# 1 Matemaatika erikursus magistrantidele

YMM0030

Ainepunktid: 3.5 Nädalatunnid: 4.0 Loeng: 2.0 Praktikum: 0.0
Harjutus(seminar): 2.0 Kontrollivorm: E Semester: K

I osa (1–8 nädal, matemaatiline analüüs) kava

1. Kompleksarvud. Kompleksmuutuja funktsioonid.
2. Kompleksmuutuja funktsiooni tuletis ja integraal. Cauchy integraalvalem.
3. Laurent'i rida. Resiidid.
4. Laplace'i teisendused ja nende rakendused.
5. Meetrilised ruumid. Normeeritud ruumid. Banachi ruumid. Hilberti ruumid.
6. Lineaarsed operaatorid.
7. Fourier' rida ja Fourier'teisendus.
8. Eksam I osa kohta.

Õppekirjandus:

1. Tammeraid, I., Vichmann, F. Kompleksmuutuja funktsiooni elemente. Tallinn, TPI, 1986.
2. Vichmann, F. Funktsionaalanalüüsi elementaarkursus. Tallinn, TTÜ, 2002.
3. Oja, E ja Oja P. Funktsionaalanalüüs. Tartu, TÜ, 1991.
4. Jõgi, A. Operaatorarvutus I. Tallinn, TPI, 1978.
5. Jõgi, A. Operaatorarvutus II. Tallinn, TPI, 1979.
6. Kivinukk, A. ja Pallas, L. Harmooniline analüüs. Tallinn, TTÜ, 2002.

## 1.1 Kompleksarvud

**Definitsioon 1**.Kompleksarvudeks nimetatakse reaalarvude järjestatud paare $(x, y)$, kusjuures nende paaride võrdsus, liitmine ja korrutamine on defineeritud järgmiselt:
1. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$;
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \overset{\text{def.}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
3. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \overset{\text{def.}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Kompleksarve $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ tähistame järgnevas $z$, $z_1$, $z_2$ ja $z_3$.

**Ülesanne 1.** Vahetu kontrollimisega näidake:
1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $z_1z_2 = z_2z_1$ (korrutamise kommutatiivsus);
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (liitmise assotsiatiivsus);
4. $(z_1z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2z_3)$ (korrutamise assotsiatiivsus);
5. $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ (distributiivsus).

Kui kompleksarve $(0; 0)$, $(x; 0)$ ja $(0; y)$ tähistada lühidalt 0, $x$ ja $iy$, siis

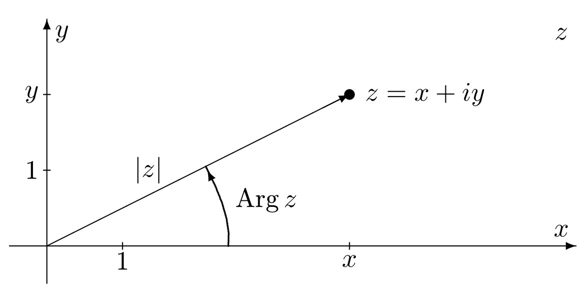
$$z = (x, y) = (x; 0) + (0; 1)\,(y; 0) = x + iy.$$

**Definitsioon 2**. Kompleksarvu $z$ esitust kujul $z = x + iy$ nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks, kusjuures arvu $x$ nimetatakse kompleksarvu reaalosaks ja $y$ kompleksarvu imaginaarosaks (täpsemini imaginaarosa kordajaks).

Kasutatakse tähistusi

$$x = \Re z = \operatorname{Re} z, \quad y = \Im z = \operatorname{Im} z.$$

Arvu $i$ nimetatakse imaginaarühikuks. Arvu $\overline{z} \overset{\text{def.}}{=} x - iy$ nimetatakse kompleksarvu $z = x + iy$ kaaskompleksarvuks. Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse tähega **C**. Tasandit, mille igale punktile $(x, y)$ on seatud vastavusse kompleksarv $z = x + iy$, nimetatakse komplekstasandiks ($z$-tasandiks),




$x$-telge reaalteljeks ja $y$-telge imaginaarteljeks. Rõhutame, et komplekstasandil $z$ on $x$ ja $y$ reaalsed, st me vaid kasutame $xy$-tasandit kompleksarvude kujutamiseks. Komplekstasandil joonistame kompleksarvu $z$ kohavektori. Arvu $z$ kohavektori pikkust tähistatakse $|z|$ ja nimetatakse kompleksarvu $z$ mooduliks.

Nurka, mille kompleksarvu kohavektor moodustab reaaltelje positiivse suunaga, nimetatakse kompleksarvu argumendiks ja tähistatakse $\operatorname{Arg} z$. Kompleksarvu argument on määratud liidetava $2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ täpsusega, sest täispööre $2\pi$ võrra viib kompleksarvu kohavektori esialgsesse asendisse tagasi. Kompleksarvu argumendi $\operatorname{Arg} z$ väärtust, mis kuulub poollõiku $(-\pi, \pi]$, nimetatakse kompleksarvu argumendi peaväärtuseks ja tähistatakse $\arg z$, st $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Seega

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}), \tag{1.1}$$

kus

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Kehtivad seosed

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2}$$

ja

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), \text{ kui } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, \text{ kui } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, \text{ kui } x < 0 \wedge y < 0, \\ \pi/2, \text{ kui } x = 0 \wedge y > 0, \\ -\pi/2, \text{ kui } x = 0 \wedge y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

NB! Mõningates raamatutes kasutatakse argumendi peaväärtuse jaoks mõnda teist poollõiku pikkusega $2\pi$, näiteks $[0; 2\pi)$.

**Näide 1**. Leiame kompleksarvu $-\sqrt{3} - i$ mooduli, argumendi peaväärtuse ja argumendi.

Valemite (1.2), (1.3) ja (1.1) abil saame vastavalt

$$\left|-\sqrt{3} - 1 \cdot i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2},$$

$$\begin{aligned} \arg\left(-\sqrt{3} - 1 \cdot i\right) &= \left[-\sqrt{3} < 0 \ \wedge \ -1 < 0\right] = \\ &= \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

ja

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \left(2k - \frac{5}{6}\right)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \qquad \diamondsuit$$

Kui tähistada $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ja kasutada polaarkoordinaate punkti asukoha määramiseks $xy$-tasandil, siis saame kompleksarvu trigonomeetrilise kuju

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{1.4}$$

ja kompleksarvu eksponentkuju

$$z = |z| \, e^{i\varphi}, \tag{1.5}$$

kus

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.6}$$

on Euleri valem.

Kuna funktsioonid $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ ning (tõesta, et $e^{2\pi i} = 1$!) $e^{i\varphi}$ on $2\pi$-perioodilised, siis võime valemeis (1.4) ja (1.5) võtta $\varphi = \arg z$. $\diamondsuit$

**Ülesanne 2.** Leidke kompleksarvu $1-i\sqrt{3}$ mooduli, argumendi peaväärtuse ja argumendi.

**Näide 2**. Leiame kompleksarvu $-\sqrt{3}-i$ trigonomeetrise kuju ja eksponentkuju.

Kuna $\left|-\sqrt{3}-i\right| = 2$ ja $\arg\left(-\sqrt{3}-i\right) = -5\pi/6$, siis valemite (1.4) ning (1.5) abil saame vastavalt

$$-\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-5\pi/6\right) + i\sin\left(-5\pi/6\right)\right)$$

ja

$$-\sqrt{3}-i = 2\, e^{i(-5\pi/6)} = 2\, e^{-5\pi i/6}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 3.**Leidke kompleksarvu $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ trigonomeetrise kuju ja eksponentkuju.

Komplekstasandit täiendatakse lõpmatuspunktiga $\infty$, kompleksarvuga, mille moodul on $+\infty$, st $|\infty| = +\infty$. Lõpmatuspunkti reaal- ja imaginaarosa ning argumenti ei defineerita. Lõpmatuspunktiga täiendatud komplekstasandit nimetatakse laiendatud komplekstasandiks.

## Tehted kompleksarvudega

Kompleksarvude $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ liitmine ja korrutamine on eelnevalt defineeritud. Esitame need definitsioonid algebralisel kujul esitatud kompleksarvude $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ korral:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,, \quad z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Kahe kompleksarvu $z_1$ ja $z_2$ vahe $z_1 - z_2$ ja jagatis $z_1/z_2$ defineeritakse vastavalt kui võrrandi $z_1 = z + z_2$ ja võrrandi $z_1 = zz_2$ lahend. Leiame, et

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

Osutub, et kompleksarve on tihti otstarbekas liita ja lahutada algebralisel kujul, aga korrutada, astendada ning jagada eksponentkujul. Saame

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1|\,|z_2|\; e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Seega

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\,e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)},$$
$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\arg z) + i\sin(n\arg z)) = |z|^n\,e^{i\,n\arg z}.$$

Kompleksarvu ja kaaskompleksi moodulil ning argumendil on järgmised omadused:

1° $|z| \geq 0$; 2° $|-z| = |\overline{z}| = |z|$; 3° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

4° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 5° $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

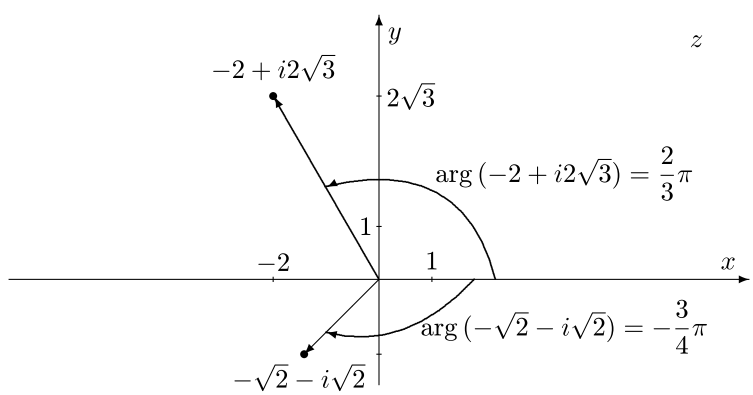
6° $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$; 7° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; 8° $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$;

9° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; 10° $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$; 11° $\Re z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$;

12° $\Im z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

**Näide 1.** Arvutame $\left(\dfrac{-2 + i2\sqrt{3}}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^9$.

Kujutame arvud $-2 + i2\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ komplekstasandil ning määrame nende mooduli ja argumendi



Leiame:

$$\left|-2+i2\sqrt{3}\right| \overset{(2)}{=} \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4;$$

$$\arg\left(-2+i2\sqrt{3}\right) \overset{(3)}{=} \left[\begin{array}{c} -2<0, \\ 2\sqrt{3}\geq 0 \end{array}\right] = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{-2}+\pi = \pi-\frac{1}{3}\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\left|-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right| \overset{(2)}{=} \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2;$$

$$\arg\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \overset{(3)}{=} \left[\begin{array}{c} -\sqrt{2}<0, \\ -\sqrt{2}<0 \end{array}\right] = \arctan\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}-\pi = $$
$$= -\pi+\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi.$$

Seega

$$-2+i2\sqrt{3} = 4\,e^{i2\pi/3}, \quad -\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2\,e^{-i3\pi/3}$$

ja

$$\left(\frac{-2+i2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^9 = \left(\frac{4\,e^{i2\pi/3}}{2\,e^{-i3\pi/4}}\right)^9 = \left(2\,e^{i\,17\pi/12}\right)^9 = 2^9e^{i51\pi/4} =$$
$$= 2^9e^{i51\pi/4} = 2^9e^{i(48\pi+3\pi)/4} = 2^9e^{i12\pi}\cdot e^{i3\pi/4} =$$
$$= \left[e^{i2k\pi} \overset{k\in\mathbf{Z}}{=} 1\right] = 2^9e^{i3\pi/4} = 2^9\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= 2^9\left(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2\right) = -256\sqrt{2}+256i\sqrt{2}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 1.** Arvutage $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}\right)^{100}$.

**Definitsioon 1.** Võrrandi

$$w^n = z \quad (n\in\{2;3;4;\ldots\}) \tag{1.7}$$

iga lahendit $w$ nimetatakse kompleksarvu $z$ $n$-ndaks juureks ja tähistatakse $w = \sqrt[n]{z}$.

Kuna on tegemist muutuja $w$ suhtes $n$-ndat järku algebralise võrrandiga, siis algebra põhiteoreemi kohaselt on sel võrrandil kompleksarvude hulgal täpselt $n$ lahendit. Kui esitada $z$ ja $w$ eksponentkujul $z = |z|\ e^{i\arg z}$ ning $w = |w|\ e^{i\arg w}$, siis saame võrrandile (1.7) kuju

$$|w|^n\ e^{in\arg w} = |z|\ e^{i\arg z}.$$

Kaks kompleksarvu, esitatuna eksponentkujul, on võrdsed parajasti siis, kui on võrdsed nende moodulid ja teiseks nende argumendid. Suurus $n\arg w$ võib erineda kompleksarvu $z$ peaväärtusest $\arg z$ arvu $2\pi$ mingi kordse $2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ võrra. Seega

$$|w|^n = |z| \ \wedge\ n\arg w = \arg z+2k\pi \ \ (k\in\mathbf{Z})\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt[n]{|z|} \qquad \text{(tegemist on juba reaalmuutuja juurega)},\\ \arg w &= (\arg z + 2k\pi)/n \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

ja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Kuna $e^{i2\pi} = 1$, siis $\sqrt[n]{z}$ erinevaid väärtusi on vaid $n$ tükki ja

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} \quad (k = 0; 1; 2; \ldots ; n-1). \tag{1.8}$$

Osutub, et $\sqrt[n]{z}$ väärtused asetsevad $z$-tasandil korrapärase $n$-nurga, mille keskpunkt on nullpunkt, tippudes.

**Näide 2**. Leiame $\sqrt[3]{-8}$ kõik väärtused ja kujutame nad $z$-tasandil.

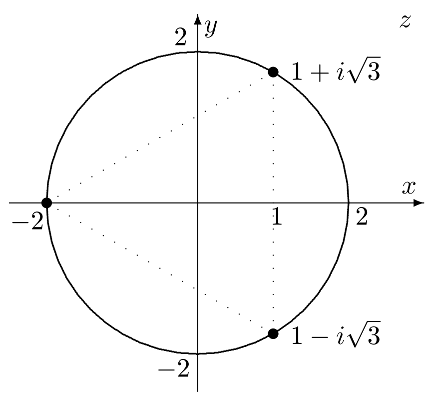
Kuna $|-8| = 8$ ja $\arg(-8) = \pi$, siis valemi (1.8) põhjal

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{|-8|} e^{i(\arg(-8) + 2k\pi)/3} = 2\, e^{i(\pi + 2k\pi)/3} \quad (k = 0; 1; 2)$$

ning

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=0} &= 2\, e^{i\pi/3} = 2\left(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)\right) = 1 + i\sqrt{3},\\ \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=1} &= 2\, e^{i\pi} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2,\\ \sqrt[3]{-8}\Big|_{k=2} &= 2\, e^{i5\pi/3} = 2\left(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)\right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Teeme joonise




$\diamondsuit$

**Ülesanne 2.** Leidke $\sqrt[4]{-16i}$ kõik väärtused ja kujutame nad $z$-tasandil.

**Ülesanne 3.** Leidke võrrandi $z^4 = -1$ kõik lahendid.

**Näide 3**. Leiame kompleksarvu $z$ kõigi $n$-ndate juurte summa.

Valemi (1.8) põhjal saame

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z + 2k\pi)/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z)/n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2k\pi/n} = \left[ \begin{array}{c} \sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, \\ q = e^{i2\pi/n} \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} e^{i(\arg z)/n} \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i2\pi/n}} = \left[ e^{i2\pi} = 1 \right] = 0. \qquad \diamondsuit$$

# Joon, piirkond ja raja

**Definitsioon 1**. Jooneks ehk Jordani jooneks komplekstasandil $z$ nimetatakse punktide, mis on määratud võrrandiga

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [\alpha, \beta] ,$$

kus $x(t)$ ja $y(t)$ on pidevad reaalmuutuja funktsioonid lõigul $[\alpha, \beta]$ , hulka, kusjuures

$$t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; z(t_1) \neq z(t_2) ,$$

st joonel pole kordseid punkte. Erandiks võivad olla vaid punktid $z(\alpha)$ ja $z(\beta)$ . Kui $z(\alpha) = z(\beta)$ , siis joont nimetatakse kinniseks. Joont nimetatakse siledaks, kui funktsioonid $x'(t)$ ja $y'(t)$ on pidevad lõigul $[\alpha, \beta]$ . Joont nimetatakse tükati siledaks, kui ta koosneb lõplikust arvust siledatest osadest.

