I ja Ω_{II} ning funktsiooni $f(P)$ integraal üle Ω võrdub integraalide summaga üle Ω_I ja Ω_{II}, st
$$\left(f(P) \in I\left(\Omega\right)\right) \wedge \left(\Omega = \Omega_I \cup \Omega_{II}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\iiint\limits_{\Omega} f(P)\,dV = \iiint\limits_{\Omega_I} f(P)\,dV + \iiint\limits_{\Omega_{II}} f(P)\,dV\right).$$

6. Kui funktsioonid $f(P)$ ja $g(P)$ on integreeruvad piirkonnas Ω ja $f(P) \leq g(P)$ $(P \in \Omega)$, siis samasugust võrratust rahuldavad nende funktsioonide kolmekordsed integraalid, st

$$(f(P), g(P) \in I(\Omega)) \wedge (f(P) \leq g(P) \ (P \in \Omega)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV \leq \iiint\limits_{\Omega} g(P)\, dV.$$

7. Kui funktsioon $f(P)$ on integreeruv piirkonnas Ω ja m ning M on sellised arvud, et

$$m \leq f(P) \leq M \quad (P \in \Omega),$$

siis

$$m \cdot V_\Omega \leq \iiint\limits_{\Omega} f(P)dV \leq M \cdot V_\Omega.$$

8. Kui funktsioon $f(P)$ on pidev sidusas piirkonnas Ω, siis piirkonnas Ω leidub selline punkt Q, et

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = f(Q) \cdot V_\Omega.$$

3.6 Kolmekordne integraal ristkoordinaatides

Eksisteerigu integraal

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV, \tag{3.6.1}$$

s.o $f(P) \in I(\Omega)$.

Definitsioon 1. Piirkonda Ω xyz-ruumis nimetatakse *regulaarseks,* kui tema raja koosneb lõplikust arvust pidevatest pindadest

$$z = z(x,y) \text{ või } y = y(x,z) \text{ või } x = x(y,z).$$

Definitsioon 2. Regulaarset piirkonda

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid (a_1 \leq x \leq a_2) \wedge (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)) \wedge \\ \wedge (\psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)) \end{array} \right\}, \tag{3.6.2}$$

kus $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a_1, a_2]$ ja $\psi_1(x,y), \psi_1(x,y) \in C\left(\mathrm{pr}_{xy}\Omega\right)$ ning $\mathrm{pr}_{xy}\Omega$ on piirkonna Ω ristprojektsioon xy-tasandil, nimetatakse *normaalseks* piirkonnaks (xy-tasandi suhtes).

Defineerige analoogiliselt normaalse piirkonna mõiste muutujate x, y, ja z ülejäänud viie järjestuse korral.

Nii nagu kahekordse integraali korral eristame kolme juhtu.

1^0 Analoogiliselt kahekordse integraali juhuga tõestage järgnev väide.

Lause 1. Kui funktsioon f on pidev risttahukas

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (a_1 \le x \le a_2) \wedge (b_1 \le y \le b_2) \wedge (c_1 \le z \le c_2)\},$$

st risttahuka tahud on paralleelsed koordinaattasanditega, siis

$$\iiint\limits_{\Omega} f(P)dV = \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{c_1}^{c_2} dz \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y,z)\,dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{c_1}^{c_2} dz \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} dz \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \int\limits_{c_1}^{c_2} dz \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dx.$$

Näide 1. Olgu

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 2) \wedge (1 \le z \le 2)\}.$$

Arvutame integraali $\iiint\limits_{\Omega} (1+x-y+z)\,dV$.

Lause 1 abil saame

$$\iiint\limits_{\Omega} (1+x-y+z)\,dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_1^2 (1+x-y+z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{2} (1+x-y+z)^2\Big|_1^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{2} \left((3+x-y)^2 - (2+x-y)^2\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left((3+x-y)^3 - (2+x-y)^3\right)\Big|_{-1}^{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left((1+x)^3 - x^3 - (4+x)^3 + (3+x)^3\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{24}\left((1+x)^4 - x^4 - (4+x)^4 + (3+x)^4\right)\Big|_0^1 = \frac{15}{2}. \quad \diamondsuit$$

2^0 Integreerimispiirkonna (3.6.2) ristprojektsioon xy-tasandil on *kõverjooneline trapets*

$$\mathrm{pr}_{xy}\Omega = \{(x, y) \mid (a_1 \leq x \leq a_2) \wedge (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))\},$$

kusjuures selle piirkonna poolt määratud keha külgpind on osa püstsilindrist, mille juhtjooneks on trapetsi $\mathrm{pr}_{xy}\Omega$ raja ja moodustajaks z-teljega paralleelne sirge. Keha on alt ja ülalt piiratud vastavalt pindadega $z = \psi_1(x, y)$ ja $z = \psi_2(x, y)$. Et Ω on piirkond, s.o kinnine tõkestatud mõõtuv hulk, siis leiduvad sellised arvud b_1, b_2, c_1 ja c_2, et keha Ω asetseb risttahukas

$$\Omega_\square = \{(x, y, z) \mid (a_1 \leq x \leq a_2) \wedge (b_1 \leq y \leq b_2) \wedge (c_1 \leq z \leq c_2)\}.$$

Defineerime abifunktsiooni

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \Omega, \\ 0, & \text{kui } P \in \Omega_\square \setminus \Omega. \end{cases}$$

Veenduge, et

$$\iiint\limits_{\Omega_\square \setminus \Omega} g(P)\, dV = 0 \ \wedge \ \iiint\limits_{\Omega} g(P)\, dV = \iiint\limits_{\Omega} f(P)\, dV.$$

Seega

$$\iiint\limits_{\Omega_\square} g(P) dV = \iiint\limits_{\Omega_\square \setminus \Omega} g(P)\, dV + \iiint\limits_{\Omega} g(P)\, dV = \iiint\limits_{\Omega} f(P)\, dV.$$

Lause 1 põhjal leiame

$$\iiint\limits_{\Omega_\square} g(P) dV = \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{c_1}^{c_2} g(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \left(\int_{c_1}^{\psi_1} g(x,y,z)\; dz + \int_{\psi_1}^{\psi_2} g(x,y,z)\, dz + \int_{\psi_2}^{c_2} g(x,y,z)\, dz \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \left(\int_{c_1}^{\psi_1} 0\, dz + \int_{\psi_1}^{\psi_2} g(x,y,z)\, dz + \int_{\psi_2}^{c_2} 0 dz \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \left(\int_{b_1}^{\varphi_1} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} g dz + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} g dz + \int_{\varphi_2}^{b_2} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} g dz \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \left(\int_{b_1}^{\varphi_1} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} 0 dz + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} f dz + \int_{\varphi_2}^{b_2} dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} 0 dz \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz.$$

Järelikult kehtib järgmine väide.

Lause 2. Kui funktsioon f on pidev seosega (3.6.2) määratud regulaarses piirkonnas Ω, siis

$$\iiint_{\Omega} f(P) dV = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz. \tag{3.6.3}$$

Märkus 1. Tõestage veel viis Lause 2 analoogi integreerimise erinevate järjekordade korral. Näiteks, kui $\exists \iiint_{\Omega} f(P) dV$ ja piirkond Ω on antud seosega

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid (a_1 \le y \le a_2) \wedge (\varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y)) \wedge \\ \wedge (\psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)) \end{array} \right\}, \tag{3.6.4}$$

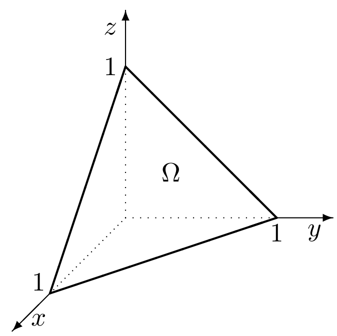
siis

$$\iiint_{\Omega} f(P) dV = \int_{a_1}^{a_2} dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx. \tag{3.6.5}$$

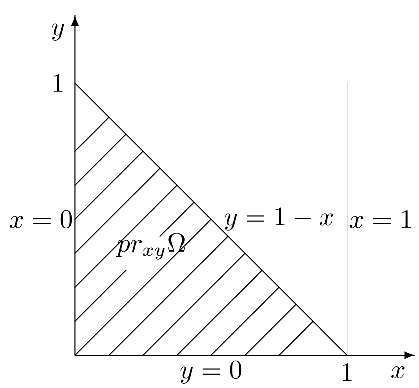
Näide 2. Arvutame

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(2+x+y+z)^3},$$

kus Ω on määratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$ ja $x+y+z=1$



Piirkonna Ω ristprojektsioon xy-tasandil $\mathrm{pr}_{xy}\Omega$ on kolmnurk



Kasutame Lauset 2 valiku $a_1=0$, $a_2=1$, $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=1-x$, $\psi_1(x,y)=0$ ja $\psi_2(x,y)=1-x-y$ korral

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(2+x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(2+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \frac{1}{(2+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{(2+x+y)^2}\right) dy =$$

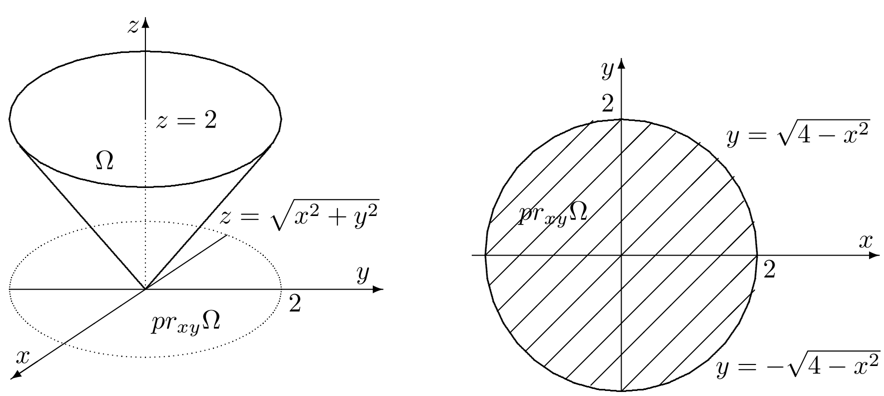
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \left(\frac{y}{3^2} + \frac{1}{2+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{3^2} + \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{2+x}\right) dx =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{7}{36}. \qquad \diamondsuit$$

Näide 3. Arvutame $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kus Ω on määratud pindadega $x^2+y^2=z^2$ ja $z=2$.

Piirkond Ω on võrrandiga $x^2+y^2=z^2$ määratud koonuse osa, mis on tasandite $z=0$ ja $z=2$ vahel. Skitseerime piirkonna Ω ja selle ristprojektsiooni $\mathrm{pr}_{xy}\Omega$ xy-tasandil



Kasutame Lauset 2, kusjuures $a_1=-2$, $a_2=2$, $\varphi_1(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $\varphi_2(x)=\sqrt{4-x^2}$, $\psi_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ja $\psi_2(x,y)=2$. Saame

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(2\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{kasutame polaarkoordinaate ja valemit (3.3.4),} \\ x^2+y^2 = 4 \longleftrightarrow \rho = 2,\ \alpha = 0,\ \beta = 2\pi,\ \rho_1(\varphi) = 0,\ \rho_1(\varphi) = 2 \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} \left(2\rho^2 - \rho^3\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{8}{3}\pi. \qquad \diamondsuit$$

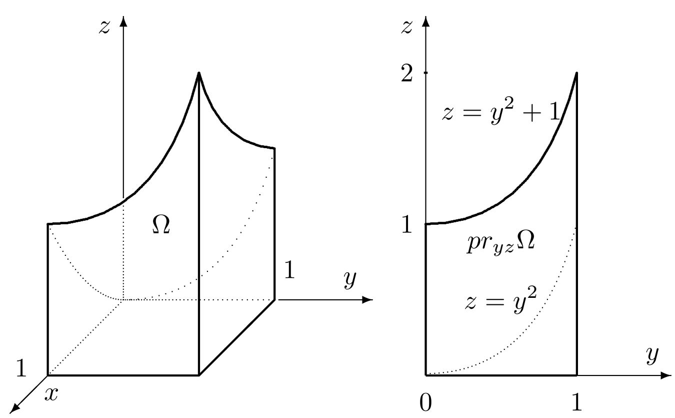
3^0 Integreerimispiirkond Ω on püstsilindritega, mille moodustaja on paralleelne kas x-, y- või z-teljega, jaotatav lõplikuks arvuks normaalseteks osapiirkondadeks. Sel korral võib tõestuseks kasutada kolmekordse integraali aditiivsust integreerimispiirkonna järgi (Lause 3.5.1 viiendat väidet) ja iga liidetava korral rakendada kas Lauset 1 või Lauset 2.

Näide 4. Muudame integreerimisjärjekorda integraali

$$I = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\ dz$$

korral.

Antud integraalis on rajad paigutatud valemi (3.6.3) põhjal. Seega $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1$, $\psi_1(x,\, y) = 0$ ja $\psi_2(x,\, y) = x^2 + y^2$. Skitseerime integreerimispiirkonna Ω ja selle projektsiooni $\mathrm{pr}_{yz}\Omega$ yz-tasandile



Kui välimine integraal võtta muutuja y järgi, siis integreerimispiirkond Ω on püstsilindritega, mille moodustaja on paralleelne x-teljega, jaotatav kaheks (miks?) normaalseks osapiirkonnaks. Neist esimese osapiirkonna projektsioon yz-tasandile on piiratud joontega $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = y^2$ (valem (3.6.5), $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\varphi_1(y) = 0$, $\varphi_2(y) = y^2$). Lisaks $\psi_1(y,\, z) = 0$ ja $\psi_2(y,\, z) = 1$. Teise osapiirkonna projektsioon yz-tasandile on piiratud joontega $y = 0$, $y = 1$, $z = y^2$, $z = y^2 + 1$ (valem (3.6.5), $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\varphi_1(y) = y^2$, $\varphi_2(y) = y^2 + 1$).

