TTÜ Matemaatikainstituut
http://www.staff.ttu.ee/∼math/

Ivar Tammeraid
http://www.staff.ttu.ee/∼itammeraid/

LINEAARALGEBRA RAKENDUSED

Elektrooniline õppevahend

Tallinn, 1999

Trükitud versioon:
Ivar Tammeraid, Lineaaralgebra rakendused, TTÜ Kirjastus, Tallinn 1999, 215 lk, ISBN 9985-59-143-7

Sisukord

SISSEJUHATUS

Antud "Lineaaralgebra rakenduste" kursuse aluseks on autori poolt Tallinna Tehnikaülikoolis loetud kursus magistriõppe üliõpilastele viimaste aastate jooksul.

Selle kursusega on püütud tutvustada üliõpilastele lineaaralgebra pakettide LINPACK, EISPACK ja LAPACK, samuti pakettide MATLAB, MAPLE, MATHCAD ja MATHEMATICA lineaaralgebrat sisaldavate osade teoreetilisi aluseid. On püütud selgitada neid lineaaralgebra meetodeid, mis on aluseks nimetatud pakettides kasutatud arvutusmeetoditele. Rõhutame, et antud kursuse eesmärgiks ei ole niivõrd konkreetsete arvutusalgoritmide väljatöötamine, kuivõrd nende algoritmide aluseks olevate põhitõdedega tutvumine. Selle kursuse koostamisel on eeldatud, et huviline on tuttav algebra põhitõdedega.

Autor on väga tänulik TPÜ dotsendile Ellen Redile, kelle osa esitatud materjali korrigeerimisel nii vormiliselt kui ka sisuliselt oli väga suur. Samuti tänan TTÜ professorit Peeter Puusempa kasulike märkuste eest. Paljud esitatud näited ja ülesanded on välja töötatud TPÜ üliõpilaste Kristiina Krüspani, Kadri Miku, Reena Printsi ja TÜ üliõpilaste Andrei Filonovi, Dmitri Tseluiko ning TTÜ üliõpilaste Juhan-Peep Ernitsa, Heiki Hiisjärve poolt Tampere Tehnikaülikoolis 1997. a juunis Tempus-projekti raames. Nende näidete ja ülesannete numbritele on lisatud lõppu "$*$."

Materjali koostamisel on võetud aluseks G.H. Golubi ja C.F. Van Loani (1996) ning G. Strangi (1988) monograafiates esitatud käsitlus, mis mõningal määral erineb E. Tamme, L. Võhandu ja L. Luha (1986) õpiku omast.

Loodan, et antud kursus võimaldab lineaaralgebra rakenduste huvilistel teadlikumalt ja efektiivsemalt kasutada lineaaralgebra pakette.

Autor

1. LINEAARALGEBRA ALUSED

1.1. Vektorid

1.1.1. Vektorruumid

Lineaaralgebra üheks põhimõisteks on vektorruumi mõiste. Ühtlasi on see üks sagedamini kasutatavaid algebralise struktuuri mõisteid tänapäeva matemaatikas. Näiteks, paljud matemaatilises analüüsis vaadeldavad funktsioonide hulgad on oma algebraliste omaduste poolest vektorruumid. Analüüsis pruugitakse termini vektorruum asemel terminit lineaarne ruum.

Definitsioon 1.1.1. Hulka $\mathbf{X}$ nimetatakse *vektorruumiks üle arvukorpuse* $\mathbf{K}$, kui hulga $\mathbf{X}$ elementide igale paarile $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on vastavusse seatud summa, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, ja igale paarile $(\alpha, \mathbf{x})$, kus $\alpha \in \mathbf{K}$ ning $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, on vastavusse seatud element $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, kusjuures on rahuldatud tingimused 1-8 :

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (liitmise assotsiatiivsus);
3. $\exists\ \mathbf{0} \in \mathbf{X} : \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (nullelemendi olemasolu);
4. $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \exists\ -\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (vastandelemendi olemasolu);
5. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (unitaarsus);
6. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (assotsiatiivsus arvude korrutamise suhtes);
7. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (distributiivsus vektorite liitmise suhtes);
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (distributiivsus arvude liitmise suhtes).

Tingimused 1-8 kannavad vektorruumi aksioomide nime. Aksioomid 1-4 näitavad, et vektorite liitmise suhtes on $\mathbf{X}$ kommutatiivne rühm ehk Abeli rühm. Teist vastavust nimetatakse vektori arvuga korrutamise tehteks ja see rahuldab aksioome 5-8. Vektorruumi elemente nimetame *vektoriteks.* Kui $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, siis kõneldakse reaalsest vektorruumist ja kui $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, siis komplekssest vektorruumist. Termini vektorruum asemel kasutame ka lühendit *ruum.*

Näide 1.1.1. Vaatleme kõigi reaalsete elementidega $n \times 1-$maatriksite hulka

$$\mathbf{X} \ = \{ \ \mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \ \wedge \ \xi_i \in \mathbf{R} \ \}.$$

Kahe maatriksi summa defineerime tavalisel viisil, maatriksite vastavate elementide liitmise teel. Maatriksi korrutamisel reaalarvuga λ korrutame selle arvuga maatriksi kõik elemendid. Lihtne otsene kontroll näitab, et tingimused 1-8 on täidetud. Näiteks, kontrollime tingimusi 3 ja 4. Konstrueerime maatriksid

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\xi_1 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{bmatrix}.$$

Kuna

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \xi_1 \\ \vdots \\ 0 + \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \mathbf{x},$$

siis element $\mathbf{0}$ rahuldab suvalise $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ korral tingimust 3 ja on seega ruumi $\mathbf{X}$ nullelement. Elemendi $-\mathbf{x}$ korral

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\xi_1 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 - \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

st tingimus 4 on täidetud. Veenduge, et ka ülejäänud tingimused 1-2 ja 5-8 on täidetud!

Näites 1.1.1 esitatud vektorruumi nimetatakse *n-mõõtmeliseks reaalseks aritmeetiliseks ruumiks* ehk lühidalt ruumiks $\mathbf{R}^n$. Ruumi $\mathbf{R}^n$ vektori $\mathbf{x}$ kirjeldamisel kasutame tihti transponeeritud maatriksit

$$\mathbf{x} = \left[\ \xi_1 \quad \ldots \quad \xi_n \ \right]^T.$$

Viimases esituses pruugitakse sageli vektori komponentide eraldamiseks kirjavahemärke (koma, semikoolon), näiteks

$$\mathbf{x} = \left[\ \xi_1, \quad \ldots \quad ,\xi_n \ \right]^T.$$

Ülesanne 1.1.1.* Olgu antud hulk U, mis koosneb kõikidest reaalarvupaaridest $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$, ... Defineerime hulgal U liitmise ja skalaariga korrutamise järgmiselt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = ((\alpha_1^3 + \beta_1^3)^{1/3}, (\alpha_2^3 + \beta_2^3)^{1/3}),$$

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2).$$

Kas hulk U on vektorruum?

Lause 1.1.1. Olgu $\mathbf{X}$ vektorruum. Mistahes vektorite $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ ja arvu $\lambda \in \mathbf{K}$ korral kehtivad järgmised väited ja võrdused:

- vektorruumi $\mathbf{X}$ nullvektor $\mathbf{0}$ on ainus;
- iga $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ vastandvektor $-\mathbf{x}$ on ainus;
- vastandvektori ühesus lubab defineerida lahutamistehte seosega

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \overset{def}{=} \mathbf{x} + (-\mathbf{y});$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{y} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$;
- $0\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$;
- $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$;
- $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$;
- $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ (\lambda = 0 \ \vee \ \mathbf{x} = \mathbf{0})$.

Veenduge nende väidete tõesuses! □

Näide 1.1.2. Vaatleme kõigi kompleksarvuliste elementidega $m \times n-$maatriksite hulka. Kahe maatriksi summa defineerime maatriksite vastavate elementide liitmise teel. Maatriksi korrutamisel kompleksarvuga λ korrutame selle arvuga maatriksi kõik elemendid. Lihtne kontroll, et tingimused 1-8 on täidetud, on jäetud lugejale. Saadud vektorruumi üle kompleksarvude korpuse $\mathbf{C}$ tähistame $\mathbf{C}^{m\times n}$. Kui piirduda reaalarvuliste maatriksitega, siis saame vektorruumi $\mathbf{R}^{m\times n}$ üle arvukorpuse $\mathbf{R}$. Ruum $\mathbf{C}^{m\times 1}$ samastatakse ruumiga $\mathbf{C}^m$ ja ruum $\mathbf{R}^{m\times 1}$ ruumiga $\mathbf{R}^m$.

Näide 1.1.3. Kõigi funktsioonide $\mathbf{x} : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ hulk $\mathbf{F}[\alpha, \beta]$ on vektorruum (tõestage!) üle arvukorpuse $\mathbf{R}$, kui

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})(t) \overset{def}{=} \mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t) \ \ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

ja

$$(\lambda \mathbf{x})(t) \overset{def}{=} \lambda \mathbf{x}(t) \ \ \forall t \in [\alpha, \beta].$$

1.1.2. Vektorruumi alamruumid

Definitsioon 1.2.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ (üle korpuse $\mathbf{K}$) vektorite hulka $\mathbf{W}$, mis on vektorruum ruumis $\mathbf{X}$ defineeritud vektorite liitmise ja vektori arvuga korrutamise suhtes, nimetatakse vektorruumi $\mathbf{X}$ *alamruumiks* ning kirjutatakse $\mathbf{W} \le \mathbf{X}$.

Lause 1. 2.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite hulk $\mathbf{W}$ on vektorruumi $\mathbf{X}$ alamruum parajasti siis, kui iga kahe vektori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}$ ja iga arvu $\lambda \in \mathbf{K}$ korral ka vektorid $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ja $\lambda \mathbf{x}$ kuuluvad hulka $\mathbf{W}$.

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne. Piisavuse tõestamiseks tuleb näidata, et nende tingimuste korral on täidetud vektorruumi tingimused 1-8. Kontrollime tingimuse 1 täidetust. Olgu $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{X}$. Eelduse kohaselt $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{X}$. Kuna $\mathbf{X}$ on vektorruum, siis $\mathbf{X}$ jaoks on rahuldatud aksioom 1 ja seega $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$. Järelikult, $\mathbf{W}$ korral on aksioom 1 samuti rahuldatud. Põhjendame veel tingimuse 4 täidetuse. Olgu $\mathbf{x} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{X}$. Eelduse põhjal $(-1)\mathbf{x} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{X}$. Teisalt, ruumis $\mathbf{X}$ kehtib lause 1.1.1 põhjal seos $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Seega, koos vektoriga $\mathbf{x}$ kuulub hulka $\mathbf{W}$ ka tema vastandvektor $-\mathbf{x}$, st tingimus 4 on täidetud. Tõestada iseseisvalt tingimuste 2, 3 ja 5-8 täidetus. □

Näide 1.2.1. Kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ pidevate funktsioonide vektorruum $\mathbf{C}[\alpha, \beta]$ üle $\mathbf{R}$ on näites 1.1.3 toodud vektorruumi $\mathbf{F}[\alpha, \beta]$ alamruum. Et kahe lõigul pideva funktsiooni summa on sel lõigul pidev funktsioon ja lõigul pideva funktsiooni korrutis arvuga on sel lõigul pidev funktsioon, siis lause 1.2.1 põhjal on $\mathbf{C}[\alpha, \beta]$ vektorruumi $\mathbf{F}[\alpha, \beta]$ alamruum.

Näide 1.2.2. Olgu $\mathbf{P}_n$ kõigi reaalsete kordajatega ülimalt n-astme polünoomide $a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \ldots + a_{k-1} t + a_k = \mathbf{x}$ $(k \le n)$ hulk. Defineerime kahe polünoomi liitmise ja polünoomi reaalarvuga korrutamise tavapärasel viisil. Tulemuseks saame ülimalt n-astme polünoomide vektorruumi $\mathbf{P}_n$. Kui sümboliga $\mathbf{P}_n[\alpha, \beta]$ tähistada lõigul $[\alpha, \beta]$ määratud ülimalt n-astme polünoomide vektorruumi, siis $\mathbf{P}_n[\alpha, \beta]$ on vektorruumi $\mathbf{C}[\alpha, \beta]$ alamruum.

Näide 1.2.3.* Näitame, et hulk $\mathbf{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a,\, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ on alamruum maatriksite vektorruumis $\mathbf{R}^{2\times 2}$.
Hulk $\mathbf{H}$ on kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes, sest

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix}$$

ja

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{bmatrix}.$$

Seetõttu hulk $\mathbf{H}$ on alamruum maatriksite vektorruumis $\mathbf{R}^{2\times 2}$.

Ülesanne 1.2.1.* Tõestage, et kõigi sümmeetriliste maatriksite hulk moodustab alamruumi ruutmaatriksite vektorruumis $\mathbf{R}^{n\times n}$.

Lause 1.2.2. Kui $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_k$ on vektorruumi $\mathbf{X}$ alamruumid, siis nende alamruumide ühisosa $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 \cap \ldots \cap \mathbf{S}_k$ on samuti vektorruumi $\mathbf{X}$ alamruum.

Tõestage! $\square$

Lause 1.2.3. Kui $\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_k$ on ruumi $\mathbf{X}$ alamruumid ja

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k : \ \mathbf{x}_i \in \mathbf{S}_i \quad (\mathrm{i} = 1 : \mathrm{k}\,)\}$$

on nende alamruumide summa, siis $\mathbf{S}$ on alamruum ruumis $\mathbf{X}$.

Definitsioon 1.2.2. Kui iga $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ on ühesel viisil esitatav kujul $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k \ \ (\mathbf{x}_i \in \mathbf{S}_i)$, siis öeldakse, et $\mathbf{S}$ on *alamruumide* $\mathbf{S}_i$ *otsesumma* ja tähistatakse $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}_k$.

Definitsioon 1.2.3. Vektorruumi $\mathbf{X}$ (üle korpuse $\mathbf{K}$) elementide $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineaarseks kombinatsiooniks* nimetatakse ruumi $\mathbf{X}$ iga elementi, mida saab esitada kujul $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$, kus $\alpha_i \in \mathbf{K}$.

Definitsioon 1.2.4. *Hulga* $Z \subset \mathbf{X}$ *lineaarseks katteks* nimetatakse hulga Z elementide kõikvõimalike lineaarsete kombinatsioonide hulka. Hulga Z lineaarset katet tähistatakse sümboliga *span* Z.

Näide 1.2.4. Olgu $\mathbf{X} = \mathbf{R}^3$ ja $Z = \{\, [1; 1; 0]^T , [1; -1; 0]^T \,\}$. Siis
span $Z = \{\, [\alpha; \beta; 0]^T \ : \ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \,\}$. Tõestage!

Lause 1.2.4. Hulga $Z \subset \mathbf{X}$ lineaarne kate $span\, Z$ on vektorruumi $\mathbf{X}$ vähim alamruum, mis sisaldab hulka Z.

Tõestus. Tõestame esiteks, et $span\, Z$ on ruumi $\mathbf{X}$ alamruum. Selleks on lause 1.2.1 põhjal piisav näidata, et $span\, Z$ on kinnine vektorite liitmise ja vektori arvuga korrutamise suhtes:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in span\, Z \;\Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \;\wedge \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{v}_j \wedge \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{K} \wedge \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in Z \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{v}_j \;\wedge \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{K} \wedge \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in Z \Leftrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in span\, Z \;;$$

$$\lambda \in \mathbf{K} \;\wedge \mathbf{x} \in span\, Z \Leftrightarrow \lambda \in \mathbf{K} \wedge \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}_i \in Z \wedge \alpha_i \,, \lambda \in \mathbf{K} \Rightarrow$$

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \alpha_i) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i \wedge \beta_i \in \mathbf{K} \wedge \mathbf{u}_i \in Z \;\Leftrightarrow \lambda \mathbf{x} \in span\, Z \,.$$

Seega on $span\, Z$ ruumi $\mathbf{X}$ alamruum. Näitame, et $span\, Z$ on vähim hulka Z sisaldav ruumi $\mathbf{X}$ alamruum. Olgu $\mathbf{Y}$ ruumi $\mathbf{X}$ mingi alamruum, mille korral $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Y}$. Näitame, et $span\, Z \subset \mathbf{Y}$. Et $Z \subset \mathbf{Y}$ ja $\mathbf{Y}$ on alamruum, siis hulga Z elementide suvaline lineaarkombinatsioon kuulub alamruumi $\mathbf{Y}$. Järelikult kuulub ruumi $\mathbf{Y}$ ka $span\, Z$ kui kõigi selliste lineaarkombinatsioonide hulk. $\square$

Järeldus. 1.2.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ alamhulk $\mathbf{W}$ on alamruum parajasti siis, kui ta ühtib oma lineaarse kattega, s.o $\mathbf{W} \leq \mathbf{X} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W} = span \mathbf{W}$.

Ülesanne 1.2.2.* Kas vektor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}^T$ kuulub alamruumi $span\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, kui

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}},\; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}},\; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}?$$

1.1.3. Vektorite lineaarne sõltuvus. Vektorruumi baas.

Definitsioon 1.3.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ (üle korpuse $\mathbf{K}$) vektorite hulka

$$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

nimetatakse *lineaarselt sõltuvaks,* kui

$$\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{K}\ \ :\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0 \wedge \alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Definitsioon 1.3.2. Vektorruumi $\mathbf{X}$ (üle korpuse $\mathbf{K}$) mingit vektorite hulka nimetatakse *lineaarselt sõltumatuks,* kui ta ei ole lineaarselt sõltuv.

Näide 1.3.1.* Kontrollime, kas hulk $U = \{1+x,\ x+x^2,\ 1+x^2\}$ on lineaarselt sõltumatu kõigi reaalsete kordajatega ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n$ $(n \geq 2)$.
Vaatleme võrdust

$$\alpha(1+x) + \beta(x+x^2) + \gamma(1+x^2) = 0.$$

Algebrast teame, et polünoom võrdub nulliga parajasti siis, kui kõik selle polünoomi kordajad on nullid. Seega võime välja kirjutada süsteemi

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Sellel süsteemil leidub vaid triviaalne lahend. Hulk U on lineaarselt sõltumatu.

Ülesanne 1.3.1.* Tõestage, et iga vektorite hulk, mis sisaldab nullvektorit, on lineaarselt sõltuv.

Ülesanne 1.3.2.* Tõestage, et kui determinandi reavektorid on lineaarselt sõltuvad, siis determinant võrdub nulliga.

Definitsioon 1.3.3. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite hulga $U = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ alamhulka $V = \{\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_k}\}$ nimetatakse *maksimaalseks lineaarselt sõltumatuks alamhulgaks,* kui V on lineaarselt sõltumatu ja ta ei ole hulga U ühegi lineaarselt sõltumatu alamhulga pärisalamhulgaks.

Lause 1.3.1. Kui V on hulga U maksimaalne lineaarselt sõltumatu alamhulk, siis $span\,U = span\,V$.

Tõestus. Et $V \subset U$, siis lineaarse katte definitsiooni kohaselt $span\,V \subset span\,U$. Seega tuleb väite tõestamiseks näidata, et $span\,V \supset span\,U$. Olgu väitevastaselt alamruumis $span\,U$ vektor $\mathbf{x}$, mis ei kuulu alamruumi $span\,V$. Järelikult vektor $\mathbf{x}$ ei avaldu hulga V vektorite lineaarkombinatsioonina, küll aga avaldub hulga U vektorite lineaarkombinatsioonina, milles on kasutatud vähemalt üht vektorit $\mathbf{x}_j \in U$, kusjuures $\mathbf{x}_j \notin V$ ja $\mathbf{x}_j$ ei avaldu hulga V vektorite lineaarkombinatsioonina. Hulk $V \cup \{\mathbf{x}_j\} \subset U$ on lineaarselt sõltumatu ja sisaldab hulka V pärisalamhulgana. Järelikult V ei ole maksimaalne lineaarselt sõltumatu alamhulk. See on vastuolus eeldusega. Seega $span\,V \supset span\,U$, mida oligi vaja näidata. □

Definitsioon 1.3.4. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite hulka $B = \{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ nimetatakse vektorruumi $\mathbf{X}$ *baasiks*, kui B on lineaarselt sõltumatu ja ruumi $\mathbf{X}$ iga vektor $\mathbf{x}$ avaldub hulga B vektorite lineaarkombinatsioonina, $\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{x}_i$, kusjuures kordajaid α_i (i = 1: n) nimetatakse *vektori* $\mathbf{x}$ *koordinaatideks* baasil B.

Definitsioon 1.3.5. Kui vektorruumi $\mathbf{X}$ baasis B olevate vektorite arv, s.o hulga I elementide arv, on lõplik, siis seda arvu nimetatakse *vektorruumi dimensiooniks* ehk *mõõtmeks* ja tähistatakse $\dim \mathbf{X}$ ning vektorruumi nimetatakse *lõplikudimensionaalseks* ehk *lõplikumõõtmeliseks ruumiks*. Kui vektorruumi $\mathbf{X}$ baasis B olevate vektorite arv on lõpmatu, siis vektorruumi $\mathbf{X}$ nimetatakse *lõpmatudimensionaalseks* ehk *lõpmatumõõtmeliseks ruumiks*.

Lause 1.3.2. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite alamhulk B sobib selle ruumi baasiks parajasti siis, kui ta on maksimaalne lineaarselt sõltumatu alamhulk.

Näide 1.3.2. Vektorid

$$\mathbf{e}_k = [\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{k-1\ nulli}; 1; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n-k\ nulli}]^T \qquad (\mathrm{k} = 1 : \mathrm{n})$$

moodustavad baasi ruumis $\mathbf{R}^n$. Kontrollime definitsioonis 1.3.4 esitatud tingimuste täidetust. Et

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T = [0; \ldots; 0]^T \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| = 0,$$

siis vektorite süsteem $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1:n}$ on lineaarselt sõltumatu, ja et

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k,$$

siis ruumi $\mathbf{R}^n$ kuuluv suvaline vektor avaldub vektorite $\mathbf{e}_k$ lineaarkombinatsioonina.