**Näide 1**. Olgu joon antud võrrandiga

$$z(t) = a \cos t + i\; b \sin t \quad (t \in [0, 2\pi]) . \tag{1.9}$$

Kuna funktsioonid $x(t) = a \cos t$ ja $y(t) = b \sin t$ on pidevad lõigul $[0, 2\pi]$ ja

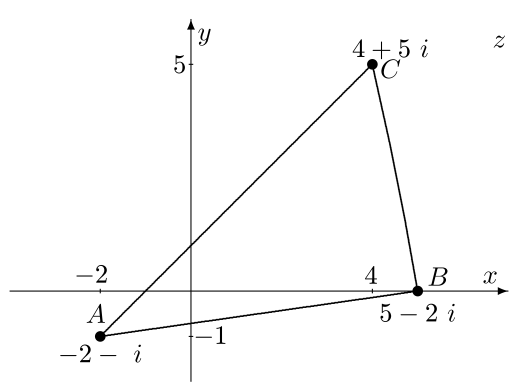
$$t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; z(t_1) \neq z(t_2) ,$$

välja arvatud punktid $t_1 = 0$ ja $t_2 = 2\pi$, siis on tegamist Jordani joonega. Funktsioonid $x'(t) = -a \sin t$ ja $y'(t) = b \cos t$ on pidevad lõigul $[0, 2\pi]$ . Tegemist on seega sileda joonega. Et

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = \frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = 1 \quad (t \in [0, 2\pi]) ,$$

siis võrrand (1.9) esitab komplekstasandil ellipsi, mille kespunkt on nullpunktis ja teljed paralleelsed koordinaattelgedega, telgedega $a$ ja $b$. $\diamondsuit$

**Näide 2**. Olgu $z$-tasandil antud kolmnurk $ABC$




Leiame tema rajajoone võrrandid ja uurime selle joone siledust.

Veenduge, et lõikudel $AB$, $BC$ ja $AC$ on vastavalt võrrandid

$$\begin{aligned} AB: &\quad z(t) = -2 - i + t\,(7 - i) \quad (t \in [0;1])\,, \\ BC: &\quad z(t) = 5 - 2i + t\,(-1 + 7i) \quad (t \in [0;1])\,, \\ AC: &\quad z(t) = -2 - i + t\,(6 + 6i) \quad (t \in [0;1])\,. \end{aligned}$$

Kontrollige, et vastavad tuletised on pidevad lõigul $[0;1]$. Seega rajajoon (murdjoon) $ABC$ on tükati sile, koosnedes kolmest siledast tükist. $\diamondsuit$

**Definitsioon 2**. Hulga rajapunktiks nimetatakse punkti, mille igas ümbruses leidub nii sellesse hulka kuuluvaid kui ka sinna mittekuuluvaid punkte.

**Definitsioon 3**. Hulga rajaks nimetatakse selle hulga kõigi rajapunktide hulka.

**Definitsioon 4**. Hulka, mis ei sisalda ühtki oma rajapunkti, nimetatakse lahtiseks hulgaks.

**Definitsioon 5**. Hulka, mis sisaldab kõik oma rajapunktid, nimetatakse kinniseks hulgaks.

**Definitsioon 6**. Sidusaks hulgaks nimetatakse hulka, mille iga kaht punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva Jordani joonega.

**Definitsioon 7**. Piirkonnaks nimetatakse lahtist sidusat hulka.

**Definitsioon 8**. Kinniseks piirkonnaks nimetatakse kinnist sidusat hulka.

**Definitsioon 9**. Piirkonda nimetatakse ühelisidusaks, kui selle piirkonna raja on sidus.

**Definitsioon 10**. Piirkonda nimetatakse mitmelisidusaks, kui selle piirkonna raja ei ole sidus, vaid koosneb mitmest sidusast osast.

**Ülesanne 1**. Olgu vaadeldavaks hulgaks ring $|z - 1 + i| < \sqrt{2}$. Kas see hulk on kinnine või lahtine? Kas see hulk on piirkond? Milline on selle hulga raja? Kas tegemist on üheli- või mitmelisidusa piirkonnaga?

**Ülesanne 2**. Olgu vaadeldavaks hulgaks rõngas $1 < |z - 1 + i| < \sqrt{2}$. Kas see hulk on kinnine või lahtine? Kas see hulk on piirkond? Milline on selle hulga raja? Kas tegemist on üheli- või mitmelisidusa piirkonnaga?

# Kompleksmuutuja funktsioon

Olgu $D$ hulk komplekstasandil või laiendatud komplekstasandil.

**Definitsioon 1**. Kui hulga $D$ igale elemendile $z$ on vastavusse seatud mingi kindel kompleksarv $w$, siis öeldakse, et hulgal $D$ on defineeritud kompleksmuutuja funktsioon ehk kujutus $w = f\,(z)$.

**Definitsioon 2**. Hulka D nimetatakse $f$ määramispiirkonnaks ja hulka $f\,(D) = \{w \mid (z \in D) \wedge (w = f\,(z))\}$ funktsiooni $f$ väärtuste piirkonnaks.

**Definitsioon 3**. Funktsiooni $z = f^{-1}(w)$ nimetatakse funktsiooni $w = f\,(z)$ pöördfunktsiooniks, kui hulga $f(D)$ iga element on ainult ühe hulga $D$ elemendi kujutiseks.

**Definitsioon 4**. Funktsiooni, mille argumendi mõnele väärtusele määramispiirkonnast vastab vähemalt kaks funktsiooni väärtust, nimetatakse mitmeseks funktsiooniks.

**Definitsioon 5**. Suurusi $u = \Re w$ ja $v = \Im w$ nimetatakse vastavalt kompleksmuutuja funktsiooni $w = f(z)$ reaal- ja imaginaarosaks.

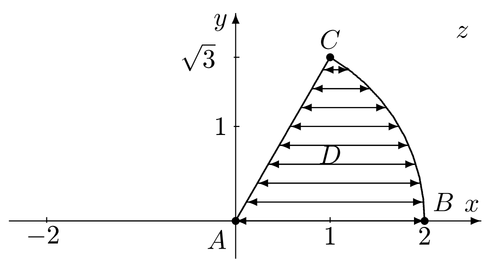
Kuna $z = x+iy = z(x,y)$ ja $w = f(z) = u+iv$, siis funktsiooni $f(z)$ defineerimine on samaväärne vastavas $xy$-tasandi piirkonnas kahe reaalsete väärtustega kahe muutuja funktsiooni $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ defineerimisega.

**Ülesanne 1.** Leidke $w = z^3 - 3z + 4$ reaal- ja imaginaarosa.

Kompleksmuutuja funktsiooni f(z) graafik paikneb (neljamõõtmelises) korrutisruumis $D \times f(D)$.

**Näide 1**. Leiame piirkonna $D = \{z \mid (|z| < 2 \ \wedge \ (0 < \arg z < \pi/3))\}$ kujutise funktsiooni $w = z^3$ abil.

Skitseerime piirkonna $D$




Esitame piirkonna $D$ rajajoone $ABC$ osade võrrandid

$$
\begin{aligned}
AB &: \ z = \rho\, e^{i\cdot 0} \ \ (0 \le \rho \le 2)\,;\\
BC &: \ z = 2\, e^{i\cdot\varphi} \ \ (0 \le \varphi \le \pi/3)\,;\\
CA &: \ z = \rho\, e^{i\cdot\pi/3} \ \ (0 \le \rho \le 2)\,.
\end{aligned}
$$

Uurime, milleks teisenevad need rajajoone osad kujutamisel funktsiooniga $w = z^3$. Esiteks leiame lõigu $AB$ kujutise $A'B'$

$$A'B' : \ w = \rho^3\, e^{3i\cdot 0} \ \ (0 \le \rho \le 2)$$

ehk

$$A'B' : \ w = r\, e^{i\cdot 0} \ \ (0 \le r \le 8)\,.$$

Analoogiliselt saame

$$B'C' : \ w = 2^3\, e^{3i\cdot\varphi} \ \ (0 \le \varphi \le \pi/3)$$

ehk

$$B'C' : \ w = 8\, e^{i\cdot\psi} \ \ (0 \le \psi \le \pi)$$

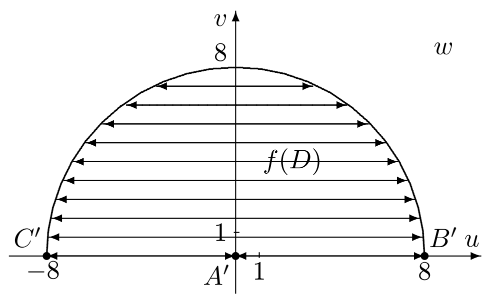
ja

$$C'A' : \ w = \rho^3\, e^{3i\cdot\pi/3} \ \ (0 \le \rho \le 2)$$

ehk

$$C'A' : \ w = r\, e^{i\cdot\pi} \ \ (0 \le r \le 8)\,.$$

Skitseerime $w$-tasandil joone $A'B'C'$ :




Osutub, et $f(D)$ on lahtine poolring $w$-tasandil. Veenduge, et nii piirkonna $D$ kui ka piirkonna $f(D)$ rajajoon on tükati sile. $\diamondsuit$

**Ülesanne 2.** Leidke piirkonna $D = \left\{z \mid \left(|z| < \sqrt{2} \wedge (0 < \arg z < \pi/2)\right)\right\}$ kujutis funktsiooni $w = z^4$ abil.

**Definitsioon 6**. Kompleksarvu $c$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ piirväärtuseks piirprotsessis $z \to z_0$, kui $\forall \varepsilon > 0$ korral $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ selline, et

$$0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - c| < \varepsilon.$$

**Definitsioon 7**. Kompleksmuutuja funktsiooni $f(z)$ nimetatakse pidevaks punktis $z_0$, kui

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

## 1.2 Kompleksmuutuja funktsiooni tuletis ja integraal. Cauchy integraalvalem

Argumendi $z$ muudule $\Delta z$ vastavaks funktsiooni $w = f(z)$ muuduks $\Delta w$ nimetatakse vahet $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

**Definitsioon 1**. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df}{dz} \tag{2.1}$$

nimetatakse funktsiooni tuletiseks punktis $z$.

Kui funktsioonil $f(z)$ on tuletis punktis $z$, siis öeldakse, et funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv punktis $z$.

**Definitsioon 2**. Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse analüütiliseks punktis $z$, kui $f(z)$ on diferentseeruv punktis $z$ ja mingis selle punkti ümbruses.

**Definitsioon 3**. Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse analüütiliseks piirkonnas, kui $f(z)$ on analüütiline selle piirkonna igas punktis.

**Definitsioon 4**. Punkti, milles funktsiooni $f(z)$ ei ole analüütiline, nimetatakse funktsiooni $f(z)$ iseäraseks punktis.

**Näide 1**. Leiame $\left(z^3\right)'$.

Definitsiooni 1 põhjal saame

$$\begin{aligned}\left(z^3\right)' &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(3z^2 + 3z\Delta z + (\Delta z)^2\right) = 3z^2. \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

**Ülesanne 1.** Leidke $(z^n)' \quad (n\in\mathbf{N})$.

Analoogiliselt reaalmuutuja funktsioonidega on kompleksmuutuja funktsioonidel järgmised tehetega seotud omadused.

**Lause 1**. Kehtivad seosed:

- $(c_1f_1(z) + c_2f_2(z))' = c_1f_1'(z) + c_2f_2'(z)$;
- $(f_1(z)f_2(z))' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$;
- $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)}{{f_2}^2(z)}$.

Kui punktis $z$ diferentseeruv funktsioon $w = f(z)$ on punkti $z$ ümbruses pööratav, st $\exists\, f^{-1}(w)$, siis

$$\begin{aligned}\frac{d\,f^{-1}(w)}{dw} &= \lim_{\Delta w\to 0}\frac{f^{-1}(w+\Delta w) - f^{-1}(w)}{\Delta w} \overset{\Delta w\to 0 \Leftrightarrow \Delta z\to 0}{=} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z+\Delta z - z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\dfrac{df}{dz}},\end{aligned}$$

st

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}. \tag{2.2}$$

Uuurime tuletise $f'(z)$ eksisteerimise tingimusi. Kuna $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, siis

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0;0)}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Suuruse $\dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$ piirväärtus ei tohi sõltuda piirpunktile lähenemise viisist $(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)$. Kui $\Delta y = 0$, siis

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui $\Delta x = 0$, siis

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Seega

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Lause 2 (Cauchy-Riemanni tingimused)**. Kui funktsioon $f(z)$ on diferentseeruv punktis $z$, siis selles punktis on rahuldatud Cauchy-Riemanni tingimused

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Cauchy-Riemanni tingimused on järelikult tarvilikud tuletise $f'(z)$ olemasoluks punktis $z=x+iy$. Tõestage, et funktsioonide $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ diferentseeruvuse korral punktis $(x,y)$ on Cauchy-Riemanni tingimused ka piisavad tuletise $f'(z)$ olemasoluks punktis $z=x+iy$.

**Näide 2**. Leiame funktsiooni $w=z^3$ diferentseeruvuse piirkonna.

Kuna

$$w=z^3=(x+iy)^3=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3,$$

siis $u=x^3-3xy^2$ ja $v=3x^2y-y^3$. Seega

$$u_x=3x^2-3y^2,\ u_y=-6xy,\ v_x=6xy,\ v_y=3x^2-3y^2$$

ja Cauchy-Riemanni tingimused (2.3) omandavad kuju

$$\begin{cases} 3x^2-3y^2=3x^2-3y^2, \\ -6xy=-6xy. \end{cases}$$

Järelikult on funktsiooni $w=z^3$ korral Cauchy-Riemanni tingimused täidetud komplekstasandi igas punktis. Kuna funktsioonid $u=x^3-3xy^2$ ja $v=3x^2y-y^3$ on diferentseeruvad komplekstasandi igas punktis, siis funktsioon $w=z^3$ on diferentseeruv komplekstasandi igas punktis $z$. Lisaks

$$\left(z^3\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2+i6xy=3\left(x+iy\right)^2. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 2.** Leidke funktsiooni $w=3z^2-5iz+8-i\sqrt{3}$ diferentseeruvuspiirkond.

Kui funktsiooni $w=f(z)$ reaal- ja imaginaarosal $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on pidevad teist järku osatuletised, siis Cauchy-Riemanni esimesest tingimusest saame $u_{xx}=v_{yx}$ ja teisest $u_{yy}=-v_{xy}$ ning

$$u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0.$$

Analoogiliselt jõuame tulemuseni

$$v_{xx}+v_{yy}=0.$$

Funktsiooni $r=r(x,y)$, mis rahuldab seost (Laplace'i võrrandit) $r_{xx}+r_{yy}=0$, nimetatakse harmooniliseks funktsiooniks.

Kui direntseeruva funktsiooni $w = f(z)$ reaal- ja imaginaarosal $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on pidevad teist järku osatuletised, siis $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on harmoonilised funktsioonid. Sel korral nimetatakse funktsioonide paari $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ kaasharmooniliste paariks.

**Näide 3**. On teada analüütilise funktsiooni $w = f(z) = -(x + iy)^2 + i(x + iy) : -x^2 + y^2 - y$ imaginaarosa $v = x - 2xy$. Leiame $f(z)$, kui $f(1) = 2 + i$.