Seejuures $\psi_1(y, z) = \sqrt{z - y^2}$ ja $\psi_2(y, z) = 1$. Lause 3.5.1 viienda väite ja Märkuse 1 põhjal saame

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x, y, z)\, dx + \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z)\, dx.$$

Kui välimine integraal võtta muutuja z järgi, siis integreerimispiirkond Ω on püstsilindritega, mille moodustaja on paralleelne x-teljega, jaotatav kolmeks (miks?) normaalseks osapiirkonnaks. Neist esimese osapiirkonna projektsioon yz-tasandile on piiratud joontega $z = 0$, $z = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{z}$ (valemi (3.6.5) analoogis $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\varphi_1(z) = 0$, $\varphi_2(z) = \sqrt{z}$), kusjuures $\psi_1(y, z) = \sqrt{z - y^2}$ ja $\psi_2(y, z) = 1$. Teise osapiirkonna projektsioon yz-tasandile on piiratud joontega $z = 0$, $z = 1$, $y = \sqrt{z}$, $y = 1$ (valemi (3.6.5) analoogis $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\varphi_1(z) = \sqrt{z}$, $\varphi_2(z) = 1$), kusjuures $\psi_1(y, z) = 0$ ja $\psi_2(y, z) = 1$. Kolmanda osapiirkonna projektsioon yz-tasandile on piiratud joontega $z = 1$, $z = 2$, $y = \sqrt{z - 1}$, $y = 1$ (valemi (3.6.5) analoogis $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\varphi_1(z) = \sqrt{z - 1}$, $\varphi_2(z) = 1$), kusjuures $\psi_1(y, z) = \sqrt{z - y^2}$ ja $\psi_2(y, z) = 1$. Saame

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z)\, dx + \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z)\, dx +$$
$$+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z)\, dx.$$

Leidke ülejäänud kolm järjekorda. $\diamondsuit$

3.7 Muutujate vahetus kolmekordses integraalis

Vaatleme muutujate vahetust

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right. \qquad (u, v, w) \in \Delta \tag{3.7.1}$$

kolmekordses integraalis $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$. Eeldame, et teisendus (3.7.1), mis teisendab uvw-ruumis asetseva piirkonna Δ xyz-ruumis paiknevaks piirkonnaks Ω, on *regulaarne,* st

1) teisendus (3.7.1) on üksühene,

2) funktsioonide $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ ja $z(u, v, w)$ esimest järku osatuletised on pidevad piirkonnas Δ,

3) teisenduse (3.7.1) *jakobiaan*

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad ((u,v,w) \in \Delta).$$

Kehtib järgmine väide (vt [9] , lk 313-316).

Lause 1. Kui funktsioon $f(x,y,z)$ on pidev piirkonnas Ω ja teisendus (3.7.1) on regulaarne piirkonnas Δ ning teisendab piirkonna Δ piirkonnaks Ω, siis

$$\begin{gathered} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_{\Delta} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \, |\, J(u,v,w)| \, du\, dvdw. \end{gathered} \tag{3.7.2}$$

Märkus 1. Valem (3.7.2) kehtib ka juhul, kui teisendus (3.7.1) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel ja pindadel, mille ruumala on null.

Vaatleme üleminekut silinderkoordinaatidele, vt (1.1.1), kus teisendus (3.7.1) on kujul

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \qquad ((\varphi,\rho,z) \in \Delta) \\ z = z \end{cases}$$

ja

$$J(\varphi,\rho,z) = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\rho & x_z \\ y_\varphi & y_\rho & y_z \\ z_\varphi & z_\rho & z_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho \neq 0,$$

kui $\rho \neq 0$. Lause 1 ja Märkuse 1 abil saame

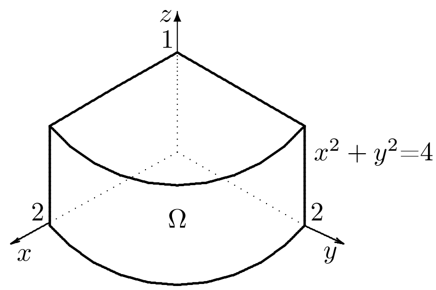
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Delta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\varphi\, d\rho dz. \tag{3.7.3}$$

Kui piirkond Ω on silinderkoordinaatides piiratud küljelt pooltasanditega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning püstsilindritega $\rho = \rho_1(\varphi)$ ja $\rho = \rho_2(\varphi)$ ning alt ja ülalt vastavalt pindadega $z = z_1(\varphi,\rho)$ ja $z = z_2(\varphi,\rho)$, siis omandab valem (3.7.3) kuju

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\varphi,\rho)}^{z_2(\varphi,\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz\ . \tag{3.7.4}$$

Näide 1. Arvutame $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 - z^2)dxdydz$, kus Ω on määratud võrratustega $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Skitseerime Ω :



Kuna silinderkoordinaatides on piirkond Ω määratud küljelt pooltasanditega $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ ja püstsilindritega $\rho = 0$, $\rho = 2$ ning alt ja ülalt vastavalt pindadega $z = 0$ ja $z = 1$, siis valemi (3.7.4) abil saame

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^1 \left(\rho^2 - z^2\right) dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho \left(\rho^2 - \frac{1}{3}\right) d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{10}{3} d\varphi = \frac{5}{3}\pi. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Paigutame rajad kolmekordses integraalis $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdy$, kasutades silinderkoordinaate, kui Ω on kera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

osa, mis on silindri

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = R^2 \left(x^2 - y^2\right) \quad (x \geq 0)$$

sees. Et

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \longleftrightarrow \rho^2 + z^2 = R^2 \longleftrightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - \rho^2}$$

ja

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2 \longleftrightarrow \rho^2 = R^2 \cos 2\varphi \longleftrightarrow \rho = R\sqrt{\cos 2\varphi}$$

ning

$$x \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

siis valemi (3.7.4) abil saame

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz \ . \diamondsuit$$

Vaatleme üleminekut sfäärkoordinaatidele, kus teisendus (3.7.1) on kujul, vt (1.1.2),

$$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\varphi \\ y = \rho \sin\psi \sin\varphi \qquad ((\varphi,\psi,\rho) \in \Delta) \\ z = \rho\cos\psi \end{cases}$$

ja

$$\begin{aligned} J(\varphi,\psi,\rho) &= \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\psi & x_\rho \\ y_\varphi & y_\psi & y_\rho \\ z_\varphi & z_\psi & z_\rho \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\psi & \rho\cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\cos\varphi \\ \rho\sin\psi\cos\varphi & \rho\cos\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi \\ 0 & -\rho\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = \\ &= -\rho^2\sin\psi \neq 0, \end{aligned}$$

kui $\rho \neq 0$ ja $\sin\psi \neq 0$.

Lause 1 ja Märkuse 1 abil saame

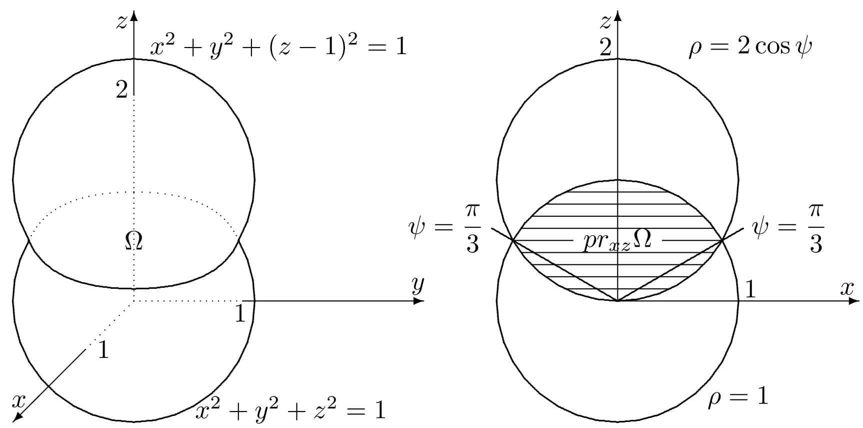
$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \\ &= \iiint\limits_{\Delta} f(\rho\sin\psi\cos\varphi, \rho\sin\psi\sin\varphi, \rho\cos\psi)\rho^2\sin\psi\, d\varphi\, d\psi d\rho. \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Kui piirkond Ω on sfäärkoordinaatides piiratud pooltasanditega $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ja pöördkoonustega $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ ning pindadega $\rho = \rho_1(\varphi,\psi)$, $\rho = \rho_2(\varphi,\psi)$ $(\rho_1(\varphi,\psi) \leq \rho_2(\varphi,\psi))$, siis valem (3.7.3) omandab kuju

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \\ &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int\limits_{\rho_1(\varphi,\psi)}^{\rho_2(\varphi,\psi)} f(\rho\sin\psi\cos\varphi, \rho\sin\psi\sin\varphi, \rho\cos\psi)\rho^2\sin\psi\, d\rho\ . \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

Näide 2. Leiame kahe kera $x^2+y^2+z^2 \le 1$ ja $x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$ ühisosa ruumala.

Skitseerime need kerad ja nende ristlõike xz-tasandiga



Et keha on sümmeetriline z-telje suhtes, siis piisab uurida selle keha ristlõiget xz-tasandiga. Kerade ühisosa on koonusega $\psi = \pi/3$ jaotatav kahte ossa. Kuna

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \longleftrightarrow \rho = 1$$

ning

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \longleftrightarrow \rho = 2\cos\psi,$$

siis Lause 3.5.1 viienda osa ja valemi (3.7.6) abil saame (miks?)

$$V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\psi \int_0^1 \rho^2 \sin\psi \, d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\cos\psi} \rho^2 \sin\psi \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\psi \, d\psi + \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^3\psi \sin\psi d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/3} \sin\psi \, d\psi + \frac{16\pi}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^3\psi \sin\psi d\psi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\cos\psi\Big|_0^{\pi/3} - \frac{4\pi}{3}\cos^4\psi\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\cos^4\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}. \quad \diamondsuit$$

3.8 Kolmekordse integraali rakendused

3.8.1 Keha ruumala arvutamine

Olgu keha määratud ruumis $\mathbf{R}_3$ piirkonnaga Ω. Lause 3.5.1 teise osa põhjal avaldub piirkonna Ω, mille rajapind on tükiti sile, ruumala V_Ω valemiga

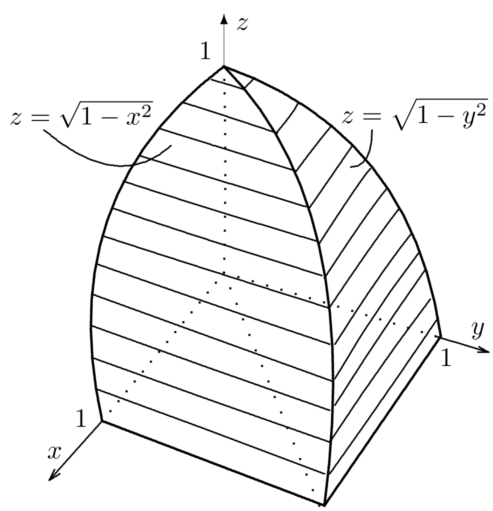
$$V_\Omega = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV. \tag{3.8.1}$$

Näide 1. Leiame pindadega

$$x^2 + z^2 = 1 \text{ ja } y^2 + z^2 = 1$$

määratud keha ruumala.

Skitseerime selle keha esimeses kaheksandikus oleva osa



Tänu sümmeetriale on keha jaotatav kuueteistkümneks võrdse ruumalaga osaks. Valemi (3.8.1) abil saame

$$V_\Omega = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = 16 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dz =$$

$$= 16 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = 16 \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx =$$

$$= -8 \int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^{1/2} d\left(1-x^2\right) = -\frac{16}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{16}{3}. \qquad \diamondsuit$$

3.8.2 Keha mass, massikese ja inertsmomendid

Olgu xyz-tasandi piirkonnaga Ω määratud keha tihedus $\rho(x,y,z)$. Olgu Ω jaotatud osapiirkondadeks Ω_i $(i=1;\ldots;n)$. Olgu $P_i\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\in\Omega_i$. Kui ΔV_i on piirkonna Ω_i ruumala, d_i piirkonna Ω_i läbimõõt ja $\rho(x,y,z)\in C\left(\Omega\right)$, siis vaadeldava *keha massi* m defineerime kui piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(P_i\right)\Delta V_i,$$

st

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho\left(P\right)dV. \tag{3.8.2}$$

Tõestage, et keha *massikeskme koordinaadid* x_c, y_c ja z_c avalduvad kujul

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}x\rho\left(P\right)dV,\ y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}y\rho\left(P\right)dV,\ z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{\Omega}z\rho\left(P\right)dV. \tag{3.8.3}$$

Keha *inertsmomendid* I_x, I_y ja I_z vastavalt x-, y- ja z-telje suhtes on piirväärtused

$$\lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i^2+\zeta_i^2\right)\rho\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta V_i,$$

$$\lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2+\zeta_i^2\right)\rho\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta V_i$$

ja

$$\lim_{n\to\infty,\,\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2+\eta_i^2\right)\rho\left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)\Delta V_i.$$

Seega

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV, \tag{3.8.4}$$

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV \tag{3.8.5}$$

ja

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\rho\left(P\right)dV. \tag{3.8.6}$$

Kuna keha inertsmoment I_O nullpunkti O suhtes avaldub kujul (miks?)

$$I_O=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV, \tag{3.8.7}$$

siis

$$I_O = (I_x + I_y + I_z)/2. \tag{3.8.8}$$

Lause 1. Kui keha on xyz-ruumi piirkonnas Ω ja keha tihedus $\rho(x,y,z) \in C(\Omega)$, siis selle keha mass m on leitav valemi (3.8.2) abil, massikeskme koordinaadid x_c, y_c ja z_c valemite (3.8.3) abil ning inertsmomendid I_x, I_y, I_z ja I_O valemite (3.8.4) – (3.8.8) abil.

Näide 2. Olgu keha määratud xyz-ruumi piirkonnaga Ω, mis on antud võrratustega (vt Näidet 1)

$$x^2 + z^2 \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq 1,\ y \leq x,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

Olgu $\rho(x,y,z) = z$ keha tihedus. Leiame keha massi m, massikeskme koordinaadid x_c, y_c ja z_c ning inertsmomendid I_x, I_y, I_z ja I_O.

Kasutame Lauset 1

$$m \overset{(3.8.2)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \rho(P)\, dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} z dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x - x^3\right) dx = \frac{1}{8},$$

$$x_c \overset{(3.8.3)}{=} \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} x\rho(P)\, dV = 8 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xz dz =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(x - x^3\right) dy = 4 \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \frac{8}{15},$$

$$y_c \overset{(3.8.3)}{=} \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} y\rho(P)\, dV = 8 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} yz dz =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(y - yx^2\right) dy = 2 \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \frac{4}{15},$$

$$z_c \overset{(3.8.3)}{=} \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} z\rho(P)\, dV = 8 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} z^2 dz =$$

$$= \frac{8}{3} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) \sqrt{1 - x^2} dy = \frac{8}{3} \int\limits_0^1 \left(x - x^3\right) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{8}{15},$$

$$I_x \overset{(3.8.4)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(y^2+z^2\right) zdz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(1-2x^2+x^4+2y^2-2y^2x^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_0^1 \left(3x-4x^3+x^5\right) dx = \frac{1}{18},$$

$$I_y \overset{(3.8.5)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+z^2\right) zdz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(1-x^4\right) dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(x-x^5\right) dx = \frac{1}{12},$$

$$I_z \overset{(3.8.6)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right)\rho\left(P\right)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right) zdz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(x^2+y^2-x^4-y^2x^2\right) dy = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(x^3-x^5\right) dx = \frac{1}{18}$$

ja

$$I_O \overset{(3.8.7)}{=} \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho\left(P\right)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right) zdz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(1-x^4+2y^2-2y^2x^2\right) dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(x-\frac{5x^5}{3}+\frac{2x^3}{3}\right) dx = \frac{7}{72}.$$

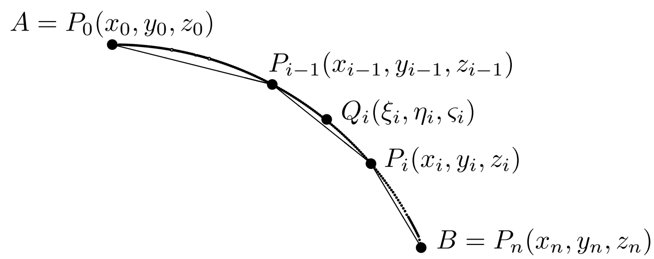
$\diamondsuit$

3.9 Esimest liiki joonintegraal

Joone pikkuse arvutamisel (vt [22], lk 196-199) vaatlesime joont Γ parameetriliste võrranditega

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right. \quad t \in [\alpha, \beta]\,. \tag{3.9.1}$$

Olgu A joone Γ alguspunkt ja B selle joone lõpp-punkt. Jaotame joone Γ



parameetri t väärtustele t_i vastavate punktidega $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ n osakaareks, kusjuures $P_0 = A$ vastab parameetri väärtusele α ja $P_n = B$ vastab parameetri väärtusele β ning $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$. Igal osakaarel $P_{i-1}P_i$ $(i = 1; \ldots; n)$ võtame parameetri t väärtusele τ_i $(\tau_i \in [t_{i-1}, t_i])$ vastava punkti $Q_i\,(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$. Olgu

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

Definitsioon 1. Võrrandiga (3.9.1) esitatud joont Γ nimetatakse *sirgestuvaks*, kui

$$\exists \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \qquad (3.9.2)$$

sõltumata lõigu $[\alpha, \beta]$ osalõikudeks jaotamisest.