Ülesanne 1.3.3. Kas vektorite süsteem

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

moodustab baasi ruumis $\mathbf{R}^{2\times 2}$?

Näide 1.3.3. Vektorite süsteem $\{1; t; t^2; \ldots; t^n\}$ moodustab baasi ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n$.
Tõesti, vektorite hulk $\{1; t; t^2; \ldots; t^n\}$ on lineaarselt sõltumatu, sest

$$\mathbf{x} = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = \mathbf{0} \Rightarrow a_k = 0 \quad (\mathrm{k} = 1 : \mathrm{n})$$

ja ruumi $\mathbf{P}_n$ iga vektor $\mathbf{x}$ (s.o mistahes ülimalt n-astme polünoom) avaldub kujul

$$\mathbf{x} = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n.$$

Definitsioon 1.3.6. Kaht vektorruumi $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ nimetatakse *isomorfseteks*, kui nende ruumide vahel on korraldatav selline üksühene vastavus $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, et

$$\begin{array}{ll} 1)\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X} & \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}); \\ 2)\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},\ \forall \alpha \in \mathbf{K} & \varphi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}). \end{array}$$

Lause 1.3.3. Kõik samamõõtmelised (üle sama arvukorpuse $\mathbf{K}$) vektor-ruumid on isomorfsed.

1.1.4. Skalaarkorrutis

Definitsioon 1.4.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ üle korpuse $\mathbf{K}$ nimetatakse *skalaarkorrutamisega ruumiks*, kui igale elemendipaarile $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ on vastavusse seatud kindel, vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ *skalaarkorrutiseks* nimetatav, arv $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{K}$ nii, et on täidetud tingimused (skalaarkorrutise aksioomid):

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$; $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, kus $\overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ on suuruse $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ kaaskompleks;

3. $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$ (aditiivsus esimese teguri suhtes);

4. $\langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ (homogeensus esimese teguri suhtes).

Kui $\mathbf{X}$ on vektorruum üle $\mathbf{R}$, siis definitsiooni põhjal $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{R}$ ja tingimus 1 omandab kuju $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$, st sel juhul on skalaarkorrutis kommutatiivne.

Näide 1.4.1. Defineerime ruumis $\mathbf{C}^n$ vektorite

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{array}\right]^T \wedge \mathbf{y} = \left[\begin{array}{ccc} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{array}\right]^T$$

skalaarkorrutise valemiga

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} \ .$$

Kontrollime tingimuste 1-4 täidetust:

$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \geq 0,$

$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 0 \ \Rightarrow \ \xi_k = 0 \ \ (k = 1:n) \ \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\eta_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k}\eta_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \eta_k\overline{\xi_k}} = \overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle};$

$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)\overline{\varsigma_k} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\varsigma_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k\overline{\varsigma_k} = \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle;$

$\langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda\xi_k\overline{\eta_k} = \lambda\sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\eta_k} = \lambda\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$

Näide 1.4.2. Vaatleme kõigi lõigul $[\alpha,\beta]$ (Lebesgue'i mõttes) integreeruva ruuduga funktsioonide vektorruumi $\mathbf{L}_2[\alpha,\beta]$. Defineerime selliste funktsioonide skalaarkorrutise seosega

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}(t)\overline{\mathbf{y}(t)}dt.$$

Veenduge, et on täidetud skalaarkorrutamise aksioomid 1-4.

Lause 1.4.1. Skalaarkorrutamisel $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ on järgmised omadused:

1. $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle$ (aditiivsus teise teguri suhtes);
2. $\langle \mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ (kaashomogeensus teise teguri suhtes);
3. $\langle \mathbf{x},\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0},\mathbf{y}\rangle = 0 \ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X};$
4. $\langle \lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$

Tõestame esitatud väited:

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \overline{\langle \mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{x}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{z},\mathbf{x}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{z},\mathbf{x}\rangle} = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle;$

$\langle \mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = \overline{\langle \lambda\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} = \overline{\lambda\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle;$ $\langle \mathbf{x},\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{x},0\mathbf{x}\rangle = \overline{0}\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0;$

$\langle \lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle. \quad \square$

Lause 1.4.2 (Cauchy-Schwartzi võrratus). Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ mistahes vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ korral kehtib võrratus

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}.$$

Tõestus. Kui $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, siis skalaarkorrutise definitsiooni tingimuse 1 põhjal võrratus kehtib. Vaatleme järgnevalt juhtu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \neq 0$. Defineerime abifunktsiooni

$$\varphi(\lambda) = \langle \mathbf{x} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{y}\rangle.$$

Et

$$\varphi(\lambda) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \lambda\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \lambda^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle =$$
$$= \lambda^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + 2\lambda |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \forall\lambda \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^4 - |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \leq 0,$$

siis viimane võrratus on samaväärne võrratusega $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$ ja see omakorda Cauchy-Schwarzi võrratusega. □

Cauchy-Schwarzi võrratus võimaldab defineerida nurga kahe vektori vahel skalaarkorrutisega vektorruumis.

Definitsioon 1.4.2. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ mistahes vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ vaheline nurk määratakse seosega

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle / (\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}).$$

Ülesanne 1.4.1.* Näidake, et iga kahe kompleksse vektori $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ korral kehtib võrdus

$$\langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}}\rangle = \overline{\langle \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{y}\rangle}.$$

Ülesanne 1.4.2.* Kõigi lõigul $[\alpha, \beta]$ määratud reaalsete kordajatega ülimalt n-astme polünoomide vektorruumis $\mathbf{P}_n[\alpha, \beta]$ on skalaarkorrutis defineeritud valemiga

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \int_\alpha^\beta \mathbf{x}(t) y(t) dt.$$

Leidke polünoomide $\mathbf{x} = t - 1$ ja $\mathbf{y} = t^2 + 1$ vaheline nurk.

1.1.5. Vektori norm

Definitsioon 1.5.1. Vektorruumi $\mathbf{X}$ (üle arvukorpuse $\mathbf{K}$) nimetatakse *normeeritud ruumiks,* kui igale vektorile $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ on vastavusse seatud kindel, *vektori normiks* nimetatav, mittenegatiivne reaalarv $\|\mathbf{x}\|$ nii, et on täidetud tingimused:

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (samasuse aksioom);
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|$ (homogeensuse aksioom);
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmnurga võrratus).

Definitsioon 1.5.2. Normeeritud ruumis $\mathbf{X}$ *kahe vektori vaheline kaugus* $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ defineeritakse valemiga $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

Lause 1.5.1 (Hölderi võrratus)**.** Kui $1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1,$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n \ \wedge\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n,$$

siis

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/q}.$$

Tõestus. Vaadake E. Oja, P. Oja (1991, lk 11-12). □

Lause 1.5.2 (Minkowski võrratus). Kui $1 \le p < \infty$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n \ \wedge\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n,$$

siis

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Tõestus. Vaadake E. Oja, P. Oja (1991, lk 10-11)**.** □

Näide 1.5.1. Vektorruumis $\mathbf{C}^n$ tuuakse sisse vektori p-norm $(1 \le p \le \infty)$ seostega

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty),$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|.$$

Veendume, et p-norm $(1 \le p < \infty)$ rahuldab definitsioonis 1.5.1 esitatud tingimusi 1-3 :

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \xi_k = 0 \ \ (1 \le k \le n) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$$
$$\|\lambda\mathbf{x}\|_p = (|\lambda\xi_1|^p + \ldots + |\lambda\xi_n|^p)^{1/p} = [|\lambda|^p (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)]^{1/p} =$$
$$= |\lambda| (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|_p \ ;$$
kasutades Minkowski võrratust, saame

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p\right)^{1/p} = \|\mathbf{x}\|_p + ||\mathbf{y}||_p.$$

Veenduge tingimuste 1-3 täidetuses normi $\|\cdot\|_\infty$ korral!
Enamkasutatavad p-normid on:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \ ;$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} ;$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |\xi_k| \, .$$

Ülesanne 1.5.1.* Olgu antud vektorid $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$. Leidke

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_1 , \ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2 , \ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_\infty , \ \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1 , \ \|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2 , \ \|\mathbf{u}\|_\infty + \|\mathbf{v}\|_\infty ,$$
$$\|-5\mathbf{u}\|_1 + 5\,\|\mathbf{v}\|_1 , \ \|-5\mathbf{u}\|_2 + 5\,\|\mathbf{v}\|_2 , \ \|-5\mathbf{u}\|_\infty + 5\,\|\mathbf{v}\|_\infty .$$

Lause 1.5.3. Ruumi $\mathbf{C}^n$ kõik p-normid on ekvivalentsed, st kui $\|\cdot\|_\alpha$ ja $\|\cdot\|_\beta$ on ruumi $\mathbf{C}^n$ p-normid, siis leiduvad sellised positiivsed konstandid c_1 ja c_2, et

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\alpha \le \|\mathbf{x}\|_\beta \le c_2 \|\mathbf{x}\|_\alpha \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n.$$

Seejuures
$$\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 ,$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty ,$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

Tõestame kolm viimast väidet:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\xi_i|\,|\xi_j|\right)^{1/2} =$$

$$= ((\sum_{k=1}^{n} |\xi_i|)^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_1 \,;$$

Hölderi võrratust kasutades, saame $p = q = 2$ korral, et

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| = 1 \cdot |\xi_1| + \ldots + 1 \cdot |\xi_n| = |1 \cdot \xi_1| + \ldots + |1 \cdot \xi_n| \leq$$

$$\leq (1^2 + \ldots + 1^2)^{1/2} (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 \,;$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = ((\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} \leq (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \,;$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2} \leq ((\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2 + \ldots + (\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} =$$

$$= (n(\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|)^2)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \,;$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = n\,\|\mathbf{x}\|_\infty \,. \quad \square$$

Lause 1.5.4. Skalaarkorrutisega ruum $\mathbf{X}$ on normeeritud ruum normiga

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Tõestus. Kontrollime normi tingimuste 1-3 täidetust:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\lambda \mid \|\mathbf{x}\| \,;$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} =$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2} = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + 2\Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + 2\,|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + + \|\mathbf{y}\|^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \,.$$

Siinjuures $\Re(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on kompleksarvu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ reaalosa tähistus. $\square$

Lause 1.5.5. Skalaarkorrutisega normeeritud ruumis kehtib *rööpküliku reegel*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Tõestus. Vahetu kontrolliga saame, et

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle=$$
$$=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=$$
$$=2(\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2).\quad\square$$

Definitsioon 1.5.3. Öeldakse, et jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ ruumi $\mathbf{C}^n$ elementidest koondub p-normi suhtes elemendiks $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$ ja kirjutatakse $\mathbf{x}^{(k)}\rightarrow\mathbf{x}$, kui

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\right\|_p=0.$$

Märkus 1.5.1. Et kõik ruumi $\mathbf{C}^n$ p-normid on ekvivalentsed, siis jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ koonduvusest α-normi suhtes järeldub jada koonduvus β-normi suhtes.

Ülesanne 1.5.2. Näidata, et kui $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$, siis $\lim_{p\to\infty}\|\mathbf{x}\|_p=\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Ülesanne 1.5.3. Näidata, et kui $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$, siis

$$\|\mathbf{x}\|_p\le c(\|\Re\mathbf{x}\|_p+\|\Im\mathbf{x}\|_p),$$

kusjuures $\mathbf{x}=\Re\mathbf{x}+i\Im\mathbf{x}$ ja $\Re\mathbf{x},\Im\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$. Leida selline konstant c_n, et

$$c_n(\|\Re\mathbf{x}\|_2+\|\Im\mathbf{x}\|_2)\le\|x\|_2\quad\forall\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n.$$

Definitsioon 1.5.4. Vektori $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ *lähendiks* nimetatakse vektorit $\widehat{\mathbf{x}}\in\mathbf{R}^n$, mis teatavas mõttes erineb vähe vektorist $\mathbf{x}$.

Definitsioon 1.5.5. Fikseeritud vektori normi $\|\cdot\|$ korral nimetatakse vektori $\mathbf{x}$ lähendi $\widehat{\mathbf{x}}$ *absoluutseks veaks* suurust

$$\varepsilon_{abs}=||\,\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\,||$$

ja vektori $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ lähendi $\widehat{\mathbf{x}}$ *relatiivseks veaks* suurust

$$\varepsilon_{rel}=\ \|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|\,/\,\|\mathbf{x}\|\ .$$

Relatiivset viga võib $\infty-$normi korral käsitleda kui $\widehat{\mathbf{x}}$ õigete tüvenumbrite näitajat. Nimelt, kui $\|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_\infty/\|\mathbf{x}\|_\infty\approx10^{-k}$, siis vektori $\widehat{\mathbf{x}}$ suurimal komponendil on k õiget tüvenumbrit.

Näide 1.5.2. Olgu $\mathbf{x}=[2.543;\ 0.06356]^T$ ja $\widehat{\mathbf{x}}=[2.541;\ 0.06937]^T$. Leida ε_{abs} ja ε_{rel} ning lähendi $\widehat{\mathbf{x}}$ suurima komponendi õigete tüvenumbrite arv ε_{rel} abil. Leiame, et $\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}=[-0.002;\ 0.00581]^T$, $\varepsilon_{abs}=\|\widehat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|_\infty=0.00581$ ja $\|\mathbf{x}\|_\infty=2.543$ ning $\varepsilon_{rel}\approx0.0023\approx10^{-3}\Rightarrow k=3$. Seega on $\widehat{\mathbf{x}}$ suurimal komponendil $\widehat{\xi_1}$ kolm õiget tüvenumbrit. Samal ajal on komponendil $\widehat{\xi_2}$ vaid üks õige tüvenumber.

1.1.6. Ortogonaalsed vektorid

Definitsioon 1.6.1. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektoreid $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ nimetatakse *ortogonaalseteks*, kui $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, ja tähistatakse $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorit $\mathbf{x}$ nimetatakse *ortogonaalseks hulgaga* $Y \subset \mathbf{X}$, kui $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in Y$.

Ülesanne 1.6.1.* Leidke kõik vektorid, mis on ortogonaalsed nii vektoriga $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$ kui ka vektoriga $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Definitsioon 1.6.2. Öeldakse, et vektorruumi $\mathbf{X}$ *hulgad* Y ja Z *on ortogonaalsed,* kui $\mathbf{y} \perp \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{y} \in Y \ \wedge \forall \mathbf{z} \in Z$.

Definitsioon 1.6.3. Jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektoreist $\mathbf{x}^{(k)}$ nimetatakse *Cauchy jadaks*, kui vastavalt igale etteantud arvule $\epsilon > 0$ leidub naturaalarv n_0 nii, et mistahes $m \in N$ ja $n > n_0$ korral

$$||\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)}, \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n+m)} \rangle} < \varepsilon.$$

Definitsioon 1.6.4. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ nimetatakse *täielikuks*, kui temas iga Cauchy jada on koonduv selle ruumi $\mathbf{X}$ punktiks.

Definitsioon 1.6.5. *Hilberti ruumiks* $\mathbf{H}$ nimetatakse komplekset skalaarkorrutamisega vektorruumi, mis osutub normi $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ järgi koondumise mõttes täielikuks.

Lause 1.6.1. Ruum $\mathbf{C}^n$ skalaarkorrutamisega $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k$ on Hilberti ruum.

Lause 1.6.2. Lõigul $[\alpha, \beta]$ integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $\mathbf{L}_2[\alpha, \beta]$, skalaarkorrutisega $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\overline{y(t)}dt$, on Hilberti ruum.

Lause 1.6.3. Skalaarkorrutamisega vektorruumi $\mathbf{X}$ vektorite ortogonaalsusel on järgmised omadused (1-4):

1. $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$;
3. $\mathbf{x} \perp \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\} \Rightarrow \mathbf{x} \perp (\mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k)$;
4. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \perp \lambda \mathbf{y} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$;

ja Hilberti ruumi vektorite ortogonaalsusel on täiendavalt omadus:

5. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}_n \ \ (n = 1; 2; 3; \ldots) \ \wedge \ \mathbf{y}_n \to \mathbf{y} \ \ \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Tõestame need väited:

$\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$;

$\mathbf{x} \perp \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x} \perp \mathbf{y}_k \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \wedge \ldots \wedge \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_k \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \ldots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp (\mathbf{y}_1 + \ldots + \mathbf{y}_k)$;

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \lambda \mathbf{y}$;

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}_n \, \forall n \in \mathbf{N} \ \wedge \ \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle = 0 \wedge \ \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle = 0 \wedge |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. $\square$

Definitsioon 1.6.6. Hulga $Y \subset \mathbf{X}$ *ortogonaalseks täiendiks* nimetatakse hulka $Y^{\perp}$ ruumi $\mathbf{X}$ kõigist vektoritest, mis on ortogonaalsed hulgaga Y, st

$$Y^{\perp} = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} \in \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in Y)\}.$$

Ülesanne 1.6.2.* Olgu $U = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \subset \mathbf{R}^3$. Leidke hulga U ortogonaalne täiend.

Lause 1.6.4. Kui $\mathbf{X}$ on skalaarkorrutamisega vektorruum, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $Y \subset \mathbf{X}$ ja $\mathbf{x} \perp Y$, siis $\mathbf{x} \perp span\, Y$. Kui lisaks $\mathbf{X}$ on täielik, st on Hilberti ruum, siis $\mathbf{x} \perp \overline{span\, Y}$, kus $\overline{span\, Y}$ on hulga $span\, Y$ sulund.

Tõestus. Lause 1.6.3 väidete 3 ja 4 põhjal $\mathbf{x} \perp span\, Y$. Kui $\mathbf{y} \in \overline{span\, Y}$, st $\exists \mathbf{y}_n \in span\, Y$, selline, et $\mathbf{y}_n \rightarrow y$, siis arvestades ortogonaalsust $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}_n$ ja lause 1.6.3 väidet 5, saame $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, st $\mathbf{x} \perp \overline{span Y}$. $\square$

Lause 1.6.5. Hulga $Y \subset \mathbf{X}$ ortogonaalne täiend $Y^{\perp}$ on ruumi $\mathbf{X}$ alamruum. Hulga $Y \subset \mathbf{H}$ ortogonaalne täiend $Y^{\perp}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, st $Y^{\perp}$ on ruumi $\mathbf{H}$ alamruum, mis sisaldab kõik oma rajapunktid.

Tõestus. Lause 1.2.1 põhjal on piisav lause 1.6.5 esimese väite tõestamiseks näidata, et $Y^{\perp}$ on kinnine vektorite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes. See järeldub lause 1.6.3 väidetest 3 ja 4. Sama lause väite 5 põhjal kehtib ka lause 1.6.5 teine väide. $\square$

Lause 1.6.6. Kui Y on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, siis iga $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ esitub ühesel viisil summana $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{z} \in Y^{\perp}$.

Järeldus 1.6.1. Kui $\mathbf{Y}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum, siis ruum $\mathbf{H}$ avaldub kinniste alamruumide $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{L}^{\perp}$ otsesummana $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^{\perp}$ ning $(\mathbf{L}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{L}$.

Definitsioon 1.6.7. Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ vektori $\mathbf{x}$ *kaugus alamruumist* $\mathbf{Y} \subset \mathbf{H}$ defineeritakse valemiga

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

Lause 1.6.7. Kui $\mathbf{Y}$ on Hilberti ruumi $\mathbf{H}$ kinnine alamruum ja $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, siis leidub selline üheselt määratud $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, et $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$.

Definitsioon 1.6.8. Lauses 1.6.7 esinevat vektorit $\mathbf{y}$ nimetatakse *vektori* $\mathbf{x}$ *ristprojektsiooniks alamruumile* $\mathbf{Y}$.

Definitsioon 1.6.9. *Vektorite süsteemi* $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ nimetatakse *ortogonaalseks*, kui $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \|\mathbf{x}_i\|^2 \delta_{ij}$, kus δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Vektorite süsteemi $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ nimetatakse *ortonormeerituks*, kui $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Näide 1.6.1. Vektorite süsteem $\{\mathbf{e}_k\}$ $(\mathrm{k} = 1 : \mathrm{n})$, kus $\mathbf{e}_k = [\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{k-1\, nulli}; 1; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n-k\ nulli}]^T$, on ruumis $\mathbf{C}^n$ ortonormeeritud.

Näide 1.6.2. Vektorite süsteem

$$\{1/\sqrt{2\pi},\ (\cos t)/\sqrt{\pi},\ (\sin t)/\sqrt{\pi},\ (\cos 2t)/\sqrt{\pi},\ (\sin 2t)/\sqrt{\pi},\ \ldots\}$$

on ortonormeeritud süsteem ruumis $\mathbf{L}_2[-\pi, \pi]$.

Näide 1.6.3. Vektorite süsteem $\{\exp(i2\pi kt)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ on ortonormeeritud süsteem ruumis $\mathbf{L}_2[0; 1]$. Tõepoolest

$$\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = \int_0^1 \exp(i2\pi kt)\overline{\exp(i2\pi jt)}dt = \int_0^1 \exp(i2\pi(k-j)t)dt =$$

$$= \begin{cases} (\exp(i2\pi(k-j)) - 1)/(i2\pi(k-j)) & = 0, \text{ kui } k \neq j; \\ 1 & , \qquad \text{kui } k = j. \end{cases}$$

Lause 1.6.8. (Gram-Schmidti ortogonaliseerimisteoreem). Olgu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem skalaarkorrutisega vektorruumis $\mathbf{H}$, siis leidub selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, et $span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} = span\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$.