Kuna $v_x = 1 - 2y$ ja $v_y = -2x$, siis Cauchy-Riemanni esimese tingimuse põhjal

$$u_x = -2x,$$

millest

$$\begin{aligned} u &= \int (-2x)\, dx = \left[ \begin{array}{c} \text{võttes osatuletist muutuja } x \text{ järgi} \\ \text{muutujat } y \text{ käsitletakse kui konstanti} \end{array} \right] = \\ &= -x^2 + \varphi(y), \end{aligned}$$

kus $\varphi(y)$ on suvaline muutuja $y$ funktsioon. Seega $u_y = \varphi'(y)$ ja Cauchy-Riemanni teise tingimuse põhjal

$$\varphi'(y) = -1 + 2y,$$

millest

$$\varphi(y) = \int (-1 + 2y)\, dy = .$$

Järelikult $u = -x^2 + y^2 - y + C$ ning

$$\begin{aligned} w = f(z) = u + iv &= -x^2 + y^2 - y + C + i(x - 2xy) = \\ &= i(x + iy) - (x + iy)^2 + C = iz - z^2 + C. \end{aligned}$$

Kuna $f(1) = 2 + i$, siis

$$i - 1 + C = 2 + i \Rightarrow C = 3$$

ja $f(z) = iz - z^2 + 3$. $\diamondsuit$

**Ülesanne 3.** On teada analüütilise funktsiooni $w = f(z) = u + iv$ imaginaarosa $v = x^3 - 3xy^2$ ja $f(i) = 1$. Leidke $f(z)$.

# Arvread

**Definitsioon 1**. Avaldist

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k + \ldots,$$

kus $c_k = a_k + ib_k$ on kompleksarvud, nimetatakse kompleksarvuliseks arvreaks.

**Definitsioon 2**. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nimetatakse koonduvaks, kui

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

ja hajuvaks, kui

$$\nexists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Tõestage iseseisvalt järgmine väide.

**Lause 1**. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kus $c_k = a_k + ib_k$, on koonduv parajasti siis, kui read $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on koonduvad.

**Definitsioon 3**. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ on koonduv.

**Definitsioon 4**. Koonduvat rida, mis ei ole absoluutselt koonduv, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Tõestage iseseisvalt järgmine väide.

**Lause 2**. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kus $c_k = a_k+ib_k$, on absoluutselt koonduv parajasti siis, kui read $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on absoluutselt koonduvad.

**Näide 1.** Uurime rea $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\sqrt{k} + i\sqrt[3]{k^4}}{k^2}$ koonduvust.

Nii reaalosadest koostatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3/2}$$

kui ka imaginaarosadest koostatud rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[3]{k^4}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-2/3}$$

on Leibnizi tunnuse põhjal koonduvad. Seega Lause 1 põhjal on koonduv uuritav rida. Kuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k k^{-3/2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$$

on koonduv (miks?) ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k k^{-2/3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3},$$

on hajuv (miks?), siis Lause 2 põhjal on uuritav rida tingimisi koonduv. ♢

**Ülesanne 1.** Uurige rea $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz}$ koonduvust.

# Funktsionaalread

**Definitsioon 1**. Avaldist kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) = u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_k(z) + \ldots,$$

kus $u_k(z)$ on kompleksmuutuja funktsioonid, nimetatakse funktsionaalreaks.

Fikseeritud $z$ korral saame sellest avaldisest arvrea. Kui eksisteerib osasummade

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$$

jada piirväärtus $n \to \infty$ korral, siis öeldakse, et rida *koondub* punktis $z$. Piirväärtust $s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$ nimetatakse *rea summaks.* Kõigi punktide $z$ hulka, kus funktsionaalrida koondub, nimetatakse rea koondumispiirkonnaks. Vahet

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$$

nimetatakse rea jääkliikmeks. Ilmselt

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(z,\varepsilon) \in \mathbf{N} : \; n > n_0 \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon.$$

Kui rea koondumispiirkonna teatud osa kõigi punktide korral naturaalarvu $n_0$ valik sõltub vaid arvust $\varepsilon$, st $n_0(z,\varepsilon) = n_0(\varepsilon)$, siis öeldakse, et funktsionaalrida koondub selles osas ühtlaselt.

# Astmeread

**Definitsioon 1**. Funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{2.4}$$

kus $c_k$ on konstandid, nimetatakse astmereaks.

Astmerea (2.4) koonduvuspiirkond ei ole tühi hulk, sest sisaldab vähemalt nullpunkti.

Tõestage Abeli teoreem.

**Lause 1 (Abeli teoreem)**. Kehtivad väited:

- Kui astmerida (2.4) koondub punktis $z_0$, siis (2.4) koondub absoluutselt igas punktis $z$, mis rahuldab võrratust $|z| < |z_0|$;
- Kui astmerida (2.4) hajub punktis $z_0$, siis (2.4) hajub igas punktis $z$, mis rahuldab võrratust $|z| > |z_0|$;

- Kui astmerida (2.4) koondub punktis $z_0$, siis (2.4) koondub ühtlaselt hulgal $|z| \leq q < |z_0|$ .

**Definitsioon 2**. Suurust

$$R = \sup_{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in c} |z|$$

nimetatakse astmerea koonduvusraadiuseks.

**Lause 2**. Kui eksisteerib piirväärtus (lõplik või lõpmatu)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \quad \text{või} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_k|}},$$

siis see piirväärtus on võrdne rea (2.4) koonduvusraadiusega $R$.

**Näide 1**. Leiame rea $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k / e^k$ koonduvusraadiuse $R$.

Tegemist on astmereaga, kus $c_k = k^3/e^k$. Kuna $c_{k+1} = (k+1)^3/e^{k+1}$, siis

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^3/e^k}{(k+1)^3/e^{k+1}} \right| = e \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+1/k)^3} = e. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 1.** Leidke rea $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z+2-i)^k$ koonduvusraadius $R$ ja koonduvuspiirkond.

**Lause 3**. Kui rea

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{2.5}$$

koonduvusraadius on $R$, siis

- rea (2.5) summa $S(z)$ on ringis $|z-a| < R$ pidev funktsioon,
- rida (2.5) on liikmeti integreeritav piki suvalist joont, mis kuulub piirkonda $|z-a| < R$,
- rea (2.5) summa $S(z)$ on ringis $|z-a| < R$ analüütiline funktsioon,
- rida (2.5) on liikmeti mis tahes arv kordi diferentseeruv ringis $|z-a| < R$ ja

$$S^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)\, c_k (z-a)^{k-m},$$

kusjuures saadud rea koonduvusraadius on samuti $R$.

Defineerime mõningad kompleksmuutuja funktsioonid astmerea summana. Eksponentfunktsiooniks $e^z \equiv \exp(z)$ nimetatakse funktsiooni

$$e^z \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Veenduge, et selle rea korral $R = \infty$ ja $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. Seega suvalise $z = x+iy$ korral

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Defineerime kompleksmuutuja $z$ korral

$$\cos z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

kusjuures mõlema rea korral $R = \infty$. Tõestage, et nii $\cos z$ kui ka $\sin z$ on analüütilised komplekstasandi igas punktis.

**Lause 4 (Euleri valem).** Kehtib seos

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{2.6}$$

*Tõestus.* Saame

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{(iz)^k}{k!} + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Seosest (2.6) järeldub

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z.$$

Seega

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= \cos z + i \sin z + \cos z - i \sin z = 2 \cos z, \\ e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z + i \sin z - \cos z + i \sin z = 2i \sin z \end{aligned}$$

ja

$$\cos z = \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)/2 \tag{2.7}$$

ning

$$\sin z = \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)/(2i) \tag{2.8}$$

**Näide 2**. Leiame funktsiooni $w = e^z$ analüüütilisuse piirkonna.

Kuna

$$\begin{aligned} w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} &\overset{(3)}{=} e^x (\cos y + i \sin y) = \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y = u + iv, \end{aligned}$$

siis $u = e^x \cos y$ ja $v = e^x \sin y$ ning

$$u_x =, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y =$$

ja Cauchy-Riemanni tingimused on kujul

$$\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y, \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y. \end{cases}$$

Järelikult on funktsioon $w = e^z$ analüütiline komplekstasandi igas punktis. $\diamondsuit$

**Ülesanne 2.** Leidke funktsiooni $w = \cos z$ analüüütilisuse piirkond.

**Näide 3**. Leiame $\cos(4i)$.

Valemi (2.7) abil saame

$$\cos(4i) = \left(e^{i\cdot 4i} + e^{-i\cdot 4i}\right)/2 = \left(e^4 + e^{-4}\right)/2 \approx 27.308. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 3.** Leidke $\sin\left(i\sqrt{3}\right)$.

**Definitsioon 3**. Võrrandi

$$e^w = z \tag{2.9}$$

kõigi lahendite hulka nimetatakse kompleksmuutuja naturaallogaritmiks $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Kui $w = u + iv$ ja $z = |z|\, e^{i \arg z}$, siis saame võrrandile (2.9) kuju

$$e^{u+iv} = |z|\, e^{i \arg z}$$

ehk

$$e^u \cdot e^{iv} = |z|\, e^{i \arg z},$$

millest kahe kompleksarvu võrdsuse tingimuse põhjal

$$\begin{cases} e^u = |z|, \\ v = \arg z + 2\pi \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} u = \ln|z|, \\ v = \mathrm{Arg}\, z. \end{cases}$$

Seega saame lõpmata mitmese funktsiooni

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z}). \tag{2.10}$$

Täisarvu $k$ fikseerimisel $k = 0$ saame ühese kompleksmuutuja funktsiooni

$$\ln z = \mathrm{Ln}\, z\,|_{k=0} = \ln|z| + i \arg\, z,$$

mida nimetatakse naturaallogaritmi peaharuks.

**Näide 4**. Leiame $\mathrm{Ln}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ ja $\ln\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

Kuna $\left|1 - i\sqrt{3}\right| = 2$ ja $\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\pi/3$, siis

$$\mathrm{Ln}\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\left(2k\pi - \pi/3\right) \quad (k \in \mathbf{Z}),$$
$$\ln\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \ln 2 - i\pi/3. \qquad \diamondsuit$$

**Definitsioon 4**. Funktsiooni

$$w = z^c \overset{\text{def.}}{=} e^{c\,\mathrm{Ln}\, z}, \tag{2.11}$$

kus $c$ on kompleksarv, nimetatakse kompleksmuutuja üldiseks astmefunktsiooniks.

**Näide 5**. Leiame $i^i$.

Kuna $|i| = 1$, $\arg i = \pi/2$ ja

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,(\pi/2 + 2k\pi) = i\,(2k + 1/2)\,\pi,$$

siis valemi (2.11) põhjal

$$i^i = e^{i \cdot i(2k+1/2)} = e^{-(2k+1/2)\pi} \quad (k \in \mathbf{Z})\,. \qquad \diamondsuit$$

**Definitsioon 5**. Võrrandi

$$\sin w = z \tag{2.12}$$

kõigi lahendite hulka nimetatakse kompleksmuutuja arkussiinuseks $w = \operatorname{Arc}\sin\, z$.

Seose (2.8) abil saame võrrandile (2.12) kuju

$$\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) / \,(2i) = z,$$

millest

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

ehk

$$\begin{aligned} \left(e^{iw} - iz\right)^2 = 1 - z^2 \;\Leftrightarrow\; e^{iw} - iz = \sqrt{1 - z^2} \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} \;\Leftrightarrow\; iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; w = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \end{aligned}$$

st

$$\operatorname{Arc}\sin\, z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \tag{2.13}$$

Analoogiliselt saadakse avaldised

$$\operatorname{Arc}\cos\, z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{2.14}$$

$$\operatorname{Arc}\tan\, z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{Arc}\cot\, z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}. \tag{2.16}$$

Kui valemeis (2.13-2.16) kompleksmuutuja naturaallogaritm asendada naturaallogaritmi peaharuga, saadakse vastavalt $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$ ja $\operatorname{arccot} z$.

**Näide 6**. Leiame $\arctan(1 + i)$.

Kuna $|1 + i| = \sqrt{2}$ ja $\arg(1 + i) = \pi/4$, siis

$$\begin{aligned} \arctan(1 + i) = -\frac{i}{2}\, \ln \frac{1 + i\,(1 + i)}{1 - i\,(1 + i)} = -\frac{i}{2} \ln \frac{i}{2 - i} = -\frac{i}{2} \ln \frac{i\,(2 + i)}{5} = \\ = -\frac{i}{2} \ln \frac{-1 + 2i}{5} = -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{2} \ln 5 + i\,(\pi - \arctan 2)\right) = \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{i}{4} \ln 5. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

**Ülesanne 3.** Leidke $\arctan(1-i\sqrt{3})$.

Defineerime hüperboolsed funktsioonid

$$\cosh z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\tanh z \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z \overset{\text{def.}}{=} \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

ja *areafunktsioonid* $w = \mathrm{Ar}\cosh z$, $w = \mathrm{Ar}\sinh z$, $w = \mathrm{Ar}\tanh z$ ning $w = \mathrm{Ar}\coth z$ vastavalt võrrandite

$$\cosh w = z, \ \sinh w = z, \ \tanh w = z, \ \coth w = z$$

lahendeina. Nii $\cosh z$ kui ka $\sinh z$ korral $R = \infty$ Tõestage, et nii $\cosh z$ kui ka $\sinh z$ on analüütilised komplekstasandi igas punktis.

**Lause 5**. Kehtivad seosed

$$\mathrm{Ar}\cosh z = Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad \mathrm{Ar}\sinh z = Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$
$$\mathrm{Ar}\tanh z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}, \quad \mathrm{Ar}\coth z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}$$

ja

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z,$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i\sinh z.$$

## Kompleksmuutuja funktsiooni integraal

Olgu antud sile või tükati sile lõpliku pikkusega Jordani joon $\Gamma$

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

ja sellel joonel pidev funktsioon $f(z)$. Lahtise joone $\Gamma$ korral loeme positiivseks parameetri $t$ kasvamisele vastavat suunda ja kinnise joone $\Gamma$ korral suunda, milles liikudes jääb hõlmatav piirkond vasakule. Olgu $z(\alpha)$ joone alguspunkt ja $z(\beta)$ joone lõpppunkt. Jaotame joone punktidega $z_k$ $(k = 0; 1; \ldots; n)$ $n$ osaks, kusjuures $z_0 = z(\alpha)$ ja $z_n = z(\beta)$. Olgu $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ja $\varsigma_k$ olgu $k$-nda osakaare punkt.

**Definitsioon 1**. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty,\ \max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k,$$

mis ei sõltu joone $\Gamma$ osakaarteks jaotamise viisist ja punktide $\varsigma_k$ valikust, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(z)$ integraaliks üle joone $\Gamma$.

Seega

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty,\ \max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k. \tag{2.17}$$

**Lause 1.** Kui $w = f(z) = u + iv$, siis

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\Gamma} vdx + udy. \tag{2.18}$$

**Lause 2.** Kui $w = f(z) = u + iv$ ja joon on antud kujul

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

siis

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t))\,dt \tag{2.19}$$

ehk

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,dt. \tag{2.20}$$

**Näide 1.** Leiame $\int_{\Gamma} \left(z^2 - z\right) dz$, kus $\Gamma$ on sirglõik punktist $z_\alpha = 1+i$ punkti $z_\beta = 3 + 4i$.

Kuna joon on esitatav parameetrilise võrrandiga

$$z = 1 + i + t(2 + 3i) \quad (0 \le t \le 1),$$

siis valemi (2.20) põhjal

$$\int\limits_{\Gamma} \left(z^2 - z\right) dz = \int\limits_{0}^{1} \Big((1 + i + t(2 + 3i))^2 - (1 + i + t(2 + 3i))\Big)(2 + 3i)\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (2 + 3i)\left(i - 4t + 7it - 1 - 5t^2 + 12it^2\right) dt = 3i - 209/6.$$

$\diamondsuit$

**Ülesanne 1**. Leidke integraal $\int_{\Gamma} \left(z^2 + z\overline{z}\right) dz$, kus $\Gamma : |z| = 2 \wedge 0 \le \arg z \le \pi/2$.

Tõestage järgmised väited.

**Lause 3 (Cauchy teoreem).** Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas $D$, siis

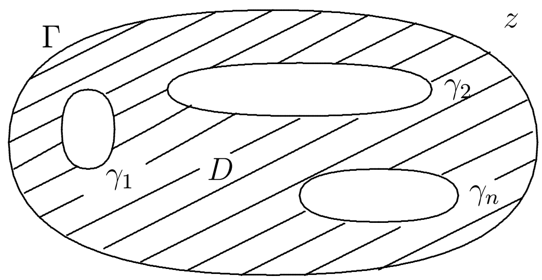
$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0 \tag{2.21}$$

iga piirkonda $D$ kuuluva kinnise joone $\Gamma$ korral.