Seda piirväärtust nimetatakse *joone* Γ *pikkuseks* ja tähistatakse s_Γ. Seega nimetatakse joont Γ sirgestuvaks, kui murdjoone $P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_n$ pikkusel on lõplik piirväärtus vaadeldavas piirprotsessis.

Järgnevas tegeldakse vaid sirgestuvate joontega. Olgu funktsioon $f(x, y, z)$ määratud joone Γ punktides. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i, \qquad (3.9.3)$$

kus Δs_i on kaare $P_{i-1}P_i$ pikkus. Märgime, et $\max \Delta s_i \to 0 \ \Rightarrow\ n \to \infty$.

Definitsioon 2. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i,$$

mis ei sõltu joone Γ osakaarteks jaotamise viisist ja punkti Q_i valikust osakaares $P_{i-1}P_i$ $(i = 1; \ldots; n)$, siis nimetatakse seda piirväärtust *esimest liiki joonintegraaliks* ehk *joonintegraaliks kaare pikkuse* järgi funktsioonist f mööda joont Γ ja tähistatakse

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds \qquad (3.9.4)$$

ehk $\int_\Gamma f(P)\,ds$ või $\int_{AB} f(P)\,ds$.

Joont Γ nimetatakse *integreerimisteeks,* kusjuures punkti A nimetatakse integreerimistee *alguspunktiks* ja punkti B integreerimistee *lõpp-punktiks*. Kui Γ asetseb mõnel koordinaattasandil, näiteks xy-tasandil, siis räägitakse *tasandilisest* joonintegraalist. Kui joon Γ on ruumiline joon, siis kõneldakse *ruumilisest* joonintegraalist.

Kui joone Γ esituses (3.9.1) kasutada parameetrina kaare AP pikkust s, siis saame

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \qquad s \in [0, s_\Gamma] \\ z = z(s) \end{cases} \tag{3.9.5}$$

ja integraalsumma (3.9.3) omandab kuju

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\omega_i), y(\omega_i), z(\omega_i))\Delta s_i, \tag{3.9.6}$$

kus $s_i \longleftrightarrow P_i$, $\omega_i \longleftrightarrow Q_i$ ning $\omega_i \in [s_{i-1}, s_i]$. Kui $\exists \int_\Gamma f(P)\,ds$, siis

$$\exists \lim_{n\to\infty,\ \max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\omega_i), y(\omega_i), z(\omega_i))\Delta s_i = \int_0^{s_\Gamma} f(x(s), y(s), z(s))\,ds,$$

kusjuures viimane integraal on tavaline määratud integraal. Seega järeldub integraalsummade (3.9.3) ja (3.9.6) võrdsusest

$$\int_\Gamma f(P)\,ds = \int_0^{s_\Gamma} f(x(s), y(s), z(s))\,ds. \tag{3.9.7}$$

Et integreeritava funktsiooni pidevus on piisav tingimus mä äratud integraali olemasoluks, siis saame valemi (3.9.7) abil, et funktsiooni f pidevus parameetriliste võrranditega (3.9.5) antud joone Γ punktides ja $x(s)$, $y(s)$, $z(s) \in C[0, s_\Gamma]$ on piisavad tingimused esimest liiki joonintegraali $\int_\Gamma f(P)\,ds$ olemasoluks.

Kasutades määratud integraali omadusi, on lihtne seose (3.9.7) abil tõestada esimest liiki joonintegraali omadusi.

Lause 1. Sirgestuva joone Γ korral kehtivad järgmised väited:
1. Kui $f(P) = 1$ $(P \in \Gamma)$, siis

$$\int_\Gamma 1\,ds = s_\Gamma,$$

kus s_Γ on joone Γ pikkus.
2. Esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimistee läbimise suunast.
3. Esimest liiki joonintegraal on aditiivne, st kui eksisteerib $\int_{AB} f(P)\,ds$ ja joon AB koosneb osadest AC ning CB, siis

$$\int_{AB} f(P)\,ds = \int_{AC} f(P)\,ds + \int_{CB} f(P)\,ds.$$

4. Esimest liiki joonintegraal on lineaarne, st kui eksisteerivad integraalid $\int_\Gamma f_1(P)\,ds$ ja $\int_\Gamma f_2(P)\,ds$ ning $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, siis eksisteerib ka integraal

$$\int\limits_\Gamma (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)\,)\,ds,$$

kusjuures

$$\int\limits_\Gamma (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)\,)\,ds = c_1 \int\limits_\Gamma f_1(P)ds + c_2 \int\limits_\Gamma f_2(P)ds.$$

5. Kui eksisteerivad integraalid $\int_\Gamma f(P)\,ds$ ja $\int_\Gamma g(P)\,ds$ ning

$$f(P) \;\le g(P) \quad (P \in \Gamma)\,,$$

siis

$$\int\limits_\Gamma f(P)\,ds \le \int\limits_\Gamma g(P)\,ds.$$

Tõestame neist neljanda omaduse

$$\int\limits_\Gamma (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)\,)\,ds \overset{(3.9.7)}{=}$$

$$= \int\limits_0^{s_\Gamma} (c_1 f_1(x\,(s)\,, y\,(s)\,, z\,(s)) \;+ c_2 f_2(x\,(s)\,, y\,(s)\,, z\,(s)))\,ds =$$

$$= [\text{kasutame määratud integraali lineaarsust}] =$$

$$= c_1 \int\limits_0^{s_\Gamma} f_1(x\,(s)\,, y\,(s)\,, z\,(s))ds \;+ c_2 \int\limits_0^{s_\Gamma} f_2(x\,(s)\,, y\,(s)\,, z\,(s))ds \overset{(3.9.7)}{=}$$

$$= c_1 \int\limits_\Gamma f_1(P)ds + c_2 \int\limits_\Gamma f_2(P)\,ds.$$

Tõestage ülejäänud omadused iseseisvalt. □

Definitsioon 3. Võrranditega (3.9.1) antud joont Γ nimetatakse *siledaks,* kui

$$x'(t),\; y'(t),\; z'(t) \in C\,[\alpha, \beta]$$

ja

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2 \ne 0 \quad (t \in [\alpha, \beta])\,.$$

Definitsioon 4. Võrranditega (3.9.1) antud joont Γ nimetatakse *tükiti siledaks,* kui ta koosneb lõplikust arvust siledatest osadest.

Saab näidata, et võrranditega (3.9.1) esitatud tükiti sile joon on sirgestuv.

Kuigi esimest liiki joonintegraali arvutamiseks saab kasutada valemit (3.9.7), on sileda joone Γ korral selleks otstarbekas kasutada valemit (3.9.8). Nimelt sileda joone korral

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

ja seosest (3.9.7) järeldub seos (3.9.8).

Lause 2. Kui sile joon AB on esitatud parameetriliste võrranditega (3.9.1), kus parameetri t väärtusele α vastab punkt A ja väärtusele β punkt B, ning funktsioon f on pidev joone Γ punktides, siis

$$\int\limits_{AB} f(P)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \tag{3.9.8}$$

Järeldus 1. Kui sile joon AB on antud xy-tasandil võrrandiga

$$y = y(x) \quad (x \in [a, b])\,,$$

kusjuures punktis A $x = a$ ja punktis B $x = b$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \tag{3.9.9}$$

Näide 1. Arvutame joonintegraali

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{x - y},$$

kus Γ on sirge $y = \dfrac{x}{2} - 2$ lõik punktide $A(0; -2)$ ja $B(4; 0)$ vahel.

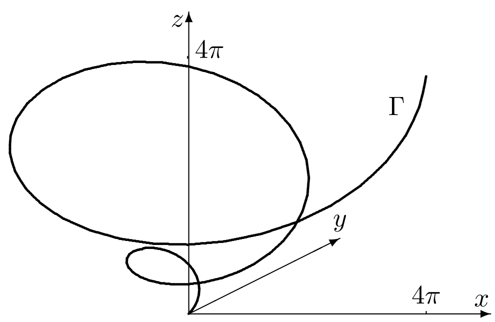
Veenduge, et Järelduse 1 eeldused, kusjuures $f(x, y) = 1/\left(x - y\right),\ y' = \dfrac{1}{2}$ ja $a = 0$ ning $b = 4$, on täidetud. Valemi (3.9.9) abil saame

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{x - y} = \int\limits_{0}^{4} \frac{1}{x - \left(\frac{x}{2} - 2\right)}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{\frac{x}{2} + 2}dx =$$

$$= \sqrt{5}\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{x + 4} = \sqrt{5}\ln\left(x + 4\right)\Big|_0^4 = \sqrt{5}\left(\ln 8 - \ln 4\right) = \sqrt{5}\ln 2. \quad \diamondsuit$$

Näide 2. Arvutame joonintegraali $\int_{\Gamma}\left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)ds$, kus joon Γ on antud parameetriliste võrranditega $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t\ \ (0 \le t \le 4\pi)\,.$

Skitseerime joone Γ



Veenduge, et Lause 2 eeldused on täidetud. Kuna

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2+t^2},$$

siis valemi (3.9.8) abil saame

$$\int\limits_{\Gamma} \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right) ds = \int\limits_0^{4\pi} \left(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \sin^2 t}\right) \sqrt{2+t^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{4\pi} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{4\pi} \sqrt{2+t^2}d\left(2+t^2\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\left(2+t^2\right)^3}\Big|_0^{4\pi} =$$

$$= \frac{2+16\pi^2}{3}\sqrt{2+16\pi^2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}. \qquad \diamondsuit$$

3.10 Teist liiki joonintegraal

Kasutame eelmise punkti tähistust. Skalaarväärtustega funktsiooni $f(P)$ asemel vaatleme tükiti sileda joone Γ (joone AB) punktides vektorväärtustega funktsiooni

$$\mathbf{F} = \left(X\left(x,y,z\right), Y\left(x,y,z\right), Z\left(x,y,z\right)\right),$$

lühidalt $\mathbf{F}\left(P\right) = \left(X\left(P\right), Y\left(P\right), Z\left(P\right)\right)$ ehk $\mathbf{F} = \left(X,Y,Z\right)$. Olgu

$$\mathbf{r} = \left(x,y,z\right), \quad \Delta\mathbf{r}_i = \left(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i\right), \quad d\mathbf{r} = \left(dx, dy, dz\right).$$

Füüsikast on teada, et masspunkti liikumisel piki joont Γ, mille igas punktis P mõjub talle jõud $\mathbf{F}(P)$, esitab $\mathbf{F}(Q_i)\Delta\mathbf{r}_i$ ligikaudu töö, mis tehakse masspunkti nihutamisel piki kaart $P_{i-1}P_i$. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(Q_i)\Delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\Delta x_i + Y\left(Q_i\right)\Delta y_i + Z\left(Q_i\right)\Delta z_i, \qquad (3.10.1)$$

kusjuures kokkuleppeliselt jätame parempoolses summas sulud ära.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right) \Delta x_i + Y\left(Q_i\right) \Delta y_i + Z\left(Q_i\right) \Delta z_i, \tag{3.10.2}$$

mis ei sõltu joone Γ osakaarteks jaotamise viisist ja punkti Q_i valikust osakaarel $P_{i-1}P_i \ \ (i = 1; \ldots; n)$, siis nimetatakse seda piirväärtust *teist liiki joonintegraaliks* (ehk *joonintegraaliks projektsioonide järgi)* funktsioonist $\mathbf{F}$ mööda joont Γ punktist A punkti B ja tähistatakse

$$\int\limits_{AB} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz \tag{3.10.3}$$

ehk

$$\int\limits_{AB} X(P)\,dx + Y(P)\,dy + Z(P)\,dz, \ \int_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\ , \ \int_{AB} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}.$$

Märkus 1. Kui piirkonnas Ω paikneva joone Γ igas punktis P mõjub masspunktile jõud $\mathbf{F}\left(P\right)$, siis $\int_{AB} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ esitab masspunkti liikumisel punktist A punkti B piki joont AB tehtud *töö*.

Joonintegraali vektorist $\mathbf{F}$ piki kinnist joont Γ nimetatakse vektori $\mathbf{F}$ *tsirkulatsiooniks* ehk *ringintegraaliks* piki joont Γ ja tähistatakse $\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$.

Liikumise suunda piki tasandil (täpsemini selle tasandi fikseeritud poolel) paiknevat kinnist joont Γ nimetatakse *positiivseks*, kui mööda joont Γ liikudes jääb Γ poolt hõlmatav piirkond vasakule. Kui järgnevas ei ole fikseeritud tasandil paikneva kinnise joone läbimise suunda, siis eeldatakse vaikimisi, et seda joont läbitakse positiivses suunas.

Sileda joone Γ korral on teist liiki joonintegraal taandatav esimest liiki joonintegraaliks.

Lause 1. Kui sile joon AB on esitatud parameetriliste võrranditega (3.9.5) ja funktsioonid X, Y, Z on pidevad joonel AB, siis

$$\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{AB} \left(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma\right)\,ds, \tag{3.10.4}$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ on vektori $d\mathbf{r}$ suunakoosinused.