Tõestame selle väite matemaatilise induktsiooni meetodil. Juhul $k = 1$ defineerime $\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|$ ja seega $span\{\mathbf{x}_1\} = span\{\varepsilon_1\}$. Induktsioonibaas on olemas. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Eeldame, et lause väide peab paika $k = i-1$ korral, st leidub selline selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}\}$, et $span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}\} = span\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}\}$. Vaatleme vektorit

$$\mathbf{y}_i = \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\varepsilon_{i-1} + \mathbf{x}_i \ , \quad \lambda_j \in \mathbf{K}.$$

Kordajad λ_ν (ν =1: i-1) valime nii, et $\mathbf{y}_i \perp \varepsilon_\nu$ (ν =1: i-1), st $\langle \mathbf{y}_i, \varepsilon_\nu \rangle = 0$. Saame $i-1$ tingimust:
$\lambda_\nu \langle \varepsilon_\nu, \varepsilon_\nu \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_\nu \rangle = 0$, ehk $\lambda_\nu = -\langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_\nu \rangle$ (ν =1: i-1). Seega,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \ldots - \langle \mathbf{x}_i, \varepsilon_{i-1} \rangle \varepsilon_{i-1}.$$

Valime $\varepsilon_i = \mathbf{y}_i / \|\mathbf{y}_i\|$. Et

$$\varepsilon_\nu \in span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}\} \, (\nu = 1\text{: i-1}),$$

siis vektorite $\mathbf{y}_i$ ja ε_i konstruktsiooni põhjal $\varepsilon_i \in span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}$. Seega

$$span\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\} \subset span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\}.$$

Vektori $\mathbf{y}_i$ esitusest järeldub, et $\mathbf{x}_i$ on vektorite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$ lineaarne kombinatsioon. Järelikult,

$$span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\} \subset span\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\}.$$

Seega

$$span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i\} = span\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i\}. \quad \square$$

Näide 1.6.4. On antud ruumi $\mathbf{R}^4$ vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, kus

$$\mathbf{x}_1 = [1; 0; 1; 0]^T, \, \mathbf{x}_2 = [1; 1; 1; 0]^T, \, \mathbf{x}_3 = [0; 1; 0; 1]^T.$$

Leiame sellise ortonormeeritud süsteemi $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, et

$$span\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = span\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Lause 1.6.8 tõestuses esitatud ortogonaliseerimisprotsessi rakendamiseks, esiteks, kontrollime, kas süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu (võib ka mitte kontrollida, see selgub ortogonaliseerimise käigus):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{II-I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{III-II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu. Leiame vektori

$$\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\| = [1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T.$$

Vektor $\mathbf{y}_2$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = [1; 1; 1; 0]^T - \sqrt{2}[1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T = [0; 1; 0; 0]^T.$$

Kuna $\|\mathbf{y}_2\| = 1$, siis $\varepsilon_2 = \mathbf{y}_2 / \|\mathbf{y}_2\| = [0; 1; 0; 0]^T$. Vektor $\mathbf{y}_3$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= [0; 1; 0; 1]^T - 0 \cdot [1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0]^T - 1 \cdot [0; 1; 0; 0]^T = [0; 0; 0; 1]^T.$$

Seega,

$$\varepsilon_3 = \mathbf{y}_3 / \|\mathbf{y}_3\| = [0; 0; 0; 1]^T.$$

Näide 1.6.5. On antud ruumi $\mathbf{L}_2[-1; 1]$ lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, kus $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$ ja $\mathbf{x}_3 = t^2$. Leida selline ortonormeeritud süsteem $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, et

$$\mathit{span}\,\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \mathit{span}\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

Veenduda, et süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu. Leiame vektori

$$\varepsilon_1 = \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\| = 1/\sqrt{2}.$$

Vektor $\mathbf{y}_2$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = t - (\int_{-1}^{1} t \cdot \overline{(\frac{1}{\sqrt{2}})} dt) \frac{1}{\sqrt{2}} = t - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t.$$

Seega,

$$\varepsilon_2 = \mathbf{y}_2 / \|\mathbf{y}_2\| = t / \sqrt{\int_{-1}^{1} t \cdot \bar{t} dt} = t / \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} t.$$

Vektor $\mathbf{y}_3$ avaldub kujul:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \mathbf{x}_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= t^2 - (\int_{-1}^{1} t^2 \cdot \overline{(\frac{1}{\sqrt{2}})} dt) \frac{1}{\sqrt{2}} - (\int_{-1}^{1} t^2 \overline{(\sqrt{\frac{3}{2}} t)} dt) \sqrt{\frac{3}{2}} t =$$

$$= t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 0 = t^2 - \frac{1}{3} \,.$$

Järelikult,

$$\varepsilon_3 = \mathbf{y}_3 / \left\| \mathbf{y}_3 \right\| = (t^2 - \frac{1}{3}) / \sqrt{\int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3}) \overline{(t^2 - \frac{1}{3})} dt} =$$

$$= (t^2 - \frac{1}{3}) / \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (t^2 - \frac{1}{3}).$$

Funktsioonid $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ja ε_3 on normeeritud Legendre'i polünoomid lõigul $[-1; 1]$.

Ülesanne 1.6.3. Näidake, et paarikaupa ortogonaalsete vektorite süsteem $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on lineaarselt sõltumatu.

1.2. Maatriksid

1.2.1. Maatriksi tähistus ja tehted maatriksitega

Kõigi reaalsete elementidega $m \times n-$maatriksite vektorruumi tähistatakse $\mathbf{R}^{m \times n}$ ja

$$A \in \mathbf{R}^{m \times n} \Leftrightarrow A = (a_{ik}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ik} \in \mathbf{R}.$$

Maatriksi A elementi, mis paikneb $i-$ndas reas ja $k-$ndas veerus, tähistatakse a_{ik} või $A(i,k)$ või $[A]_{ik}$. Põhilised operatsioonid maatriksitega on järgmised:

- maatriksi transponeerimine ($\mathbf{R}^{m \times n} \to \mathbf{R}^{n \times m}$)

$$B = A^T \quad \Leftrightarrow \quad b_{ik} = a_{ki},$$

- maatriksite liitmine ($\mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^{m \times n} \to \mathbf{R}^{m \times n}$)

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik},$$

- maatriksi korrutamine arvuga ($\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{m \times n} \to \mathbf{R}^{m \times n}$)

$$B = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad b_{ik} = \lambda a_{ik},$$

- maatriksite korrutamine ($\mathbf{R}^{m\times p} \times \mathbf{R}^{p\times n} \to \mathbf{R}^{m\times n}$)

$$C = AB \quad \Leftrightarrow \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Ülesanne 2.1.1.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k & n \\ l & p \\ m & r \end{bmatrix}.$$

Leidke maatriks AB.

Ülesanne 2.1.2.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Leidke maatriks A^{n-1}.

Ülesanne 2.1.3.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tõestage, et

$$A^n = 2^{n-1} A \ \ (n \in N).$$

Näide 2.1.1.* Näitame, et maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne. Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Leiame korrutised:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -4 & 19 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Et antud näite korral $AB \neq BA$, siis üldjuhul ei ole maatriksite korrutamine kommutatiivne.

Lause 2.1.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times p}$ ja $B \in \mathbf{R}^{p\times n}$, siis

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Tõestus. Kui $C = (AB)^T$, siis

$$c_{ik} = [(AB)^T]_{ik} = [AB]_{ki} = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} b_{ji}.$$

Teisalt, kui $D = B^T A^T$, siis

$$d_{ik} = [B^T A^T]_{ik} = \sum_{j=1}^{p} [B^T]_{ij} [A^T]_{jk} = \sum_{j=1}^{p} [B]_{ji} [A]_{kj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{kj} b_{ji} = c_{ik}. \quad \square$$

Definitsioon 2.1.1. Maatriksit $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ nimetatakse *sümmeetriliseks maatriksiks*, kui $A^T = A$ ja *kaldsümmeetriliseks maatriksiks*, kui $A^T = -A$.

Ülesanne 2.1.4.* Kas maatriks A on sümmeetriline maatriks või kaldsümmeetriline maatriks, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix},\ c)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

Lause 2.1.2. Suvaline maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on esitatav sümmeetrilise maatriksi ja kaldsümmeetrilise maatriksi summana.

Tõestus. Suvaline maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on esitatav kujul $A = B + C$, kus $B = (A + A^T)/2$ ja $C = (A - A^T)/2$. Et

$$B^T = ((A + A^T)/2)^T = (A^T + A)/2 = B$$

ja

$$C^T = ((A - A^T)/2)^T = (A^T - A)/2 = -C,$$

siis lause väide peab paika. $\square$

Ülesanne 2.1.5.* Esitage maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sümmeetrilise maatriksi ja kaldsümmeetrilise maatriksi summana.

Definitsioon 2.1.2. Kui A on kompleksarvuliste elementidega $m \times n-$maatriks, st $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, siis maatriksi A *transponeeritud kaasmaatriks* A^H defineeritakse seosega

$$B = A^H \quad \Leftrightarrow \quad b_{ik} = \overline{a}_{ki}.$$

Definitsioon 2.1.3. Maatriksit $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nimetatakse *Hermite'i maatriksiks*, kui

$$A^H = A.$$

Ülesanne 2.1.6.* Kas maatriks A on Hermite'i maatriks, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} i & -2+i & -5+3i \\ 2+i & 5i & -2+i \\ 5+3i & 2+i & -8i \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2+3i & 1+i \\ 2-3i & -3 & -2i \\ 1-i & 2i & 0 \end{bmatrix}?$$

Ülesanne 2.1.7.* Olgu $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$. Näidake, et maatriksid AA^H ja A^HA on Hermite'i maatriksid.

Maatriksit $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ on võimalik esitada nii maatriksi A veeruvektorite $\mathbf{c}_k$ $(\mathrm{k=1:n})$ abil kui ka maatriksi A transponeeritud reavektorite $\mathbf{r}_i^T$ $(\mathrm{i=1:m})$ abil ("kleepides" maatriksi kokku vastavalt veeruvektoreist või transponeeritud reavektoreist)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1, & \cdots & ,\mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^T \end{bmatrix},$$

kusjuures $\mathbf{c}_k \in \mathbf{C}^m$ ja $\mathbf{r}_i \in \mathbf{C}^n$ ning

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Näide 2.1.2. Illustreerime neid mõisteid järgmise maatriksi $A \in \mathbf{R}^{3\times 2}$ abil

$$\begin{array}{c} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \wedge \\ \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \wedge \\ \mathbf{r}_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{r}_2^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{r}_3^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \wedge \\ A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1, & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix}. \end{array}$$

Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis $A(i,:)$ tähistab maatriksi A $i-$ndat rida, st

$$A(i,:) = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

ja $A(:,k)$ k-ndat veergu, st

$$A(:,k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Kui $1 \le p \le q < n \ \wedge \ 1 \le r \le m$, siis

$$A(r,\, p:q) = \begin{bmatrix} a_{rp} & \cdots & a_{rq} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{1\times(q-p+1)}$$

ja kui $1 \le p \le n \ \wedge \ 1 \le r \le s \le m$, siis

$$A(r:s,\, p) = \begin{bmatrix} a_{rp} \\ \vdots \\ a_{sp} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{s-r+1}.$$

Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_p)$ ning $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_q)$, kusjuures

$$i_1, \ldots, i_p \in \{1; 2; \ldots; m\} \ \wedge \ k_1, \ldots, k_q \in \{1; 2; \ldots; n\},$$

siis vastav *osamaatriks* on

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} A(i_1, k_1) & \cdots & A(i_1, k_q) \\ \vdots & & \vdots \\ A(i_p, k_1) & \cdots & A(i_p, k_q) \end{bmatrix}.$$

Näide 2.1.3. Kui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & -7 & 2 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

ja $\mathbf{i} = (2; 4)$ ja $\mathbf{k} = (1; 3; 5)$, siis

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Lintmaatriksid ja blokkmaatriksid

Definitsioon 2.2.1. Maatriksit, mille nullist erinevad elemendid on ainult peadiagonaalil ja selle mõningatel naaberdiagonaalidel, nimetatakse *lintmaatriksiks* .

Definitsioon 2.2.2. Öeldakse, et maatriks $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on *lintmaatriks lindi alumise ribalaiusega* p, kui

$$(i > k + p) \Rightarrow \ a_{ik} = 0$$

ja *ülemise ribalaiusega* q, kui

$$(k > i + q) \ \Rightarrow \ a_{ik} = 0$$

ning lindilaiusega $p + q + 1$.

Näide 2.2.1. Maatriks

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

on lintmaatriks, sest selle nullist erinevad elemendid asetsevad peadiagonaalil ja selle kahel alumisel naaberdiagonaalil ning ühel ülemisel naaberdiagonaalil. Maatriksi A alumine ribalaius on 2, sest $a_{ik} = 0$, kui $i > k + 2$, ja ülemine ribalaius on 1, sest $a_{ik} = 0$, kui $k > i + 1$. Maatriksi lindilaius on $2 + 1 + 1 = 4$. Maatriksi elemendid, mis ei pruugi olla nullid, on siin tähistatud ristikestega. Mõned olulisemad lintmaatriksite tüübid esitame tabeli 2.2.1 kujul.

Kui $D \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on diagonaalmaatriks, $q = \min\{m, n\}$ ja $d_i = d_{ii}$, siis kasutatakse tähistust $D = diag(d_1, \ldots, d_q)$.

Tabel 2.2.1.

Maatriksi tüüp	**Alumine ribalaius**	**Ülemine ribalaius**
diagonaalmaatriks	0	0
ülemine kolmnurkmaatriks	0	n-1
alumine kolmnurkmaatriks	m-1	0
kolmediagonaalne maatriks	1	1
ülemine bidiagonaalne maatriks	0	1
alumine bidiagonaalne maatriks	1	0
ülemine Hessenbergi maatriks	1	n-1
alumine Hessenbergi maatriks	m-1	1

Ülesanne 2.2.1.* Leidke maatriksi A tüüp, alumine ribalaius, ülemine ribalaius ja maatriksi lindilaius, kui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & n \end{bmatrix}.$$

Definitsioon 2.2.3. Maatriksit $A = (A_{\alpha\beta}) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ nimetatakse $q \times r-$*blokkmaatriksiks,* kui

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{1;1} & \dots & A_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q;1} & \dots & A_{q;\,r} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n_1 & \quad & n_r \end{array} & \end{array},$$

kus $m_1 + \ldots + m_q = m$ ja $n_1 + \ldots + n_r = n$ ning $A_{\alpha\beta}$ on $m_\alpha \times n_\beta-$maatriks.

Näide 2.2.2. Maatriks

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & b & b \\ a & a & a & b & b \\ a & a & a & b & b \\ c & c & c & d & d \end{bmatrix}$$

on $2 \times 2-$blokkmaatriks, kusjuures $m_1 = 3,\ m_2 = 1,\ n_1 = 3$ ja $n_2 = 2$ ning

$$A_{1;1} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix},\ A_{1;2} = \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \\ b & b \end{bmatrix},\ A_{2;1} = \begin{bmatrix} c & c & c \end{bmatrix},\ A_{2;2} = \begin{bmatrix} d & d \end{bmatrix}.$$

Olgu

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{1;1} & \dots & B_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q;1} & \dots & B_{q;\,r} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n_1 & \quad & n_r \end{array} & \end{array},$$

ja $C = A + B$, siis

$$C = \begin{bmatrix} C_{1;1} & \dots & C_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q;1} & \dots & C_{q;\,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1;1} + B_{1;1} & \dots & A_{1;\,r} + B_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q;1} + B_{q;1} & \dots & B_{q;\,r} + B_{q;\,r} \end{bmatrix}.$$

Lause 2.2.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m \times p},\ B \in \mathbf{R}^{p \times n},\ C = AB$ on blokkmaatriksid,

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{1;1} & \dots & A_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\alpha;1} & \dots & A_{\alpha;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q;1} & \dots & A_{q;\,r} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_\alpha \\ \\ m_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \quad\quad & p_r \end{array} & \end{array} ,$$

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{1;\,1} & \dots & B_{1;\,\beta} & \dots & B_{1;\,s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{r;\,1} & \dots & B_{r;\,\beta} & \dots & B_{r;\,s} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ \\ p_r \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} n_1 & \quad & n_\beta & \quad & n_s \end{array} & \end{array} ,$$

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C_{1;1} & \dots & C_{1;\,\beta} & \dots & C_{1;\,s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{\alpha;1} & \dots & C_{\alpha;\,\beta} & \dots & C_{\alpha;\,s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{q;1} & \dots & C_{q;\beta} & \dots & C_{q;\,s} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_\alpha \\ \\ m_q \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} n_1 & \quad & n_\beta & \quad & n_s \end{array} & \end{array} ,$$

kusjuures $1 \le \alpha \le q,\ 1 \le \beta \le s,\ m_1 + \ldots + m_q = m,\ p_1 + \ldots + p_s = p,$
$n_1 + \ldots + n_r = n$, siis

$$C_{\alpha;\,\beta} = \sum_{\gamma=1}^{r} A_{\alpha;\,\gamma} B_{\gamma;\,\beta} \qquad (\alpha = 1 : \mathrm{q}\ \wedge\ \beta = 1 : \mathrm{s}).$$

Tõestus. Olgu

$$\lambda = m_1 + \ldots + m_{\alpha-1}\,,\ \mu = n_1 + \ldots + n_{\beta-1}\,,\ 1 \le \gamma \le r,$$

$$\nu = p_1 + \ldots + p_{\gamma-1},\ m_0 = n_0 = p_0 = 0.$$

Et $[C_{\alpha;\beta}]_{i;k}$ on maatriksi C bloki $C_{\alpha;\beta}$ element, mis paikneb selle bloki $i-$ndas reas ja $k-$ndas veerus, ja $[A_{\alpha;\gamma}]_{i;j}$ maatriksi A bloki $A_{\alpha;\gamma}$ element, mis paikneb selle bloki $i-$ndas reas ja $j-$ndas veerus, ning $[B_{\gamma;\beta}]$ maatriksi B bloki $B_{\gamma;\beta}$ element, mis paikneb selle bloki $j-$ndas reas ja $k-$ndas veerus, siis

$$[C_{\alpha;\beta}]_{i;k} = c_{\lambda+i;\mu+k}\,,\ [A_{\alpha;\gamma}]_{i;j} = a_{\lambda+i;\nu+j}\,,\ [B_{\gamma;\beta}]_{j;k} = b_{\nu+j;\mu+k}\,.$$

Seega

$$[C_{\alpha;\beta}]_{i;k} = c_{\lambda+i;\mu+k} = \sum_{j=1}^{p} a_{\lambda+i;\,j} b_{j;\,\mu+k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p_1} a_{\lambda+i;\,j} b_{j;\,\mu+k} + \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{\lambda+i;\,j} b_{j;\,\mu+k} + \ldots + \sum_{j=p_1+p_2+\ldots+p_{r-1}+1}^{p} a_{\lambda+i;\,j} b_{j;\,\mu+k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p_1} [A_{\alpha;1}]_{i;j}[B_{1;\beta}]_{j;k} + \sum_{j=1}^{p_2} [A_{\alpha;2}]_{i;j}[B_{2;\beta}]_{j;k} + \ldots + \sum_{j=1}^{p_r} [A_{\alpha;r}]_{i;j}[B_{r;\beta}]_{j;k} =$$

$$= [A_{\alpha;1}B_{1;\beta}]_{i;k} + [A_{\alpha;2}B_{2;\beta}]_{i;k} + \ldots + [A_{\alpha;r}B_{r;\beta}]_{i;k} = [\sum_{j=1}^{r} A_{\alpha;\,j}B_{j;\beta}]_{i;k}\,.$$

Järelikult on maatriksite $C_{\alpha;\beta}$ ja $\sum_{\gamma=1}^{s} A_{\alpha;\gamma}B_{\gamma;\beta}$ kõik vastavad elemendid võrdsed ja seega peab lause kehtib. $\square$

Järeldus 2.2.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times p},\ B \in \mathbf{R}^{p\times n},\ A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_q \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_q \end{array} \end{array},$

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} B_1 & \ldots & B_r \end{bmatrix}, \\ \begin{array}{ccc} n_1 & \quad & n_r \end{array} \end{array}$$

ja $m_1 + \ldots + m_q = m$ ning $n_1 + \ldots + n_r = n$, siis

$$
AB = C = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} C_{1;1} & \ldots & C_{1;\,r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q;1} & \ldots & C_{q;\,r} \end{array}\right] & \begin{array}{c} m_1 \\ \\ m_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n_1 & \quad & n_r \end{array} & \end{array} ,
$$

kus $C_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta \quad (\alpha = 1 : \mathrm{q} \wedge \beta = 1 : \mathrm{r})$.

Järeldus 2.2.2. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times p},\ B \in \mathbf{R}^{p\times n}$,

$$
A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} A_1 & \ldots & A_s \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \quad & p_s \end{array} \end{array},
$$

$$
B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{array}\right] \begin{array}{c} p_1 \\ \\ p_s \end{array}
$$

ja $p_1 + \ldots + p_s = p$, siis $AB = C = \sum_{k=1}^{p} A_k B_k$.

Näide 2.2.3. Kehtib võrdus

$$
\left[\begin{array}{cc} A_{1;\,1} & A_{1;\,2} \\ A_{2;\,1} & A_{2;\,2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{1;\,1}x_1 + A_{1;\,2}x_2 \\ A_{2;\,1}x_1 + A_{2;\,2}x_2 \end{array}\right] .
$$

Näide 2.2.4. Kehtib võrdus

$$
\left[\begin{array}{cccc} a & a & a & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & b \\ c & c & c & d \\ c & c & c & d \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} e & f & f \\ e & f & f \\ e & f & f \\ g & h & h \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right] =
$$

$$
= \left[\begin{array}{cc} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{array}\right],
$$

kus $A = (a)$ on $3 \times 3-$maatriks, $B = (b)$ on $3 \times 1-$maatriks, $C = (c)$ on $2 \times 3-$maatriks, $D = (d)$ on $2 \times 1-$maatriks, $E = (e)$ on $3 \times 1-$maatriks, $F = (f)$ on $3 \times 2-$maatriks, $G = (g)$ on $1 \times 1-$maatriks ja $H = (h)$ on $1 \times 2-$maatriks.