**Näide 2.** Leiame $\int_\Gamma \cos z\, dz$, kus $\Gamma : |z-2+3i| = 4$.

Kuna $\cos z$ on analüütiline kogu komplekstasandil, siis Lause 3 põhjal uuritav integraal võrdub nulliga. $\diamondsuit$

**Lause 4 (Cauchy teoreem mitmelisidusa piirkonna jaoks ).** Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline mitmelisidusas piirkonnas $D$ ja selle rajajoontel,




siis integraal üle välise rajajoone $\Gamma$ võrdub integraalide summaga üle sisemiste rajajoonte $\gamma_k$ $(k = 1; \ldots ; n)$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{2.22}$$

**Definitsioon 2**. Funktsiooni $F(z)$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *algfunktsiooniks* piirkonnas D, kui selle piirkonna igas punktis $F'(z) = f(z)$.

**Lause 5 (Newton-Leibnizi valem).** Kui $F(z)$ on piirkonnas $D$ analüütilise funktsiooni $f(z)$ algfunktsioon ja $z_0, z \in D$, siis

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z}. \tag{2.23}$$

**Näide 3**. Leiame $\int_1^{2i} \cos z\, dz$.

Kuna $\cos z$ on analüütiline kogu komplekstasandil ja $(\sin z)' = \cos z$, siis valemi (2.23) põhjal

$$\int_1^{2i} \cos z\, dz = \sin z\Big|_1^{2i} = \cos(2i) - \cos 1 = \cosh 2 - \cos 1. \qquad \diamondsuit$$

**Lause 5 (Cauchy integraalvalem).** Kui $f(z)$ on analüütiline funktsioon ühelisidusas piirkonnas $D$ ja $\Gamma$ kinnine iseennast mittelõikav joon selles piirkonnas ning $\varsigma$ kuulub joone $\Gamma$ poolt hõlmatavasse piirkonda, siis

$$f(\varsigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f\,(z)\,dz}{z-\varsigma}. \tag{2.24}$$

**Näide 4**. Leiame $\int_{|z|=4} \dfrac{\sin z}{z - i\pi/2}\, dz$.

Kuna $\sin z$ on analüütiline ringis $|z| < 4$ ja $\varsigma = i\pi/2$ kuulub sellesse ringi, siis valemi (2.24) põhjal

$$\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z - i\pi/2}\, dz = 2\pi i \sin \frac{i\pi}{2} = -2\pi \sinh \frac{\pi}{2}. \qquad \diamondsuit$$

**Lause 6 (Cauchy integraalvalem tuletiste korral).** Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline ühelisidusas piirkonnas $D$ ja $\Gamma$ kinnine iseennast mittelõikav joon selles piirkonnas ning $\varsigma$ kuulub joone $\Gamma$ poolt hõlmatavasse piirkonda, siis funktsioon $f(z)$ on punktis $\varsigma$ lõpmata arv kordi diferentseeruv, kusjuures

$$f^{(n)}(\varsigma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-\varsigma)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{2.25}$$

**Näide 5**. Leiame $\int_{|z|=5} \dfrac{e^z}{(z+i\pi)^4}\, dz$.

Kuna $e^z$ on analüütiline ringis $|z| < 5$ ja $\varsigma = -i\pi$ kuulub sellesse ringi, siis $n = 3$ korral saame valemi (2.25) abil

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z+i\pi)^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} (e^\varsigma)''' \Big|_{\varsigma=-i\pi} = \frac{2\pi i}{3!} e^{-i\pi} =$$

$$= \frac{\pi i}{3} (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -\frac{i\pi}{3}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 1.** Leidke $\int_{|z|=10} \dfrac{\cosh z}{(z - i\pi/2)^3}\, dz$.

**Lause 7**. Iga ringis $|z - c| < R$ analüütiline funktsioon $f(z)$ on selles ringis ühesel viisil arendatav astmeritta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k, \tag{2.26}$$

kus $c_k = f^{(k)}(c)/k!$

**Näide 6**. Leiame funktsiooni $f(z) = 2/(1+3z)$ arenduse astmeritta $z-i-1$ astmete järgi ringis $|z - i - 1| < 5/3$.

Näidake, et $z = -1/3$ on selle funktsiooni ainus iseärane punkt. Kuna punkti $i+1$ kaugus punktist $-1/3$ on

$$|i + 1 - (-1/3)| = |i + 4/3| = 5/3,$$

siis see funktsioon on analüütiline rõngas $|z - i - 1| < 5/3$ ja Lause 7 põhjal on see funktsioon ühesel viisil arendatav astmeritta $z - i - 1$ astmete järgi ringis $|z - i - 1| < 5/3$. Et

$$1/(1-q) \overset{|q|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

siis

$$\frac{2}{1+3z} = \frac{2}{4+3i+3(z-i-1)} =$$

$$= \frac{2}{4+3i}\frac{1}{1-\dfrac{-3(z-i-1)}{4+3i}} = \left[\begin{array}{c}\left|\dfrac{-3(z-i-1)}{4+3i}\right| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z-i-1| < 5/3\end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{4+3i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3(z-i-1)}{4+3i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2\cdot 3^k(z-i-1)^k}{(4+3i)^{k+1}}. \quad \diamondsuit$$

**Ülesanne 2.** Leidke funktsiooni $f(z) = 1/(4-9z^2)$ arendus astmeritta $z$ astmete järgi ringis $|z| < 2/3$.

## 1.3 Laurent'i rida. Resiidid

**Definitsioon 1**. Funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-c)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-c)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k$$

nimetatakse Laurenti reaks $z-c$ astmete järgi, kusjuures $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-c)^k$ nimetatakse Laurent'i rea peaosaks ja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k$ Laurent'i rea korrapäraseks osaks.

**Lause 1**. Rõngas $r < |z-c| < R$ analüütiline funktsioon $f(z)$ on selles rõngas ühesel viisil arendatav Laurent'i ritta kujul

$$f(z) \overset{r<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-c)^k.$$

**NB!** Erinevate rõngaste korral on üldjuhul Laurent'i rea kordajad erinevad.

**Definitsioon 2**. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti $c$ nimetatakse isoleeritud iseäraseks punktiks, kui leidub selline punkti $c$ ümbrus, milles ei ole selle funktsiooni teisi iseärasid punkte.

Järgnevas käsitleme vaid isoleeritud iseäraseid punkte. Kui $c$ on funktsiooni $f(z)$ isoleeritud iseärane punkt, siis leidub selline rõngas $0 < |z-c| < R$, milles $f(z)$ on analüütiline. Lause 1 põhjal on $f(z)$ selles rõngas arendatav Laurent'i ritta

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-c)^k. \tag{3.1}$$

**Definitsioon 3**. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti $c$ nimetatakse kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks, kui arenduses (3.1) puuduvad $z-c$ negatiivsed astmed, st

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-c)^k.$$

**Definitsioon 4**. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti $c$ nimetatakse pooluseks, kui arenduses (3.1) on $z-c$ negatiivseid astmeid vaid lõplik arv.

**Definitsioon 5**. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti $c$ nimetatakse $m$-ndat järku pooluseks, kui arendus (3.1) on kujul

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-c)^k \quad (c_{-m} \neq 0).$$

**Definitsioon 6**. Funktsiooni $f(z)$ iseärast punkti $c$ nimetatakse oluliselt iseäraseks punktiks, kui arenduses (3.1) peaosa liikmete arv on lõpmatu.

**Näide 1**. Leiame funktsiooni $f(z) = (\sin z)/z$ iseärase punkti $z=0$ liigi.

Nii $\sin z$ kui ka $z$ on analüütilised kogu komplekstasandil. Seega $(\sin z)/z$ on analüütiline kogu komplekstasandil, välja arvatud $z=0$. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0<|z|<+\infty$ :

$$\frac{\sin z}{z} \overset{|z|<\infty}{=} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!}{z} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Kuna $(\sin z)/z$ arenduses muutuja $z$ astmete järgi puuduvad negatiivsed astmed, siis vastavalt Definitsioonile 3 on tegemist kõrvaldatava iseärase punktiga. $\diamondsuit$

**Ülesanne 1**. Leidke funktsiooni $f(z) = (e^z - 1)/z^4$ iseärase punkti $z=0$ liik.

**Näide 2**. Leiame funktsiooni $f(z) = (1-\cos z)/z^4$ iseärase punkti $z=0$ liigi.

Punkt $z=0$ on selle funktsiooni iseärane punkt. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0<|z|<+\infty$ :

$$\frac{1-\cos z}{z^4} \overset{|z|<\infty}{=} \frac{1-\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/(2k)!}{z^4} \overset{0<|z|<+\infty}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-4}}{(2k)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \frac{1}{2!z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-4}}{(2k)!}.$$

Vastavalt Definitsioonile 5 on tegemist teist järku poolusega. $\diamondsuit$

**Ülesanne 2**. Leidke funktsiooni $f(z) = (1-\cos 3z)/z^2$ iseärase punkti $z=0$ liik.

**Näide 3**. Leiame funktsiooni $f(z) = e^{1/(z-i)}$ iseärase punkti $z=i$ liigi.

Punkt $z=i$ on selle funktsiooni iseärane punkt. Arendame funktsiooni Laurent'i ritta rõngas $0<|z-i|<+\infty$ :

$$e^{1/(z-i)} \overset{(1/|z-i|)<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/(z-i))^k}{k!} \overset{0<|z-i|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(z-i)^k}$$

Vastavalt Definitsioonile 6 on tegemist oluliselt iseärase punktiga. $\diamondsuit$

**Ülesanne 3**. Leidke funktsiooni $f(z) = \sin(1/(z+4i))$ iseärase punkti $z=-4i$ liik.

**Lause 2**. Funktsiooni $f(z)$ iseärase punkti $c$ korral kehtivad väited:

- $c$ on kõrvaldatav iseärane punkt parajasti siis, kui eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{z\to c} f(z)$;
- $c$ on poolus parajasti siis, kui $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$;
- $c$ on oluliselt iseärane punkt parajasti siis, kui ei eksisteeri lõplikku ega lõpmatut piirväärtust funktsioonist $f(z)$ piirprotsessis $z \to c$.

Lõpmatuspunkti $\infty$ loeme iga funktsiooni $f(z)$ korral iseäraseks punktiks.

**Definitsioon 7**. Kui leidub selline $r > 0$, et $f(z)$ on analüütiline rõngas $r < |z| < +\infty$, siis lõpmatuspunkti nimetatakse funktsiooni $f(z)$ isoleeritud iseäraseks punktiks.

**Definitsioon 8**. Kui arenduses

$$f(z) \overset{r<|z-c|<+\infty}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \tag{3.2}$$

puuduvad muutuja $z$ positiivsed astmed, siis $\infty$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks.

**Definitsioon 9**. Punkti $\infty$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *pooluseks*, kui arenduses (3.2) on muutuja $z$ positiiseid astmeid vaid lõplik arv.

**Definitsioon 10**. Punkti $\infty$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ korral $m$-ndat järku pooluseks, kui arendus (3.2) on kujul

$$f(z) \overset{r<|z-c|<+\infty}{=} \sum_{k=-\infty}^{m} c_k z^k \quad (c_m \neq 0)\,.$$

**Definitsioon 11**. Punkti $\infty$ nimetatakse funktsiooni $f(z)$ korral oluliselt iseäraseks punktiks, kui arendus (3.2) on muutuja $z$ positiiseid astmeid lõpmata arv.

**Näide 4**. Leiame funktsiooni $f(z) = \cos z^2$ iseärase punkti $z = \infty$ liigi.

Kuna

$$\cos z^2 \overset{|z^2|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(z^2\right)^{2k}}{(2k)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{4k}}{(2k)!},$$

siis $z = \infty$ on Definitsiooni 11 põhjal funktsiooni $\cos z^2$ oluliselt iseärase punkt. $\diamondsuit$

**Ülesanne 4**. Leidke funktsiooni $f(z) = 1 - ze^{z^2}$iseärase punkti $z = \infty$ liik.

Kui $c$ on funktsiooni $f(z)$ (isoleeritud) iseärane punkt, siis

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-c\right)^k.$$

**Definitsioon 1**. Kordajat $c_{-1}$ Laurent'i arenduses (3.1) nimetatakse funktsiooni $f(z)$ *resiidiks* punktis $c$.

Funktsiooni $f(z)$ *resiidiks* punktis $c$ tähistatakse

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) \text{ või } \operatorname{res}\left[f(z), c\right].$$

Kuna funktsiooni $f(z)$ Laurent'i arenduses (3.1) kõrvaldatava iseärase punkti $c$ ümbruses puubub Laurent'i rea peaosa, siis kehtib järgmine väide.

**Järeldus 1**. Funktsiooni $f(z)$ resiid kõrvaldatavas iseärases punktis $c$ võrdub nulliga.

**Näide 5**. Leiame funktsiooni $z^4 \sin(1/z)$ resiidi iseärases punktis 0.

Kuna

$$z^4 \sin(1/z) \overset{0<|z|}{=} z^4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \overset{0<|z|<+\infty}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k-3}} = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k-3}},$$

siis $\operatorname{res}_{z=0} z^4 \sin(1/z) = 1/5! = 1/120.$ $\diamondsuit$

**Ülesanne 5**. Leidke funktsiooni $1 - z^6 \cos(1/z)$ resiid iseärases punktis 0.

**Lause 3.** Kehtib seos

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-c|=r} f(z)dz, \tag{3.3}$$

kus $0 < r < R$ ja $f(z)$ on analüütiline rõngas $0 < |z-c| < R$.

Tõestus. Saame

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-c|=r} f(z)dz \overset{f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-c)^k}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-c|=r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-c)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_{|z-c|=r} (z-c)^k dz =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} z = c + re^{i\varphi} \ (0 \le \varphi \le 2\pi), \\ dz = rie^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= \left[ \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} e^{i0\varphi} d\varphi = 2\pi, \text{ kui } k = -1, \\ \dfrac{e^{i(k+1)2\pi} - e^{i(k+1)0}}{i(k+1)} = 0, \text{ kui } k \ne -1 \end{array} \right. \right] =$$

$$= c_{-1} = \operatorname{res}_{z=c} f(z). \qquad \square$$

**Lause 4**. Kui $f(z)$ on analüütiline joone $\Gamma$ poolt piiratud piirkonnas ja rajajoonel $\Gamma$, välja arvatud lõplik arv asetsevaid punkte $c_k$ $(k = 1; \ldots; n)$, siis

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=c_k} f(z). \tag{3.4}$$

**Lause 5**. Kui $c$ on funktsiooni $f(z)$ $m$-järku poolus, siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to c} \frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}}. \tag{3.5}$$

Kuna $c$ on funktsiooni $f(z)$ $n$-järku poolus, siis

$$f(z) \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k\,(z-c)^k \quad (c_{-m} \neq 0)\,.$$

Seega

$$f(z)\,(z-c)^m \overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k\,(z-c)^{k+m}$$

ja

$$\frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$\overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$\overset{0<|z-c|<R}{=} \sum_{k=-1}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1}$$

ning

$$\lim_{z\to c} \frac{d^{n-1}\left[f(z)\,(z-c)^m\right]}{dz^{m-1}} \overset{0<|z-c|<R}{=}$$
$$= \lim_{z\to c} \sum_{k=-1}^{\infty} (k+m)\,(k+m-1)\cdots(k+2)\,c_k\,(z-c)^{k+1} =$$
$$= (m-1)\,(m-2)\cdots 1 c_{-1} = (m-1)!\operatorname{res}_{z=c} f(z). \qquad \square$$

**Näide 6**. Leiame funktsiooni $e^{2z}/\,(z-1)^3$ resiidi iseärases punktis 1.
Näidake, et punkt 1 on selle funktsiooni kolmandat järku poolus. Valemi (3.5) põhjal

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 1} \frac{d^2\left[\left(e^{2z}/\,(z-1)^3\right)(z-1)^3\right]}{dz^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{d^2 e^{2z}}{dz^2} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} 4e^{2z} = 2e^2. \qquad \diamondsuit$$

**Järeldus 1**. Kui $c$ on funktsiooni $f(z)$ lihtne poolus, siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c} \left[f(z)\,(z-c)\right] \tag{3.6}$$

**Ülesanne 6**. Leiame funktsiooni $(\cos 3z)\,/\,(z+\pi)^3$ resiidi iseärases punktis $-\pi$.

**Näide 7**. Leiame funktsiooni $(\cos z)\,/\,(z-2)$ resiidi iseärases punktis 2.

Näidake, et punkt 2 on selle funktsiooni lihtne poolus. Valemi (3.6) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{\cos z}{z-2} = \lim_{z\to 2} \left[ ((\cos z)\,/\,(z-2))\,(z-2) \right] = \lim_{z\to 2} \cos z = \cos 2. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 7**. Leiame funktsiooni $(\cosh z)\,/\,(z-\pi)$ resiidi iseärases punktis $\pi$.