Tõestus. Rõhutame, et $\alpha = \alpha\left(P\right)$, $\beta = \beta\left(P\right)$ ja $\gamma = \gamma\left(P\right)$. Piirdume seose

$$\int\limits_{AB} X\,dx = \int\limits_{AB} X\cos\alpha\,ds \tag{3.10.5}$$

tõestamisega. Analoogiliselt tõestatakse seosed

$$\int\limits_{AB} Y\,dy = \int\limits_{AB} Y\cos\beta\,ds, \ \int\limits_{AB} Z\,dz = \int\limits_{AB} Z\cos\gamma\,ds.$$

Võrdleme integraalide $\int_{AB} X\,dx$ ja $\int_{AB} X\cos\alpha\,ds$ integraalsummasid

$$\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\Delta x_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\Delta s_i.$$

Et

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{ds}=\cos\left(\alpha\left(P\right)\right)\Rightarrow dx=\cos\left(\alpha\left(P\right)\right)ds\Rightarrow \Delta x_i=\int_{s_{i-1}}^{s_i}\cos\left(\alpha\left(P\right)\right)ds= \\
&=\left[\begin{array}{c} AB \text{ on sile} \Rightarrow \ \cos\left(\alpha\left(P\right)\right)\in C\left[s_{i-1},s_i\right]\Rightarrow \text{saame} \\ \text{rakendada määratud integraali keskväärtusteoreemi}\end{array}\right]= \\
&=\cos\left(\alpha\left(Q_i^*\right)\right)\Delta s_i \quad \left(\omega_i^*\longleftrightarrow Q_i^*,\ \omega_i^*\in\left[s_{i-1},s_i\right]\right),
\end{aligned}$$

siis integraalsummade vahe δ jaoks saame

$$\begin{aligned}
|\delta| &= \left|\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\Delta s_i\right|= \\
&=\left|\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\cos\left(\alpha\left(Q_i^*\right)\right)\Delta s_i-\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\Delta s_i\right|= \\
&=\left|\sum_{i=1}^{n} X\left(Q_i\right)\left(\cos\left(\alpha\left(Q_i^*\right)\right)-\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\right)\Delta s_i\right|\le \\
&\le\sum_{i=1}^{n}\left|X\left(Q_i\right)\right|\left|\left(\cos\left(\alpha\left(Q_i^*\right)\right)-\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\right)\right|\Delta s_i.
\end{aligned}$$

Kuna funktsiooni $\cos\left(\alpha\left(P\right)\right)$ pidevusest siledal sirgestuval joonel AB järeldub selle funktsiooni ühtlane pidevus sel joonel, siis $\forall\varepsilon>0$ korral leidub selline joone AB jaotus punktidega P_i, et

$$\left|\cos\left(\alpha\left(Q_i^*\right)\right)-\cos\left(\alpha\left(Q_i\right)\right)\right|<\varepsilon \quad \left(i=1;\ldots;n\right).$$

Seega

$$|\delta|<\sum_{i=1}^{n}\left|X\left(Q_i\right)\right|\varepsilon\Delta s_i<M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=M\varepsilon s_\Gamma,$$

kus $M=\sup_{P\in AB}\left|X\left(P\right)\right|$ ja s_Γ on joone AB pikkus. Seega on piirprotsessis $\max\Delta s_i\to 0$ uuritavatel integraalsummadel ühinene piirväärtus, st seos (3.10.5) kehtib. $\square$

Lause 2. Kui joon AB on tükiti sile ja funktsioonid X, Y, Z on pidevad joonel AB, siis kehtivad järgmised väited:
1. Teist liiki joonintegraal sõltub integreerimistee läbimise suunast. Nimelt joone AB läbimise suuna muutmisel vastupidiseks korrutub integraal arvuga miinus üks, st

$$\int\limits_{AB}\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=-\int\limits_{BA}\mathbf{F}\,d\mathbf{r}.$$

2. Teist liiki joonintegraal on aditiivne, st kui joon AB koosneb osadest AC ja CB, siis

$$\int\limits_{AB} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{AC} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} + \int\limits_{CB} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

3. Teist liiki joonintegraal on lineaarne, st kui eksisteerivad integraalid $\int_{AB} \mathbf{F}_1\, d\mathbf{r}$ ja $\int_{AB} \mathbf{F}_2\, d\mathbf{r}$ ning $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, siis eksisteerib ka integraal

$$\int\limits_{AB} (c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2)\, d\mathbf{r},$$

kusjuures

$$\int\limits_{AB} (c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2)\, d\mathbf{r} = c_1 \int\limits_{AB} \mathbf{F}_1\, d\mathbf{r} + c_2 \int\limits_{AB} \mathbf{F}_2\, d\mathbf{r}.$$

4. Kui joon AB on risti x-teljega, siis

$$\int\limits_{AB} X\, dx = 0.$$

Kui joon AB on risti y-teljega, siis

$$\int\limits_{AB} Y\, dy = 0.$$

Kui joon AB on risti z-teljega, siis

$$\int\limits_{AB} Z\, dz = 0.$$

Tõestus. Lause 2 esimese osa tõestus järeldub vahetult Definitsioonist 1. Tõesti, joone AB suuna muutmisel vastupidiseks muudavad vastavas integraalsummas esinevad suurused $\Delta x_i, \Delta y_i$ ja Δz_i märki ning märki muudab ka vastav integraal. Lause 2 ülejäänud osade tõestamiseks kasutage kas Definitsiooni 1 või Lauset 1. $\square$

Teist liiki joonintegraali arvutamiseks võib kasutada järgmist Lauset.

Lause 3. Kui sile joon AB on esitatud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{cases},$$

kus parameetri t väärtusele α vastab punkt A ja väärtusele β punkt B, ning funktsioonid X, Y ning Z on pidevad joone AB punktides, siis

$$\int\limits_{AB} X dx + Y dy + Z dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(X(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + Z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt. \tag{3.10.6}$$

Tõestus. Kuna võrranditega (3.9.1) esitatud sileda joone AB korral (miks?)

$$\cos\alpha\, ds = x'(t)dt, \; \cos\beta\, ds = y'(t)dt, \; \cos\gamma\, ds = z'(t)dt,$$

siis valemite (3.10.4) ja (3.9.8) põhjal saame

$$\int\limits_{AB} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = \int\limits_{AB} (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)\; ds =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(X(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

st Lause 3 väide on tõene. $\square$

Järeldus 1. Kui tasandilise joonintegraali

$$\int\limits_{AB} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy$$

korral on sile joon AB antud võrrandiga

$$y = y(x) \quad (x \in [a, b]),$$

kusjuures punktile A vastab $x = a$ ja punktile B vastab $x = b$, siis

$$\int\limits_{AB} X dx + Y dy = \int\limits_{a}^{b} (X(x, y(x)) + Y(x, y(x)) y'(x))\, dx. \tag{3.10.7}$$

Analoogiliselt saadakse võrrandiga

$$x = x(y) \quad (y \in [c, d])$$

antud joone AB korral valem

$$\int\limits_{AB} X dx + Y dy = \int\limits_{c}^{d} (X(x(y), y) x'(y) + Y(x(y), y))\, dy. \tag{3.10.8}$$

Näide 1. Arvutame joonintegraali

$$\int\limits_{\Gamma} xdx + ydy + (x+y-1)\,dz,$$

kui Γ on sirglõik punktist $A(1;1;1)$ punkti $B(2;3;4)$.

Et punkte A ja B läbiva sirge sihivektor on $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$, siis sirglõigu Γ võime esitada parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases} \quad t \in [0;1]\,,$$

kusjuures A korral $t=0$ ja B korral $t=1$. Rakendame Lauset 3. Valemi (3.10.6) abil saame

$$\int\limits_{\Gamma} xdx + ydy + (x+y-1)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 ((1+t)\cdot 1 + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3)\,dt = 13. \quad \diamondsuit$$

Näide 2. Arvutame joonintegraali

$$\int\limits_{AB} (x-3xy)\,dx + \left(x^2 - y^3\right) dy,$$

kus joon AB on antud võrrandiga

$$y = x^2 - x \quad (x \in [-1;1])\,.$$

Veenduge, et Järeldus 1 on rakendatav. Valemi (3.10.7) abil saame

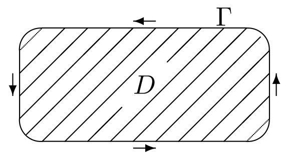
$$\int\limits_{AB} (x-3xy)\,dx + \left(x^2 - y^3\right) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x - 3x\left(x^2 - x\right) + \left(x^2 - \left(x^2 - x\right)^3\right)(2x-1)\right) dx = \frac{16}{3}. \quad \diamondsuit$$

3.11 Greeni valem

Kirjeldame järgnevalt seost tasandilise teist liiki joonintegraali ja kahekordse integraali vahel. Kehtib väide.

Lause 1. Kui funktsioonid X ja Y ning nende osatuletised X_y ja Y_x on pidevad xy-tasandi sidusas piirkonnas D, mille rajajoon Γ on tükiti sile,



siis kehtib *Greeni valem*

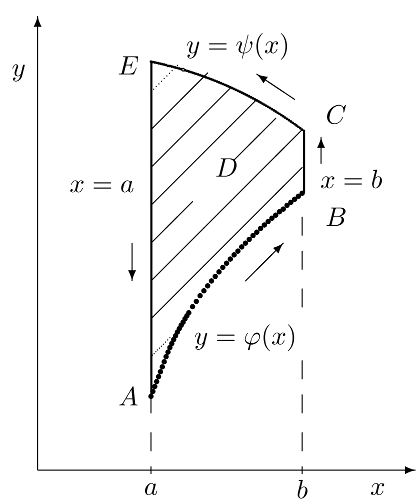
$$\oint_{\Gamma} X dx + Y dy = \iint_{D} (Y_x - X_y)\, dx\, dy, \tag{3.11.1}$$

kusjuures piirkonna D rajajoont Γ läbitakse *positiivses suunas*, st liikudes mööda rajajoont jääb piirkond D vasakule.

Tõestus. Kõigepealt näitame, et

$$\oint_{\Gamma} X dx = -\iint_{D} X_y\, dx\, dy. \tag{3.11.2}$$

1° Olgu D normaalne piirkond x-telje suhtes, st



$D = \{(x, y) \,|\, (a \le x \le b) \wedge (\varphi(x) \le y \le \psi(x))\}$. Rajajoont Γ läbime positiivses suunas. Kasutades Lause 3.10.2 teist osa, saame

$$\oint_{\Gamma} X dx = \int_{AB} X dx + \int_{BC} X dx + \int_{CE} X dx + \int_{EA} X dx =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} AB: & BC: \\ x = x,\ y = \varphi(x),\ dx = dx & x = b,\ y = y,\ dx = 0 \\ \overrightarrow{a \le x \le b} & \overrightarrow{\varphi(b) \le y \le \psi(b)} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} CE: & EA: \\ x = x,\ y = \psi(x),\ dx = dx & x = a,\ y = y,\ dx = 0 \\ \overleftarrow{a \le x \le b} & \overleftarrow{\varphi(a) \le y \le \psi(a)} \end{array} \right] =$$

$$\overset{[(3.10.6)]}{=} \int_a^b X(x, \varphi(x))\, dx + 0 + \int_b^a X(x, \psi(x))\, dx + 0 =$$

$$= -\int_a^b \left(X(x, \psi(x)) - X(x, \varphi(x)) \right) dx.$$

Kuna

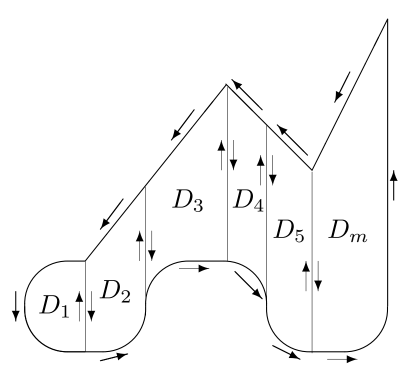
$$\iint_D X_y\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} X_y\ (x, y)\ dy =$$

$$= \int_a^b X\ (x, y)|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\ dx = \int_a^b \left(X(x, \psi(x)) - X(x, \varphi(x)) \right) dx,$$

siis

$$\oint_{\Gamma} X dx = -\iint_D X_y\, dx\, dy.$$

2° Olgu piirkond D jaotatav y-teljega paralleelsete sirglõikudega m x-telje suhtes normaalseks piirkonnaks D_k vastavalt rajajoontega Γ_k.



Et iga y-teljega paralleelset sirglõiku, mis eraldab kaht normaalset piirkonda, läbitakse kokkuvõttes kahes suunas, siis

$$\oint\limits_{\Gamma} X\,dx = \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\Gamma_k} X\,dx \overset{1^\circ}{=} -\sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{D_k} X_y\,dx\,dy = -\iint\limits_{D} X_y\,dx\,dy,$$

st seos (3.11.2) kehtib.

Kasutades piirkonda $D = \{(x,y)\,|\,(c \le y \le d) \wedge (\varphi(y) \le x \le \psi(y))\}$, saab analoogiliselt näidata

$$\oint\limits_{\Gamma} Y\,dy = \iint\limits_{D} Y_x\,dx\,dy. \qquad \square$$

Näide 1. Leiame Greeni valemi abil

$$\oint\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy,$$

kus Γ on ringjoon $x^2+y^2 = 2x$, mida läbitakse kellaosuti liikumise vastassuunas.

Et

$$x^2 + y^2 = 2x \iff \rho = 2\cos\varphi \quad (-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2),$$

siis valemi (3.11.1) abil saame

$$\oint\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial (xy + x - y)}{\partial x} - \frac{\partial ((xy + x + y))}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} (y - x)\ dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} (\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi)\,\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi - \tfrac{8}{3}\cos^4\varphi \right) d\varphi = -\pi. \qquad \diamondsuit$$

Järeldus 1. Kui funktsioonid X, Y, X_y ja Y_x on pidevad xy-tasandi sidusas piirkonnas D, mille rajajoon Γ on tükiti sile, ning

$$Y_x \equiv X_y \quad ((x,y) \in D),$$

siis iga piirkonnas D paikneva tükiti sileda kinnise ennast mitte lõikava joone γ korral

$$\oint\limits_{\gamma} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Tõestus. Rakendame Greeni valemit

$$\oint_\gamma X dx + Y dy = \iint_{D_\gamma} (Y_x - X_y)\, dx\, dy = \iint_{D_\gamma} 0\, dx\, dy = 0,$$

kus D_γ on joone γ poolt hõlmatav piirkond. Millise tulemuseni jõuame ennast lõplikus arvus punktides lõikava joone korral? $\square$

Näide 2. Tõestame Järelduse 1 abil, et

$$\oint_\Gamma f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

kus f on suvaline diferentseeruv ühe muutuja funktsioon ja Γ on tükiti sile joon.