Näide 2.2.5.* Leiame blokkmaatriksite A ja B korrutise AB, kui A ja B on vastavalt $3 \times 3-$ ja $3 \times 4-$maatriksid, kusjuures

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc:c} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Tähistame

$$A = \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} G & H \\ K & L \end{bmatrix},$$

kusjuures

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

ja

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Nendime, et on täidetud mõõdete kooskõla tingimused blokkmaatriksite korrutamiseks. Kui tähistada

$$AB = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix},$$

siis

$$R = CG + DK = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -1 & 15 & -4 \end{bmatrix},$$

$$S = CH + DL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$T = EG + FK = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$U = EH + FL = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & & 5 \\ -1 & 15 & -4 & & 7 \\ 0\ 0\ 0 & & & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.2.2.* Leidke 4×5-maatriksi A ja 5×4 maatriksi B korrutis AB blokk-kujul, kui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & \vdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 \\ 5 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.2.3. Determinandid

Vaatleme $n \times n-$maatriksit, nn $n-$*järku ruutmaatriksit*,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definitsioon 2.3.1. Indeksite $1, 2, \dots, n$ suvalist järjestust $i_1, i_2, \dots, i_n$ nimetatakse nende *permutatsiooniks.*

Definitsioon 2.3.2. Kahe indeksi järjekorda permutatsioonis $i_1 i_2 \dots i_n$ nimetatakse *loomulikuks,* kui väiksem indeks asetseb suurema ees; vastupidisel juhul — kui suurem indeks asetseb väiksema ees — öeldakse, et need kaks indeksit moodustavad *inversiooni.*

Definitsioon 2.3.3. *Determinandiks* nimetatakse eeskirja (kujutust, funktsiooni), mis seab ruutmaatriksile A vastavusse arvu, nn maatriksi A determinandi,

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma} a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} \cdots a_{n,i_n},$$

kus summeeritud on üle kõigi permutatsioonide $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$ indekseist $1, 2, 3, \dots, n$ ja σ on inversioonide arv veeruindeksite permutatsioonis $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$. Räägitakse ka $n-$järku determinandist ja selle ridadest ning veergudest.

Näide 2.3.1. Vaatleme kolmandat järku determinanti

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} +$$
$$+ (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Selles esituses uurime näiteks viimast liidetavat $(-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31}$. Selles veeruindeksite permutatsioonis 3 2 1 moodustab indeks 3 inversiooni indeksiga 2 ja indeksiga 1 ning indeks 2 moodustab inversiooni indeksiga 1. Seega on inversioonide arv σ selles veeruindeksite permutatsioonis võrdne kolmega.

Ülesanne 2.3.1.* Millise märgiga kuulub determinandi avaldisse elementide korrutis

$$a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n-1,2} a_{n,1}\,?$$

Determinantide omadused

- Transponeeritud maatriksi ja antud maatriksi determinandid on võrdsed, $\det(A^T) = \det(A)$.
- Determinandi mingi rea (veeru) kõigi elementide korrutamisel ühe ja sama arvuga korrutub determinant selle arvuga.
- Kui determinandis kahe rea (veeru) asukohad vahetada, siis muutub determinandi märk vastupidiseks.

- Kui determinandis kaks rida (veergu) on võrdsed, siis võrdub determinant nulliga.

- Kui determinandis mingi rea (veeru) iga element on kahe liidetava summa, siis see determinant lahutub kahe determinandi summaks, kusjuures esimeses determinandis on vaadeldavas reas (veerus) esimesed liidetavad ja teises determinandis selles reas (veerus) teised liidetavad ning ülejäänud read (veerud) on samad mis lähtedeterminandis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Determinant ei muutu, kui determinandi mingile reale (veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (veerg).

- Kehtivad on determinantide teooria põhivalemid (ehk *arendusteoreemid*):

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \det(A)\cdot\delta_{ik},$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = \det(A)\cdot\delta_{ik},$$

  kus

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = k \\ 0, & \text{kui } i \neq k \end{cases}$$

  on Kroneckeri sümbol ja A_{ik} on maatriksist A i-nda rea ja k-nda veeru kustutamisel saadud $(n-1)\times(n-1)-$ maatriksi determinandi ja arvu $(-1)^{i+k}$ korrutis.

Näide 2.3.2. Arvutame n-järku determinandi, kasutades arendusteoreemi esimese veeru järgi ja siis esimese rea järgi, saame

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(-1)^{1+1}D_{n-1} + 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

ehk

$$D_n + 2D_{n-1} + D_{n-2} = 0. \tag{1}$$

Võrrand (1) on lineaarne homogeenne konstantsete kordajatega teist järku diferentsvõrrand, millel on lahendid tüüpi λ^n. Üritame leida λ :

$$\lambda^n + 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0.$$

Meid huvitavad mittetriviaalsed lahendid. Seega oleme saanud diferentsvõrrandi (1) lahendite määramiseks ruutvõrrandi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

mille lahendeiks on $\lambda_{1,2} = -1$ ning võrrandi (1) üheks lahendiks on $D_n = (-1)^n$. Kuna arv -1 on saadud ruutvõrrandi kahekordne lahend, siis võrrandi (1) lahendiks on ka $D_n = (-1)^n n$. Seega oleme kätte saanud lineaarse homogeense kons-tantsete kordajatega teist järku diferentsvõrrandi (1) kaks lineaarselt sõltumatut erilahendit ja selle võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$D_n = C_1(-1)^n + C_2(-1)^n n.$$

Tingimustest $D_1 = -2$ ja $D_2 = 3$ saame määrata kordajad C_1 ja C_2 :

$$\begin{cases} C_1(-1)^1 + C_2(-1)^1 \cdot 1 = -2 \\ C_1(-1)^2 + C_2(-1)^2 \cdot 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases},$$

st saame meie konkreetse ülesande vastuse

$$D_n = (-1)^n(n+1).$$

Ülesanne 2.3.2.* Arvutage $n-$järku determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Näide 2.3.3. Leiame Vandermonde'i determinandi

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

lahutades determinandi viimasest reast arvuga $x_1$korrutatud eelviimase rea, siis eelviimasest reast arvuga x_1 korrutatud $(n-2)$-se rea, siis $(n-2)$-st reast arvuga x_1 korrutatud $(n-3)$-nda rea jne., viimasena teisest reast arvuga x_1 korrutatud esimese rea. Tulemuseks saame

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \dots & x_n^2 - x_1x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_1x_2^{n-3} & x_3^{n-2} - x_1x_3^{n-3} & \dots & x_n^{n-2} - x_1x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

ja kasutades arendust esimese veeru järgi ning tuues elementides ühised tegurid sulgude ette, saame

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

ning tuues esimesest veerust ette ühise teguri x_2-x_1 ja teisest veerust x_3-x_1 , ... , $(n-1)$-st veerust x_n-x_1, saame

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Kasutades samu operatsioonide tsükleid, jõuame tulemuseni

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{n \geq k > i \geq 1} (x_k - x_i).$$

Lause 2.3.1 (Laplace'i arendusteoreem)**.** Kehtib nn Laplace'i valem

$$\det(A) = \sum M_k \, A_{n-k},$$

kusjuures paremal seisev summa tuleb võtta üle kõigi k-järku determinantide (miinorite) M_k, mida saab moodustada fikseeritud ridadest i_1, i_2, ... , i_k ja A_{n-k} on maatriksist A miinori M_k moodustamisel kasutatud ridade i_1, i_2, ... , i_k ning veergude $j_1, j_2, \dots, j_k$ kustutamisel saadud maatriksi determinandi korrutis arvuga $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}$.

Tõestus. Vaadake Kangro (1962, lk 37-39). □

Näide 2.3.4. Kasutades Laplace'i arendust kahe esimese rea järgi teisendada determinanti

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \end{vmatrix}.$$

Et maatriksi kahe esimese rea elementidest saab moodustada vaid kolm nullist erinevat miinorit, siis saame arenduse

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & f \end{vmatrix}.$$

Ülesanne 2.3.3.* Arvutage Laplace'i valemi abil determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Laplace'i arendusteoreemi põhjal kehtib seos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

suvalise maatriksi $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$ korral. Valides $C = \begin{bmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$ teisendame determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

nii, et kõik elemendid b_{ij} saaksid nullideks. Et muuta $b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1}$ nullideks, tuleb $(n+1)$-sele veerule liita elemendiga b_{11} korrutatud esimene veerg ja elemendiga b_{21} korrutatud teine veerg jne ning lõpuks elemendiga b_{n1} korrutatud n–is veerg. Järgmisena muudame nullideks $b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2}$. Selleks liidame $(n+2)-$sele veerule elemendiga b_{12} korrutatud esimese veeru ja elemendiga b_{22} korrutatud teise veeru jne ning lõpuks elemendiga b_{n2} korrutatud n-nda veeru jne. Viimase sammuna muudame nullideks $b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{nn}$. Selleks liidame $2n-$dale veerule elemendiga b_{1n} korrutatud esimese veeru ja elemendiga b_{2n} korrutatud teise veeru jne ning lõpuks elemendiga b_{nn} korrutatud n-nda veeru. Tulemuseks saame

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & d_{n1} & \dots & d_{nn} \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1+n+2+\dots 2n+1+2+\dots n} \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(1+2n)2n}{2}+n} \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

kus

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{3}$$

Arvestades seost (2) ja seda, et seose (3) põhjal $D = A \cdot B$, jõuame väiteni

Lause 2.3.1 (teoreem maatriksite korrutise determinandist). Mistahes kahe $n-$järku maatriksi A ja B korral

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Definitsioon 2.3.4. Ruutmaatriksit, mille determinant on nullist erinev, nimetatakse *regulaarseks maatriksiks* ehk *regulaarmaatriksiks.*

Definitsioon 2.3.5. Ruutmaatriksit, mille determinant on null, nimetatakse *singulaarseks maatriksiks* ehk *singulaarmaatriksiks* või *kõdunud maatriksiks.*

1.2.4. Maatriksi neli alamruumi

Vaatleme reaalarvulist $m \times n-$maatriksit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Maatriksit A on võimalik esitada nii maatriksi A veeruvektorite $\mathbf{c}_k$ $(k = 1 : \mathrm{n})$ kui ka maatriksi A transponeeritud reavektorite $\mathbf{r}_i^T$ $(i = 1 : \mathrm{m})$ abil

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1, & \cdots & , \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^T \end{bmatrix},$$

kusjuures $\mathbf{r}_i \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{c}_k \in \mathbf{R}^m$ ning $\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$

Definitsioon 2.4.1. Maatriksi A veeruvektorite hulga $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ lineaarset katet $span\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ nimetatakse maatriksi A *veeruvektorite alamruumiks* ja tähistatakse $\mathcal{R}(A)$ või $ran(A)$.

Definitsioon 2.4.2. Maatriksi A reavektorite hulga $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\}$ lineaarset katet nimetatakse maatriksi A *reavektorite alamruumiks* ja tähistatakse $\mathcal{R}(A^T)$ või $ran(A^T)$.

Definitsioon 2.4.3. *Maatriksi astakuks* nimetatakse suurimat naturaalarvu k, mille korral maatriksil leidub nullist erinev k-järku miinor. Maatriksi A astakut tähistatakse $rank(A)$.

Olgu $rank(A) = r$. Teoreemi maatriksi astakust põhjal kehtib järmine väide.

Lause 2.4.1. Maatriksi astak on võrdne tema reavektorite (veeruvektorite) alamruumi mõõtmega, s.o

$$rank(A) = \dim \mathcal{R}(A^T) = \dim \mathcal{R}(A) = r.$$

Definitsioon 2.4.4. Maatriksi A *(parempoolseks) nullruumiks* nimetatakse võrrandisüsteemi

$$A\mathbf{x} = 0 \tag{4}$$

kõigi lahendite

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{bmatrix}^T$$

hulka. See on alamruum, mida tähistatakse sümboliga $\mathcal{N}(A)$ või $null(A)$.

Lause 2.4.2. Mistahes maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mille astak on r, korral

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - r \ \wedge \ \mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T) \ \wedge \ \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T) = R^n.$$

Tõestus. Süsteemimaatriksi A astakuks on r ja muutujate arvuks võrrandisüsteemis (4) on n. Järelikult on süsteemi vabadusastmete arvuks $n-$ r. Vabadusastmete arv näitab nullruumi mõõdet. Seega, $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$. Süsteem (4) on avaldatav kujul

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T\mathbf{x} \\ \dots \\ \mathbf{r}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seega $\mathbf{r}_k^T\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_k \perp \mathbf{x}$ $(k = 1 : \mathrm{m})$, st maatriksi A reavektorid on risti maatriksi A nullruumi $\mathcal{N}(A)$ suvalise vektoriga ja seega $\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T)$. Et lisaks $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ ja $\dim \mathcal{R}(A^T) = r$, siis $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A^T) = n$ ja ruumi $\mathbf{R}^n$ esitub otsesummana

$$\mathbf{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T). \ \square$$

Definitsioon 2.4.5. Maatriksi A vasakpoolseks nullruumiks nimetatakse võrrandisüsteemi

$$A^T\mathbf{y} = 0 \tag{5}$$

kõigi lahendite

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_m \end{bmatrix}^T$$

hulka ja seda tähistatakse $\mathcal{N}(A^T)$ või *null*(A^T).

Lause 2.4.3. Mistahes maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mille astak on r, korral

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r \ \wedge\ \mathcal{N}(A^T) \perp \mathcal{R}(A) \ \wedge\ \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbf{R}^m.$$

Tõestus. Süsteemimaatriksi A^T astakuks on r ja muutujate arvuks võrrandisüsteemis (5) on m. Järelikult on süsteemi vabadusastmete arvuks $m-\ r$ ja

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r.$$

Süsteem (5) on esitatav kujul

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{y} \\ \dots \\ \mathbf{c}_m^T\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seega $\mathbf{c}_k^T\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}_k \perp \mathbf{y}$ $(k = 1 : \mathrm{m})$ ja $\mathcal{N}(A^T) \perp \mathcal{R}(A)$. Et $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$ ja $\dim \mathcal{R}(A) = r$, siis $\dim \mathcal{N}(A^T) + \dim \mathcal{R}(A) = m$ ja ruumi R^m esitub otsesummana

$$\mathbf{R}^m = \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A). \ \square$$

Näide 2.4.1. Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alamruumide $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$ ja $\mathcal{N}(A^T)$ mõõtmed ja baasid. Illustreerime lausete 2.4.2 ja 2.4.3 väiteid antud näite korral.

Alustame ruumi $\mathcal{R}(A)$ uurimisest, lahutades maatriksi A teisest veerust kahekordse esimese veeru,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

ja siis kolmandast veerust uue teise, neljandast veerust esimese ning viiendast veerust esimese veeru ja uue teise

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siin sümbol " $\sim$ " maatriksite vahel tähistab, et on säilinud $\mathcal{R}(A)$. Viimasel maatriksil on nullist erinevaid veerge $2 \Rightarrow \dim \mathcal{R}(A) = 2$. Baasiks ruumile $\mathcal{R}(A)$ saame

$$S_{\mathcal{R}(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

Ruumi $\mathcal{N}(A^T)$ kirjeldamiseks lahendame süsteemi (5) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

st

$$\begin{cases} \eta_1 + 0\eta_2 + \eta_3 & = & 0 \\ \qquad \eta_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \eta_2 = 0 \ \wedge \ \eta_3 = p \ \wedge \ \eta_1 = -p \Rightarrow$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \\ p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim \mathcal{N}(A^T) = 1 \wedge S_{\mathcal{N}(A^T)} = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Kontrollime skalaarkorrutise abil, et $S_{\mathcal{R}(A)} \perp S_{\mathcal{N}(A^T)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ühend $S_{\mathcal{R}(A)} \cup S_{\mathcal{N}(A^T)}$ sisaldab kolme lineaarselt sõltumatut ruumi $\mathbf{R}^3$ vektorit ja on seega baasiks ruumile $\mathbf{R}^3$ ning järelikult $\mathbf{R}^3 = \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A)$. Ruumi $\mathcal{R}(A^T)$ kirjeldamiseks leiame tema dimensiooni ja baasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\dim \mathcal{R}(A^T) = 2 \wedge S_{\mathcal{R}(A^T)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Ruumi $\mathcal{N}(A)$ kirjeldamiseks lahendame süsteemi (4):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi_1 + 2\xi_2 + 0\xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 + \xi_5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{c} \xi_3 = p, \xi_4 = q, \xi_5 = t \\ \xi_2 = -p - t, \xi_1 = 2p - q + t \end{array} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2p - q + t \\ -p - t \\ p \\ q \\ t \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\mathcal{N}(A)} = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \} \Rightarrow \dim S_{\mathcal{N}(A)} = 3.$$

Baasi $S_{\mathcal{N}(A)}$ vektorid on risti baasi $S_{\mathcal{R}(A^T)}$ vektoritega ja seega $\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$ ning ühend $S_{\mathcal{R}(A^T)} \cup S_{\mathcal{N}(A)}$ moodustab baasi ruumile $\mathbf{R}^5$, järelikult

$$\mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbf{R}^5.$$

Ülesanne 2.4.1. Olgu $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Näidake, et $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.

Ülesanne 2.4.2. Näidake, et

$$\mathcal{N}(AB) \supseteq \mathcal{N}(B) \ \wedge\ \mathcal{N}((AB)^T) \supseteq \mathcal{N}(A^T) \wedge$$
$$\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A) \ \wedge\ \mathcal{R}((AB)^T) \subseteq \mathcal{R}(B^T).$$

Ülesanne 2.4.3.* Leidke maatriksi A alamruumide $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$ ja $\mathcal{N}(A^T)$ mõõtmed ja baasid. Illustreerige lausete 2.4.2 ja 2.4.3 väiteid maatriksi A korral, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 12 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 1 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 9 & 18 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.4.4.* Leidke maatriksi AB alamruumide $\mathcal{R}(AB)$, $\mathcal{N}(AB)$, $\mathcal{R}((AB)^T)$ ja $\mathcal{N}((AB)^T)$ mõõtmed ja baasid, kui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 9 & 18 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Võrrelge saadud tulemusi ülesande 2.4.3 alaülesannetes b ja c saadud tulemustega.

1.2.5. Maatriksi omaväärtused ja omavektorid

Definitsioon 2.5.1. Kui

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{6}$$

kus $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ ja λ on arv, siis arvu λ nimetatakse maatriksi A *omaväärtuseks* ja vektorit x sellele omaväärtusele λ vastavaks maatriksi A *(parempoolseks) omavektoriks.*

Definitsioon 2.5.2. Vektorit $\mathbf{x}$ nimetatakse maatriksi A *vasakpoolseks omavektoriks*, kui $\mathbf{x}^H A = \lambda\mathbf{x}^H$, kus $\mathbf{x}^H$ on transponeeritud kaasmaatriks.

Lause 2.5.1. Kui $\mathbf{x}$ on omaväärtusele λ vastav maatriksi A vasakpoolne omavektor, siis see $\mathbf{x}$ on omaväärtusele $\overline{\lambda}$ vastav maatriksi A^H parempoolne omavektor.

Tõestus. Saame väidete ahela

$$\mathbf{x}^H A = \lambda\mathbf{x}^H \Leftrightarrow (\mathbf{x}^H A)^H = (\lambda\mathbf{x}^H)^H \Leftrightarrow A^H\mathbf{x} = \overline{\lambda}\mathbf{x}. \quad \square$$

Nendime, et kui $\mathbf{x}$ on omaväärtusele λ vastav omavektor, siis on seda ka $c\mathbf{x}$, kus $c \in \mathbf{C}$. Seos (6) on esitatav kujul

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0, \tag{7}$$

kus I on $n \times n$ ühikmaatriks. Et omaväärtusprobleemil (6) on iga ruutmaatriksi A korral omavektoriks nullvektor, siis järgnevalt piirdume vaid mittetriviaalsete omavektorite uurimisega. Seos (7) kujutab endast homogeenset lineaarset võrrandisüsteemi, millel on mittetriviaalseid lahendeid vaid siis, kui selle süsteemi maatriks $A - \lambda I$ on singulaarne, st

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{8}$$

Võrrandit (8) nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks võrrandiks* ja polünoomi

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

nimetatakse maatriksi A *karakteristlikuks polünoomiks.* Võrrand (8) on $n-$järku algebraline võrrand suuruse λ suhtes ning ta on avaldatav kujul:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Algebra põhiteoreemi kohaselt on maatriksil $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ parajasti n omaväärtust, arvestades kordsust.

Definitsioon 2.5.3. Maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kõigi omaväärtuste hulka $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (siin võib olla võrdseid!) nimetatakse maatriksi A *spektriks* ja tähistatakse $\lambda(A)$.

Näide 2.5.1. Leida maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

omaväärtused ja omavektorid.

Koostame antud maatriksile vastava karakteristliku võrrandi (9):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Arvutades determinandi, saame kuupvõrrandi

$$(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 = 0,$$

mille lahendeiks on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 3$. Leiame omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid. Selleks paigutame süsteemi (7) suuruse λ väärtuse 0 ja lahendame saadud süsteemi:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1-0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sõltumatuid võrrandeid jääb üks

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

süsteemi vabadusastmete arv on 2 ning süsteemi üldlahendiks on

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q-p \\ q \\ p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kus p ja q on suvalised reaalarvud. Järelikult moodustavad, omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vastavad omavektorid $\mathbf{x}$ ruumi $\mathbf{R}^3$ kahemõõtmelise alamruumi, mille baasivektoreiks võime valida vektorid $\mathbf{x}_1 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$ ja $\mathbf{x}_2 = [-1 \quad 1 \quad 0]^T$. Omaväärtusele $\lambda_3 = 3$ vastavate omavektorite leidmiseks tuleb võrrandisüsteemis (7) suurus λ asendada selle väärtusega 3. Tulemusena tuleb lahendada võrrandisüsteem:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Selle süsteemi vabadusastmete arv on 1 ning maatriksi A omaväärtusele $\lambda_3 = 3$ vastavad omavektorid avalduvad kujul

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja moodustavad ruumis $\mathbf{R}^3$ ühemõõtmelise alamruumi baasivektoriga $\mathbf{x}_3 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

Ülesanne 2.5.1.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.5.2.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lause 2.5.2. Kui $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ on maatriksi A omaväärtused, siis

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Tõestus. Karakteristliku võrrandi (8) vasak pool, nullkohtadega $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on esitatav kujul

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n). \tag{10}$$

Võttes selles seoses $\lambda = 0$, saame lause väite. $\Box$

Järeldus. 2.5.1. Regulaarse maatriksi A ükski omaväärtus ei ole 0.