**Järeldus 2**. Kui $c$ on funktsiooni $f(z)$ lihtne poolus ja

$$f(z) = \frac{\varphi\,(z)}{\psi\,(z)}, \tag{3.7}$$

kusjuures $\varphi\,(c) \neq 0$, $\psi\,(c) = 0$ ning $\psi\,(c) \neq 0$ siis

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \frac{\varphi\,(c)}{\psi'\,(c)}. \tag{3.8}$$

*Tõestus*. Seoste (3.6) ja (3.7) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c} \left[ \frac{\varphi\,(z)}{\psi\,(z)}\,(z-c) \right] = \frac{\lim_{z\to c} \varphi\,(z)}{\lim_{z\to c} \dfrac{\psi\,(z)-\psi\,(c)}{(z-c)}} = \frac{\varphi\,(c)}{\psi'\,(c)}. \quad \square$$

**Näide 8**. Leiame valemi (3.8) abil funktsiooni $(\cos z)\,/\,(z-2)$ resiidi iseärases punktis 2.

Valime $\varphi\,(z) = \cos z$ ja $\psi\,(z) = z-2$. Et $\varphi\,(2) = \cos 2 \neq 0$ ja $\psi\,(2) = 0$ ning $\psi'\,(2) = 1 \neq 0$, siis valemi (3.8) abil saame

$$\operatorname{res}_{z=2} \frac{\cos z}{z-2} = \frac{\cos 2}{1} = \cos 2. \qquad \diamondsuit$$

**Näide 9**. Leiame

$$\oint_{|z-2i|=\pi} \frac{dz}{z^2+9}$$

Lause 4 abil.

Et funktsiooni $1/(z^2+9)$ poolustest $z_1 = 3i$ ja $z_2 = -3i$ vaid $z_1 = 3i$ paikneb joone $|z-2i| = \pi$ poolt piiratud ringis, siis Lause 4 põhjal

$$\oint_{|z-2i|=\pi} \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=3i} \frac{1}{z^2+9} = 2\pi i \ \frac{1}{2\cdot 3i} = \pi/3. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 8**. Leidke

$$\oint_{|z-100|=100} \frac{dz}{z^2+8}$$

Lause 4 abil.

**Definitsioon 2**. Funktsiooni $f(z)$ resiidiks punktis $\infty$ defineeritakse, kui

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)dz,$$

kus $0 < r < R$ ja $f(z)$ on analüütiline rõngas $r < |z-c| < +\infty$.

Tõestage järgmine väide.

**Lause 6**. Kui funktsioon $f(z)$ on analüütiline kogu laiendatud kompleks-tasandil, välja arvatud lõplik arv punkte $c_k$ $(k = 1; \ldots; n)$, siis

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=c_k} f(z) = 0.$$

**Ülesanne 9.** Arvutage resiidide abil $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 (z+1)} dz$.

# Maatriksargumendiga funktsioonid

**Definitsioon 1**. Maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ spektriks nimetatakse selle maatriksi kõigi omaväärtuste hulka.

**Lause 1.** Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $f(z)$ on analüütiline lahtises piirkonnas $\mathfrak{D}$ ning $\Gamma$ on kinnine lihtne joon (ei lõika iseennast) piirkonnas $\mathfrak{D}$ ja maatriksi $A$ spekter $\lambda(A)$ sisaldub joone $\Gamma$ poolt hõlmatavas piirkonnas $\mathfrak{D}_\Gamma$, siis

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)(zI-A)^{-1} dz\,, \tag{3.9}$$

kusjuures integraali rakendatakse maatriksile elementide kaupa.

**Näide 1.** Olgu $f(z) = e^z$ ja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Leiame $e^A$.

Et

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \end{cases},$$

siis Lause 1 tingimusi rahuldavaks jooneks $\Gamma$ sobib ringjoon $|z| = 2$. Valemi (3.9) rakendamiseks leiame esiteks

$$zI - A = z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix}$$

ja

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI-A)} \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} & \dfrac{1}{z^2-2z+2} \\ -\dfrac{1}{z^2-2z+2} & \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} \end{pmatrix}.$$

Valemi (3.9) abil saame

$$e^A = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} e^z \begin{pmatrix} \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} & \dfrac{1}{z^2-2z+2} \\ -\dfrac{1}{z^2-2z+2} & \dfrac{z-1}{z^2-2z+2} \end{pmatrix} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \begin{pmatrix} \dfrac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} & \dfrac{e^z}{z^2-2z+2} \\ -\dfrac{e^z}{z^2-2z+2} & \dfrac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} \end{pmatrix} dz =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \dfrac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2} & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \dfrac{e^z dz}{z^2-2z+2} \\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \dfrac{e^z dz}{z^2-2z+2} & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \dfrac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2} \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$\oint_{|z|=2} \frac{(z-1)\,e^z dz}{z^2-2z+2} \overset{(3.4)}{=}$$
$$= 2\pi i \left( \operatorname*{res}_{z=1+i} \frac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} + \operatorname*{res}_{z=1-i} \frac{(z-1)\,e^z}{z^2-2z+2} \right) \overset{(3.8)}{=}$$
$$= 2\pi i \left( \left.\frac{(z-1)\,e^z}{2z-2}\right|_{z=1+i} + \left.\frac{(z-1)\,e^z}{2z-2}\right|_{z=1-i} \right) =$$
$$= 2\pi i \left( \frac{e^{1+i}+e^{1-i}}{2} \right) = 2\pi i\, e \frac{e^i+e^{-i}}{2} = 2\pi i\, e\cos 1$$

ja

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-2z+2} \overset{(3.4)}{=}$$
$$= 2\pi i \left( \operatorname*{res}_{z=1+i} \frac{e^z}{z^2-2z+2} + \operatorname*{res}_{z=1-i} \frac{e^z}{z^2-2z+2} \right) \overset{(3.8)}{=}$$
$$= 2\pi i \left( \left.\frac{e^z}{2z-2}\right|_{z=1+i} + \left.\frac{e^z}{2z-2}\right|_{z=1-i} \right) =$$
$$= 2\pi i \left( \frac{e^{1+i}-e^{1-i}}{2i} \right) = 2\pi i\, e \frac{e^i-e^{-i}}{2i} = 2\pi i\, e\sin 1,$$

siis

$$e^A = e \cdot \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 1**. Leidke Lause 1 abil $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ülesanne 2**. Leidke Lause 1 abil $e^A$, $\cos A$, $\sin A$ ja $\ln(I+A)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} .1 & .1 \\ -.1 & .2 \end{pmatrix}.$$

**Ülesanne 3**. Leidke Lause 1 abil $e^A$, $\cos A$ ja $\sin A$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Laplace'i teisendused

Käsitleme pidevat Laplace'i teisendust ja diskreetset Laplace'i teisendust.

**Definitsioon 1.** Funktsiooni $f(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ nimetatakse originaaliks, kui:

- $f(t) = 0$, kui $t < 0$;
- $f(t)$ on tükati pidev;
- $\exists\, M > 0 \;\wedge\; \alpha \in \mathbf{R}: \;|f(t)| \le Me^{\alpha t}$.

**Definitsioon 2.** Funktsiooni

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s = \sigma + i\omega) \tag{4.1}$$

nimetatakse funktsiooni $f(t)$ Laplace'i teisendiks ja kujutust $f(t) \to F(s)$ eeskirja (4.1) põhjal Laplace'i teisenduseks.

Kasutame tähistust

$$\mathrm{L}\, f(t) = F(s) \text{ ja } f(t) = \mathrm{L}^{-1}F(s),$$

kusjuures kujutust $\mathrm{L}^{-1} : F(s) \to f(t)$ nimetatakse Laplace'i pöördteisenduseks.

Tõestage Laused 1 ja 2.

**Lause 1.** Igal originaalil leidub Laplace'i teisend pooltasandis $\Re s = \sigma > \alpha$.

**Lause 2.** Laplace'i teisendus on lineaarne, st

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\; f_1(t) = F_1(s) \;\wedge\; \mathrm{L}\; f_2(t) = F_2(s) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \mathrm{L}\; (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s). \end{aligned}$$

**Näide 1**. Leiame funktsiooni $f(t) = \mathbf{1}(t)$, kus

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \ge 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}$$

on Heaviside'i funktsioon, Laplace'i teisendi.

Kontrollige, et $\mathbf{1}(t)$ on originaal, kusjuures $M = 1 \ \wedge \ \alpha = 0$. Valemi (4.1) abil saame

$$\mathrm{L}\,\mathbf{1}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}(t) e^{-st} dt \ = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \ = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-(\sigma+i\omega)t} dt =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} -\frac{e^{-(\sigma+i\omega)t}}{\sigma+i\omega}\bigg|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{-e^{-(\sigma+i\omega)A} + e^{-(\sigma+i\omega)0}}{s} =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1 - e^{-\sigma A} e^{-i\omega A}}{s} = \left[ \begin{array}{c} \text{kuna } \left|e^{-i\omega A}\right| = 1, \\ \text{siis } \sigma > 0 \Rightarrow e^{-\sigma A} \overset{A\to+\infty}{\to} 0 \end{array} \right] = \frac{1}{s}. \quad \diamondsuit$$

**Näide 2**. Leiame funktsiooni $f(t) = e^{\beta t}\mathbf{1}(t)$, Laplace'i teisendi.
Kontrollige, et $e^{\beta t}\mathbf{1}(t)$ on originaal. Valemi (4.1) abil saame

$$\mathrm{L}\,\left(e^{\beta t}\mathbf{1}(t)\right) = \int_0^{+\infty} e^{\beta t}\mathbf{1}(t) e^{-st} dt \ = \int_0^{+\infty} e^{\beta t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \ =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{\beta t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{(\beta-\sigma-i\omega)t}}{\beta-\sigma-i\omega}\bigg|_0^A =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{(\beta-\sigma-i\omega)A} - e^{(\beta-\sigma-i\omega)0}}{\beta - s} =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1 - e^{(\beta-\sigma)A} e^{-i\omega A}}{s-\beta} \overset{\sigma\geq\beta}{=} \frac{1}{s-\beta}. \quad \diamondsuit$$

**Ülesanne 1**. Tõestage Laplace'i teisenduse põhiomadused:
1. $\mathrm{L}\,f(t) = F(s) \ \Rightarrow \ \mathrm{L}\,f(\beta t) = \left(F(s/\beta)\right)/\beta$ (sarnasusteoreem);
2. $\mathrm{L}\,\left(f(t)\mathbf{1}(t)\right) = F(s) \ \Rightarrow \mathrm{L}\,\left(f(t-\beta)\mathbf{1}(t-\beta)\right) = e^{-\beta s}F(s)$ (hilinemisteoreem);
3. $\mathrm{L}\,f(t) = \left(\int_0^T f(t)e^{-st}dt\right)\Big/\left(1 - e^{-Ts}\right)$ (perioodilise originaali kujutis);
4. $\mathrm{L}\,f(t) = F(s) \ \Rightarrow \ \mathrm{L}\,\left(e^{-\beta s} f(\beta t)\right) = F(s+\beta)$ (kustumisteoreem);
5. $\mathrm{L}\,f(t) = F(s) \ \Rightarrow \ \left(\mathrm{L}\,f'(t) = sF(s) - f(0)\right) \ \wedge$
   $\wedge \ \left(\mathrm{L}\,f^{(n)}(t) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\right)$
   (originaali diferentseerimine);
6. $\mathrm{L}\,f(t) = F(s) \ \Rightarrow \ \mathrm{L}\,\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = F(s)/s$ (originaali integreerimine);
7. $\mathrm{L}\,f(t) = F(s) \ \Rightarrow \ \mathrm{L}\,\left(f(t)/t\right) = \int_s^\infty F(s)ds$ (kujutise integreerimine);
8. $\mathrm{L}\ f_1(t) = F_1(s) \ \wedge \ \mathrm{L}\ f_2(t) = F_2(s) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \ \mathrm{L}\,\left(\ f_1(t) * \ f_2(t)\right) = \mathrm{L}\,\left(\int_0^\infty f_1(t-\tau)\ f_2(\tau)d\tau\right) = F_1(s)F_2(s)$
   (konvolutsiooni kujutis).

**Ülesanne 2**. Tõestage Laplace'i teisenduse põhivalemid

| Originaal | Kujutis |
|---|---|
| $\mathbf{1}(t)$ | $1/s$ |
| $\delta\,(t)$ | $1$ |
| $\delta^{(k)}\,(t)\ \ (k \in \mathbf{N})$ | $s^k$ |
| $t^n$ | $n!/s^{n+1}$ |
| $t^\alpha\ \ (\alpha > -1)$ | $\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$ |
| $e^{\beta t}$ | $1/\,(s-\beta)$ |
| $t^n e^{\beta t}$ | $(n!)\,/\,(s-\beta)$ |
| $\sin\omega t$ | $\omega/\left(s^2+\omega^2\right)$ |
| $\cos\omega t$ | $s/\left(s^2+\omega^2\right)$ |
| $\sinh\omega t$ | $\omega/\left(s^2-\omega^2\right)$ |
| $\cosh\omega t$ | $s/\left(s^2-\omega^2\right)$ |

| Originaal | Kujutis |
|---|---|
| $e^{\beta t}\sin\omega t$ | $\omega \Big/ \left((s-\beta)^2+\omega^2\right)$ |
| $e^{\beta t}\cos\omega t$ | $(s-\beta) \Big/ \left((s-\beta)^2+\omega^2\right)$ |
| $e^{\beta t}\sinh\omega t$ | $\omega \Big/ \left((s-\beta)^2-\omega^2\right)$ |
| $e^{\beta t}\cosh\omega t$ | $(s-\beta) \Big/ \left((s-\beta)^2-\omega^2\right)$ |
| $t\sin\omega t$ | $2\omega s \Big/ \left(s^2+\omega^2\right)^2$ |
| $t\cos\omega t$ | $\left(s^2-\omega^2\right) \Big/ \left(s^2+\omega^2\right)^2$ |
| $t\sinh\omega t$ | $2\omega s \Big/ \left(s^2-\omega^2\right)^2$ |
| $t\cosh\omega t$ | $\left(s^2+\omega^2\right) \Big/ \left(s^2-\omega^2\right)^2$ |

**Lause 3.** Kui kujutis $F(s) = F_1(s)/F_2(s)$ on ratsionaalfunktsioon, kusjuures polünoomi  aste on väiksem kui polünoomi  aste ja kujutise iseärasteks punktideks $s_k$ $(k = 1;\ldots;n)$ on lihtsad poolused, siis originaal $f(t) = \mathrm{L}^{-1}\,F(s)$ avaldub kujul

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)} e^{s_k t}.$$

**Lause 4.** Kui kujutis $F(s) = F_1(s)/F_2(s)$ on ratsionaalfunktsioon, kusjuures polünoomi  aste on väiksem kui polünoomi  aste ja kujutise iseärasteks punktideks on poolused $s_k$ $(k = 1;\ldots;n)$ järkudega $m_k$ $(k = 1;\ldots;n)$, siis originaal $f(t) = \mathrm{L}^{-1}\,F(s)$ avaldub kujul

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{s\to s_k} \left\{ \frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} \left[ (s-s_k)^{m_k} \frac{F_1(s)}{F_2(s)} e^{st} \right] \right\}.$$

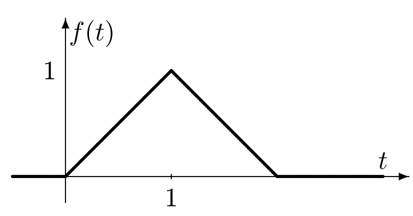
**Lause 5.** Kui kujutis $F(s)$ on analüütiline funktsioon lõpmatuspunktis ja $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ ning leidub selline $R$, et

$$F(s) \overset{R<|s|<+\infty}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{s^{k+1}},$$

siis

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k t^k}{k!}.$$

**Näide 3**. Leiame graafiliselt esitatud originaali



kujutise.