Kui tähistada

$$X = -\frac{y}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right), \quad Y = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right),$$

siis

$$Y_x = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right),\ X_y = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Seega $Y_x \equiv X_y \quad ((x,y) \in D)$. Kasutame Järeldust 1. $\diamondsuit$

Järeldus 2. Kui $F_x(x,y),\ F_y(x,y),\ F_{xy}(x,y)$ ja $F_{yx}(x,y)$ on pidevad sidusas piirkonnas D, siis iga piirkonnas D paikneva tükiti sileda kinnise joone γ korral

$$\oint_\gamma dF\,(x,y) = 0.$$

Tõestus. Et antud tingimustel

$$F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) \quad ((x,y) \in D),$$

siis valiku $X = F_x \wedge Y = F_y$ korral võime rakendada Järeldust 1. Saame

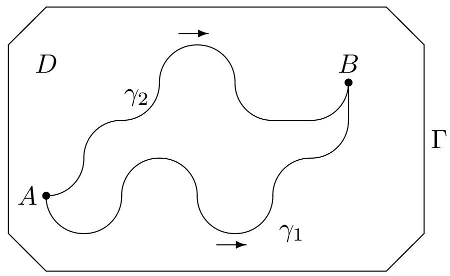
$$\oint_\gamma dF = \oint_\gamma F_x\, dx + F_y\, dy = \oint_\gamma X dx + Y dy = 0. \quad \square$$

Järeldus 3. Olgu funktsioonid X, Y ja nende osatuletised X_y ja Y_x pidevad xy-tasandi sidusas tükiti sileda rajajoonega Γ piirkonnas D ning $Y_x = X_y$ $((x,y) \in D)$. Kui $A, B \in D$ ja $\gamma_1,\ \gamma_2 \subset D$ on suvalised tükiti siledad jooned punktist A punkti B, siis

$$\int_{\gamma_1} X dx + Y dy = \int_{\gamma_2} X dx + Y dy,$$

st neil tingimustel sõltub joonintegraali väärtus vaid punktide A ja B asukohast ning ei sõltu tükiti sileda joone valikust punktide A ja B vahel.

Tõestage see väide Lause 1 abil, kasutades kinnist joont $\gamma = \gamma_1 \cup \overleftarrow{\gamma}_2$, kus



γ_1 ja γ_2 on piirkonnas D paiknevad tükiti siledad jooned alguspunktiga A ja lõpppunktiga B ning $\overleftarrow{\gamma}_2$ tähendab, et joont γ_2 läbitakse punktist B punkti A. $\square$

Kui joonintegraal $\int_{AB} X dx + Y dy$ on sõltumatu integreerimisteest punktide A ja B vahel, siis kirjutatakse $\int_A^B X dx + Y dy$.

Näide 3. Leiame

$$\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2 dy.$$

Et antud joonintegraali korral on teada joone Γ alguspunkt $(0;0)$ ja selle joone lõpp-punkt $(2;1)$, kuid ei ole antud integreerimisteed, siis antud ülesandel on lahend vaid juhul, kui integraali all on mingi kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal, st $(2xy)_y = \left(x^2\right)_x$. Kuna see võrdus kehtib, siis Järelduse 3 põhjal ei sõltu uuritava joonintegraali väärtus integreerimisteest. Valime integreerimisteeks sirglõigu punktist $(0;0)$ punkti $(2;1)$, võrrandiga $y = x/2 \quad (x \in [0;2])$. Valemi (3.10.7) abil saame

$$\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2 dy = \int\limits_0^2 \left(2x\frac{x}{2} + x^2\frac{1}{2}\right) dx = 4. \qquad \diamondsuit$$

3.12 Joonintegraalide rakendused

Selles punktis esitatud väidete tõestamise jätame lugeja hooleks. Tõestamiseks koostage vastavad integraalsummad ja veenduge, et esitatud tingimustel vastavad integraalid eksisteerivad.

Lause 1. Kui joon Γ on sile, siis selle joone pikkus s_Γ avaldub kujul

$$s_\Gamma = \int\limits_\Gamma ds. \qquad (3.12.1)$$

Näide 1. Leiame parameetriliste võrranditega

$$x = t,\ y = \frac{2\sqrt{2t^3}}{3},\ z = \frac{t^2}{2} \quad (0 \le t \le 1)$$

esitatud joone Γ pikkuse.

Veenduge, et antud joon Γ on sile. Valemite (3.12.1) ja (3.9.8) abil saame

$$s_\Gamma = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{2t}\right)^2 + (t)^2} dt =$$
$$= \int_0^1 (1+t)\, dt = \frac{3}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Lause 2. Kui sileda joone Γ joontihedus $\rho(x,y,z)$ on pidev funktsioon, siis selle joone mass m_Γ avaldub kujul

$$m_\Gamma = \int_\Gamma \rho(x,y,z)\, ds. \tag{3.12.2}$$

Näide 2. Leiame parameetriliste võrranditega

$$x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t \quad \left(0 \le t \le \sqrt{2}\right)$$

esitatud materiaalse joone Γ, mille joontihedus on

$$\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

massi m_Γ.

Veenduge, et antud joon Γ on sile. Valemite (3.12.2) ja (3.9.8) abil saame

$$m_\Gamma = \int_0^{\sqrt{2}} \left(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t + t^2\right) \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2} dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} 2t^2\sqrt{2+t^2} dt =$$
$$= \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{2}\mathrm{sh}\, u \ \longleftrightarrow \ u = \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}t}{2} + \sqrt{\dfrac{t^2}{2} + 1}\right) \\ \sqrt{2+t^2} = \sqrt{2}\mathrm{ch}\, u,\ dt = \sqrt{2}\mathrm{ch}\, u\, du \\ t = 0 \ \longleftrightarrow \ u = 0,\ t = \sqrt{2} \ \longleftrightarrow \ u = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \left(4\,\mathrm{sh}^2 u\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{ch}\,u\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{ch}\,u\right) du = \int\limits_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} 8\,\mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{ch}^2 u\,du =$$

$$= \int\limits_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} (\mathrm{ch}\,4u - 1)\,du = \left(\frac{\mathrm{sh}\,4u}{4} - u\right)\Bigg|_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} - e^{-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\right] - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^4 - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-4}\right] - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 3.361\,27. \quad \diamondsuit$$

Lause 3. Kui materiaalse sileda joone Γ joontihedus $\gamma(x,y,z)$ on pidev funktsioon, siis joone Γ massikeskme (x_c, y_c, z_c) koordinaadid avalduvad kujul

$$x_c = \frac{1}{m_\Gamma}\int\limits_\Gamma x\rho(x,y,z)\,ds, \tag{3.12.3}$$

$$y_c = \frac{1}{m_\Gamma}\int\limits_\Gamma y\rho(x,y,z)\,ds, \tag{3.12.4}$$

$$z_c = \frac{1}{m_\Gamma}\int\limits_\Gamma z\rho(x,y,z)\,ds \tag{3.12.5}$$

ja joone Γ inertsmomendid x-telje, y-telje, z-telje ning nullpunkti suhtes avalduvad kujul

$$I_x = \int\limits_\Gamma \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,ds, \tag{3.12.6}$$

$$I_y = \int\limits_\Gamma \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,ds \tag{3.12.7}$$

ja

$$I_z = \int\limits_\Gamma \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y.z)\,ds. \tag{3.12.8}$$

Joone inertsmoment I_O nullpunkti O suhtes avaldub kujul

$$I_O = \int\limits_\Gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,ds. \tag{3.12.9}$$

Näide 3. Leiame materiaalse sirglõigu

$$x = 1+t,\ y = 2-3t,\ z = 3+4t \quad (0 \le t \le 1),$$

mille joontihedus on $\rho(x,y,z) = xy^2z$, massikeskme koordinaadid ja inertsmomendid x-telje, y-telje, z-telje ning nullpunkti suhtes.

Veenduge, et antud joon Γ on sile ja ρ on pidev funktsioon. Valemite (3.12.2–3.12.9) ja (3.9.8) abil saame

$$m_\Gamma = \int_0^1 (1+t)(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}dt = \frac{317\sqrt{26}}{60} \approx 26.939\,8,$$

$$x_c = \frac{1}{26.939\,8}\int_0^1 (1+t)^2(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}dt \approx 1.394\,32,$$

$$y_c = \frac{1}{26.939\,8}\int_0^1 (1+t)(2-3t)^3(3+4t)\sqrt{26}dt \approx 0.817\,035,$$

$$z_c \approx \frac{1}{26.939\,8}\int_0^1 (1+t)(2-3t)^2(3+4t)^2\sqrt{26}dt \approx 4.577\,29,$$

$$I_x = \int_0^1 \left((2-3t)^2+(3+4t)^2\right)(1+t)(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{26}dt \approx 661.622,$$

$$I_y = \int_0^1 \left((1+t)^2+(3+4t)^2\right)(1+t)(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{26}dt \approx 670.667,$$

$$I_z = \int_0^1 \left((1+t)^2+(2-3t)^2\right)(1+t)(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{26}dt \approx 102.041,$$

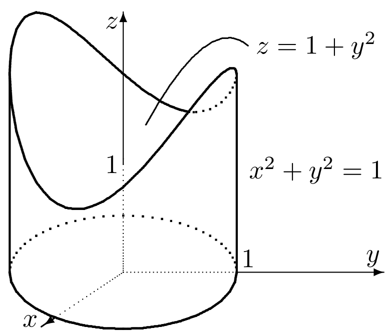
$$I_O = \int_0^1 \left((1+t)^2+(2-3t)^2+(3+4t)^2\right)(1+t)(2-3t)^2(3+4t)\sqrt{26}dt \approx$$
$$\approx 717.165. \qquad \diamondsuit$$

Lause 4. Silindrilise pinna, mille moodustaja on paralleelne z-teljega ja mille juhtjooneks xy-tasandil on sile joon γ, selle osa, mis paikneb xy-tasandi ning antud pinna $z = f(x,y) \geq 0$ $(f(x,y) \in C(\gamma))$ vahel, pindala S avaldub valemiga

$$S = \int_\gamma f(x,y)ds. \tag{3.12.10}$$

Näide 4. Leiame silindrilise pinna $x^2 + y^2 = 1$ osa, mis paikneb xy-tasandi ja pinna $z = 1 + y^2$ vahel, pindala.

Teeme joonise



Veenduge, et selle silindrilise pinna juhtjoon xy-tasandil (ühikring) γ on sile ja $1 + y^2$ on pidev joone γ punktides. Joone γ parameetrilised võrrandid on

$$x = \cos t,\ y = \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)\,.$$

Valemite (3.12.10) ja (3.9.8) abil saame

$$S = \int_0^{2\pi} \left(1 + \sin^2 t\right) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right) dt = 3\pi. \quad \diamondsuit$$

Lause 5. Kui materiaalne punkt liigub piki joont BC punktist B punkti C sellele materiaalsele punktile mõjuvas jõuväljas

$$\mathbf{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)),$$

siis tehtud töö A avaldub kujul

$$A = \int_{AB} \mathbf{F} d\mathbf{r}, \tag{3.12.11}$$

kusjuures juhul kui $\mathbf{F}d\mathbf{r}$ on funktsiooni $f(x,y,z)$ täisdiferentsiaal, siis

$$A = f(C) - f(B). \tag{3.12.12}$$

Näide 5. Materiaalne punkt viiakse piki joont

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = t \quad (0 \le t \le \pi/2)$$

punktist $B(a;0;0)$ punkti $C(0;b;\pi/2)$ sellele materiaalsele punktile mõjuvas jõuväljas $\mathbf{F} = (x+y, z, z-x)$. Leiame tehtud töö.

Valemite (3.12.11) ja (3.10.6) abil saame

$$A = \int_0^{\pi/2} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + t(b\cos t) + (t - a\cos t)]\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)\, d(\cos t) - \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\, dt + b\int_0^{\pi/2} t\cos t\, dt +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} (t - a\cos t)\, dt = -\frac{a^2}{2} - \frac{ab\pi}{4} + b\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) + \frac{1}{8}\pi^2 - a =$$

$$= \frac{\pi b}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} - \frac{\pi ab}{4} - b - a. \qquad \diamondsuit$$

Lause 6. Kui $Y_x - X_y \equiv 1\ \ ((x,y) \in D)$ ja piirkonna D rajajoon γ on sile, siis piirkonna D pindala S_D on leitav valemiga

$$S_D = \oint_\gamma X dx + Y dy. \tag{3.12.13}$$

Tõestus. Rakenda Greeni valemit. $\square$

Järeldus 1. Kui valida $Y = x \wedge X = 0$ või $X = -y \wedge Y = 0$ või $Y = \frac{x}{2} \wedge X = -\frac{y}{2}$, siis valemi (3.12.13) erijuhtudena saame

$$S_D = \oint_\gamma x dy, \tag{3.12.14}$$

$$S_D = -\oint_\gamma y dx \tag{3.12.15}$$

ja

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_\gamma x dy - y dx. \tag{3.12.16}$$

Näide 6. Leiame valemi (3.12.16) abil ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

poolt hõlmatava osa pindala.

Selle ellipsi parameetrilised võrrandid on

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Valemite (3.12.16) ja (3.10.6) abil leiame

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,dt =$$

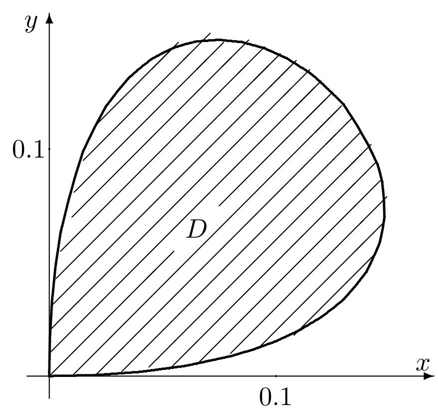
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \pi ab. \quad \diamondsuit$$

Näide 7. Leiame joone $(x+y)^3 = xy$ poolt määratud lõpliku piirkonna pindala.

Parametriseerime joone, võttes $y = tx$. Saame

$$(x+tx)^3 = tx^2 \ \Rightarrow\ x = \frac{t}{(1+t)^3},\ y = \frac{t^2}{(1+t)^3},$$

kusjuures $t \in [0; +\infty)$ korral saame piirkonna D. Skitseerime D :



Valemite (3.12.16) ja (3.10.6) abil saame

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{(1+t)^3}\cdot\frac{2t-t^2}{(1+t)^4} - \frac{t^2}{(1+t)^3}\cdot\frac{1-2t}{(1+t)^4} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t)^6}dt = \left[\begin{array}{c} 1+t=u,\ t=u-1,\ dt=du \\ t=0 \longleftrightarrow u=1,\ t=+\infty \longleftrightarrow u=+\infty \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{(u-1)^2}{u^6}du = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{2}{4u^4} - \frac{1}{5u^5} \right)\Bigg|_1^A = \frac{1}{60}. \quad \diamondsuit$$

Tõestage Järelduse 3.11.3 kaasabil järgmine väide.

Lause 7. Kui funktsioonid X, Y ja nende osatuletised X_y ja Y_x on pidevad xy-tasandi sidusas tükiti sileda rajajoonega γ piirkonnas D, kusjuures $Y_x = X_y$ $((x,y) \in D)$, ning $A(a,b)$ ja $P(x,y)$ on piirkonna D sisepunktid, siis $Xdx+Ydy$ on kahe muutuja funktsiooni

$$f(x,y) = \int\limits_{AP} X dx + Y dy \tag{3.12.17}$$

täisdiferentsiaal, kus AP on mingi tükiti sile joon piirkonnas D.