Lause 2.5.3. Kui $\mathbf{x}$ on regulaarse maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis sama vektor $\mathbf{x}$ on pöördmaatriksi A^{-1} omaväärtusele $1/\lambda$ vastav omavektor.

Tõestuseks korrutame seose (6) mõlemat poolt vasakult maatriksiga A^{-1}. Leiame, et $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x}$ ehk $A^{-1}x = (1/\lambda)\mathbf{x}$. $\Box$

Lause 2.5.4. Kui $\mathbf{x}$ on maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis sama vektor $\mathbf{x}$ on maatriksi A^2 omaväärtusele λ^2 vastavaks omavektoriks.

Tõestus. See väide järeldub võrduste ahelast:

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}. \ \Box$$

Ülesanne 2.5.3.* Olgu suurused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused. Tõestage, et suurused $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ on maatriksi A^k $(k \in N)$ omaväärtused.

Ülesanne 2.5.4.* Tõestage, et kui suurused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused, siis suurused $\lambda_1 \pm \mu, \ldots, \lambda_n \pm \mu$ on maatriksi $A \pm \mu I$ omaväärtused.

Lause 2.5.5. Maatriksi A jälg, st tema peadiagonaalil paiknevate elementide summa, võrdub maatriksi A kõigi omaväärtuste summaga.

Tõestuseks kasutame seost (10). Selle seose vasaku poole arenduses suuruse λ astmete järgi on astme λ^{n-1} kordajaks $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ ja paremas pooles $(-1)^{n+1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$. $\Box$

Näide 2.5.2.* Olgu teada maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

kolm omaväärtust: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 6$. Leiame maatriksi A neljanda omaväärtuse ja determinandi.
Et maatriksi A jälg võrdub maatriksi A kõigi omaväärtuste summaga, siis

$$4 + 2 + 3 + 7 = 4 + 1 + 6 + \lambda_4 \;\Rightarrow\; \lambda_4 = 5.$$

Leiame maatriksi A determinandi

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 120.$$

Ülesanne 2.5.5.* On teada, et maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 67 & 266 & -30 & 64 \\ -24 & -91 & 12 & -20 \\ -6 & -42 & 10 & -12 \\ 42 & 126 & -21 & 21 \end{bmatrix}$$

kolm omaväärtust: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -7$, $\lambda_3 = 21$. Leidke maatriksi A neljas omaväärtus ja determinant.

Lause 2.5.6. Nii ülemise kui ka alumise kolmnurkse maatriksi omaväärtusteks on kõik peadiagonaali elemendid ja ainult need.

Tõestus. Vaatleme selle väite tõestust ülemise kolmnurkse maatriksi A korral. Koostame vastava karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinandi arendamine annab karakteristlikule võrrandile kuju

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0. \;\square$$

Ülesanne 2.5.6.* Leidke maatriksi A omaväärtused ja omavektorid, kui

$$a)\ A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},\quad b)\ A=\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&1&7&7\\0&0&3&8\\0&0&0&-2\end{bmatrix}.$$

Lause 2.5.7. Maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. Olgu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ maatriksi A erinevatele omaväärtustele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ (k = 2 : n) vastavad omavektorid. Näitame, et nende omavektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu. Lihtsuse mõttes viime selle tõestuse läbi vaid $k = 2$ korral. Oletame väitevastaselt, et vektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ on lineaarselt sõltuv, st

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 = 0 \ \wedge \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0. \tag{11}$$

Korrutame seoses (11) esineva võrduse mõlemat poolt vasakult maatriksiga A. Saame

$$\alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 = 0 \tag{12}$$

ehk

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = 0. \tag{13}$$

Korrutades seoses (11) esinevat võrdust suurusega λ_1 ja lahutades saadud tulemuse seosest (13), saame

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}_2 = 0.$$

Selle seose vasakus pooles saab nulliga võrduda vaid esimene tegur, $\alpha_2 = 0$. Analoogiliselt, korrutades seoses (11) esinevat võrdust suurusega λ_2, jõuame võrduseni $\alpha_1 = 0$. Seega $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 0$, mis on vastuolus eeldusega (11). Järelikult, omavektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ on lineaarselt sõltumatu. $\square$

Oletame, et maatriksi A omavektorite süsteem $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ on lineaarselt sõltumatu. Moodustame $n \times n$-ruutmaatriksi S, valides esimeseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_1$, teiseks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_2$, …, n-ndaks veeruvektoriks vektori $\mathbf{x}_n$, st

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Tähistame

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Eelpool toodud näite 2.5.1 korral

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lause 2.5.8. Kui maatriksil A on n lineaarselt sõltumatut omavektorit $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, siis maatriks A on esitatav kujul

$$A = S\Lambda S^{-1}, \tag{16}$$

kus maatriksid S ja Λ on määratud vastavalt seostega (14) ja (15) .

Tõestuseks piisab näidata, et

$$AS \ = \ S\Lambda. \tag{17}$$

Lähtume seose (17) vasakust poolest:

$$AS = A \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Lähtume seose (17) paremast poolest:

$$S\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Järelikult kehtib seos (17) ja seega ka seos (16), aga samuti seos

$$\Lambda \ = \ S^{-1}AS. \ \ \square \tag{18}$$

Näide 2.5.3.* Leiame 3×3-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 3 \ \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Et otsitav maatriks A on esitatav kujul $A = S\Lambda S^{-1}$, kus

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \wedge \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

siis

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 4 & -6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 1 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.5.7.* Leida 2×2-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \wedge \lambda_2 = 2 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.5.8.* Leida 3×3-maatriksi A, mille omaväärtusi ja neile vastavaid omavektoreid me teame:

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_3 = 5 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Näide 2.5.4.* Leiame maatriksid A^{100} ja A^{155}, kui

$$A = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ 56 & -41 \end{bmatrix}.$$

Et

$$\begin{vmatrix} 41-\lambda & -30 \\ 56 & -41-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

ja

$$\lambda_1 = 1 \ \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \ \wedge \ \lambda_2 = -1 \ \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ning

$$A = S\Lambda S^{-1} \ \wedge \ \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ \wedge \ S = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \wedge \ S^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

siis

$$A^{100} = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) \cdots (S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^{100} S^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & (-1)^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ja

$$A^{155} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{155} & 0 \\ 0 & (-1)^{155} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ 56 & -41 \end{bmatrix} = A.$$

Ülesanne 2.5.9.* Leidke maatriksid A^{100} ja A^{155}, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -21 & 8 \end{bmatrix}, \ \ b)\ A = \begin{bmatrix} -20 & 42 \\ -9 & 19 \end{bmatrix}.$$

Lause 2.5.9. Kui maatriksi A ja B kõik omaväärtused on ühekordsed ning maatriksid A ja B on kommuteeruvad, siis neil on ühised omavektorid.

Tõestame selle väite. Olgu $\mathbf{x}$ maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, st kehtib seos (6) . Korrutame seose (6) mõlemat poolt vasakult maatriksiga B ja arvestame maatriksite A ja B kommuteeruvust. Tulemuseks saame seoste ahela:

$$A\mathbf{x} = \lambda x \ \Rightarrow \ B(A\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) \ \Leftrightarrow \ (BA)\mathbf{x} = \lambda(B\mathbf{x}) \ \Leftrightarrow \ A(B\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x}).$$

Seega, kui $\mathbf{x}$ on maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor, siis ka $B\mathbf{x}$ on maatriksi A samale omaväärtusele λ vastav omavektor. Et maatriksi A ühekordsele omaväärtusele vastav omavektorite hulk on ruumi $\mathbf{R}^n$ ühemõõtmeline alamruum, siis vektorid $\mathbf{x}$ ja $B\mathbf{x}$ on kollineaarsed, st

$$\exists \mu : B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}.$$

Järelikult on maatriksi A omaväärtusele λ vastav omavektor $\mathbf{x}$ ka maatriksi B omavektoriks, mis vastab maatriksi B omaväärtusele μ. Analoogiliselt saab näidata, et maatriksi B iga omavektor on ka maatriksi A omavektor. $\square$

Lause 2.5.10. Kui maatriksitel $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$on n ühist lineaarselt sõltumatut omavektorit, siis need maatriksid on kommuteeruvad.

Tõestus. Lause 2.5.8 põhjal on need maatriksid esitatavad kujul

$$A = S\Lambda S^{-1}, \quad B = S\Upsilon S^{-1}, \tag{19}$$

kus S on neist n omavektorist kui veeruvektorist moodustatud maatriks ja Λ on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil on maatriksi A omaväärtused ning Υ on diagonaalmaatriks, mille diagonaalil on maatriksi B omaväärtused. Leiame korrutised AB ja BA, kasutades seoseid (19) :

$$AB = S\Lambda S^{-1}S\Upsilon S^{-1} = S\Lambda\Upsilon S^{-1}$$

ja

$$BA = S\Upsilon S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S\Upsilon\Lambda S^{-1}.$$

Et diagonaalmaatriksid Λ ja Υ on kommuteeruvad, siis $AB = BA$, mida oligi vaja tõestada. $\square$

1.2.6. Schuri lahutus

Maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omavektor $\mathbf{x}$ määrab ruumis $\mathbf{C}^n$ ühemõõtmelise alamruumi, mis on invariantne maatriksiga A vasakult korrutamise suhtes.

Definitsioon 2.6.1. Alamruumi $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{C}^n$ nimetatakse invariantseks maatriksiga A (vasakult) korrutamise suhtes, kui $\mathbf{x} \in \mathbf{S} \Rightarrow A\mathbf{x} \in \mathbf{S}$.

Lause 2.6.1. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{C}^{k\times k}$, $X \in \mathbf{C}^{n\times k}$ ja $AX = XB$, siis maatriksi X veeruvektorite ruum $\mathcal{R}(X)$ on invariantne maatriksiga A vasakult korrutamise suhtes ja reavektorite ruum $\mathcal{R}(X^T)$ on invariantne maatriksiga B paremalt korrutamise suhtes. Lisaks kehtivad seosed

$$\dim \mathcal{R}(X) = k \Rightarrow \lambda(B) \subseteq \lambda(A)$$

ja

$$\dim \mathcal{R}(X) = k = n \Rightarrow \lambda(B) = \lambda(A).$$

Tõestus. Kui $X = [\mathbf{c}_1 \ \ldots \ \mathbf{c}_k]$, siis

$$AX = A\,[\mathbf{c}_1 \ \ldots \ \mathbf{c}_k] = [A\mathbf{c}_1 \ \ldots \ A\mathbf{c}_k]$$

ja

$$XB = [\mathbf{c}_1 \ \ldots \ \mathbf{c}_k] \begin{bmatrix} b_{1;1} & \cdots & b_{1;k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k;1} & \ldots & b_{k;k} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{1;1}\mathbf{c}_1 + \ldots + b_{k;1}\mathbf{c}_k & \cdots & b_{1;\,k}\mathbf{c}_1 + \ldots + b_{k;\,k}\mathbf{c}_k \end{bmatrix}$$

ning

$$A\mathbf{c}_i = b_{1;\,i}\mathbf{c}_1 + \ldots + b_{k;\,i}\mathbf{c}_k \ \ (\mathrm{i}=1:\mathrm{k}) \ \Rightarrow A\,\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(X).$$

Seega on maatriksi X veeruvektorite ruum $\mathcal{R}(X)$ invariantne maatriksiga A vasakult korrutamise suhtes. Analoogiliselt tõestatakse, et reavektorite ruum $\mathcal{R}(X^T)$ on invariantne maatriksiga B paremalt korrutamise suhtes. Kui $B\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, siis

$$A(X\mathbf{y}) = (XB)\mathbf{y} = X\lambda\mathbf{y} = \lambda(X\mathbf{y}),$$

st λ on maatriksi A omaväärtus, kui λ on maatriksi B omaväärtus. Nendime, et

$$\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \overset{\dim \mathcal{R}(X)=k}{\Rightarrow} X\mathbf{y} \neq \mathbf{0}.$$

Järelikult, kui maatriksi X veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis $\lambda(B) \subseteq \lambda(A)$. Kui $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ ja X on regulaarne ruutmaatriks ($\dim \mathcal{R}(X) = k = n$), siis seosest $AX = XB$ järeldub, et $A = XBX^{-1}$ning

$$XBX^{-1}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} \Leftrightarrow B(X^{-1}\mathbf{z}) = \lambda(X^{-1}\mathbf{z}),$$

st maatriksi A iga omaväärtus on maatriksi B omaväärtus, $\lambda(A) \subseteq \lambda(B)$ ja seega $\lambda(B) = \lambda(A)$. $\square$

Definitsioon 2.6.2. Maatrikseid $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nimetatakse *sarnasteks*, kui leidub selline regulaarne maatriks $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et $A = XBX^{-1}$.

Lause 2.6.1 viimase väite põhjal on sarnaste maatriksite spektrid võrdsed. See väide järeldub ka vahetult, sest

$$\det(A - \lambda I) = \det(XBX^{-1} - X\lambda IX^{-1}) =$$

$$= \det(X(B - \lambda I)X^{-1}) = \det(X)\det(B - \lambda I)\det(X^{-1}).$$

Ülesanne 2.6.1.* Kas maatriksid A ja B on sarnased, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 2 & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 1+i & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix},$$

$$b)\ A=\left[\begin{array}{ccc}25+25i & 25 & 100\\ 25 & 100 & 25+25i\\ 25+25i & 25 & 100\end{array}\right]\wedge B=\left[\begin{array}{ccc}100 & 35+20i & -5+15i\\ 95+15i & 76+16i & -43+12i\\ 40-20i & -43+12i & 49+9i\end{array}\right]?$$

Lause 2.6.2. Kui $T\in\mathbf{C}^{n\times n}$ ja

$$T=\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{cc}T_{1;1} & T_{1;2}\\ 0 & T_{2;2}\end{array}\right] & \begin{array}{c}p\\ q\end{array}\\ \begin{array}{cc}p & \quad q\end{array} & \end{array},$$

siis $\lambda(T)=\lambda(T_{1;1})\cup\lambda(T_{2;2})$.

Tõestus. Kui $T\,\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, st $\lambda\in\lambda(T)$, $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{array}\right]$, $\mathbf{x}_1\in\mathbf{C}^p$ ja $\mathbf{x}_2\in\mathbf{C}^q$, siis

$$\left[\begin{array}{cc}T_{1;1} & T_{1;2}\\ 0 & T_{2;2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{array}\right]=\lambda\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{array}\right]\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}T_{1;1}\mathbf{x}_1+T_{1;2}\mathbf{x}_2=\lambda\mathbf{x}_1\\ T_{2;2}\mathbf{x}_2=\lambda\mathbf{x}_2\end{array}\right..$$

Kui $\mathbf{x}_2\neq\mathbf{0}$, siis

$$T_{2;2}\mathbf{x}_2=\lambda\mathbf{x}_2\Rightarrow\lambda\in\lambda(T_{2;2}).$$

Kui $\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$, siis

$$T_{1;1}\mathbf{x}_1=\lambda\mathbf{x}_1\Rightarrow\lambda\in\lambda(T_{1;1}).$$

Järelikult,

$$\lambda(T)\subset\lambda(T_{1;1})\cup\lambda(T_{2;2}).$$

Et hulkade $\lambda(T_{1;1})\cup\lambda(T_{2;2})$ ja $\lambda(T)$ võimsused on samad, siis kehtib lause väide.
□

Näide 2.6.1. Leiame lause 2.6.2 abil maatriksi

$$A=\left[\begin{array}{rrrr}1 & 1 & 5 & 6\\ -1 & 1 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 3\end{array}\right]$$

spektri. Selleks leiame maatriksite $\left[\begin{array}{rr}1 & 1\\ -1 & 1\end{array}\right]$ ja $\left[\begin{array}{rr}2 & 1\\ -4 & 3\end{array}\right]$ omaväärtused:

$$\left|\begin{array}{cc}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{array}\right|=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=1+i\\ \lambda_2=1-i\end{array}\right.,$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = (5+i\sqrt{15})/2 \\ \lambda_4 = (5-i\sqrt{15})/2 \end{cases}.$$

Seega on maatriksi spektriks $\lambda(A) = \{1+i;\ 1-i;\ (5+i\sqrt{15})/2; (5-i\sqrt{15})/2\}$.

Ülesanne 2.6.2.* Leidke lause 2.6.2 abil maatriksi A spekter, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 17 & 36 \\ 4 & 6 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definitsioon 2.6.3. Maatriksit $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nimetatakse *unitaarmaatriksiks*, kui $Q^HQ = QQ^H = I$.

Ülesanne 2.6.3.* Kas maatriks Q on unitaarmaatriks, kui

$$a)\ Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ b)\ Q = \begin{bmatrix} \cos x & i\sin x \\ i\sin x & \cos x \end{bmatrix},$$

$$c)\ Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}i\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}i\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Lause 2.6.3 (teoreem maatriksi $QR-$lahutusest)**.** Kui $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, siis maatriks A on esitatav kujul $A = QR$, kus maatriks $Q \in \mathbf{C}^{m\times m}$ on unitaarmaatriks ja $R \in \mathbf{C}^{m\times n}$ on ülemine kolmnurkne maatriks.

Lause 2.6.4. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n},\ B \in \mathbf{C}^{p\times p},\ X \in \mathbf{C}^{n\times p}$,

$$AX = XB \tag{20}$$

ja $rank(X) = p,$ siis leidub selline unitaarmaatriks $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et

$$Q^HAQ = T = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} T_{1;1} & T_{1;2} \\ 0 & T_{2;2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array},$$

kus $\lambda(T_{1;1}) = \lambda(A) \cap \lambda(B)$.

Tõestus. Vaatleme maatriksi X korral selle $QR-$lahutust $X = Q\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, kus $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $R_1 \in \mathbf{C}^{p\times p}$. Paigutades selle maatriksi X esituse seosesse (20), saame

$$AQ\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}B \Leftrightarrow Q^HAQ\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}B.$$

Maatriksi $Q^H AQ$ spekter ühtib maatriksi A spektriga, st $\lambda(Q^H AQ) = \lambda(A)$. Esitades maatriksi A kujul

$$Q^H AQ = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} T_{1;1} & T_{1;2} \\ T_{2;1} & T_{2;2} \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array},$$

leiame, et

$$\left[\begin{array}{cc} T_{1;1} & T_{1;2} \\ T_{2;1} & T_{2;2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} R_1 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R_1 B \\ 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_{1;1} R_1 = R_1 B \\ T_{2;1} R_1 = 0 \end{array}\right. \underset{\det R_1 \neq 0}{\overset{\text{lause 2.6.1}}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{c} \lambda(T_{1;1}) = \lambda(B) \\ T_{2;1} = 0\,. \end{array}\right.$$

Seega lause väide kehtib. $\Box$

Märkus 2.6.1. Lause 2.6.4 võimaldab, teades maatriksi mingit invariantset alamruumi, teisendada maatriksi unitaarse sarnasusteisenduse abil kolmnurksele blokk-kujule.

Lause 2.6.5 (Schuri lahutus). Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, siis leidub selline unitaarne maatriks $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et

$$Q^H AQ = T = D + N\,, \tag{21}$$

kusjuures $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ja $N \in \mathbf{C}^{n\times n}$ on rangelt ülemine kolmnurkmaatriks, st ülemine kolmnurkmaatriks, mille peadiagonaalil on nullid. Maatriksit Q võib valida selliselt, et maatriksi A omaväärtused on D peadiagonaalil etteantud järjekorras.

Tõestuseks kasutame matemaatilist induktsiooni. Et väide peab paika $n = 1$ korral, siis induktsiooni baas on olemas. Näitame induktsiooni sammu lubatavust. Eeldame, et väide kehtib maatriksite korral, mille järk on väiksem-võrdne kui $k-1$. Näitame, et see väide kehtib ka järgu k korral. Kui $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, siis lemma 2.6.4 põhjal, valides $X = \mathbf{x}$, $B=\lambda$, leidub selline unitaarmaatriks U, et

$$U^H AU = T = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \lambda & w^H \\ 0 & C \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ k-1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & k-1 \end{array} & \end{array},$$

Et $C \in \mathbf{C}^{(k-1)\times(k-1)}$, siis selle maatriksi korral peab paika lause väide, st leidub selline unitaarmaatriks $\hat{U}$, et $\hat{U}^H C\hat{U}$ on ülemine kolmnurkmaatriks. Kui $Q = U\, diag(1; \hat{U})$, siis

$$Q^H AQ = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U}^H \end{array}\right] U^H AU \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & w^H \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & w^H \\ 0 & \hat{U}^H C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & w^H \hat{U} \\ 0 & \hat{U}^H C \hat{U} \end{bmatrix}$$

ja seega on maatriks $Q^H AQ$ ülemine kolmnurkmaatriks. $\square$

Näide 2.6.2. Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad Q = \begin{bmatrix} 2i/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2i/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Näitame, et Q on unitaarmaatriks. Leiame korrutise $Q^H AQ$.

Kontrollime maatriksi Q on unitaarsust:

$$Q^H Q = \begin{bmatrix} -2i/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$QQ^H = \begin{bmatrix} 2i/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2i/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Leiame korrutise

$$Q^H AQ = \begin{bmatrix} -2i/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -2i/\sqrt{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4i & -6 \\ 0 & 3-4i \end{bmatrix}.$$

Järelikult, oleme saanud maatriksi A Schuri lahutuse.