Veenduge, et

$$\begin{aligned} f(t) &= t\,(\mathbf{1}\,(t) - \mathbf{1}\,(t-1)) + (2-t)\,(\mathbf{1}\,(t-1) - \mathbf{1}\,(t-2)) = \\ &= t\,\mathbf{1}\,(t) - 2\,(t-1)\;\mathbf{1}\,(t-1) + (t-2)\;\mathbf{1}\,(t-2)\,. \end{aligned}$$

Kasutades hilinemisteoreemi saame

$$\mathrm{L}\,(\,t\,\mathbf{1}\,(t)) = \frac{1}{s^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{L}\,(\;(t-1)\;\mathbf{1}\,(t-1)) = \dfrac{e^{-s}}{s^2}, \\ \mathrm{L}\,(\;(t-2)\;\mathbf{1}\,(t-2)) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2}. \end{cases}$$

Seega

$$\mathrm{L}\,f(t) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right). \qquad \diamondsuit$$

**Näide 4**. Leiame perioodilise originaali

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-k)\,(\mathbf{1}\,(t-k) - \mathbf{1}\,(t-k-1))$$

kujutise.

Skitseerige funktsiooni graafik. Osutub, et $T = 1$. Kasutame perioodilise originaali kujutise valemit

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\,f(t) &= \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt = \\ &= \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 te^{-st}dt = \frac{1 - se^{-s} - e^{-s}}{s^2\,(1-e^{-s})}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (t-k)\,(\mathbf{1}\,(t-k) - \mathbf{1}\,(t-k-1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((t-k)\,\mathbf{1}\,(t-k) - (t-k-1)\,\mathbf{1}\,(t-k-1) - \mathbf{1}\,(t-k-1)) \end{aligned}$$

ja

$$\mathrm{L}\,\mathbf{1}\,(t) = \frac{1}{s},\; \mathrm{L}\;(t\,\mathbf{1}\,(t)) = \frac{1}{s^2}$$

ning hilinemisteoreemi põhjal

$$\mathrm{L}\,\mathbf{1}\,(t-k-1) = \frac{1}{s}e^{-(k+1)s},\; \mathrm{L}\;((t\,-k)\,\mathbf{1}\,(t-k)) = \frac{1}{s^2}e^{-ks},$$

siis

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}\, f(t) &= \mathrm{L} \sum_{k=0}^{\infty} \left((t-k)\,\mathbf{1}\,(t-k) - (t-k-1)\,\mathbf{1}\,(t-k-1) - \mathbf{1}\,(t-k-1)\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s^2} e^{-ks} - \frac{1}{s^2} e^{-(k+1)s} - \frac{1}{s} e^{-(k+1)s} \right) = \\
&= \frac{1-e^{-s}-s}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ks} = \frac{1-e^{-s}-s}{s^2} \frac{1}{1-e^{-s}}. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

**Ülesanne 3.** Leidke perioodilise originaali

$$
f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\mathbf{1}\,(t-k) - \mathbf{1}\,(t-k-1)\right)
$$

kujutis.

**Näide 5**. Leiame kujutise integreerimise abil funktsiooni $(\sin 2t)\,/t$ kujutise. Kuna

$$
\mathrm{L}\ \sin 2t\ = 2/\left(s^2+4\right)
$$

siis kujutise integreerimise abil abil saame

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}\, \frac{\sin 2t}{t} &= \int_s^{\infty} \frac{2}{s^2+4} ds = \lim_{A\to\infty} \arctan \frac{s}{2}\bigg|_s^A = \\
&= \lim_{A\to\infty} \left( \arctan \frac{s}{2} - \arctan \frac{A}{2} \right) = \\
&= \lim_{A\to\infty} 2 \left( \arctan \frac{s}{2} + \frac{i}{2} \ln \frac{1+iA/2}{1-iA/2} \right) = \\
&= \arctan \frac{s}{2} + \frac{i}{2} \ln(-1) = \\
&= \arctan \frac{s}{2} + \frac{i}{2} \left(\ln|-1| + i \arg(-1)\right) = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{s}{2}. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

**Ülesanne 4**. Leidke kujutise integreerimise abil funktsiooni $(\sin 2t)\,/t$ kujutis.

**Näide 6**. Leiame Lause 3abil kujutise

$$
F(p) = \frac{1}{s^2-9}
$$

originaali $f(t)$.

Kontrollige Lause 3 tingimuste täidetust. Et $F_1(s) = 1$ ja $F_2(s) = s^2 - 9$, $F_2'(s) = 2s$ ning $s_1 = 3$ ja $s_2 = -3$, siis Lause 3 põhjal

$$
f(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t} = \frac{1}{3} \sinh 3t. \qquad \diamondsuit
$$

**Ülesanne 5**. Leidke Lause 3abil kujutise

$$F(p) = \frac{1}{s^2+9}$$

originaal $f(t)$.

**Näide 7**. Leiame Lause 5abil kujutise

$$F(s) = \frac{1}{s^2-9}$$

originaali $f(t)$.

Kontrollige Lause 5 eelduste täidetust. Et

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2-9} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{1-9/s^2} \overset{\left|9/s^2\right|<1 \Leftrightarrow 3<|s|<+\infty}{=} \\ &= \frac{1}{s^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{s^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k}}{s^{2k+2}}, \end{aligned}$$

siis

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k}t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{3}\sinh 3t. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 6**. Leidke Lause 5abil kujutise

$$F(s) = \frac{1}{s^2+9}$$

originaal $f(t)$.

**Näide 8**. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$x'' - 4x = f(t),$$

kus

$$f(t) = \mathbf{1}(t) - 2\,\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2),$$

algtingimusi

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$$

rahuldava erilahendi.

Veenduge, et

$$\mathrm{L}\, f(t) = \mathrm{L}\ (\mathbf{1}(t) - 2\,\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2)) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right).$$

Kui uuritava võrrandi lahend $x(t)$ on originaal ja $\mathrm{L}\, x(t) = X(s)$, siis originaali diferentseerimislause põhjal saame

$$\mathrm{L}\, x'(t) = sX(s) - 0 = sX(s), \quad \mathrm{L}\, x''(t) = s^2X(s) - 1.$$

Seega uuritavale võrrandile vastab kujutiste vallas algebraline võrrand $X(s)$ suhtes

$$s^2X(s) - 1 - 4X(s) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right),$$

millest

$$X(s) = \frac{1 + \left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right)/s}{s^2 - 4} = \frac{1}{s^2 - 4} + \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s\left(s^2 - 4\right)}.$$

Et põhivalemi põhjal

$$\mathrm{L}^{-1}\frac{1}{s^2 - 4} = \frac{1}{2}\sinh 2t,$$

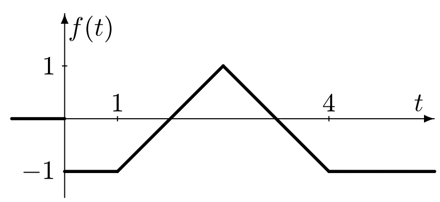
siis originaali abil

$$\mathrm{L}^{-1}\frac{1}{s\left(s^2 - 4\right)} = \int_0^t \frac{1}{2}\sinh 2\tau\, d\tau = \frac{1}{4}\cosh 2\tau\Big|_0^t = \frac{1}{4}\left(\cosh 2t - 1\right).$$

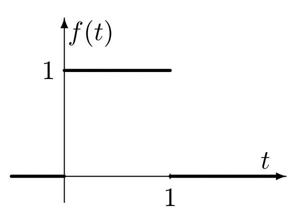
Kui kasutada veel hilinemislauset ja Laplace' teisenduse lineaarsust, siis saame

$$\begin{aligned} x(t) = &\left(\frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{4}\left(\cosh 2t - 1\right)\right)\mathbf{1}\left(t\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\cosh 2\left(t-1\right) - 1\right)\mathbf{1}\left(t-1\right) + \\ &+ \frac{1}{4}\left(\cosh 2\left(t-2\right) - 1\right)\mathbf{1}\left(t-2\right). \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

**Ülesanne 7.** Leidke graafiliselt antud originaali $f(t)$ kujutis, kui




**Ülesanne 8.** Leidke diferentsiaalvõrrandi $x'' + x = f(t)$ algtingimusi $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ rahuldav erilahend, kui $f(t)$ on antud graafiliselt




**Definitsioon 3.** Funktsiooni $f(n)$ $(n \in \mathbf{Z})$ nimetatakse võrefunktsiooniks, kui:

- $f(n) = 0$, kui $n < 0$;
- $\exists\, M > 0 \;\wedge\; \alpha \in \mathbf{R} : \; |f(n)| \le M e^{\alpha n}$.

**Definitsioon 4.** Funktsionaalrea

$$\mathrm{D}\, f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kq} f(k) \quad (q \in \mathbf{C}) \tag{4.2}$$

summat nimetatakse võrefunktsiooni $f(n)$ diskreetseks Laplace'i teisendiks ja kujutust D: $f(t) \to F(s)$ eeskirja (4.2) põhjal diskreetseks Laplace'i teisenduseks.

Kasutame tähistust

$$\mathrm{D}\, f(t) = F^*(q) \text{ ja } \; f(t) = \mathrm{D}^{-1} F^*(q),$$

kusjuures kujutust $\mathrm{D}^{-1} : F(s) \to f(t)$ nimetatakse diskreetse Laplace'i teisenduse pöördteisenduseks.

**Näide 9**. Leiame võrefunktsiooni

$$\mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1, \text{ kui } n \in \mathbf{N}_0, \\ 0, \text{ kui } n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}_0 \end{cases}$$

diskreetse Laplace'i teisenduse.

Definitsiooni 4 põhjal saame

$$\mathrm{D}\, \mathbf{1}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kq} 1 \overset{\left|e^{-q}\right|<1 \Leftrightarrow \Re q>0}{=} \frac{1}{1-e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 9.** Tõestage, et diskreetne Laplace'i teisendus on lineaarne.
**Ülesanne 10.** Näidake, et:

$$\mathrm{D}\, \left(n\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^2};$$

$$\mathrm{D}\, \left(n^2 \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^3} \left(e^q + 1\right);$$

$$\mathrm{D}\, \left(a^n \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q}{e^q - a};$$

$$\mathrm{D}\, \left(e^{\beta n}\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q}{e^q - e^\beta};$$

$$\mathrm{D}\, \left(\sinh(\beta n)\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q \sinh \beta}{e^{2q} - 2e^q \sinh \beta + 1};$$

$$\mathrm{D}\, \left(\cosh(\beta n)\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q \left(e^q - \cosh \beta\right)}{e^{2q} - 2e^q \cosh \beta + 1};$$

$$\mathrm{D}\, \left(\sin(\beta n)\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q \sin \beta}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1};$$

$$\mathrm{D}\, \left(\cos(\beta n)\, \mathbf{1}(n)\right) = \frac{e^q \left(e^q - \cos \beta\right)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}.$$

**Ülesanne 10.** Tõestage, et:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,(f(n)\mathbf{1}(n)) = F^*(q) &\Rightarrow \mathrm{D}\,(f(n-k)\mathbf{1}(n-k)) = e^{-kq}F^*(q);\\
\mathrm{D}\,f(n) = F^*(q) &\Rightarrow \mathrm{D}\,(f(n+k)) = e^{-kq}\left(F^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mq}f(m)\right);\\
\mathrm{D}\,f(n) = F^*(q) &\Rightarrow \mathrm{D}\,(-n\,f(n)) = \frac{d}{dq}F^*(q)\,;\\
\mathrm{D}\,f(n) = F^*(q) &\Rightarrow \mathrm{D}\,(f(n+1) - f(n)) = (e^q-1)\,F^*(q) - e^q f(0);\\
\mathrm{D}\,f(n) = F^*(q) &\Rightarrow \mathrm{D}\left(\sum_{m=0}^{n-1} f(k)\right) = \frac{F^*(q)}{e^q-1}.
\end{aligned}$$

**Näide 10.** Leiame diferentsvõrrandi

$$f(n+1) - f(n) = n.$$

Kasutame diskreetset Laplace'i teisendust

$$\mathrm{D}\,(f(n+1) - f(n)) = \mathrm{D}\,n.$$

Saame

$$(e^q-1)\,F^*(q) - e^q f(0) = \frac{e^q}{(e^q-1)^2}$$

ja

$$\begin{aligned}
F^*(q) &= \frac{e^q f(0)}{e^q-1} + \frac{e^q}{(e^q-1)^3}\\
&= \frac{e^q f(0)}{e^q-1} + \frac{1}{2}\frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{e^q}{(e^q-1)^2}
\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
f(n) &= \mathrm{D}^{-1}\left(\frac{e^q f(0)}{e^q-1} + \frac{1}{2}\frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{e^q}{(e^q-1)^2}\right) =\\
&= \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + f(0)\right)\mathbf{1}\,(n)\,. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

## 1.5 Ruumid

Vaatleme mõningaid *funktsionaalanalüüsi* mõisteid. Funktsionaalanalüüs võimaldab meile tuttavaid kõrgema matemaatika tulemusi üldistada juhule, kus arvhulkade asemel on suvalised hulgad.

**Definitsioon 1.** Hulka $X$ nimetatakse meetriliseks ruumiks, kui selle hulga igale elementide paarile $x$ ja $y$ on ühesel viisil vastavusse seatud reaalarv $\rho\,(x,y)$, kusjuures see vastavusse seadmine rahuldab tingimusi:

1° $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$ (samasusaksioom);
2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (sümmeetriaaksioom);
3° $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (kolmnurgaaksioom).
**Lause 1**. Kehtivad võrratused:
1° $\rho(x,y) \geq 0$;
2° $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$.
Tõestame neist esimese võrratuse

$$\rho(x,z) \overset{3^\circ}{\leq} \rho(x,y) + \rho(y,z) \overset{z=x}{\Rightarrow} \rho(x,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,x) \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \rho(x,x) \leq 2\rho(x,y) \overset{1^0}{\Rightarrow} 0 \leq \rho(x,y). \qquad \square$$

**Definitsioon 2.** Meetrilise ruumi $X$ elementi $x$ nimetatakse selle meetrilise ruumi elementidest koostatud jada $\{x_n\}$, piirväärtuseks, kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub selline naturaalarv $n_0$, et

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

**Definitsioon 3.** Hulki

$$S(x_0, r) = \{x \,|\, x \in X \,\wedge\, \rho(x, x_0) < r\}$$

ja

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \,|\, x \in X \,\wedge\, \rho(x, x_0) \leq r\}$$

nimetatakse vastavalt *lahtiseks* ja *kinniseks keraks* meetrilises ruumis $X$, kusjuures kera keskpunktiks on $x_0$ ja raadiuseks $r$.

**Näide 1**. Olgu $X = \mathbf{R}$ ja $\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} |x - y|$. Tõestage Definitsiooni 1 abil, et tegemist on meetrilise ruumiga.

**Näide 2**. Olgu

$$X = \mathbf{R}^n \overset{\text{def.}}{=} \{x \,|\, x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \,\wedge\, \xi_k \in \mathbf{R} \;(k = 1; \ldots; n)\}$$

ja

$$\rho(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2},$$

kus $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$. Tõestage iseseisvalt, et on täidetud Definitsiooni 1 aksioomid 1° ja 2°. Kontrollime aksioomi 3° täidetust. Kuna

$$\rho^2(x,z) = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \zeta_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} ((\xi_k - \eta_k) + (\eta_k - \zeta_k))^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)(\eta_k - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - \zeta_k)^2,$$

siis Cauchy-Bunjakovski võrratuse

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)\left(\eta_k-\zeta_k\right)\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k-\zeta_k\right)^2$$

abil saame

$$\begin{aligned}\rho^2\left(x,z\right) &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k-\zeta_k\right)^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k-\zeta_k\right)^2\\ &=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\eta_k\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k-\zeta_k\right)^2}\right)^2=\left(\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right)\right)^2,\end{aligned}$$

st on täidetud aksioom $3^\circ$ $\square$.

**Näide 3.** Olgu $X=C\left[a,b\right]$ lõigul $\left[a,b\right]$ pidevate funktsioomide hulk ja

$$\rho\left(x,y\right)=\max_{x\in[a,b]}\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|,$$

kus $x\left(t\right),\ y\left(t\right)\in C\left[a,b\right]$. Tõestage Definitsiooni 1 abil, et tegemist on meetrilise ruumiga.