Näide 8. Leiame kahe muutuja funktsiooni $f(x,y)$, kui on teada selle funktsiooni täisdiferentsiaal

$$df = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} \quad (x > 0).$$

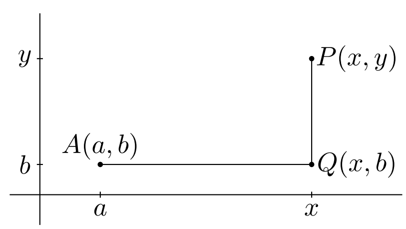
Kontrollime, kas antud avaldis ikka on täisdiferentsiaal:

$$X = \frac{x}{x^2+y^2} \ \wedge\ Y = \frac{y}{x^2+y^2} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ X_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ \wedge\ Y_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ \Rightarrow\ X_y = Y_x.$$

Lause 7 põhjal saame

$$f(x,y) = \int\limits_{AP} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}.$$

Kuna selle integraali väärtus ei sõltu tükiti sileda joone AP valikust, siis integreerime piki murdjoont AQP, mille lõigud AQ ja QP on paralleelsed koordinaattelgedega



Seega

$$f(x,y) = \int\limits_{AQ} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \int\limits_{QP} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} \overset{(3.10.6)}{=}$$
$$= \begin{bmatrix} AQ:\ \underset{\overrightarrow{a \le t \le x}}{x = t,\ y = b} & QP:\ \underset{\overrightarrow{b \le u \le y}}{y = u,\ x = x} \\ \dfrac{dx}{dt} = 1,\ \dfrac{dy}{dt} = 0 & \dfrac{dx}{du} = 0,\ \dfrac{dy}{du} = 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \int_a^x \frac{t}{t^2+b^2} dt + \int_b^y \frac{u}{x^2+u^2} du = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln\sqrt{a^2+b^2}. \quad \diamondsuit$$

3.13 Pindindintegraalid

Olgu antud *tükiti!sile pind* Σ, s.o lõplikust arvust siledatest tükkidest (vt Definitsioone 3.4.1 ja 3.4.2) koosnev pind. Olgu pinna Σ punktides määratud funktsioon $f(x, y, z)$. Jaotame pinna Σ sel pinnal asetsevate tükiti siledate joontega n osapinnaks Σ_i. Olgu osapinna Σ_i pindala $\Delta\sigma_i$ ja δ_i suurim kaugus osapinna Σ_i kahe punkti vahel. Igal osapinnal Σ_i valime punkti P_i. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta\sigma_i.$$

Märgime, et $\max \delta_i \to 0 \;\Rightarrow\; n \to \infty$.

Definitsioon 1. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \Delta\sigma_i,$$

mis ei sõltu pinna Σ osapindadeks Σ_i jaotamise viisist ja punkti P_i valikust osapinnal Σ_i, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni f *esimest liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks pindala järgi* üle pinna Σ ja tähistatakse

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma \tag{3.13.1}$$

või $\iint_\Sigma f(P) d\sigma$.

Paneme kirja mõningad esimest liiki pindintegraali omadused, mille tõestamise jätame üliõpilasele. Vajaduse korral leiate nende väidete tõestused G. Kangro õpikust [9].

1. Kui $f(P) = 1 \;\; (P \in \Sigma)$, siis

$$\iint\limits_{\Sigma} 1\, d\sigma = S_\Sigma,$$

kus S_Σ on pinna Σ pindala.

2. Pindintegraal (3.13.1) ei sõltu pinna Σ poolest.

3. Pindintegraal (3.13.1) on aditiivne, st kui eksisteerib $\iint_\Sigma f(P) d\sigma$ ja pind Σ koosneb kahest osast Σ_I ning Σ_{II}, siis

$$\iint\limits_{\Sigma} f(P)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_I} f(P)\, d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_{II}} f(P)\, d\sigma.$$

4. Pindintegraal (3.13.1) on lineaarne, st kui eksisteerivad integraalid

$$\iint\limits_{\Sigma} f_1(P)\, d\sigma, \; \iint\limits_{\Sigma} f_2(P)\, d\sigma$$

ja $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, siis eksisteerib ka integraal

$$\iint\limits_{\Sigma} (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)\,)\, d\sigma,$$

kusjuures

$$\iint\limits_{\Sigma} (c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)\,)\, d\sigma = c_1 \iint\limits_{\Sigma} f_1(P) d\sigma + c_2 \iint\limits_{\Sigma} f_2(P) d\sigma.$$

5. Kui eksisteerivad integraalid $\iint_{\Sigma} f(P)\, d\sigma$ ja $\iint_{\Sigma} g(P)\, d\sigma$ ning

$$f(P) \ \leq\ g(P) \quad (P \in \Sigma)\,,$$

siis

$$\iint\limits_{\Sigma} f(P)\, d\sigma \leq \iint\limits_{\Sigma} g(P)\, d\sigma.$$

Saab tõestada järgmise väite.

Lause 1. Kui sile pind Σ on esitatud ilmutatud võrrandiga $z = f(x, y)$ ja $pr_{xy}\Sigma$ on pinna Σ projektsioon xy-tasandil ning funktsioon f on pidev pinna Σ punktides, siis

$$\iint\limits_{\Sigma} f(P)\, d\sigma = \iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} f(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy. \tag{3.13.2}$$

Näide 1. Arvutame pindintegraali $\iint_{\Sigma} \left(x + z^2\right)\, d\sigma$, kui Σ on koonuse

$$z^2 = x^2 + y^2$$

osa, mis on ülalpool tasandit $z = 0$ ja allpool tasandit $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$. Leiame pinna Σ projektsiooni $pr_{xy}\Sigma$. Selleks elimineerime võrrandeist

$$z^2 = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

muutuja z. Saame

$$\left(\sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)\right)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(x + 2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - 2x + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{2} + y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - 2)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Et

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \wedge z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

siis valemi (3.13.2) abil saame

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(x+z^2\right)\, d\sigma = \iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} (x+x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} (x+x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Kasutame muutujate vahetust } x = 2+2\sqrt{2}\rho\cos\varphi, \\ y = 2\rho\sin\varphi, \quad |J| = 4\sqrt{2}\rho \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4\sqrt{2}\rho(2+2\sqrt{2}\rho\cos\varphi + \left(2+2\sqrt{2}\rho\cos\varphi\right)^2 + (2\rho\sin\varphi)^2)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\sqrt{2}\cos^2\varphi + 16\sqrt{2} + \frac{80}{3}\cos\varphi\right) d\varphi = 36\pi\sqrt{2}. \qquad \diamondsuit$$

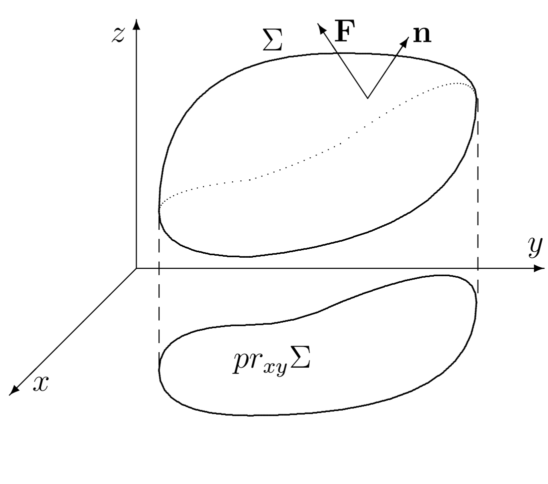
Definitsioon 2. Pinda nimetatakse *kahepoolseks pinnaks*, kui pinna normaali liikumisel pinnal piki iga kinnist pinnal asetsevat joont, millel ei ole ühiseid punkte pinna rajajoonega, normaali suund lähtepunkti tagasijõudmisel jääb endiseks. Pinda, mis ei ole kahepoolne, nimetatakse *ühepoolseks pinnaks.*

Järgnevas eeldatakse vaikimisi, et tegemist on kahepoolse pinnaga.

Definitsioon 3. Integraali

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\, d\sigma \tag{3.13.3}$$

nimetatakse vektorvälja $\mathbf{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$ *vooks* läbi normaalvektoriga $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ määratud pinna Σ pinnapoole



Vektorvälja **F** voogu (3.13.3) nimetatakse ka *teist liiki pindintegraaliks* ehk *pindintegraaliks projektsioonide järgi.* Integraal (3.13.3) on esitatav kujul

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{Fn}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (X, Y, Z) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ d\sigma =$$
$$= \iint_{\Sigma} (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\ d\sigma.$$

Et

$$\cos\alpha\, d\sigma = dy\, dz,\ \cos\beta\, d\sigma = dx\, dz,\ \cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy,$$

siis saame integraalile (3.13.3) kuju

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{Fn}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} Xdydz + Ydxdz + Zdxdy, \tag{3.13.4}$$

mis õigustab nimetust pindintegraal projektsioonide järgi. Et integreeritav funktsioon $\mathbf{Fn}$ sõltub kahepoolse pinna korral sellest, kummale poole pinda on pinna normaalvektor $\mathbf{n}$ suunatud, siis teist liiki pindintegraal sõltub pinna poolest, mööda mida toimub integreerimine. Selleks et integraali (3.13.4) arvutada, tuleb seose (3.13.4) paremal poolel iga liidetavat integreerida eraldi. Vaatleme integraali $\iint_{\Sigma} Z\, dx\, dy$ arvutamist, kui pind Σ on antud võrrandiga

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in pr_{xy}\Sigma)\,.$$

Kehtib järgmine väide

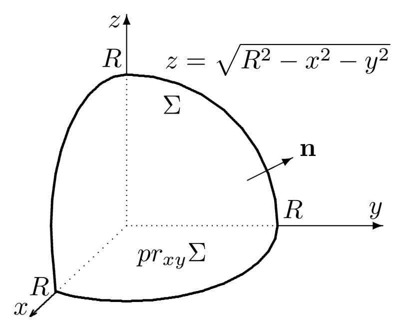
$$\iint_{\Sigma} Z\, dx\, dy = \pm \iint_{pr_{xy}\Sigma} Z\,(x, y, z(x, y))dx\, dy, \tag{3.13.5}$$

kus märgiks valitakse plussmärk, kui kogu pinna Σ piires normaalvektor $\mathbf{n}$ moodustab z-telje positiivse suunaga teravnurga ja miinusmärk, kui kogu pinna Σ piires normaalvektor $\mathbf{n}$ moodustab z-telje positiivse suunaga nürinurga. Vajaduse korral jaotatakse pind Σ osadeks ja kasutatakse pindintegraali aditiivsust.

Näide 2. Arvutame pindintegraali

$$\iint_{\Sigma} z^2\, dx\, dy,$$

kus Σ on pinna $x^2+y^2+z^2 = R^2$ esimeses kaheksandikus paikneva osa pinnapool, mille normaalvektor moodustab z-telje positiivse suunaga teravnurga



Et $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, siis valemi (3.13.5) abil saame

$$\iint_{\Sigma} z^2\,dx\,dy = +\iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho\left(R^2 - \rho^2\right) d\rho = \frac{\pi R^4}{8}. \qquad \diamondsuit$$

3.14 Gauss-Ostrogradski valem. Stokesi valem

Selles jaotises esitame kaks väidet tõestuseta. Vajaduse korral leiate tõestuse õpikust [9] .

Lause 1 (*Gauss-Ostrogradski valem*). Kui piirkonna Ω rajapind Σ on tükiti sile ja funktsioonid X, Y, Z ning nende osatuletised X_x, Y_y, Z_z on pidevad piirkonnas Ω, siis

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{Fn}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV, \tag{3.14.1}$$

kus pindintegraal on võetud üle Σ välise pinnapoole.

Näide 1. Leiame vektori $\mathbf{F} = (xy, z + x, y - z)$ voo läbi tasanditega $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ määratud ühikkuubi Σ välise pinnapoole.

Kasutame Definitsiooni 3.13.3 ja Gauss-Ostrogradski valemit (3.14.1):

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint\limits_{\Omega} \Big((xy)_x + (z+x)_y + (y-z)_z\Big)\,dV =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (y+0-1)\,dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (y-1)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (y-1)\,dy = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}. \quad \diamondsuit$$

Lause 2 (*Stokesi valem*). Kui kahepoolse tükiti sileda pinna Σ rajajoon Γ on tükiti sile ja vektori $\mathbf{F}$ komponendid X, Y, Z ning nende osatuletised X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y on pidevad pinna Σ punktides, siis

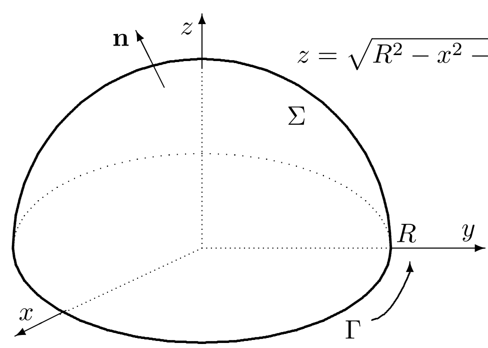
$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\mathbf{F})\ \mathbf{n}\,d\sigma, \tag{3.14.2}$$

kus joonintegraal on võetud positiivses suunas (pinna Σ külje suhtes, piki mida integreeritakse).

Näide 4. Arvutada Stokesi valemi abil joonintegraal

$$\oint_{\Gamma} x^2y^3dx + y^2dy + zdz,$$

kus Γ on püstsilindri $x^2+y^2 = R^2$ ja tasandi $z = 0$ lõikejoon ning Σ on poolsfäär $z = \sqrt{R^2 - x^2 + y^2}$. Integreerimine toimub üle poolsfääri pinnapoole, mille



normaalvektor moodustab z-telje positiivse suunaga teravnurga.

Stokesi valemi abil saame

$$\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3dx + y^2dy + zdz = \iint\limits_{\Sigma} \left(\nabla \times\ \left(x^2y^3, y^2, z\right)\right)\,\mathbf{n}\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(0,0,-3x^2y^2\right)(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\ d\sigma =$$

$$= -3\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2\cos\gamma d\sigma = -3\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2 dxdy =$$

$$= -3\iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} x^2y^2 dxdy = -3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\rho =$$

$$= -\frac{3}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,\frac{R^6}{6}d\varphi = -\frac{\pi R^6}{8}. \qquad \diamondsuit$$

3.15 Pindintegraalide rakendused

Järgmised väited jäävad lugeja tõestada.