Seos (21) on esitatav kujul $AQ = QT$. Asendades $Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n]$, kus vektoreid $\mathbf{q}_i$ nimetatakse *Schuri vektoreiks*, viimasesse võrdusesse, saame

$$A\,[\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n] = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n]T$$

ehk

$$[A\mathbf{q}_1 \cdots A\mathbf{q}_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{q}_1 & \lambda_2\mathbf{q}_2 + n_{1;2}\mathbf{q}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{q}_n + n_{1;n}\mathbf{q}_1 + n_{2;n}\mathbf{q}_2 + \ldots + n_{n-1;n}\mathbf{q}_{n-1} \end{bmatrix}$$

või

$$Aq_i = \lambda_i q_i + n_{1;i} q_1 + \ldots + n_{i-1;i} q_{i-1} = \lambda_i q_i + \sum_{k=1}^{i-1} n_{ki} q_k \quad (\mathrm{i}=1\colon\mathrm{n}).$$

Sellest seosest järeldub, et alamruumid $S_k = span\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ $(\mathrm{k}=1\colon\mathrm{n})$ on invariantsed maatriksiga A vasakult korrutamise suhtes ja Schuri vektor $\mathbf{q}_i$ on maatriksi A omavektoriks parajasti siis, kui maatriksi N i-ndas veerus on vaid nullid.

Definitsioon 2.6.4. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $A^HA = AA^H$, siis maatriksit A nimetatakse *normaalmaatriksiks.*

Ülesanne 2.6.4.* Kas maatriks A on normaalmaatriks, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad b)\ A = \begin{bmatrix} i & -1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \end{bmatrix},\quad c)\ A = \begin{bmatrix} i & i & i \\ -i & i & -i \\ i & i & i \end{bmatrix}?$$

Lause 2.6.6. Maatriks $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ on normaalmaatriks parajasti siis, kui leidub selline unitaarmaatriks $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et $Q^HAQ = D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Tõestus. Kui maatriks A on unitaarselt sarnane diagonaalmaatriksiga D, siis

$$Q^HAQ = D \Leftrightarrow A = QDQ^H \Rightarrow A^HA = QD^HQ^HQDQ^H = QD^HDQ^H \wedge$$
$$AA^H = QDQ^HQD^HQ^H = QDD^HQ^H$$

ja et diagonaalmaatriksid on kommuteeruvad, siis $A^HA = AA^H$ ja maatriks A on normaalmaatriks. Vastupidi, kui maatriksi A on normaalmaatriks ja selle maatriksi Schuri lahutuseks on $Q^HAQ = T$, siis ka T on normaalmaatriks, sest

$$T^HT = Q^HA^HQQ^HAQ = Q^HA^HAQ$$

ja

$$TT^H = Q^HAQQ^HA^HQ = Q^HAA^HQ.$$

Et kolmnurkmaatriks on normaalmaatriks vaid siis, kui see maatriks on diagonaalmaatriks, siis on tõestatud, et unitaarmaatriks on sarnane diagonaalmaatriksiga. □

Lause 2.6.7 (blokk-diagonaal-lahutus)**.** Olgu

$$Q^HAQ = T = \begin{bmatrix} T_{1;1} & T_{1;2} & \cdots & T_{1;q} \\ 0 & T_{2;2} & \cdots & T_{2;q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{q;q} \end{bmatrix}$$

maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ Schuri lahutus, kusjuures blokid $T_{i;\,i}$ on ruutmaatriksid. Kui $\lambda(T_{i;\,i}) \cap \lambda(T_{j;\,j}) = \emptyset \quad (i \neq j)$, siis eksisteerib selline regulaarne maaatriks $Y \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et

$$(QY)^{-1}A(QY) = diag(T_{1;1}\,, \ldots\,, T_{q;\,q}).$$

Järeldus 2.6.1. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, siis leidub selline regulaarmaatriks X, et

$$X^{-1}AX = diag(\lambda_1 I + N_1\,, \ldots\,, \lambda_q I + N_q) \qquad N_i \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i},$$

kusjuures $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ja $n_1 + \ldots + n_q = n$ ning iga N_i on rangelt ülemine kolmnurkmaatriks.

Lause 2.6.8 (Jordani lahutus). Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, siis leidub selline regulaarne $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et $X^{-1}AX = J = diag(J_1\,, \ldots\,, J_t)$, kusjuures $m_1 + \ldots + m_t = n$ ja

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

on $m_i \times m_i$ Jordani blokk ning maatriks J kannab maatriksi A *Jordani normaalkuju* nime.

Tõestus. Vaadake Lankaster (1982, lk 143).

Näide 2.6.3. Leiame, kasutades paketti "Maple", kahe maatriksi Jordani lahutuse $A = XJX^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 1&-1&0&-1\\0&2&0&1\\-2&1&-1&1\\2&-1&2&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}&-1\\ \frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\ \frac{3}{2}&1&-\frac{3}{2}&1\\ -\frac{3}{2}&-1&\frac{3}{2}&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&1&0\\0&\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&1&1&1\\0&0&1&1 \end{bmatrix}.$$

1.2.7. Maatriksi normid ja konditsiooniarvud

Definitsioon 2.7.1. Kujutust $f : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ nimetatakse *maatriksi normeerimiseks* ja saadud väärtusi *maatriksi normiks,* kui on täidetud järgmised kolm tingimust:

$$\begin{array}{lll} f\,(A) \geq 0 & A \in \mathbf{R}^{m\times n}, & (\ f\,(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0\,) \\ f\,(A+B) \leq f\,(A) + f\,(B) & A, B \in \mathbf{R}^{m\times n}, & \\ f\,(\alpha A) = |\alpha|\ f\,(A) & \alpha \in R,\ A\in \mathbf{R}^{m\times n}. & \end{array}$$

Maatriksi normi tähistatakse $f\,(A) = \|A\|$.

Lineaaralgebras on enamkasutatavateks maatriksi normideks *Frobeniuse norm,*

$$\|\,A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i\,j}|^2} \tag{22}$$

ja $p-$*normid* ($p \geq 1$),

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}\,. \tag{23}$$

Valemist (23) järeldub, et

$$\|A\|_p \overset{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}{\geq} \|A\mathbf{x}\|_p\ /\ \|\mathbf{x}\|_p$$

ehk

$$\|A\mathbf{x}\|_p \overset{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}{\leq} \|A\|_p\,\|\mathbf{x}\|_p\,. \tag{24}$$

Kontrollime $p-$normi korral maatriksi normi tingimuste täidetust:

$$\|A\mathbf{x}\|_p \geq 0\ \wedge\ \|x\|_p > 0 \Rightarrow \|A\mathbf{x}\|_p\ /\ \|\mathbf{x}\|_p \geq 0 \Rightarrow \|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|A\mathbf{x}\|_p\ /\ \|\mathbf{x}\|_p \geq 0\,;$$

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|A\mathbf{x}\|_p\ /\ \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\|_p = 0\ \forall\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \Leftrightarrow A = 0;$$

$$\|A+B\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|(A+B)\mathbf{x}\|_p\ /\ \|x\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|A\mathbf{x}+B\mathbf{x}\|_p\ /\ \|x\|_p \leq$$

$$\leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}(\|A\mathbf{x}\|_p + \|B\mathbf{x}\|_p)\,/\ \|x\|_p \leq \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|A\mathbf{x}\|_p\ /\ \|x\|_p + \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\|B\mathbf{x}\|_p\ /\ \|x\|_p =$$

$$= \|A\|_p + \|B\|_p\,;$$

$$\|\alpha A\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \|(\alpha A)\mathbf{x}\|_p \;/\; \|x\|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} |\alpha|\, \|A\mathbf{x}\|_p \;/\; \|x\|_p =$$

$$= |\alpha| \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \|A\mathbf{x}\|_p \;/\; \|x\|_p = |\alpha|\, \|A\|_p\,.$$

Ülesanne 2.7.1. Kontrollige Frobeniuse normi korral maatriksi normi tingimuste täidetust.

Ülesanne 2.7.2.* Arvutage maatriksi A Frobeniuse norm $\|\,A\|_F$, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definitsioon 2.7.2. Fikseeritud normi korral regulaarsele ruutmaatriksile $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ vastavaks *konditsiooniarvuks* nimetatakse suurust

$$k(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Frobeniuse normile vastavat konditsiooniarvu tähistatakse $k_F(A)$ ja $p-$normile vastavat konditsiooniarvu $k_p(A)$. Singulaarse ruutmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ korral defineeritakse $k(A) = +\infty$.

Ülesanne 2.7.3. Näidake, et kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, siis

$$\frac{1}{n}k_2(A) \le k_1(A) \le n\, k_2(A),$$

$$\frac{1}{n}k_\infty(A) \le k_2(A) \le n\, k_\infty(A),$$

$$\frac{1}{n^2}k_1(A) \le k_\infty(A) \le n^2\, k_1(A).$$

Lause 2.7.1. Normi $\|A\|_p$ leidmise eeskiri (23) on teisendatav kujule

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p\,. \tag{25}$$

Tõestus. Kasutades normi kolmandat omadust ja homogeensust vektori korrutamisel maatriksiga, saame

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \left\|\frac{1}{\|x\|_p}Ax\right\|_p = \left\|A\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p,$$

kusjuures $\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p = 1.$ □

Lause 2.7.2. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times q}$ ja $p \geq 1$, siis $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$.

Tõestus. Seoste (24) ja (25) abil leiame, et

$$\|AB\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|(AB)x\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|A(Bx)\|_p \leq \sup_{\|x\|_p=1} \|A\|_p \|Bx\|_p =$$

$$= \|A\|_p \sup_{\|x\|_p=1} \|Bx\|_p = \|A\|_p \|B\|_p. \quad \square$$

Märkus 2.7.1. Et $k_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \geq \|AA^{-1}\|_p = \|I\|_p = 1$, siis alati $k_p(A) \geq 1$.

Märkus 2.7.2. Iga $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ korral ning suvalise vektori normi $\|\cdot\|_\alpha$ korral ruumis $\mathbf{R}^n$ ja $\|\cdot\|_\beta$ korral ruumis $\mathbf{R}^m$ kehtib seos

$$\|A\mathbf{x}\|_\beta \leq \|A\|_{\alpha,\beta} \|\mathbf{x}\|_\alpha,$$

kusjuures maatriksi norm $\|A\|_{\alpha,\beta}$ on defineeritud valemiga

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \|A\mathbf{x}\|_\beta \ / \ \|x\|_\alpha.$$

Et hulk $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\|_\alpha = 1\}$ on kompaktne ja $\|\cdot\|_\beta$ on pidev, siis

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|A\mathbf{x}\|_\beta = \|A\mathbf{x}^*\|_\beta,$$

kusjuures $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ ja $\|\mathbf{x}^*\|_\alpha = 1$.

Definitsioon 2.7.3. Kui $k(A)$ on suhteliselt väike, siis maatriksit A nimetatakse *hea konditsiooniga maatriksiks*, kui aga $k(A)$ on suur, siis *halva konditsiooniga maatriksiks*.

Definitsioon 2.7.4. Ruutmaatriksi A normi $\|A\|$ nimetatakse *kooskõlas olevaks* vektori normiga $\|\mathbf{x}\|$, kui

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{x}\|$$

ja ta on submultiplikatiivne, s.o

$$\|AB\| \leq \|A\| \; \|B\| \, .$$

Definitsioon 2.7.5. Vektori normiga $\|\mathbf{x}\|$ kooskõlas olevat ruutmaatriksi normi $\| A\|$ nimetatakse *vektori normile* $\|\mathbf{x}\|$ *alluvaks,* kui iga maatriksi A korral leidub selline vektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, et $\| A\mathbf{x}\| = \| A\| \, \| \mathbf{x}\| \, .$

Lause 2.7.3. Suvalise vektori normi $\|\mathbf{x}\|$ korral leidub vähemalt üks selle vektori normile alluv (seepärast ka vähemalt üks vektori normiga kooskõlas olev) maatriksi norm $\|A\|$ ja nimelt

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \, .$$

Märkus 2.7.3. Mitte kõik maatriksi normid ei rahulda submultiplikatiivsuse omadust $\| AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, .$ Näiteks normi $\|A\|_\Delta = \max\limits_{i\,,\,j} |a_{i\,j}|$ ja maatriksite $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ korral $\|A\|_\Delta = \|B\|_\Delta = 1$ ning

$$\|AB\|_\Delta = || \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ||_\Delta = 2 > \|A\|_\Delta \, \|B\|_\Delta \, .$$

Lause 2.7.4. Kui $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, siis kehtivad maatriksi normide vahelised järgmised seosed:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} | \, a_{i\,j}|, \tag{26}$$

$$\| A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} | \, a_{i\,j}|, \tag{27}$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \;\; \|A\|_2 \, ,$$

$$\|A\|_\Delta \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \;\; \|A\|_\Delta \, ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \; \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \; \| A\|_\infty \, ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \, \| A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \;\; \|A\|_1 \, .$$

Kui $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $1 \le i_1 \le i_2 \le m$ ja $1 \le j_1 \le j_2 \le n$, siis

$$\|A\,(i_1 : i_2\ , j_1 : j_2)\|_p \le \|\,A\|_p\,.$$

Tõestame valemi (27). Leiame, et

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^n a_{i\,j}\xi_j\right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i\,j}|\,|\xi_j| \le$$
$$\le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i\,j}|\,\|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{k\,j}|\,,$$

kusjuures maksimum olgu saadud indeksi i väärtuse k korral. Saame hinnangu

$$\|A\|_\infty \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i\,j}|\,.$$

Olgu

$$z = \begin{pmatrix} \varsigma_1 & \ldots & \varsigma_n \end{pmatrix}^T$$

ja

$$\varsigma_j = \begin{cases} 1, & \text{kui } a_{k\,j} \ge 0; \\ -1, & \text{kui } a_{k\,j} < 0. \end{cases}$$

Et $\|z\|_\infty = 1$, siis

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \ge \|Az\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^n a_{i\,j}\varsigma_j\right| \ge \sum_{j=1}^n a_{k\,j}\varsigma_k = \sum_{j=1}^n |a_{k\,j}|$$

ning seega

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i\,j}|\,. \quad \square$$

Näide 2.7.1. Leiame maatriksi A normid $\|A\|_1$ ja $\|A\|_\infty$, kui

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Seostest (26) ja (27) leiame, et

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|_1 =$$

$$= \max \left(|a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|, |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|, |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}| \right)$$

ja

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|_\infty =$$

$$= \max \left(|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}| \right).$$

Näide 2.7.2. Leiame maatriksi A pöördmaatriksi A^{-1} ja nende normid $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A^{-1}\|_2$, $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ ning maatriksi A konditsiooniarvud $k_1(A)$, $k_2(A), k_\infty(A)$, kui

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Saame

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 4, \ \|A\|_2 = 2 + \sqrt{2}, \ \left\|A^{-1}\right\|_1 = \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 2$$

ja

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \ k_1(A) = k_\infty(A) = 2, \ \ k_2(A) = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)^2.$$

Kui valemid (26) ja (27) võimaldavad lihtsalt arvutada vastavalt $1-$normi ja $\infty-$normi, siis $2-$normi arvutamine on keerukam. Maatriksi $2-$normi nimetatakse ka *maatriksi spektraalnormiks.*

Lause 2.7.5. Kui $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, siis

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu \in \lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\| A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest.

Tõestus. Normi $\| A\|_2$ leidmiseks leiame esiteks $\| A\|_2^2$. Seega,

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \ \| A\|_2^2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1} \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}.$$

Olgu $A^T A = B \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Maatriks B on sümmeetriline maatriks, sest

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A$$

ja

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1\,;\,1} & \cdots & b_{1\,;\,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n\,;\,1} & \cdots & b_{n\,;\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{1\,;\,n}\xi_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ b_{n\,;\,1}\xi_1 + \ldots + b_{n\,;\,n}\xi_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\xi_1 \sum_{j=1}^{n} b_{1;\,j}\xi_j + \ldots + \xi_n \sum_{j=1}^{n} b_{n;\,j}\xi_j\right],$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2,$$

siis $\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$ on n muutujate $\xi_1, \ldots, \xi_n$ funktsioon ning

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}\right)}{\partial\xi_i} = \sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n} b_{j;\,i}\xi_j \overset{b_{i;\,j}=b_{j;\,i}}{=} 2\sum_{j=1}^{n} b_{i;\,j}\xi_j = 2\left[A^T A\mathbf{x}\right]_i,$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{x})}{\partial\xi_i} = 2\xi_i = 2\left[\mathbf{x}\right]_i.$$

Ülesande, leida $\max\limits_{\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1} \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$, korral on tegemist tingliku ekstreemumi leidmise ülesandega. Selle lahendamiseks moodustame abifunktsiooni

$$\Phi(\xi_1; \ldots, \xi_n; \rho) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} + \mu\left(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}\right).$$

Funktsiooni Φ statsionaarsete punktide leidmiseks koostame võrrandisüsteemi:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} = 0 \ \ (\mathrm{i} = 1 : \mathrm{n}) \ \ \wedge \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0$$

st

$$\begin{cases} 2\left[A^T A\mathbf{x}\right]_i - 2\mu\,[\mathbf{x}]_i = 0 \;\; (\text{ i} = 1:\text{n}) \\ 1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\,, \\ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\,. \end{cases}$$

Seega on iga statsionaarne punkt tingliku ekstreemumi jaoks maatriksi $A^T A$ omaväärtusele vastav normeeritud vektor $\mathbf{x}$. Avaldame seosest $A^T A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ omaväärtuse μ . Saame $\mu = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$, kusjuures $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. Võrreldes saadud tulemust lähtevalemiga $\|A\|_2^2$ leidmiseks, näeme, et $\|A\|_2^2 = \max\limits_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu$. Seega,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\mu\in\lambda(A^T A)} \mu},$$

st $\|A\|_2$ on ruutjuur maatriksi $A^T A$ suurimast omaväärtusest. $\square$

Järeldus 2.7.1. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on sümmeetriline, siis

$$\|A\|_2 = \max_{\lambda\in\lambda(A)} \lambda.$$

Näide 2.7.3. Leiame maatriksi A pöördmaatriksi A^{-1} ja nende normid $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A^{-1}\|_2$, $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ ning maatriksi A konditsiooniarvud $k_1(A)$, $k_2(A)$, $k_\infty(A)$, kui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00000001 \end{bmatrix}.$$

Saame

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0\times 10^8 & -1.0\times 10^8 \\ -1.0\times 10^8 & 1.0\times 10^8 \end{bmatrix},\ \|A\|_1 = \|A\|_2 \approx \|A\|_\infty \approx 2,$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_1 = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \approx \left\|A^{-1}\right\|_2 \approx 2\times 10^8,\ k_1(A) = k_\infty(A) \approx 4\times 10^8.$$

Näide 2.7.4. Vaatleme, kuidas on seotud maatriksi peaaegu singulaarsus (nullile lähedane determinandi väärtus) ja maatriksi halb konditsioon. Maatriksi

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

korral $\det(A_n) = 1$, kuid $k_\infty(A_n) = n2^{n-1}$. Teisalt, diagonaalmaatriksi

$$D_n = diag(\varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

korral $k_p(D_n) = 1$, kuid $\det(D_n) = \varepsilon^n$ kui tahes väikese ε korral.

Ülesanne 2.7.4.* Leidke maatriksi A pöördmaatriks A^{-1} ja nende normid $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A^{-1}\|_2$, $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ ning maatriksi A konditsiooniarvud $k_1(A)$, $k_2(A)$, $k_\infty(A)$, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ c)\ A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.8. Cayley-Hamiltoni teoreem

Lause 2.8.1 (Cayley-Hamiltoni teoreem)**.** Kui $A \in C^{n\times n}$ ja

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

siis $p(A) = 0$, st maatriks A rahuldab oma karakteristlikku võrrandit.

Tõestus. Lause 2.6.7 põhjal leidub selline regulaarne $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et

$$X^{-1}AX = J \equiv diag(J_1, \ldots, J_t),$$

kusjuures

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

on ülemine bidiagonaalne $m_i \times m_i-$maatriks (Jordani blokk), mille peadiagonaalil on maatriksi A omaväärtus λ_i (vähemalt m_i-kordne maatriksi A omaväärtus, sest sellele omaväärtusele võib vastata veel teisi Jordani blokke), kusjuures

$m_1 + \ldots + m_t = n$. Et $J_i - \lambda_i I = (\delta_{k;\, j-1})$, siis $(\delta_{k;\, j-1})^{m_i} = 0$ ja $(J_i - \lambda_i I\ )^{m_i} = 0$. Kui $p(\lambda)$ on maatriksi A karakteristlik polünoom ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ selle polünoomi nullkohad, siis

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{m_t}$$

ja

$$p(J) = (-1)^n (J - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (J - \lambda_t I)^{m_t}.$$

Näitame, et $p(J) = 0$. Olgu maatriks J blokk-kujul

$$J = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_t \end{bmatrix} & \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_t \end{matrix} \end{array}.$$

Saame, et

$$p(J) = (-1)^n (J - \lambda_1 I)^{m_1} \ldots (J - \lambda_t I)^{m_t} =$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} J_1 - \lambda_1 I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 - \lambda_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 - \lambda_1 I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_t - \lambda_1 I \end{bmatrix}^{m_1} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} J_1 - \lambda_t I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 - \lambda_t I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 - \lambda_t I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_t - \lambda_t I \end{bmatrix}^{m_t} =$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} (J_1 - \lambda_1 I)^{m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2 - \lambda_1 I)^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (J_3 - \lambda_1 I)^{m_1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (J_t - \lambda_1 I)^{m_1} \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} (J_1-\lambda_t I)^{m_t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2-\lambda_t I)^{m_t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (J_3-\lambda_t I)^{m_t} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (J_t-\lambda_t I)^{m_t} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2-\lambda_1 I)^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (J_3-\lambda_1 I)^{m_1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (J_t-\lambda_1 I)^{m_1} \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} (J_1-\lambda_t I)^{m_t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2-\lambda_t I)^{m_t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (J_3-\lambda_t I)^{m_t} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Seosest $X^{-1}AX = J$ järeldub, et $A = XJX^{-1}$. Tõestuse viime lõpule ahelaga

$$p(A) = p(XJX^{-1}) =$$
$$= (-1)^n(XJX^{-1} - X\lambda_1 IX^{-1})(XJX^{-1} - X\lambda_2 IX^{-1})\cdots(XJX^{-1} - X\lambda_n IX^{-1}) =$$
$$= (-1)^n X(J-\lambda_1 I)X^{-1}X(J-\lambda_2 I)X^{-1}\cdots X(J-\lambda_n I)X^{-1} = Xp(J)X^{-1} = 0. \ \square$$

Näide 2.8.1. Veendume Cayley-Hamiltoni teoreemi väites maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

korral. Koostame karakteristliku polünoomi

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb$$

ja leiame

$$p(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ülesanne 2.8.1.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Arvutage A^2 ja kasutades Cayley-Hamiltoni teoreemi, leidke maatriks

$$A^7 - 3A^6 + A^4 + 3A^3 - 2A^2 + 3I.$$

Definitsioon 2.8.1. Polünoomi $q(\lambda)$ nimetatakse maatriksit $A \in C^{n\times n}$ *annulleerivaks polünoomiks,* kui $q(A) = 0$.