**Definitsioon 4.** Meetrilise ruumi $X$ elementidest koostatud jada $\{x_n\}$ nimetatakse *fundamentaaljadaks*, kui suvalise $\varepsilon>0$ korral leidub selline naturaalarv $n_0$, et

$$n,\,m>n_0\ \Rightarrow\ \rho\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon.$$

**Definitsioon 5.** Meetrilist ruumi $X$ nimetatakse *täielikuks,* kui iga tema fundamentaaljada koondub selle ruumi punktiks.

Saab tõestada, et näidetes 1-3 esitatud ruumid on täielikud.

**Definitsioon 6.** Kui $X$ ja $Y$ on meetrilised ruumid ja $X_1$ ruumi $X$ mingi alamruum, siis eeskirja, mis igale hulga $X_1$ elemendile $x$ seab vastavusse hulga $Y$ teatud elemendi $y$, nimetatakse *operaatoriks* $A$, mis toimib hulgast $X_1$ hulka $Y$.

Sel korral kirjutatakse kas $y=A(x)$ või $A:\ X_1\to Y$.

**Definitsioon 7.** Operaatorit $A:X_1\to\mathbf{R}$ nimetatakse *funktsionaaliks.*

**Näide 4**. Kui funktsioon $K(t,s)$ on pidev ruudul $\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]$, siis võrdus

$$y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

määrab operaatori $A$ ruumist $C\left[a,b\right]$ iseendasse.

**Definitsioon 8.** Operaatorit $A:X\to X$ nimetatakse *ahendavaks operaatoriks* meetrilises ruumis $X$, kui selle ruumi suvaliste punktide $x_1$ ja $x_2$ korral kehtib võrratus

$$\rho\left(A(x_1),A(x_2)\right)<q\rho\left(x_1,x_2\right),$$

kus $0<q<1$.

**Definitsioon 9.** Operaatori $A : X \to X$ püsipunktiks nimetatakse igat punkti $x^*$, mille korral

$$A(x^*) = x^*.$$

Rakendustes on eriline tähtsus järgmisel väitel, mis kannab *püsipunkti printsiibi* nime.

**Lause 2**. Täielikus meetrilises ruumis $X$ on igal ahendaval operaatoril $A$ parajasti üks püsipunkt $x^*$.

**Definitsioon 10.** Hulka $X$ nimetatakse *lineaarseks ruumiks* ehk *vektorruumiks* (üle arvukorpuse $K$), kui hulgal $X$ on defineeritud elementide summa $x+y$ ja elemendi korrutis hulga $\mathbf{R}$ elemendiga $\lambda x$, mis kuuluvad hulka $X$, selliselt, et kehtivad järgmised aksioomid:

1° $x + y = y + x \quad \forall x, y \in X$;
2° $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in X$;
3° $\exists$ *nullelement* $\theta \in X : \quad x + \theta = x \; \forall x \in X$;
4° $\forall x \in X$ korral $\exists$ vastandelement $-x \in X : \quad x + (-x) = \theta$;
5° $1x = x \quad \forall x \in X$;
6° $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$;
7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$;
8° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

**Märkus 1**. Kui $\lambda$, $\mu \in \mathbf{C}$, siis aksioomid $1° - 8°$ määravad *kompleksse lineaarse ruumi.*

**Ülesanne 1**. Defineerige Näidetes 1-3 elementide summa ja elemendi korrutis hulga R elemendiga. Kontrollige vektorruumi aksioomide $1° - 8°$ täidetust. Kas saate vektorruumid?

**Definitsioon 11.** Lineaarset ruumi $X$ nimetatakse *lineaarseks normeeritud ruumiks,* kui igale elemendile $x \in X$ on vastavusse seatud reaalarv $\|x\|$, mida nimetatakse elemendi $x$ normiks ja mis rahuldab *normi aksioome:*

1° $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$;
3° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

**Ülesanne 2**. Kontrollige, et Näidete 1-3 abil saadud vektorruumidest saame lineaarsed normeeritud ruumid, kui normid defineerida vastavalt valemitega $\|x\| = |x|$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}$ ja $\|x\| = \max_{x \in [a,b]} |x(t)|$.

**Definitsioon 12.** Täielikku lineaarset normeeritud ruumi $X$ nimetatakse *Banachi ruumiks.*

Osutub, et Ülesandes 2 esitatud lineaarsed normeeritud ruumid on Banachi ruumid.

**Definitsioon 13.** Komplekset lineaarset ruumi $X$ nimetatakse *unitaarseks ruumiks*, kui ruumi $X$ igale kahele elemendile $x$ ja $y$ on vastavusse seatud kompleksarv $\langle x, y \rangle$, mida nimetatakse nende elementide *skalaarkorrutiseks*, mis rahuldab aksioome:

1° $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$;
2° $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \quad \forall x_1, x_2, y \in X, \; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$;
3° $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$;
4° $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

**Ülesanne 3**. Näidake, et funktsioonide hulgal

$$X = \{x(t) \mid x(t) = x_1(t) + ix_2(t) \, \wedge \, x_1(t), x_2(t) \in C\,[a,b]\}$$

defineeritud skalaarkorrutis

$$\langle x, y \rangle \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

kus $y(t) = y_1(t) + iy_2(t)$ $\left( y_1(t), y_2(t) \in C\,[a,b]\right)$, rahuldab skalaarkorrutise aksioome $1° - 4°$.

$X = C\,[a,b]$ lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioomide hulk ja

$$\rho\,(x,y) = \max_{x \in [a,b]} |x\,(t) - y\,(t)|\,,$$

kus $x\,(t)\,,\, y\,(t) \in C\,[a,b]$

**Ülesanne 3**. Tõestage, et

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, y \rangle\,.$$

**Ülesanne 4**. Tõestage, et kui unitaarse ruumi $X$ korral defineerida

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

siis normi aksioomid on täidetud.

**Ülesanne 5** (Cauchy-Bunjakovski võrratus). Tõestage, et iga unitaarse ruumi $X$ elementide paari $x$ ja $y$ korral

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\|\,\|y\|\,.$$

**Definitsioon 14.** Unitaarse ruumi $X$ elementide $x$ ja $y$ vaheline nurk $\widehat{x,y}$ defineeritakse võrdusega

$$\cos\left(\widehat{x,y}\right) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

**Definitsioon 15.** Unitaarse ruumi $X$ elemente $x$ ja $y$ nimetatakse ortogonaalseiks, kui $\langle x, y \rangle = 0$.

**Definitsioon 16.** Täielikku unitaarset ruumi nimetatakse *Hilberti ruumiks.*

## 1.6 Lineaarsed operaatorid

Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud vektorruumid üle korpuse $\mathbf{K}$.

**Definitsioon 1**. Operaatorit $A : X \to Y$ nimetatakse *lineaarseks*, kui

$1°$ $A\,(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad (x_1, x_2 \in X) \quad$ (aditiivsus),

$2°$ $A\,(\lambda x) = \lambda Ax \quad (x \in X,\, \lambda \in \mathbf{K}) \quad$ (homogeensus).

**Ülesanne 1**. Näidake, et kui $A$ on lineaarne operaator, siis $A\theta = \theta$ ja

$$A\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A x_k \quad \left(\lambda_k \in \mathbf{K},\; x_k \in X\right).$$

**Näide 1**. Olgu $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ suvaline lineaarne operaator ja $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ning $\{e''_1, \ldots, e''_m\}$ baasid vastavalt ruumides $\mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{R}^m$. Siis

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e'_i \Rightarrow y = Ax = A\sum_{i=1}^n \xi_i e'_i = \sum_{i=1}^n \xi_i A e'_i = [Ae'_i = \sum_{k=1}^m a_{ki} e''_k] =$$
$$= \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^m a_{ki} e''_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \xi_i a_{ki}\right) e''_k = \sum_{k=1}^m \eta_k e''_k \Rightarrow \eta_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} \xi_i$$

ja

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_m \end{pmatrix}^T = (a_{ki})_{m,n} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}^T$$

või lühidalt

$$y^T = Ax^T,$$

kus $A = (a_{ki})_{m,n}$.

**Ülesanne 2**. Olgu funktsioon $K(t,s)$ pidev ruudus $[a,b] \times [a,b]$. Näidake, et seosega

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s) ds \quad (t \in [a,b])$$

määratud integraaloperaator $K : C[a,b] \to C[a,b]$ on lineaarne.

**Ülesanne 3.** Näidake, et seosega

$$(Dx)(t) = x'(t) \quad (t \in [a,b])$$

määratud operaator $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$ on lineaarne.

Operaatorit $A$ normeeritud ruumist $X$ normeeritud ruumi $Y$ nimetatakse pidevaks punktis $x$ kui

$$(\|x_n - x\| \to 0) \Rightarrow (\|Ax_n - Ax\| \to 0).$$

Kui operaator $A$ on pidev ja lineaarne, siis

$$A\left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k A x_k\right)$$

iga koonduva rea $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k$ korral ruumist $X$, sest

$$A\left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k\right) = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k A x_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A x_k.$$

**Lause 1.** Lineaarne operaator $A : X \to Y$ on pidev punktis $x \in X$ parajasti siis, kui ta on pidev punktis $\theta$.

*Tõestus.* Kui $A$ on pidev punktis $\theta$, siis

$$x_n - x \to \theta \Rightarrow A(x_n - x) \to \theta$$

ja $Ax_n - Ax \to \theta$ ning $Ax_n \to Ax$, st $A$ on pidev punktis $x$.

Kui $A$ on pidev mingis punktis $x \in X$, siis

$$x_n \to \theta \Rightarrow x_n + x \to x \Rightarrow A(x_n + x) \to Ax \Rightarrow Ax_n + Ax \to Ax \Rightarrow Ax_n \to \theta,$$

st $A$ on pidev punktis $\theta$. $\square$

**Definitsioon 2**. Operaatorit $A : X \to Y$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui leidub selline arv $M > 0$, et

$$\|Ax\| \leq M \|x\| \quad (\forall x \in X).$$

**Näide 2**. Olgu funktsioon $K(t,s)$ pidev ruudus $[a,b] \times [a,b]$. Näidake, et seosega

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)ds \quad (t \in [a,b])$$

määratud integraaloperaator $K : C[a,b] \to C[a,b]$ on tõkestatud.

Et

$$\|(Kx)(t)\| = \left\|\int_a^b K(t,s)\, x(s)ds\right\| = \max_{a \leq t \leq b} \left|\int_a^b K(t,s)\, x(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|\, |x(s)|\, ds \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)| \max_{a \leq s \leq b} |x(s)|\, ds \leq$$

$$\leq \max_{a \leq s \leq b} |x(s)| \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|\, ds \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|\, ds\right) \|x\|$$

ja funktsiooni $K(t,s)$ pidevusest ruudus $[a,b] \times [a,b]$ järeldub

$$\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|\, ds \leq M,$$

siis operaator $K$ on tõkestatud. $\diamondsuit$

**Lause 2.** Lineaarne operaator on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Tõestus. Olgu $A$ tõkestatud, st $\|Ax\| \leq M\|x\| \quad (\forall x \in X)$. Olgu $x_n \to \theta$. Siis

$$(\|Ax_n\| \leq M\|x_n\| \to 0) \Rightarrow (\|Ax_n\| \to 0) \Rightarrow Ax_n \to \theta,$$

st $A$ on pidev punktis $\theta$. Seega Lause 1 põhjal võime väita, et $A$ on pivev kõikjal ruumis $X$.

Olgu $A$ pidev. Oletame vastuväiteliselt, et $A$ on tõkestamata. Siis leiduvad sellised elemendid $x_n \in X \setminus \{\theta\}$, et $\|Ax_n\| / \|x_n\| \to \infty$. Seega $\|x_n\| / \|Ax_n\| \to 0$, millest saame, et $x_n / \|Ax_n\| \to \theta$. Kuna

$$A\left(\frac{1}{\|Ax_n\|} x_n\right) = \frac{\|Ax_n\|}{\|Ax_n\|} = 1,$$

siis $A$ ei ole pidev punktis $\theta$. Vastuolu. Järelikult $A$ on tõkestatud. $\square$

**Lause 3**. Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis tegutsev lineaarne operaator on pidev.

Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid üle korpuse $\mathbf{K}$. Olgu

$$\mathcal{L}(X,Y) \stackrel{\text{def.}}{=} \{A : A \text{ on pidev lineaarne operaator ruumist } X \text{ ruumi } Y\}.$$

Kui $A,\ B \in \mathcal{L}(X,Y)$, siis defineerime operaatorite $A$ ja $B$ summa ning operaatori $A$ korrutise arvuga $\lambda \in \mathbf{K}$ järgnevalt:

$$(A+B)\,x \stackrel{\text{def.}}{=} Ax + Bx \quad (x \in X)\,; \quad (\lambda A)\,x \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda\,(Ax)\,.$$

**Ülesanne 1.** Tõestage, et kui pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ defineerida tehted sellisel viisil, siis saame tulemuseks vektorruumi.

Et tõkestatud lineaarse operaatori korral

$$\|Ax\| \le M\,\|x\| \wedge \|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax\| \le M,$$

siis $\exists \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ ja mõistlik järgmine definitsioon.

**Definitsioon 1.** *Operaatori* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *normiks* nimetatakse arvu

$$\|A\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|\,. \tag{6.1}$$

Kontrollime, kas nii defineeritud norm ikka rahuldab normi aksioome 1-3:

$$\begin{aligned}
\|A\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \\ \|x\| > 1 \Rightarrow A\left(\|x\|\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|\left\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Ax = \theta \quad (\forall x \in X) \Leftrightarrow A = \theta; \\
\|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|(\lambda A)\,x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\lambda\,(Ax)\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|(Ax)\| = |\lambda|\,\|A\|\,; \\
\|A+B\| &\le \sup_{\|x\|\le 1} \|(A+B)\,x\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax + Bx\| \le \\
&\le \sup_{\|x\|\le 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|\le 1} \|Bx\| \le \|A\| + \|B\|\,.
\end{aligned}$$

**Ülesanne 2**. Tõestada, et

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

**Lause 1.** Kui $X$ on normeeritud ruum ja $Y$ on Banachi ruum, siis $\mathcal{L}(X,Y)$ on Banachi ruum.

**I** Uurime diferentseerimisoperaatorit

$$D: \ C^1[a,b] \to C[a,b],$$

kus kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsiooonide ruum $C[a,b]$ on varustatud normiga

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x(t)|$$

ja kõigi lõigul $[a,b]$ diferentseeruvate funktsiooonide ruum $C^1[a,b]$ normiga

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x(t)| + \max_{a \le x \le b} |x'(t)|.$$

**Ülesaanne 1.** Tõestage, et $D$ on lineaarne operaator.
**Lause 1**. Operaator $D$ on tõkestatud ja pidev ning $\|D\| = 1$.
*Tõestus.* Et

$$\|Dx\|_{C[a,b]} = \|x'(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |x'(t)| \le$$
$$\le \max_{a \le x \le b} |x(t)| + \max_{a \le x \le b} |x'(t)| \le 1 \cdot \|x\|_{C^1[a,b]},$$

siis $D$ on tõkestatud. Iga lineaarne tõkestatud operaator on pidev. Et

$$\|Dx\|_{C[a,b]} \le 1 \cdot \|x\|_{C^1[a,b]},$$

siis $\|D\| \le 1$. Funktsioonide jada $\{e^{nt}\}$ korral $e^{nt} \in C^1[a,b]$, kusjuures

$$\left\|e^{nt}\right\|_{C^1[a,b]} = \max_{a \le x \le b} \left|e^{nt}\right| + \max_{a \le x \le b} \left|ne^{nt}\right| = (n+1) \max_{a \le x \le b} e^{nt},$$
$$\left(e^{nt}\right)' = ne^{nt}, \ \left\|\left(e^{nt}\right)'\right\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} \left|ne^{nt}\right| = n \max_{a \le x \le b} e^{nt}.$$

Seega

$$\frac{\|De^{nt}\|_{C[a,b]}}{\|e^{nt}\|_{C^1[a,b]}} = \frac{n}{n+1}$$

ja

$$\sup_n \frac{\|De^{nt}\|_{C[a,b]}}{\|e^{nt}\|_{C^1[a,b]}} = 1$$

ning $\|D\| \ge 1$. Järelikult $\|D\| = 1$. $\square$

**II** Uurime operaatorit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$

**Lause 1.** Kui $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ ja ruumides $\mathbf{R}^m$ ning $\mathbf{R}^n$ kasutada 2-normi, siis

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu \in \lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\| A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest.