Lause 1. Sileda pinna Σ pindala S_Σ on leitav valemiga

$$S_\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma. \tag{3.15.1}$$

Lause 2. Kui sileda materiaalse pinna (sileda kooriku) Σ pindtihedus $\rho(x,y,z)$ on pidev funktsioon pinna punktides, siis pinna Σ mass m_Σ on leitav valemiga

$$m_\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)d\sigma \tag{3.15.2}$$

ja pinna Σ massikeskme (x_c,y_c,z_c) koordinaadid on leitavad valemitega

$$x_c = \frac{1}{m_\Sigma}\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)d\sigma,\ y_c = \frac{1}{m_\Sigma}\iint\limits_{\Sigma} y\rho(x,y,z)d\sigma, \tag{3.15.3}$$

$$z_c = \frac{1}{m_\Sigma}\iint\limits_{\Sigma} z\rho(x,y,z)d\sigma \tag{3.15.4}$$

ning pinna Σ inertsmomendid x-telje, y-telje, z-telje ja nullpunkti O suhtes on leitavad valemitega

$$I_x = \iint_\Sigma \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma,\ I_y = \iint_\Sigma \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma, \tag{3.15.5}$$

$$I_z = \iint_\Sigma \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma,\ I_O = \iint_\Sigma \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma. \tag{3.15.6}$$

Näide 1. Leiame poolsfääri $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ selle osa, mis on püstsilindri $x^2 + y^2 = y$ sees, pindala.

Tehke joonis. Valemite (3.15.1) ja (3.13.2) rakendamisel saame

$$S_\Sigma = \iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$$
$$= \left[\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right] =$$

$$= \iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy =$$
$$= \iint\limits_{pr_{xy}\Sigma} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \left[x^2 + y^2 = y \ \Leftrightarrow\ \rho = \sin\varphi \ (0 \le \varphi \le \pi)\right] =$$
$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = -\frac{1}{2} \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi} \left(1 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1 - \rho^2\right) =$$
$$= \int\limits_0^\pi \sqrt{1 - \rho^2}\Bigg|_{\sin\varphi}^{0} d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(1 - \sqrt{\cos^2\varphi}\right) d\varphi = \int\limits_0^\pi (1 - |\cos\varphi|)\, d\varphi =$$
$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \pi - 2. \qquad \diamondsuit$$

Näide 2. Leiame koonuse $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ osa, mis on allpool tasandit $z = 1$, massi, massikeskme koordinaadid ja inertsmomendid x-telje, y-telje, z-telje ning nullpunkti O suhtes, kui koonuse pindtihedus on $\rho(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$.

Määrame koonuse selle osa ristprojektsiooni xy-tasandile

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge\ z = 1 \ \Rightarrow\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \wedge\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2},$$

siis valemite (3.15.2–3.15.6) ja (3.13.2) abil saame

$$
\begin{aligned}
m_\Sigma &= \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \sqrt{2}\iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(2x^2+3y^2\right)dxdy = \\
&= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\rho = \frac{5\pi\sqrt{2}}{4}, \\
x_c &= \frac{4}{5\pi\sqrt{2}}\iint_{pr_{xy}\Sigma} x\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \frac{4}{5\pi\sqrt{2}}\iint_{pr_{xy}\Sigma} x\left(2x^2+3y^2\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \frac{4}{5\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4\cos\varphi\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\rho = \\
&= \frac{4}{5\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = 0, \\
y_c &= \frac{4}{5\pi\sqrt{2}}\iint_{pr_{xy}\Sigma} y\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \frac{4}{5\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = 0, \\
z_c &= \frac{4}{5\pi\sqrt{2}}\iint_{pr_{xy}\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \frac{4}{5\pi\sqrt{2}}\iint_{pr_{xy}\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\left(2x^2+3y^2\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \frac{4}{5\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}, \\
I_x &= \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(x^2+2y^2\right)\left(2x^2+3y^2\right)\sqrt{2}dxdy = \\
&= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi\right)\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\varphi \int\limits_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{31\pi\sqrt{2}}{24},
\end{aligned}
$$

$$I_y = \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(x^2 + \left(x^2+y^2\right)\right)\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(2x^2+y^2\right)\left(2x^2+3y^2\right)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^1\rho^5 d\rho = \frac{29\pi\sqrt{2}}{24},$$

$$I_z = \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^1\rho^5 d\rho = \frac{5\pi\sqrt{2}}{6},$$

$$I_O = \iint_{pr_{xy}\Sigma} \left(x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\left(x^2+2y^2+\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^1\rho^5 d\rho = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}. \qquad \diamondsuit$$

3.16 Ülesanded

1. Hinnake integraali $\iint_D (2x+3y+4)dxdy$, kui D: $4x^2+y^2 \le 9$.
V: $-17.1\,\pi \ \le I \le \ 53.1\,\pi$.

Ülesannetes 2–5 arvutage kahekordne integraal üle piirkonna D

2. $\iint_D \dfrac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, $D: \ 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1$. V: $\ln\dfrac{4}{3}$.

3. $\iint_D \dfrac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $D: \ 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1$. V: $\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

4. $\iint_D x\sin(x+y)dxdy$, $D: \ 0 \le x \le \pi \wedge 0 \le y \le \pi$. V: -4.

5. $\iint_D x^2 y\sin(xy^2)dxdy$, $D: \ 0 \le x \le \pi/2 \wedge 0 \le y \le 3$. V: $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{1}{162}$.

Ülesannetes 6–7 määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x,y)dxdy$ antud D korral:

6. D on rööpkülik külgedega $y=-x$, $y = 9-x$, $y = (x-3)/2$, $y = (x+6)/2$.
V: $\int_{-2}^1 dx\int_{-x}^{(x+6)/2} f(x,y)dy + \int_1^4 dx\int_{(x-3)/2}^{(x+6)/2} f(x,y)dy + \int_4^7 dx\int_{(x-3)/2}^{9-x} f(x,y)dy$.

7. $D: \ y^2 \le x, \ \ y \ge 2-x, \ \ y \ge x-12$.
V: $\int_0^4 dx\int_{2-x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_4^9 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_9^{16} dx\int_{x-12}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

Ülesannetes 8–13 muutke integreerimise järjekorda:

8. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$. V: $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

9. $\int_0^r dy\int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$. V: $\int_0^r dx\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy$.

10. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx$. V: $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} f(x,y)dy$.

11. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$. V: $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)dy$.

12. $\int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

V: $\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$.

13. $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

V: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy +$
$+ \int_3^4 dx \int_0^{\sqrt{6x-x^2-8}} f(x,y)dy$.

14. Arvutage $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, kui D on ringi $x^2+y^2 \leq 4$ teises veerandis paiknev osa. V: $4\pi/3$.

15. Leidke funktsiooni $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ keskmine väärtus ringi $x^2+y^2 \leq R^2$ esimeses veerandis. V: $2R/3$.

Ülesannetes 16–18 arvutage kolmekordne integraal:

16. $\int_0^c dx \int_x^{2x} dy \int_{x-y}^{x+y} 2x^2y^2z dz$. V: $\dfrac{15}{8}c^8$.

17. $\iiint_\Omega \dfrac{dxdydz}{(4+x+y+z)^3}$, kus Ω on määratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$. V: $\ln\sqrt{2} - 5/16$.

18. $\iiint_\Omega y\sin(z+x)dxdydz$, kus $\Omega-$ pindadega $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$ ja $x+z=\pi/2$ piiratud piirkond. V: $\pi/4 - 1/2$.

Ülesannetes 19–22 määrake rajad kahekordses integraalis $\iint_D f(x,y)dxdy$ antud D korral, kasutades polaarkoordinaate:

19. $D-$ piirkond, mis on määratud ringjoontega $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ ja sirgetega $y=x$ ning $y=x/2$. V: $\int_{\arctan 0.5}^{\pi/4} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

20. D on kahe ringi $x^2+y^2 \leq ax$ $(a>0)$ ja $x^2+y^2 \leq by$ $(b>0)$ ühisosa.

V: $\int_0^{\arctan(a/b)} d\varphi \int_0^{b\sin\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho +$
$+ \int_{\arctan(a/b)}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

21. D on Bernoulli lemniskaadi $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ poolt piiratud piirkond.

V: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho +$
$+ \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

22. D on võrratustega $x \geq 0$, $y \leq 0$ ja $(x^2+y^2)^3 \leq 4a^2x^2y^2$ $(a>0)$ määratud piirkond. V: $\int_\pi^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{-a\sin 2\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

Ülesannetes 23–25 teisendada integraalid polaarkoordinaatidesse:

23. $\int_{R/2}^{2R} dx \int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}} f(x,y)dx$. V: $\int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{R/(2\cos\varphi)}^{2R\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

24. $\int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{0} f(x,y)dy$. V: $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^R \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho$.

25. $\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}} dy \int_0^{Ry} f(\frac{x}{y})dx + \int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(\frac{x}{y})dx$.

V: $\dfrac{R^2}{2} \int_{\arctan(1/R)}^{\pi/2} f(\cot\varphi)\, d\varphi$.

Ülesannetes 26–28 arvutage integraalid, teisendades polaarkoordinaatidesse:

26. $\int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$. V: $\dfrac{\pi}{4}\left[\left(1+R^2\right)\ln\left(1+R^2\right)-R^2\right]$.

27. $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$, kus D on ring $x^2+y^2 \leq Ry$. V: $\dfrac{R^3}{3}\left[\pi-\dfrac{4}{3}\right]$.

28. $\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$, kus D on osa rõngast : $16 \geq x^2+y^2 \geq 4 \wedge$
$\wedge\, x\sqrt{3} \geq y \geq x/\sqrt{3}$. V: $\pi^2/4$.

29. Arvutage integraal $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$, kus D on joonega $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{5}\right)^4 = \dfrac{xy}{\sqrt{10}}$ piiratud piirkonna osa, mis paikneb esimeses veerandis. V: $\sqrt[4]{1000}/6$.

Ülesannetes 30–32 määrake rajad kolmekordses integraalis
$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ antud Ω korral, kasutades silinderkoordinaate või sfäärkoordinaate:

30. Ω on piirkond, mis on piiratud silindriga $x^2+y^2=2y$, tasandiga $z=0$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$.
V: $\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$.

31. Ω on kera $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ osa, mis on silindri
$(x^2+y^2)^2 = R^2(x^2-y^2)$ $(y \geq 0)$ sees.
V: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{R\sqrt{-\cos 2\varphi}} \rho d\rho \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$.

32. Ω on kahe kera $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ja $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$ ühisosa.
V: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{3}/2} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$.

Ülesannetes 33–34 arvutage kolmekordne integraal, kasutades silindrilisi koordinaate või sfäärilisi koordinaate:

33. $\int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} (x^2+y^2)dx$. V: $\dfrac{4}{15}\pi R^5$.

34. $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$. V: 16π.

Ülesannetes 35–51 leidke kordse integraali abil keha ruumala, kui keha on piiratud pindadega:

35. $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$. V: $8/3$.
36. $x=\sqrt{y}$, $y=2\sqrt{y}$, $z=0$, $y+z=4$. V: $128/15$.
37. $z=4-y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y=6$ $(y \geq 0)$. V: 10.
38. $z=16-x^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $3x+2y=12$ $(x \geq 0)$. V: 160.
39. $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$. V: $16R^3/3$.
40. $x^2+y^2=R^2$, $z=y^3/R^2$, $z=0$ $(y \geq 0)$. V: $4R^3/15$.
41. $z=xy$, $x=\sqrt{y}$, $x+y=2$, $y=0$, $z=0$. V: $3/8$.
42. $z^2=xy$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $z=0$ $(z \geq 0)$. V: $1/45$.
43. $x^2+y^2=R^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z+y=2R$. V: $4\pi R^3/3$.
44. $x^2+y^2=R^2$, $Rz=2R^2-x^2-y^2$, $z=0$. V: $3\pi R^3/2$.
45. $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=Ry$. V: $4R^3(\pi/2-2/3)/3$.
46. $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4y$, $z=2x+y$, $z=0$. V: $6(\pi-2)$.

47. $z^2 = xy,\ (x^2+y^2)^2 = 2xy\ \ (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0)$. V: $\pi\sqrt{2}/24$.
48. $z = 9 - y^2,\ z = y^2 + 1,\ x = -1,\ x = 2$. V: 64.
49. $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x^2 + y^2 = 4z$. V: $2\pi\left(5\sqrt{5} - 4\right)/3$.
50. $x^2+y^2+z^2 = 4Rz - 3R^2,\ z^2 = 4(x^2+y^2)$ (kera osa, mis on koonuse sees).
V: $92\pi R^3/75$.
51. $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z^2 = x^2 + y^2,\ x = 0,\ y = 0,$
$z = 0\ \ (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0)$. V: $7\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)/12$.
52. Leidke joonega $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ $(a > 0)$ piiratud kujundi pindala.
V: $5\pi a^2/8$.

Ülesannetes 53–56 leidke antud pinnatüki pindala:
53. Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mis ülalpool tasandit $z = 0$ ja allpool tasandit $z = \sqrt{3}\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$. V: $24\sqrt{2}\pi$.
54. Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mis on välja lõigatud silindriga $z^2 = 2px$.
V: $2\sqrt{2}\pi p^2$.
55. Pinna $z = xy$ osa, mis on välja lõigatud silindriga $x^2 + y^2 = R^2$.
V: $2\pi\left[\left(1 + R^2\right)^{3/2} - 1\right]/3$.
56. Pinna $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ osa, mis on välja lõigatud silindriga
$x^2 + y^2 = Ry$. V: $2R^2\left(\pi - 2\right)$.
57. Leidke ühtlase pindtihedusega kesknurgaga α ja raadiusega R ringi segmendi raskuskeskme koordinaadid. V: raskuskese asetseb nurga α poolitajal kaugusel $\left(4R\sin\left(\alpha/2\right)\right)/\left(3\alpha\right)$ tsentrist.
58. Leidke (ühtlase pindtihedusega ρ) ringi, raadiusega R, inertsmoment puutuja suhtes. V: $5\pi R^4\rho/4$.
59. Leidke (ühtlase pindtihedusega ρ) ringi, raadiusega R, inertsmoment rajajoone punkti suhtes. V: $3\pi R^4\rho/2$.
60. Leidke pindadega $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 4,\ x + y + z = 8$ piiratud, tihedusega $\rho\left(x, y, z\right) = x + y + z$, keha
massikeskme koordinaadid. V: $\left(471/344; 81/86; 743/344\right)$.
61. Leidke (ühtlase tihedusega γ) kera, raadiusega R, inertsmoment diameetri suhtes. V: $8\pi\gamma R^5/15$.

Ülesannetes 62–68 arvutage joonintegraal üle antud joone Γ :
62. $\int_\Gamma \dfrac{ds}{x + y}$, kus Γ on sirge $y = 2 - \dfrac{x}{3}$ osa punktide $A(0;2)$ ja $B(3;1)$ vahel.
V: $\sqrt{10}\left(\ln 2\right)/2$.
63. $\int_\Gamma xyds$, kus Γ on ristkülik tippudega $A(0;0),\ B(4;0),\ C(5;2)$ ja $D(2;2)$.
V: $\left(14\sqrt{5} - 71\right)/3$.
64. $\int_\Gamma (x^2 + y^2)^n ds$, kus Γ on ringjoon $x = a\cos t,\ y = a\sin t$. V: $2\pi a^{2n+1}$.
65. $\int_\Gamma \sqrt{2y}ds$, kus Γ on tsükloidi $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ esimene kaar.
V: $4\pi a\sqrt{a}$.
66. $\int_\Gamma (y - x)ds$, kus Γ on ringjoon $x^2 + y^2 = 2Ry$. V: $2\pi R^2$.
67. $\int_\Gamma x\sqrt{x^2 - y^2}ds$, kus Γ on joon $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \geq 0)$.
V: $2a^3\sqrt{2}/3$.