Maatriksi $A \in C^{n\times n}$ karakteristlik polünoom on (Cayley-Hamiltoni teoreemi põhjal) seda maatriksit annulleeriv polünoom.

Definitsioon 2.8.2. Maatriksi $A \in C^{n\times n}$ madalaimat järku annulleerivat polünoomi nimetatakse maatriksi A *minimaalpolünoomiks.*

Ülesanne 2.8.2. Veenduge, et maatriksi $A \in C^{n\times n}$ karakteristlik polünoom jagub jäägita maatriksi A minimaalpolünoomiga.

Lause 2.8.2. Olgu $p(\lambda)$ ja $\psi(\lambda)$ vastavalt maatriksi A karakteristlik polünoom ja minimaalpolünoom. Polünoomidest koosneva maatriksi $(I\,\lambda - A)^\vee$, mis on maatriksi $(I\,\lambda - A)$ elementide algebraliste täiendite maatriks, elementide suurim ühistegur olgu $d(\lambda)$. Siis

$$p(\lambda) = d(\lambda)\psi(\lambda).$$

Tõestus. Vaadake Lankaster (1982, lk 123-124). □

Näide 2.8.2. Leida maatriksi $D = diag(a,a,b,b)$ karakteristlik polünoom ja minimaalne polünoom. Esmalt leiame, et

$$(I\,\lambda - D)^\vee = diag(\lambda - a, \lambda - a, \lambda - b, \lambda - b)^\vee =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - b \end{bmatrix}^{\vee} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda - a)(\lambda - b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - a)(\lambda - b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^2(\lambda - b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - a)^2(\lambda - b) \end{bmatrix}$$

ja maatriksi $(I\,\lambda\,-D)^{\vee}$ elementide suurim ühistegur $d(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$. Lause 2.8.2 väitel $\psi(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)$. Teostame kontrolli,

$$\psi(D) = (D - aI\,)(D - b\,I) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Tõesti, $\psi(\lambda)$ on maatriksit annulleeriv polünoom. On lihtne veenduda, et ükski esimest järku polünoom ei saa annulleerida maatriksit A. Seega on $\psi(\lambda)$ maatriksi A minimaalne polünoom.

Näide 2.8.3. Leida maatriksite

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

karakteristlikud ja minimaalpolünoomid. Leiame esmalt karakteristlikud polünoomid:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & -2 \\ -2 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32$$

ja

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32.$$

Seejärel leiame minimaalpolünoomid:

$$(I\,\lambda - A)^{\vee} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda-6 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}^{\vee} = \begin{bmatrix} \lambda^2-4\lambda & -2\lambda+8 & 2\lambda-8 \\ 2\lambda-8 & \lambda^2-8\lambda+16 & 2\lambda-8 \\ -2\lambda+8 & 2\lambda-8 & \lambda^2-8\lambda+16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(\lambda-4) & -2(\lambda-4) & 2(\lambda-4) \\ 2(\lambda-4) & (\lambda-4)^2 & 2(\lambda-4) \\ -2(\lambda-4) & 2(\lambda-4) & (\lambda-4)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow d_A(\lambda) = \lambda - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_A(\lambda) = \frac{\lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32}{\lambda - 4} = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

ja

$$(I\,\lambda - B)^{\vee} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda-6 & -2 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}^{\vee} = \begin{bmatrix} (\lambda-2)^2 & -2(\lambda-2) & 0 \\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda-6) & 0 \\ 2(\lambda-2) & -4 & (\lambda-4)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_B(\lambda) = 1 \Rightarrow \psi_B(\lambda) = \frac{\lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32}{1} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32.$$

Ülesanne 2.8.3.* Leidke maatriksi A minimaalpolünoom, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.2.9. Maatriksargumendiga funktsioonid

Olgu antud maatriks $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja kompleksmuutuja funktsioon

$$f(z), \quad f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

On palju võimalusi maatriksargumendiga funktsiooni $f(A)$ defineerimiseks, lähtudes kompleksmuutuja funktsioonist $f(z)$. Lihtsaim neist võimalustest tundub olema muutuja "z" vahetu asendamine muutujaga "A". Näiteks,

$$f(z) = z^2 + 3z - 7 \to f(A) = A^2 + 3A - 7I$$

ja

$$f(z) = \frac{4+5z}{3-8z} \to f(A) = (4I+5A)(3I-8A)^{-1}$$

ning

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \to e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \to \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}\,,$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \to \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

$$\ln(I+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} \to \ln(I+A) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k}\,.$$

Osutub, et paljude probleemide lahendamisel ei ole selline lähenemine otstarbekas.

Definitsioon 2.9.1. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $f(z)$ on analüütiline lahtises piirkonnas $\mathfrak{D}$ ning Γ on kinnine lihtne joon (ei lõika iseennast) piirkonnas $\mathfrak{D}$ ja maatriksi A spekter $\lambda(A)$ sisaldub joone Γ poolt hõlmatavas piirkonnas $\mathfrak{D}_\Gamma$, siis

$$f(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)(zI-A)^{-1}dz\,, \tag{28}$$

kusjuures integraali maatriksile rakendatakse elementide kaupa.

Märkus 2.9.1. Valem (28) on kompleksmuutuja funktsioonide korral tõestatud Cauchy' integraalvalemi analoog.

Näide 2.9.1. Olgu $f(z) = z$ ja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Uurime, kuidas toimub arvutamine eeskirja (28) põhjal. Kuna maatriksi A omaväärtusteks on $\lambda_1 = a$ ja $\lambda_2 = c$, siis valime joone $\Gamma : |z| = r$, kus $r > \max(|a|, |c|)$. Funktsioon $f(z) = z$ on analüütiline piirkonnas $\mathfrak{D}_\Gamma$. Leiame esiteks,

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} z-a & -b \\ 0 & z-c \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/(z-a) & (b/(a-c))(1/(z-a)-1/(z-c)) \\ 0 & 1/(z-c) \end{bmatrix},$$

ja siis,

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\begin{bmatrix} z/(z-a) & (b/(a-c))(z/(z-a)-z/(z-c)) \\ 0 & z/(z-c) \end{bmatrix} dz =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z/(z-a)dz & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}(b/(a-c))(z/(z-a)-z/(z-c))dz \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z/(z-c)dz \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Lause 2.9.1. Kui $f(A) = (f_{k;\,j})$, siis

$$f_{k;\,j} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\mathbf{e}_k^T(zI-A)^{-1}\mathbf{e}_j dz,$$

kusjuures $\mathbf{e}_k$ on ruumi $\mathbf{C}^n$ vektor, mille $k-$s komponent on üks ja ülejäänud on nullid.

Tõestus. Olgu $B = (b_{k;\,j}) = (zI-A)^{-1}$, siis

$$\mathbf{e}_k^T(zI-A)^{-1}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k^T B\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} b_{k;\,1} & \cdots & b_{k;\,n} \end{bmatrix}\mathbf{e}_j = b_{k;j}.$$

Et maatriksit integreeritakse elementide kaupa, siis saame, et

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\mathbf{e}_k^T(zI-A)^{-1}\mathbf{e}_j dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)b_{k;j}dz = f_{k;\,j}\,. \quad \square$$

Lause 2.9.2. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $\exists\, f(A)$, st on rahuldatud definitsioonis 2.9.1 esitatud tingimused, ning

$$A = XBX^{-1} = X\,diag(B_1,\,\ldots\,,B_p)X^{-1}, \quad B_k \in \mathbf{C}^{n_k\times n_k}, \tag{29}$$

siis

$$f(A) = X\;f(B)\,X^{-1} = X\,diag(f(B_1),\,\ldots\,,\,f(B_p))X^{-1}. \tag{30}$$

Tõestus. Seoste (28), (29) ja $XX^{-1} = I$ põhjal leiame, et

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)(zI-A)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)(XzIX^{-1}-XBX^{-1})^{-1}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} X\,f(z)(zI-B)^{-1}X^{-1}dz = X\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)(zI-B)^{-1}dzX^{-1} =$$

$$= X\;f(B)\,X^{-1}.$$

Et
$$(Iz - B)^{-1} = diag((Iz - B_1)^{-1}, \ldots, (Iz - B_p)^{-1})$$
ja
$$f(B) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)(zI - B)^{-1}dz =$$
$$= diag(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)(zI - B_1)^{-1}dz; \ \ldots \ ; diag(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)(zI - B_p)^{-1}dz) =$$
$$= diag(f(B_1); \ \ldots \ ; f(B_p)) \, ,$$
siis
$$f(A) = X \ f(B) \, X^{-1} = X \, diag(f(B_1), \ \ldots \ , \ f(B_p))X^{-1},$$
mida oligi vaja tõestada. $\square$

Lause 2.9.3. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $X^{-1}AX = diag(J_1, \ldots, J_p)$ on maatriksi A Jordani normaalkuju, kusjuures
$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$
on $m_i \times m_i$ Jordani blokk ning $m_1 + \ldots + m_p = n$, ja $f(z)$ on analüütiline lahtisel hulgal, mis sisaldab maatriksi A spektrit $\lambda(A)$, siis
$$f(A) = X \, diag(\ f(J_1), \ \ldots \ , f(J_p))X^{-1} \, , \tag{31}$$
kusjuures
$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f\,'(\lambda_i) & \cdots & \cdots & f^{\,(m_i-1)}(\lambda_i)/(m_i-1)! \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f\,'(\lambda_i) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix} . \tag{32}$$

Tõestus. Lause 2.9.2 põhjal piisab uurida vaid väärtust $F(G)$, kus $G = \lambda I + E$ on $q \times q$ Jordani blokk ja $E = (\delta_{i;\,j-1})$. Olgu maatriks $zI - G$ regulaarne. Et
$$E^k = (\delta_{i;\,j-k}) \Rightarrow (k \geq q \Rightarrow E^k = 0),$$

siis

$$(zI - G)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{E^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$$

ja

$$f(G) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)(zI - G)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z) \sum_{k=0}^{q-1} \frac{E^k}{(z-\lambda)^{k+1}} dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} E^k \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{k+1}} dz = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} E^k$$

ning arvestades tingimust $E^k = (\delta_{i;\,j-k})$, lause väide kehtib. $\square$

Näide 2.9.2. Leida $\cos A$, kui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et $\lambda_1 = \ldots = \lambda_5 = 0$ ja funktsioon $\cos z$ on analüütiline punkti 0 ümbruses, siis on väärtuse $\cos A$ leidmiseks rakendatav lauses 2.9.3 esitatud algoritm. Kasutame maatriksi A Jordani lahutuse leidmiseks paketti "Maple":

$$A = XJX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Järelikult, $J = diag(J_1, J_2)$, kusjuures

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leiame, esiteks, valemi (3) abil maatriksid $\cos J_1$ ja $\cos J_2$:

$$\cos J_1 = \begin{bmatrix} \cos 0 & (-\sin 0)/1! & (-\cos 0)/2! \\ 0 & \cos 0 & (-\sin 0)/1! \\ 0 & 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\cos J_2 = \begin{bmatrix} \cos 0 & (-\sin 0)/1! \\ 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seejärel leiame valemi (2) abil meid huvitava maatriksi:

$$\cos A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Järeldus 2.9.1. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $A = X\, diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)X^{-1}$ ning $\exists\, f(A)$, siis

$$f(A) = X\, diag(\, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))X^{-1}\,.$$

Tõestus. Tegemist on lause 2.9.3 erijuhuga, kusjuures kõik Jordani blokid on 1×1-maatriksid

Näide 2.9.3. Kui maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ omaväärtused on $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ja $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ on neile vastavad lineaarselt sõltumatud omavektorid, st $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ moodustavad baasi ruumis $\mathbf{C}^n$, siis $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ ja funktsioonide $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$ analüütilisusest kogu komplekstasandi lõplikus osas järeldub, et

$$\begin{gathered} \exp A = X\, diag(\, \exp\lambda_1, \ldots, \exp\lambda_n)X^{-1} = X\,(\exp\Lambda)X^{-1}, \\ \cos A = X\, diag(\cos\lambda_1, \ldots, \cos\lambda_n)X^{-1} = X(\cos\Lambda\,)X^{-1}, \\ \sin A = X\, diag(\sin\lambda_1, \ldots, \sin\lambda_n)X^{-1} = X(\sin\Lambda\,)X^{-1}, \end{gathered}$$

kusjuures Λ, $\exp\Lambda$, $\cos\Lambda$, $\sin\Lambda$, $\exp A$, $\cos A$, $\sin A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \exp\Lambda = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \exp\lambda_n \end{bmatrix},$$

$$\cos\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\lambda_n \end{bmatrix}, \quad \sin\Lambda = \begin{bmatrix} \sin\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Vaatleme järgnevalt probleemi, mis tekib funktsiooni $f(A)$ lähendamisel funktsiooniga $g(A)$. Sellist laadi probleem tekib näiteks $f(A)$ asendamisel tema q-astme Taylori polünoomiga.

Lause 2.9.4. Kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $X^{-1}AX = diag(J_1, \ldots, J_p)$, kusjuures

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

on $m_i \times m_i$ Jordani blokk ning $m_1 + \ldots + m_p = n$, ja funktsioonid $f(z)$ ning $g(z)$ on analüütilised lahtisel hulgal, mis sisaldab maatriksi A spektrit $\lambda(A)$, siis

$$\|f(A) - g(A)\|_2 \le k_2(X) \max_{1\le i\le p \,\wedge\, 0\le r\le m_i-1} m_i \frac{\left|f^{(r)}(\lambda_i) - g^{(r)}(\lambda_i)\right|}{r!}. \tag{33}$$

Tõestus. Kui valida $h(z) = f(z) - g(z)$, siis

$$||\, f(A) - g(A)||_2 = ||\, X\, diag(h(J_1), \ldots, h(J_p))X^{-1}||_2 \le$$

$$\le ||\, X\, ||_2\, ||diag(h(J_1), \ldots, h(J_p))\,||_2\, ||X^{-1}||_2 \le k_2(X) \max_{1\le i\le p} ||\, h(J_i)||_2.$$

Lause 2.9.3 ja võrratuse $||B||_2 \le n \cdot \max_{i,\,j} |b_{i,\,j}|$ abil leiame, et

$$||\, h(J_i)\,||_2 \le m_i \max_{0\le r\le m_i-1} \frac{\left|h^{(r)}(\lambda_i)\right|}{r!}$$

ning seega kehtib lause väide. $\square$

Näide 2.9.4. Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

Hindame vahet $\sin A - A$.

Et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = .1$ ja funktsioonid $f(z) = \sin z$ ning $g(z) = z$ on analüütilised punkti .1 ümbruses, siis võime kasutada lauses 2.9.4 saadud hinnangut (33). Esiteks, kasutame paketti "Maple" maatriksi A Jordani lahutuse leidmiseks:

$$A = XJX^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Järelikult, maatriksi A Jordani lahutuses on vaid üks Jordani blokk, st

$$J = J_1 = diag(J_1).$$

Teiseks, leiame paketi "Maple" abil maatriksi X konditsiooniarvu:

$$k_2(X) \approx 200.01.$$

Et

$$f(z) - g(z) = \sin z - z \Rightarrow |f(.1) - g(.1)|/0! = |\sin .1 - .1| \approx 1.6658 \times 10^{-4},$$

$$f'(z) - g'(z) = \cos z - 1 \Rightarrow |f'(.1) - g'(.1)|/1! = |\cos .1 - 1| \approx 4.9958 \times 10^{-3}$$

ja

$$f''(z) - g''(z) = -\sin z \Rightarrow |f''(.1) - g''(.1)|/2! = |-\sin .1|/2 \approx 4.9917 \times 10^{-2},$$

siis hinnangu (30) abil leiame, et

$$||\sin A - A||_2 \leq 200.01 \cdot 3 \cdot 4.9917 \times 10^{-2} \approx 29.952.$$

On teada, et maatriksi A Jordani lahutuses esinev maatriks X pole üheselt määratud. Üritame valida maatriksi X nii, et konditsiooniarv $k_2(X)$ oleks minimaalne. Kasutades maatriksi A Jordani lahutuse leidmiseks Filipovi algoritmi (vaadake lauset 2.5.2.1), saame, et

$$A = XJX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{100} \end{bmatrix},$$

kusjuures

$$k_2(X) = 100.$$

Osutub, et maatriksi A Jordani lahutuseks on ka

$$A = XJX^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

kusjuures

$$k_2(X) = 10.$$

Seega on parim hinnang, mida saame lause 2.9.4 abil,

$$||\sin A - A||_2 \leq 10 \cdot 3 \cdot 4.9917 \times 10^{-2} \approx 1.4975.$$

Teisalt, selle näite korral on rakendatav lauses 2.9.3 esitatud algoritm väärtuse $\sin A$ leidmiseks. Kasutades valemit (32), saame, et

$$\sin J = \begin{bmatrix} \sin .1 & (\cos .1)/1! & (-\sin .1)/2! \\ 0 & \sin .1 & (\cos .1)/1! \\ 0 & 0 & \sin .1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} .099833 & .995 & -.049917 \\ 0 & .099833 & .995 \\ 0 & 0 & .099833 \end{bmatrix}.$$

Valemi (31) abil arvutame meid huvitava funktsiooni väärtuse:

$$\sin A = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .099833 & .995 & -.049917 \\ 0 & .099833 & .995 \\ 0 & 0 & .099833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} .099833 & .0995 & -.00049917 \\ 0 & .099833 & .0995 \\ 0 & 0 & .099833 \end{bmatrix}.$$

Järelikult,

$$\sin A - A = \begin{bmatrix} .099833 - .1 & .0995 - .1 & -.00049917 \\ 0 & .099833 - .1 & .0995 - .1 \\ 0 & 0 & .099833 - .1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1.67 \times 10^{-4} & -.0005 & -4.9917 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.67 \times 10^{-4} & -.0005 \\ 0 & 0 & -1.67 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

ja

$$\|\sin A - A\|_2 \approx 8.8098 \times 10^{-4}.$$

Antud näite tulemusena võib väita, et lauses 2.9.5 tõestatud hinnang (33) on antud näite korral suhteliselt jäme.

Lause 2.9.5. Kui funktsiooni $f(z)$ Maclaurini arendus

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, z^k$$

koondub ringis, mis sisaldab maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ spektrit $\lambda(A)$, siis

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, A^k.$$

Tõestame selle väite täiendaval lisatingimusel, et maatriksil A leidub omavektoreist koosnev baas. Siis järelduse 2.9.1 põhjal

$$f(A) = X \, diag(\, f(\lambda_1), \, \ldots \, , f(\lambda_n))X^{-1} \, =$$

$$= X \, diag(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \lambda_1^k, \, \ldots \, , \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \lambda_n^k)X^{-1} =$$

$$= X \, \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, D^k \right) X^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (XDX^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, A^k \, . \quad \square$$

Lause 2.9.6. Kui funktsiooni $f(z)$ Maclaurini arendus

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, z^k$$

koondub ringis, mis sisaldab maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ spektrit $\lambda(A)$, siis

$$|| \, f(A) - \sum_{k=0}^{q} c_k A^k ||_2 \leq \frac{n}{(q+1)!} \max_{0 \leq \, s \, \leq 1} ||A^{q+1} f^{\,(q+1)}(As)||_2 \, .$$

Tõestus. Defineerime maatriksi $E(s)$ seosega

$$f(As) = \sum_{k=0}^{q} c_k (As)^k + E(s) \quad (0 \le s \le 1). \tag{34}$$

Kui $f_{i;\,j}(s) = [f(As)]_{i;\,j}$, siis $f_{i;\,j}(s)$ on analüütiline ja seega,

$$f_{i,\,j}(s) = \sum_{k=0}^{q} \frac{f_{i;\,j}(0)}{k!} s^k + \frac{f_{i;\,j}^{\,(q+1)}(\varepsilon_{i;\,j})}{(q+1)!}\, s^{\,q+1}, \tag{35}$$

kusjuures $0 \le \varepsilon_{i;\,j} \le s \le 1$. Võrreldes muutuja s astmeid seostes (34) ja (35), leiame, et $[E(s)]_{i;\,j}$ omab kuju

$$\varepsilon_{i;\,j}(s) = \frac{f_{i;\,j}^{\,(q+1)}(\varepsilon_{i;\,j})}{(q+1)!}\, s^{\,q+1}.$$

Kui $f_{i;\,j}^{(\,q+1)} = [A^{q+1} f^{\,(\,q+1)}(As)]_{i;\,j}$, siis

$$|\varepsilon_{i;\,j}(s)| \le \max_{0 \le s \le 1} \frac{|\, f_{i;\,j}^{\,(q+1)}(\varepsilon_{i;\,j})|}{(q+1)!} \le n \max_{0 \le s \le 1} ||A^{q+1} f^{\,(\,q+1)}(As)||_2\,. \quad \square$$

Ülesanne 2.9.1. Näidake, et suvalise maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ korral

$$I + \cos(2A) = 2\cos^2 A$$

ja

$$\sin(2A) = 2\sin A \cdot \cos A.$$

Ülesanne 2.9.2. Rakendage lauset 2.9.6 vea hindamisel ligikaudsete seoste

$$\sin A \approx \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ja

$$\cos A \approx \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}.$$

korral.