*Tõestus.* Normi $\| A\|_2$ leidmiseks leiame esiteks $\| A\|_2^2$. Seega,

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \ \| A\|_2^2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1} \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}.$$

Olgu $A^T A = B \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Maatriks $B$ on sümmeetriline maatriks, sest

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A.$$

Saame

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

ja

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1\,;\,1} & \cdots & b_{1\,;\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n\,;\,1} & \cdots & b_{n\,;\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{1\,;\,n}\xi_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_{n\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{n\,;\,n}\xi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \xi_1 \sum_{j=1}^{n} b_{1;\,j}\xi_j + \ldots + \xi_n \sum_{j=1}^{n} b_{n;\,j}\xi_j \right).$$

Seega $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$ on $n$ muutuja $\xi_1, \ldots, \xi_n$ funktsioon ning

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}\right)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n} b_{j;\,i}\xi_j \overset{b_{i;\,j}=b_{j;\,i}}{=} 2\sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j = 2\left(A^T A\mathbf{x}\right)_i,$$

$$\frac{\partial(\,\mathbf{x}^T\mathbf{x})}{\partial \xi_i} = 2\xi_i = 2\,(\mathbf{x})_i\,,$$

kus $(\mathbf{x})_i$ on vektori $\mathbf{x}$ $i$-s komponent. Ülesandeks on leida $\max \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$ lisatingimusel $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$. See on tingliku ekstreemumi leidmise ülesanne. Selle lahendamiseks moodustame abifunktsiooni

$$\Phi(\xi_1; \ldots, \xi_n; \rho) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} + \mu\left(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}\right).$$

Funktsiooni $\Phi$ statsionaarsete punktide leidmiseks koostame võrrandisüsteemi:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} = 0 \ \ (i = 1 : n) \ \ \wedge \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0$$

st

$$\begin{cases} 2\left(A^T A\mathbf{x}\right)_i - 2\mu\left(\mathbf{x}\right)_i = 0 \ \ (i = 1 : n) \\ 1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\,, \\ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\,. \end{cases}$$

Seega iga statsionaarne punkt tingliku ekstreemumi jaoks on maatriksi $A^T A$ omaväärtusele vastav normeeritud vektor $\mathbf{x}$ . Avaldame seosest $A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ omaväärtuse $\mu$ . Saame, et $\mu = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$, kusjuures $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Võrreldes saadud tulemust lähtevalemiga $\|A\|_2^2$ leidmiseks, näeme,et $\|A\|_2^2 = \max\limits_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu$. Seega,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\| A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest.

**Ülesanne 1.** Leidke maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

norm $\|A\|_2$ .

**Ülesanne 2.** Leidke maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

norm $\|A\|_2$ .

**Ülesanne 3.** Leidke maatriksi $A$ norm $\|A\|_2$ , kui

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.7 Fourier' rida ja Fourier' integraal

Olgu Hilberti ruumis $H$ antud loenduv ortonormeeritud süsteem $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ .

**Definitsioon 1**. Rida kujul $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kus $c_k \in \mathbf{K}$, nimetatakse *ortogonaalreaks* ortonormeeritud süsteemi $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ järgi.

**Definitsioon 2**. Elemendi $x \in H$ *Fourier' kordajaks* süsteemi $\{x_k\}$ järgi nimetatakse arve

$$c_k = \langle x, x_k \rangle \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.1}$$

ja rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kus kordajad $c_k$ on leitud valemi (7.1) abil, elemendi $x \in H$ *Fourier' reaks* süsteemi $\{x_k\}$ järgi.

**Lause 1**. Kui $S_n$ on Fourier' rea (7.1) osasumma, siis $x - S_n \perp S_n$ ja

$$\|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|x\|^2 . \tag{7.2}$$

*Tõestus*. Kuna $S_n$ on elementide $x_k$ lineaarne kombinatsioon, siis ortogonaalsuseks $x - S_n \perp S_n$ piisab näidata, et

$$x - S_n \perp x_k \quad (k = 1; \ldots ; n) .$$

Et

$$\langle x - S_n, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle S_n, x_k \rangle = c_k - \langle \sum_{m=1}^{n} c_m x_m, x_k \rangle =$$
$$= c_k - \sum_{m=1}^{n} c_m \langle x_m, x_k \rangle = c_k - c_k = 0,$$

siis $x - S_n \perp x_k$ $(k = 1; \ldots ; n)$ ja järelikult $x - S_n \perp S_n$. Seega esitusest

$$x = (x - S_n) + S_n,$$

kusjuures $x - S_n \perp S_n$, järeldub, et

$$\|x\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|c_k x_k\|^2 . \qquad \square \tag{7.3}$$

**Lause 2**. Kehtib *Besseli võrratus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{7.4}$$

*Tõestus*. Seosest (7.3) järeldub, et

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \|c_k x_k\|^2 \quad (\forall n \in \mathbf{N}) , \tag{7.5}$$

st rida $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k x_k\|^2$ on koonduv. Et

$$\|c_k x_k\| = |c_k| \, \|x_k\| = |c_k| ,$$

siis võrratusest (7.5) saame

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Järelikult rida $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ on koonduv ja kehtib Besseli võrratus (7.4). $\square$

**Lause 3** (Rieszi teoreem). Kui $H$ on Hilberti ruum, siis iga pideva lineaarse funktsionaali $f \in H^*$ korral leidub parajasti üks element $y \in H$, et

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad (\forall x \in H) ,$$

kusjuures $\|f\| = \|y\|$ .

**Lause 4**. Kui süsteem $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ on ortonormeeritud, siis $x_k \xrightarrow{w} \theta$.

Tõestus. Et

$$x_k \xrightarrow{w} \theta \;\Leftrightarrow\; f(x_k) \to 0 \;\; (\forall f \in H^*)$$

ja Lause 3 põhjal

$$f(x_k) \to 0 \;\; (\forall f \in H^*) \;\Leftrightarrow\; \langle x_k, y\rangle \to 0 \;\; (\forall y \in H)\,,$$

siis

$$x_k \xrightarrow{w} \theta \Leftrightarrow \langle x_k, y\rangle \to 0 \;\; (\forall y \in H)\,.$$

Olgu $\langle x_k, y\rangle = c_k$. Lause 2 põhjal saame $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$. Seega

$$\langle x_k, y\rangle \to 0 \;\; (\forall y \in X)\,. \qquad \square$$

**Lause 4**. Iga Hilberti ruumi $H$ elemendi $x$ Fourier' rida koondub. Kui tähistada

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \tag{7.6}$$

siis $y$ on elemendi $x$ ortogonaalne projektsioon alamruumile $\overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$.

*Tõestus.* Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty,$$

siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ koondub. Olgu $y$ selle rea summa. Näitame, et y on elemendi x ortogonaalne projektsioon alamruumile $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$. Kuna $y \in L$ ja $x = y + (x-y)$, siis piisab näidata, et $(x-y) \perp L$. Selleks näitame, et $(x-y) \perp x_k$ $(\forall k \in \mathbf{N})$ korral. Tõesti,

$$\langle x-y, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle - \langle \sum_{m=1}^{\infty} c_m x_m, x_k\rangle = \begin{bmatrix} \text{kasutame skalaar-} \\ \text{korrutise pidevust} \end{bmatrix} =$$
$$= c_k - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle x_m, x_k\rangle = c_k - c_k = 0. \qquad \square$$

**Lause 5**. Elemendi $x$ Fourier' rida koondub elemendiks $x$ parajasti siis, kui $x$ korral kehtib *Parsevali võrdus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2\,, \tag{7.7}$$

kus $c_k = \langle x, x_k\rangle$ $(k \in \mathbf{N})$ .

*Tõestus.* Et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x \;\Leftrightarrow\; S_n \to x \;\Leftrightarrow\; \|S_n - x\|^2 \to 0,$$

siis seoste (7.3) ja $\|c_k x_k\| = |c_k|$ põhjal saame

$$\|S_n - x\|^2 \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\,. \qquad \square$$

**Lause 6**. Iga elemendi $x \in H$ korral selle elemendi Fourier' rida ortonormeeritud süsteemi $\{x_k\}$ järgi koondub elemendiks $x$ parajasti siis, kui süsteem $\{x_k\}$ on täielik.

*Tõestus.* Lause 4 põhjal saame $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = y$, kus $y$ on elemendi $x$ ortogonaalne projektsioon alamruumile $L = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$. Seega $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = x$ parajasti siis, kui $L = H$, st süsteem $\{x_k\}$ on täielik. $\square$

**Näide 1**. Ortonormeeritud trigonomeetriline süsteem

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

on ruumis $L(-\pi, \pi)$ täielik, kusjuures funktsiooni $x(t) \in L(-\pi, \pi)$ Fourier' rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

kordajad $a_k$ $(k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ ja $b_k$ $(k \in \mathbf{N})$ leitakse valemite

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt\, dt$$

põhjal.

**Ülesanne 1.** Leidke funktsiooni $f(t) = |t|$ arendus Fourier' ritta vahemikus $(-\pi, \pi)$ $2\pi$-perioodilise trigonomeetrilise süsteemi järgi.

**Näide 2**. Haari ortonormaalsete lainekeste süsteem

$$\psi_{j,k}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^j \psi\left(2^j x - k\right) \quad (j, k \in \mathbf{Z}),$$

kus

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } 0 \leq x < 0.5, \\ -1, \text{ kui } 0.5 \leq x < 1, \\ 0, \text{ kui } x \notin [0; 1), \end{cases}$$

on täielik ruumis $L^2(\mathbf{R})$.

Fourier' rea summa on perioodiline funktsioon. Seega vahemikus $(-\infty, +\infty)$ saame esitada Fourier' rea summana vaid perioodilisi funktsioone. Järgnevas uurime mõningaid mitteperioodiliste funktsioonide esitamisvõimalusi vahemikus $(-\infty, +\infty)$.

**Definitsioon 1.** Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *lokaalselt tükiti siledaks* vahemikus $(-\infty, +\infty)$, kui see on tükiti sile igal lõigul $[a, b]$, st igal lõigul $[a, b]$ on funktsiooni tuletis $f'(x)$ pidev, välja arvatud ülimalt lõplikus arvus punktides, mis on tuletisele $f'(x)$ esimest liiki katkevuspunktideks.

Olgu funktsioon $f(x)$ lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus. Neil eeldustel on funktsiooni $f(x)$ jaoks saame lõigul $[-l, l]$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{ik\pi x}{l}\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \exp\left(-\frac{ik\pi t}{l}\right) dt\right) \exp\left(\frac{ik\pi x}{l}\right).$$

Kui tähistada $k\pi/l = \omega_k$, siis

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = k\pi/l - (k-1)\,\pi/l = \pi/l \overset{l\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ja

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\exp\left(-i\omega_k t\right)dt\right)\exp\left(i\omega_k x\right)\Delta\omega_k.$$

Käsitleme seda rida kui integraalsummat. Minnes piirile $l \to +\infty$, saame teatud tingimustel

$$f(x) \sim \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\exp\left(-i\omega_k t\right)dt\right)\exp\left(i\omega_k x\right)\Delta\omega_k =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\omega x\right)d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left(-i\omega t\right)dt.$$

Seega

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\omega x\right)d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left(-i\omega t\right)dt. \tag{7.8}$$

Seost (7.8) nimetatakse *Fourier' integraalvalemiks.*

**Lause 1.** Kui funktsioon $f(x)$ lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty, +\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus, siis kehtib seos (7.8) ja igas punktis $x$, milles $f(x)$ on diferentseeruv, kehtib võrdus

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\omega x\right)d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left(-i\omega t\right)dt. \tag{7.9}$$

**Definitsioon 2.** Kujutist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-i\omega x\right)dx \tag{7.10}$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *Fourier' teisendiks* ja tähistatakse sümboliga $\widehat{f}(\omega)$ ning kujutist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp\left(i\omega x\right)d\omega \tag{7.11}$$

nimetatakse funktsiooni $g(\omega)$ *Fourier' pöördteisendiks* ja tähistatakse $\widetilde{g}(x)$, kusjuures kujutust $f \longmapsto \widehat{f}$ nimetatakse *Fourier' teisenduseks* ja kujutust $g \longmapsto \widetilde{g}$ nimetatakse *Fourier' pöördteisenduseks.*

Seega

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-i\omega x\right)dx, \quad \widetilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp\left(i\omega x\right)d\omega.$$

Lauses 1 on esitatud piisavad tingimused selleks, et $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$, st kehtib seos (7.9).

**Näide 3.** Olgu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in [0;1], \\ 0, & \text{kui } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisendi.

Valemi (7.10) abil leiame

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\omega x)\, dx = \int_0^1 1 \cdot \exp(-i\omega x)\, dx =$$
$$= \left.\frac{\exp(-i\omega x)}{-i\omega}\right|_0^1 = \frac{1 - \exp(-i\omega)}{i\omega}. \qquad \diamondsuit$$

**Ülesanne 2.** Olgu

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in [0;\pi], \\ 0, & \text{kui } x \notin [0;\pi]. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni $f(x)$ Fourier' teisendi.

**Näide 4.** Olgu

$$f(\omega) = \begin{cases} \sin\omega, & \text{kui } x \in [-\pi;\pi], \\ 0, & \text{kui } x \notin [-\pi;\pi]. \end{cases}$$

Leiame funktsiooni $f(\omega)$ Fourier' pöördteisendi.

Valemi (7.11) abil leiame

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega x)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\omega \cdot \exp(i\omega x)\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i} \exp(i\omega x)\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\exp(i(x+1)\omega) - \exp(i(x-1)\omega)\right) d\omega =$$
$$= \frac{1}{4\pi i}\left.\left(\frac{\exp(i(x+1)\omega)}{i(x+1)} - \frac{\exp(i(x-1)\omega)}{i(x-1)}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} =$$
$$= \frac{-1}{4\pi i}\left(\frac{\exp(ix\pi) - \exp(-ix\pi)}{i(x+1)} + \frac{\exp(-ix\pi) - \exp(ix\pi)}{i(x-1)}\right) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{\sin(x\pi)}{x+1} - \frac{\sin(x\pi)}{x-1}\right) = \frac{-i\sin(x\pi)}{\pi(x^2-1)}. \qquad \diamondsuit$$

**Märkus 1.** Kui arendame $2l$-perioodilist funktsiooni $f(x)$ kogu arvteljel Fourier' ritta kujul (2.14.10) või (2.16.7), siis kasutame sagedusi $\omega_k = (k\pi)/l$, vastavalt $k \in \mathbf{N}_0$ või $k \in \mathbf{Z}$. Sel korral kõneldakse *diskreetsest spektrist.* Kui aga kasutame mitteperioodilise funktsiooni kirjeldamiseks Fourier' integraalvalemit

(7.1), siis kasutame üldjuhul kõiki sagedusi $\omega$ vahemikust $(-\infty;\infty)$ või selle vahemiku osavahemikust. Sel korral kõneldakse *pidevast spektrist.*

Teatud erijuhul on ka mitteperioodiline funktsioon kogu arvteljel kirjeldatav diskreetse spektri abil.

**Lause 2** (*Shannoni teoreem*). Kui funktsioon $f(x)$ on lokaalselt tükiti sile vahemikus $(-\infty;\infty)$ ja absoluutselt integreeruv selles vahemikus ning selle funktsiooni Fourier' teisendus $\widehat{f}(\omega)$ on nullist erinev vaid lõigul $[-l,l]$, siis

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{l}\right)\frac{\sin\left(lx-n\pi\right)}{lx-n\pi}.$$

Fourier' teisenduse rakendustes on kasulik järgmine väide.

**Lause 3.** Kui $f(x)$ on pidev lokaalselt tükiti sile funktsioon ja funktsioonid $f(x)$ ning $xf(x)$ on absoluutselt integreeruvad vahemikus $(-\infty,+\infty)$, siis

$$\widehat{f\,'}\left(\omega\right)=i\omega\widehat{f}\left(\omega\right).$$