68. $\int_\Gamma (3z-\sqrt{x^2+y^2})ds$, kus Γ on $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$ $(0\le t\le 2\pi)$. V: $4\sqrt{2}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{3/2}-1\right]/3$.
69. Leidke punktide $A(0;0;0)$ ja $B(3;3;2)$ vahel paikneva kaare $x=3t$, $y=3t^2$ ja $z=2t^3$ pikkus. V: 5.
70. Leidke joone $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ $(0<t<+\infty)$ pikkus. V: $\sqrt{3}$.
71. Leidke materiaalse joone $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$, joontihedusega $\rho(x,y)=|xy|$, mass. V: $4ab\left(a^2+ab+b^2\right)/\left(3\left(a+b\right)\right)$.
72. Leidke joone $x=at,\ y=at^2/2,\ \ z=at^3/3$ $(0\le t\le 1)$ mass, kui joontihedus $\rho\left(x,y,z\right)=2\sqrt{2y/a}+12z/a$. V: $2a\left(3\sqrt{3}-1\right)/3$.
73. Leidke ühtlase tihedusega ρ ringjoonekujulise kujundi inertsmoment diameetri suhtes (raadius R). V: $\pi\rho R^3$.
74. Leidke ühtlase tihedusega ρ ringjoonekujulise kujundi inertsmoment ringjoone keskpunkti suhtes (raadius R). V: $2\pi\rho R^3$.
75. Leidke joontihedusega $\rho(x,y)=xy$ ellipsi $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ kaare $(0\le\varphi\le\pi/2)$ inertsmoment diameetri, mis asub y-teljel, suhtes.
V: $a^3b\left(3b^5-5a^2b^3+2a^5\right)/\left(15\left(b^2-a^2\right)^2\right)$.

Ülesannetes 76–84 leidke teist liiki joonintegraal:
76. $\int_\Gamma y^2dx-xy\,dy$, kus Γ on sirge $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ sirglõik punktist $(a;0)$ punkti $(0;b)$. V: $-ab^2/2$.
77. $\int_\Gamma\left(x^2-y^2\right)\left(x\,dx-y\,dy\right)$, kus Γ on joone $y=x^3$ kaar punktide $(0;0)$ ja $(1;1)$ vahel. V: 0.
78. $\int_\Gamma \sin y\,dx+\sin x\,dy$, kus Γ on sirglõik punktide $(0;\pi)$ ja $(\pi;0)$ vahel. V: 0.
79. $\oint_{OmAnO}\arctan\dfrac{y}{x}dy-dx$, kus OmA on parabooli $y=x^2$ kaar ja OnA on sirge $y=x$ lõik. V: $\pi/4-1$.
80. $\int_\Gamma\dfrac{y^3dx-x^3dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, kus Γ on poolringjoon $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(t=0\to t=\pi)$. V: $-3\pi/4$.
81. $\int_\Gamma (2a-y)dx-(a-y)dy$, kus Γ on tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ esimene kaar $(t=0\to t=2\pi)$. V: πa^2.
82. $\int_\Gamma\dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, kus Γ on astroidi $x=R\cos^3 t,\ y=R\sin^3 t$ veerand punktist $(R,0)$ punkti $(0,R)$. V: $3\pi R\sqrt[3]{R}/16$.
83. $\int_\Gamma ydx+xdy+(2x-y+z)dz$, kus Γ on sirglõik punktist $(-1;1;-1)$ punkti $(2;0;3)$. V: 7.
84. $\int_\Gamma yzdx+z\sqrt{R^2-y^2}dy+xydz$, kus Γ on joone $x=R\cos t$, $y=R\sin t,\ z=\dfrac{at}{2\pi}$ osa lõikumisest tasandiga $z=0$ lõikumiseni tasandiga $z=a$. V: 0.

Ülesannetes 85–88 teisendage joonintegraal Greeni valemi abil, kusjuures Γ on kinnine sile joon, mida läbitakse positiivses suunas:
85. $\oint_\Gamma (1-x^3)ydx+x(1+y^3)dy$. V: $\iint_D\left(x^3+y^3\right)dxdy$.
86. $\oint_\Gamma (e^{xy}+2x\cos^2 y)dx+(e^{xy}-x^2\sin y\cos y)dy$. V: $\iint_D (y-x)\,e^{xy}dxdy$.

87. $\oint_\Gamma f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2}$ (f on suvaline diferentseeruv funktsioon). V: 0.
88. $\oint_\Gamma (f(x+y)+f(x-y))\,dx+(f(x+y)-f(x-y))\,dy$ (f on suvaline diferentseeruv funktsioon). V: 0.
89. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_\Gamma e^y dx+e^{-x}dy$, kui Γ on kolmnurga, tippudega $A\,(0;0)$, $B\,(1;0)$ ja $C\,(1;1)$, rajajoon. V: $2-e-1/e$.
90. Arvutage Greeni valemi abil $\oint_\Gamma 2xy\,dx+x^2dy$, kui Γ on ruudu $|x|+|y|=1$ rajajoon. V: 0.
91. Leidke Greeni valemi abil $\oint_\Gamma \arctan\frac{y}{x}dy-\ln\sqrt{x+y}dx$, kui Γ on ringjoon $x^2+y^2=R^2$. V: 0.
92. Näidake Greeni valemi abil, et joonintegraal $\frac{1}{3}\oint_\Gamma x^3dy-y^3dx$ võrdub tükiti sileda joone Γ poolt piiratud ühtlase tihedusega $\rho(x,y)=1$ plaadi inertsmomendiga koordinaatide alguspunkti suhtes.
93. Arvutage $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx+xdy$. V: 8.
94. Arvutage $\int_{(1;1)}^{(2;2)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. V: $\sqrt{2}$.
95. Taastage joonintegraali abil kahe muutuja funktsioon u tema täisdiferentsiaali $du=x^2dx+y^2dy$ põhjal. V: $\left(x^3+y^3\right)/3+C$.
Ülesannetes 96–99 leidke joonintegraali abil kinnise joonega piiratud kujundi pindala:
96. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \ (0\le t\le 2\pi)$. V: $3\pi a^2/8$.
97. $(x+y)^3=xy$. V: 1/60.
98. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$. V: $2a^2$.
99. $x^3+y^3-3xy=0$. V: 3/2.
Ülesannetes 100–105 arvutage pindintegraal üle antud pinna Σ :
100. $\iint_\Sigma (z+2x+4y/3)d\sigma$, kus Σ on tasandi $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ osa, mis on esimeses kaheksandikus. V: $4\sqrt{61}$.
101. $\iint_\Sigma \left(x^2+y^2\right)d\sigma$, kus Σ on koonuse $z=\sqrt{x^2+y^2}$ see osa, mis rahuldab tingimusi $1\le x^2+y^2\le 4$. V: $15\sqrt{2}\pi/2$.
102. $\iint_\Sigma xd\sigma$, kus Σ on sfääri $x^2+y^2+z^2=R^2$ osa, mis on esimeses kaheksandikus. V: $\pi R^3/4$.
103. $\iint_\Sigma \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$, kus Σ on poolsfäär $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. V: πR^3.
104. $\iint_\Sigma (x+y-z)d\sigma$, kus Σ on oktaeedri $|x|+|y|+|z|=1$ tahk, mille korral $x\le 0$, $y\le 0$ ja $z\ge 0$. V: $-\sqrt{3}/2$.
105. $\iint_\Sigma \frac{d\sigma}{(1+x+y+z)^2}$, kus Σ on tetraeedri $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ kogu välispind. V: $\sqrt{3}/8-3/2+3\ln 2$.
106. Leidke pindtihedusega $\rho(x,y,z)=1$ kolmnurkse kooriku $x+y+z=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$ inertsmoment koordinaatide alguspunkti suhtes. V: $\sqrt{3}/4$.
107. Leidke paraboolse kooriku $z=\left(x^2+y^2\right)/2\ \ (0\le z\le 1)$, pindtihedusega $\rho(x,y,z)=z$, mass. V: $\left(2+12\sqrt{3}\right)\pi/15$.

108. Leidke poolsfääri $z = \sqrt{R - x^2 - y^2}$ kujulise kooriku inertsmoment z-telje suhtes, kui pindtihedus $\rho(x, y, z) = 1$. V: $4\pi R^4/3$.

Ülesannetes 109–104 arvutage pindintegraal üle antud pinna Σ :

109. $\iint_\Sigma xdydz + ydxdz + zdxdy$, kus Σ on tasandi $x + y + z = 1$ see osa, mis paikneb esimeses oktandis. Valige pinnapool, millel normaal moodustab koordinaattelgede suundadega teravnurgad. V: $1/2$.

110. $\iint_\Sigma xdydz + ydxdz + zdxdy$, kus Σ on tasanditega $x = 0,\ y = 0,$ $z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ määratud kuubi väline pinnapool. V: 3.

111. $\iint_\Sigma x^2y^2zdxdy$, kus Σ on poolsfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ \ (z \leq 0)$ ülemine pinnapool. V: $2\pi R^7/105$.

112. $\iint_\Sigma xyzdxdy$, kus Σ on poolsfääri $z = -\sqrt{R - x^2 - y^2}$ alumine pinnapool. V: 0.

113. $\iint_\Sigma x^2dydz$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ väline pinnapool. V: 0.

114. $\iint_\Sigma xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, kus Σ on tasanditega $x = 0,$ $y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$ määratud püramiidi sisemine pinnapool. V: $-1/8$.

115. $\iint_\Sigma yzdxdy + xzdudz + xydxdz$, kus Σ on pindadega $x^2 + y^2 = R^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = H$ esimeses kahesandikus määratud keha välispinna väline pinnapool. V: $R^2H\left(\dfrac{2R}{3} + \dfrac{\pi H}{8}\right)$.

116. $\iint_\Sigma y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, kus Σ on pindadega $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ esimeses kaheksandikus määratud keha välispinna sisemine pinnapool. V: $-\pi/8$.

117. Kasutades Stokesi valemit, teisendage joonintegraali $\oint_\Gamma (x^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$.
V: $2\iint_\Sigma (x - y)\,dxdy + (y - z)\,dydz + (z - x)\,dxdz$.

Ülesannetes 118– 121 kasutage Gauss-Ostrogradski valemit:

118. Leidke vektori $\mathbf{F} = (y, z, x)$ voog läbi tasanditega $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ja $x + y + z = 1$ määratud püramiidi välise pinnapoole. V: 0.

119. Arvutage $\iint_\Sigma xyz\,dxdy$, kus Σ on pindadega $z = 0$ ja $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ määratud keha väline pinnapool. V: 0.

120. Arvutage $\iint_\Sigma (y - z)\ dxdy$, kus Σ on pindadega $z = 1$ ja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ määratud keha väline pinnapool. V: 0.

121. Arvutage $\iint_\Sigma \left(xy^2 + yz^2\right)\ dydz + \left(zx^2 - yx^2\right)\ dxdy + \left(yz^2 + x^3z\right)dxdz$, kus Σ on pindade $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ määratud keha $(z \geq 0)$ väline pinnapool. V: $2\pi R^5\left(1 - \sqrt{2}/2\right)/5$.

Ülesannete 122–126 lahendamisel kasutage Gauss-Ostrogradski valemit:

122. Leidke ülesandes 110 esitatud pindintegraal.
123. Leidke ülesandes 113 esitatud pindintegraal.
124. Leidke ülesandes 114 esitatud pindintegraal.
125. Leidke ülesandes 115 esitatud pindintegraal.
126. Leidke ülesandes 116 esitatud pindintegraal.

Kirjandus

[1] Abel, M., Kaasik, Ü. Eesti-soome-inglise-prantsuse-saksa-vene matemaatikasõnaraamat. Tallinn, TEA, 2002.

[2] Banach, S. Diferentsialnoje i integralnoe isčislenie. Moskva, Nauka, 1966 (venekeelne).

[3] Berman, G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. Moskva, Nauka, 1965 (venekeelne).

[4] Fichtenholz, G. M. Kurs diferentsialnogo i integralnogo isčislenija I. Moskva, Fiz-mat, 2001.

[5] Fichtenholz, G. M. Kurs diferentsialnogo i integralnogo isčislenija II. Moskva, Fiz-mat, 2001.

[6] Fichtenholz, G. M. Kurs diferentsialnogo i integralnogo isčislenija III. Moskva, Fiz-mat, 2002.

[7] Kaasik, Ü. Matemaatikaleksikon. Tallinn, Eesti Entsüklopeediakirjastus, 1992.

[8] Kaasik, Ü., Abel, M. Eesti-inglise-vene matemaatikasõnaraamat. Tartu, TÜ kirjastus, 1995.

[9] Kangro, G. Matemaatiline analüüs II. Tallinn, Valgus, 1968.

[10] Kivinukk, A., Pallas, L. Harmooniline analüüs ja funktsioonide lähendamine. Tallinn, TTÜ kirjastus, 2001.

[11] Kõrgema matemaatika teatmik II. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. Tallinnn, TPI, 1978.

[12] Kõrgema matemaatika teatmik III. Kõrgema matemaatika eripeatükke. Tallinnn, TPI, 1978.

[13] Larsen, R. E., Holsteter, R. P. Calculus with Analytic Geometry. Toronto, D.C.Heth and Company, 1986.

[14] Lõhmus, A., Petersen, I., Roos, H. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Tallinn, Valgus, 1989.

[15] Lõhmus, A., Tammeraid, I. Kõrgema matemaatika põhiseosed. Tallinn, TTÜ, 1989.

[16] Oja, E., Oja, P. Funktsionaalanalüüs. Tartu, TÜ, 1991.

[17] Piskunov, N. S. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn, Valgus, 1966.

[18] Puusemp, P. Lineaaralgebra. Tallinn, Avita, 2000.

[19] Päeva, H. Matemaatiline analüüs. Tallinn, ERKA kirjastus, 1997.

[20] Reimers, E. Matemaatilise analüüsi praktikum II. Tallinn, Valgus, 1988.

[21] Ruustal, E. Programmi MATHEMATICA^{TM} kasutamisjuhend. Tallinn, TTÜ kirjastus, 1999.

[22] Tammeraid, I. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, TTÜ kirjastus, 2002.

[23] Vichmann, F. Funktsionaalanalüüsi elementaarkursus. Tallinn, TTÜ kirjastus, 2002.

[24] Vilenkin, N. J., ... Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza II. Moskva, Prosvechtchenije, 1971 (venekeelne).

[25] Wilson, E. B. Advanced Calculus. http://www.ams.org/online.bks/online-books-web.html

Indeks