Lause 2.9.7 (Sylvesteri teoreem)**.** Kui maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kõik omaväärtused λ_k on erinevad, siis

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\Pi_{i\neq k}(A - \lambda_i I)}{\Pi_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)} \tag{36}$$

või

$$f(A) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k A^{k-1}, \tag{37}$$

kus Δ_k $(k = 1; 2; \ldots ; n)$ on determinant, mis on saadud Vandermonde'i determinandist

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

asendades k-nda reavektori

$$(\lambda_1^{k-1}\, \lambda_2^{k-1}\, \ldots\, \lambda_1^{k-1})$$

vektoriga

$$(f(\lambda_1)\;\; f(\lambda_2)\;\; \ldots\;\; f(\lambda_n)).$$

Näide 2.9.5. Leida $\exp A$, kui $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Leiame kõigepealt maatriksi A omaväärtused

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

ja siis kasutame valemit (36)

$$\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{A - (1-i)I}{1 + i - 1 + i} \exp(1+i) + \frac{A - (1+i)I}{1 - i - 1 - i} \exp(1-i) =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}}{2i} \exp(1+i) + \frac{\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}}{-2i} \exp(1-i) =$$

$$= e \cdot \begin{bmatrix} (\exp i + \exp(-i))/2 & (\exp i - \exp(-i))/2i \\ -(\exp i - \exp(-i))/2i & (\exp i + \exp(-i))/2 \end{bmatrix} = e \cdot \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$

ning, kasutades valemit (37),

$$\exp\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (1/\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix})[I\det\begin{bmatrix} \exp(1+i) & \exp(1-i) \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(1+i) & \exp(1-i) \end{bmatrix}]$$

$$= \frac{e}{-2i}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[(1-i)\exp i-(1+i)\exp(-i)]+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}[\exp(-i)-\exp i]\} =$$

$$= \frac{e}{-2i}\begin{bmatrix} -i\exp i - i\exp(-i) & \exp(-i)-\exp i \\ -\exp(-i)+\exp i & -i\exp i - i\exp(-i) \end{bmatrix} = e\cdot\begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}.$$

Lahendame sama probleemi samuti valemi $\exp A = S\exp\Lambda S^{-1}$ abil, kus S on maatriksi A omavektoreist koostatud maatriks. Leiame A omavektorid

$$\lambda_1 = 1+i \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

ja

$$\lambda_2 = 1-i \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

ning maatriksi

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Seega

$$\exp A = S\exp\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{1+i} & e^{1-i} \\ ie^{1+i} & -ie^{1-i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} =$$

$$= e\begin{bmatrix} (\exp i+\exp(-i))/2 & (\exp i-\exp(-i))/2i \\ -(\exp i-\exp(-i))/2i & (\exp i+\exp(-i))/2 \end{bmatrix} =$$

$$= e\begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}.$$

2. LINEAARALGEBRA ARVUTUSMEETODID

2.1. *LU*-lahutus

2.1.1. Kolmnurksete võrrandisüsteemide lahendamine

Vaatleme alumise $2 \times 2-$ kolmnurkmaatriksiga võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (l_{11}l_{22} \neq 0)$$

lahendamist asendusega edasisuunas. Esimesest võrrandist saame $\xi_1 = b_1/l_{11}$ ja siis teisest võrrandist $\xi_2 = (b_2 - l_{21}\xi_1)/l_{22}$.

Lause 1.1.1 (*asendused edasisuunas*). Kui $L = (l_{i\,j}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on alumine kolmnurkmaatriks ja $\prod_{i=1}^n l_{i\,i} \neq 0$ ning $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siis lahend on

$$\xi_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\xi_k)/l_{i\,i} \quad (i = 1\colon n).$$

Lahendame ülemise $2 \times 2-$kolmnurkmaatriksiga võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (u_{11}u_{22} \neq 0)$$

asendusega tagasisuunas. Teisest võrrandist saame $\xi_2 = b_2/u_{22}$ ja siis esimesest võrrandist $\xi_1 = (b_1 - u_{12}\xi_2)/u_{11}$.

Lause 1.1.2 (*asendused tagasisuunas*). Kui $U = (u_{i\,j}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks ja $\prod_{i=1}^n u_{i\,i} \neq 0$ ning $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siis lahend on

$$\xi_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{i\,k}\xi_k)/u_{ii} \quad (i = 1\colon n).$$

Nii edasi kui tagasi suunatud asenduse korral tuleb regulaarse $n \times n-$kolmnurkmaatriksiga süsteemi lahendamisel sooritada $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$ tehet.

Lause 1.1.3 (veeru elimineerimine asendustel edasisuunas). Kui $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on alumine kolmnurkmaatriks, $\prod_{i=1}^{n} l_{ii} \neq 0$ ja $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ning ξ_1 on leitud, siis asendades suuruse ξ_1 võrrandeisse teisest kuni n-ndani, saame uue alumise $(n-1)\times(n-1)-$ kolmnurkmaatriksiga süsteemi

$$L(2:n;\,2:n)\,\mathbf{x}(2:n) = \mathbf{b}(2:n) - \mathbf{x}(1)L(2:n;1).$$

Lause 1.1.4 (veeru elimineerimine asendustel tagasisuunas). Kui $U \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks, $\prod_{i=1}^{n} u_{ii} \neq 0$ ja $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ning ξ_n on leitud, siis asendades ξ_n võrrandeisse esimesest kuni $(n-1)$-ni, saame uue ülemise $(n-1)\times(n-1)-$ kolmnurkmaatriksiga süsteemi

$$\begin{aligned} &U(1:(n-1);\,1:(n-1))\,\mathbf{x}(1:(n-1)) = \\ &\qquad = \mathbf{b}(1:(n-1)) - \mathbf{x}(n)U(1:(n-1);n). \end{aligned}$$

Vaatleme veel mitme süsteemi samaaegset lahendamist juhul, kui neil süsteemidel on ühine süsteemimaatriks. Vaatleme süsteemi $LX = B$, kus $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on regulaarne alumine kolmnurkmaatriks ja $B \in \mathbf{R}^{n\times q}$ ning otsitavaks on $X \in \mathbf{R}^{n\times q}$. Esitame selle süsteemi blokk-kujul

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & L_{N2} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kusjuures diagonaalil on ruutblokid. Võrrandist $L_{11}X_1 = B_1$ saame leida maatriksi X_1. Kasutades lauses 1.1.3 antud veeru elimineerimise võtet süsteemi (1) korral, saame

$$\begin{bmatrix} L_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{32} & L_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N2} & L_{N3} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 - L_{21}X_1 \\ B_3 - L_{31}X_1 \\ \vdots \\ B_N - L_{N1}X_1 \end{bmatrix}.$$

Nii, samm-sammult, lahendame süsteemi (1).

Lause 1.1.5. Kolmnurkmaatriksitel on järgmised omadused:

- ülemise (alumise) kolmnurkmaatriksi pöördmaatriks on ülemine (alumine) kolmnurkmaatriks;

- kahe ülemise (alumise) kolmnurkmaatriksi korrutis on ülemine (alumine) kolmnurkmaatriks;
- ülemise (alumise) kolmnurkmaatriksi, mille determinant on üks, pöördmaatriks on ülemine (alumine) kolmnurkmaatriks determinandiga üks;
- kahe ülemise (alumise) kolmnurkmaatriksi, mille determinant on üks, korrutis on ülemine (alumine) kolmnurkmaatriks determinandiga üks.

Ülesanne 1.1.1.* Tõestage lause 1.1.5.

2.1.2. Gaussi teisendus ja *LU*-lahutus

Teatud tingimustel on võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ süsteemimaatriks A esitatav alumise *ühikdiagonaaliga* (st peadiagonaali elementideks on ühed) kolmnurkmaatriksi L ja ülemise kolmnurkmaatriksi U korrutisena ja lahendada tuleb kaks kolmnurkse maatriksiga võrrandisüsteemi.

Lause 1.2.1 (*LU−meetod*). Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $A = LU$, kus L on alumine ühikdiagonaaliga kolmnurkmaatriks ja U on ülemine regulaarne kolmnurkmaat-riks, ning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siis $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ning süsteemi lahendamiseks tuleb alguses lahendada süsteem $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ja seejärel lahendada süsteem $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Näide 1.2.1. Lahendame süsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

LU-meetodil. Et

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

siis lause 1.2.1 põhjal tuleb, esiteks, lahendada süsteem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Selle süsteemi lahendiks on $\eta_1 = 1$ ja $\eta_2 = 5-3\cdot 1 = 2$. Teiseks, lahendades süsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

leiame, et $\xi_2 = -1$ ja $\xi_1 = 1 - 2\cdot(-1) = 3$. Seega, $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cc} 3 & -1 \end{array}\right]^T$.

Lineaaralgebra põhikursuses võrrandisüsteemide lahendamiseks esitatud Gaussi võte on rakendatav ka LU-lahutuse korral. Olgu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, kusjuures $\xi_k \neq 0$. Kui

$$\tau_i = \xi_i/\xi_k \ \ (i = (k+1):m) \quad \mathbf{t}^{(k)} = [\,\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{k \text{ nulli}} \ \tau_{k+1} \ \cdots \ \tau_m\,]$$

ja

$$M_k = I - \mathbf{t}^{(k)}\mathbf{e}_k^T\ , \tag{2}$$

siis

$$M_k\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & -\tau_{k+1} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\tau_m & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definitsioon 1.2.1. Maatriksit M_k kujul (2) nimetatakse *Gaussi maatriksiks*, komponente $\mathbf{t}((k+1):n)$ nimetatakse *Gaussi kordajateks* ja vektorit $\mathbf{t}^{(k)}$ *Gaussi vektoriks* ning Gaussi maatriksiga M_k määratud teisendust nimetatakse *Gaussi teisenduseks.*

Definitsioon 1.2.2. Maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ *$k-$ndaks juhtelemendiks* nimetatakse suurust

$$d_k = \begin{cases} a_{11}, \text{ kui } k = 1, \\ \det(A(1:k,\, 1:k))/\det(A(1:k-1,\, 1:k-1)), \text{ kui } k = 2:p, \end{cases}$$

kusjuures $p = \min(m,n)$ ja $\det(A(1:i,\, 1:i)) \neq 0 \ \ (i = 1:p-1)$.

Kui $A \in R^{n\times n}$, siis maatriksi A nullist erinevate juhtelementide korral on leitavad Gaussi maatriksid $M_1, \ldots, M_{n-1}$ nii, et $M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_2M_1A = U$ on ülemine kolmnurkmaatriks.

Näide 1.2.2. Vaatleme Gaussi maatriksite M_1 ja M_2 ning ülemise kolmnurkmaatriksi U leidmist maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

korral. Seose (2) abil leiame

$$M_1 = I - \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4/2 \\ (-2)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seega,

$$M_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$M_2 = I - \mathbf{t}^{(2)}\mathbf{e}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ning

$$U = M_2 M_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

Märgime, et maatriks $A^{(k-1)} = M_{k-1} \cdots M_1 A$ on ülemine kolmnurkne veergudes ühest kuni (k-1)-ni ja Gaussi maatriksi M_k elementide arvutamiseks kasutatakse maatriksi vektorit $A^{(k-1)}(k:m,k)$, kusjuures maatriksi M_k leidmine on võimalik, kui $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Lisaks, $M_k^{-1} = I + \mathbf{t}^{(k)}\mathbf{e}_k^T$. Kui valida

$$L = M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1},$$

siis

$$A = LU.$$

Rõhutame, et meie käsitluses alumine kolmnurkmaatriks L on ühikdiagonaaliga maatriks.

Lause 1.2.2. Kui peamiinorid, so $\det(A(1\colon k, 1\colon k)) \neq 0$ (k =1:n-1), siis maatriksil $A \in R^{n\times n}$ on olemas $LU-$lahutus. Kui regulaarsel maatriksil A eksisteerib $LU-$lahutus, siis see on ühene ja $\det(A) = u_{11} \cdots u_{nn}$.

Tõestus. Oletame, et $k-1$ sammu on sooritatud ja leitud on maatriks $A^{(k-1)} = M_{k-1}\cdots M_1 A$. Element $a_{kk}^{(k-1)}$ on maatriksi A k-s juhtelement ja $\det(A(1{:}k, 1{:}k)) = a_{11}^{(k-1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$. Seega, kui $A(1{:}k, 1{:}k)$ on regulaarne, siis $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ja eksisteerib maatriksi A jaoks $LU-$lahutus. Oletades, et regulaarsel maatriksil A on kaks $LU-$lahutust $A = L_1U_1$ ja $A = L_2U_2$, saame, et $L_1U_1 = L_2U_2$ ehk $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Et $L_2^{-1}L_1$ on alumine kolmnurkmaatriks, mille peadiagonaalil on ühed ja $U_2U_1^{-1}$on ülemine kolmnurkmaatriks, siis $L_2^{-1}L_1 = I$ ja $U_2U_1^{-1} = I$ ning $L_2 = L_1$ ja $U_2 = U_1$. $\square$

Näide 1.2.3.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

LU-lahutuse.
Leiame Gaussi maatriksi M_1 maatriksi A korral:

$$M_1 = I - \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 8/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$M_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Näide 1.2.4.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

LU-lahutuse.
Leiame Gaussi maatriksi M_1 maatriksi A korral:

$$M_1 = I - \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$M_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja et maatriks M_1A on ülemine kolmnurkmaatriks, siis $M_2 = I$ ning

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Näide 1.2.5.* Lahendame süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \ \wedge \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

kasutades LU-lahutust.
Näites 1.2.4 on leitud maatriksi A jaoks LU-lahutus:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Süsteemi $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ so

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

lahendamisel saame, et

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Süsteemi $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ so

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

lahendamisel leiame, et

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 1.2.1.* Leidke maatriksi A jaoks LU-lahutus, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 1.2.2.* Lahendage süsteem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

kasutades LU-lahutust.

Ka ristkülikmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mille peamiinorid on nullist erinevad, so

$$\det(A(1:k,\, 1:k) \neq 0 \ (k = 1 : \min(m,n)),$$

jaoks eksisteerib $LU-$lahutus.

Näide 1.2.6. Kehtivad seosed

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Algebra põhikursusest on teada, et Gaussi elimineerimismeetodi vahetu rakendamine, seega ka $LU-$lahutuse vahetu teostamine, nurjub, kui vähemalt üks maatriksi peamiinoreist on singulaarne. Osutub, et regulaarse maatriksi korral on peale maatriksi ridade järjekorra sobivat muutmist võimalik teisendatud maatriksi $LU-$lahutus. Ridade (ka veergude) järjekorra muutmiseks kasutatakse permutatsioonimaatrikseid.

Definitsioon 1.2.3. *Permutatsioonimaatriksiks* $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ nimetatakse maatriksit, mis on saadud ühikmaatriksist I ridade järjekorra muutmise teel.

Näide 1.2.7. Vaatleme, kuidas mõjub 4×4 maatriksile A selle korrutamine ühe konkreetse permutatsioonimaatriksiga P.

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}.$$

Permutatsioonimaatriksiga P vasakult korrutamisel saame uue maatriksi, mis on lähtemaatriksist saadud ridade samal viisil ümberpaigutamisel, kui on saadud maatriks P maatriksist I. Korrutades paremalt,

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

saame uue maatriksi, mis on lähtemaatriksist saadud veergude samal viisil ümberpaigutamisel, kui on saadud maatriks P maatriksist I veergude ümberpaigutamise teel. Kehtib järgmine väide.

Lause 1.2.3. Kui $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ja $\det(A) \neq 0$, siis leidub selline permutatsioonimaatriks $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, et maatriksi PA kõik peamiinorid on nullist erinevad ja seega eksisteerib $LU-$lahutus

$$PA = LU.$$

Näide 1.2.8.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Leiame sobiva permutatsioonimaatriksi $P \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ korral maatriksi PA jaoks LU-lahutuse.
Vahetame ära maatriksi A esimese ja teise rea, st võtame

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ning leiame maatriksi

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

korral Gaussi maatriksi

$$M_1 = I - \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$M_1PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$M_2 = I - \mathbf{t}^{(2)}\mathbf{e}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)/(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ning

$$M_2M_1PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Järelikult,

$$L = M_1^{-1}M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

ja

$$PA = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 1.2.3.* Leida sobiva permutatsioonimaatriksi P korral maatriksi PA jaoks LU-lahutus, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ \ b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ \ c)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.2. *QR*-lahutus

2.2.1. Householderi teisendus

Definitsioon 2.1.1. Kui $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, siis maatriksit

$$H = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} \tag{1}$$

nimetatakse *Householderi maatriksiks* ehk *Householderi teisenduse* maatriksiks ning vektorit $\mathbf{v}$ *Householderi vektoriks.*

Lause 2.1.1. Householderi maatriks H on sümmeetriline ja ortogonaalne maatriks. Householderi teisendus peegeldab iga $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ hüpertasandi $span\{\mathbf{v}\}^\perp$ suhtes.

Tõestus. Tõesti,

$$H^T = I^T - 2\frac{(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = H$$

ja

$$HH^T = H^T H = (I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})^2 = I - 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} + 4\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{v})\mathbf{v}^T}{(\mathbf{v}^T\mathbf{v})(\mathbf{v}^T\mathbf{v})} = I\,.$$

Lause väite kolmanda osa tõestamiseks valime hüpertasandil $span\{\mathbf{v}\}^\perp$ ristbaasi $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$. Järelikult, $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}_i$ $(i = 1 : n-1)$ ja $\mathbf{v}^T\mathbf{a}_i = 0$ $(i = 1 : n-1)$. Kui

$$\mathbf{x} = \beta\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{a}_{n-1},$$

siis

$$\begin{aligned} H\mathbf{x} =& H(\beta\mathbf{v}) + H(\beta_1\mathbf{a}_1) + \ldots + H(\beta_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}) = \\ =& \beta(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})\mathbf{v} + \beta_1(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{n-1}(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})\mathbf{a}_{n-1} = \\ =& \beta(\mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{v})}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}) + \beta_1(\mathbf{a}_1 - 2\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{a}_1)}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}) + \ldots + \beta_{n-1}(\mathbf{a}_{n-1} - 2\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{a}_{n-1})}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}) = \\ =& -\beta\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}, \end{aligned}$$

st vektoritel $\mathbf{x}$ ja $H\mathbf{x}$ on hüpertasandil $span\{\mathbf{v}\}^\perp$ sama ristprojektsioon

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{a}_{n-1},$$

kuid projektsioonid vektorile $\mathbf{v}$ on vastassuunalised. Seega $H\mathbf{x}$ on vektori $\mathbf{x}$ peegeldus hüpertasandi $span\{\mathbf{v}\}^\perp$ suhtes. Oluline on märkida, et Householderi maatriks H sõltub vaid Householderi vektori $\mathbf{v}$ sihist ega sõltu vektori $\mathbf{v}$ suunast ega pikkusest. $\square$

Lause 2.1.2. Kui $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2\,\mathbf{e}_1$, siis vektor $H\mathbf{x}$, kus H on seosega (1) määratud Householderi maatriks, on vektori $\mathbf{e}_1$ sihiline vektor, st et Householderi teisendus H rakendatuna vektorile $\mathbf{x}$ nullistab vektori $\mathbf{x}$ koordinaadid alates teisest koordinaadist.

Tõestus. Üritame fikseeritud nullist erineva vektori $\mathbf{x}$ korral määrata Householderi vektorit $\mathbf{v}$ nii, et $H\mathbf{x} \in span\{\mathbf{e}_1\}$. Kuna

$$H\mathbf{x} = (I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{x})}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

ja $H\mathbf{x} \in span\{\mathbf{e}_1\}$, siis $\mathbf{v} \in span\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_1\}$. Valides $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_1$, saame

$$\mathbf{v}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \alpha\xi_1,$$

$$\mathbf{v}^T\mathbf{v} = (\mathbf{x}^T + \alpha\mathbf{e}_1^T)(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_1) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\alpha\xi_1 + \alpha^2$$

ja

$$H\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \alpha\xi_1}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\alpha\xi_1 + \alpha^2}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_1) =$$

$$= (1 - 2\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \alpha\xi_1}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\alpha\xi_1 + \alpha^2})\mathbf{x} - 2\alpha\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{e}_1.$$

Valime α selliselt, et viimases $H\mathbf{x}$ esituses vektori $\mathbf{x}$ kordaja on null, st

$$1 - 2\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \alpha\xi_1}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\alpha\xi_1 + \alpha^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\alpha\xi_1 + \alpha^2 - 2\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{2}\alpha\xi_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \alpha^2 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|_2 = \pm\alpha.$$

Sellise valiku $\alpha = \pm\|\mathbf{x}\|_2$ korral $\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1$ ja

$$H\mathbf{x} = -2\alpha\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{e}_1 = -2\alpha\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x} \pm \alpha\xi_1}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} \pm 2\alpha\xi_1 + \mathbf{x}^T\mathbf{x}}\mathbf{e}_1 = -\alpha\mathbf{e}_1 = \mp\|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1. \quad \square$$

Näide 2.1.1. Olgu $\mathbf{x} = [2\ 6\ -3]^T$. Leiame sellise Householderi vektori $\mathbf{v}$ ja sellele vastava Householderi teisenduse, mis nullistab vektori $\mathbf{x}$ kaks viimast koordinaati. Lause 2.1.1 põhjal arvutame $\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1 = [2\ 6\ -3]^T \pm 7\mathbf{e}_1$. Valime vektori $\mathbf{e}_1$ plusskordse ja saame $\mathbf{v} = [9\ 6\ -3]^T$. Leiame Housholderi maatriksi H, arvestades, et H sõltub vaid vektori $\mathbf{v}$ sihist,

$$H = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = I - \frac{2}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= I - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Kontrollime,

$$H\mathbf{x} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 2.1.1*. Leidke selline Householderi maatriks H, et $H\mathbf{x} \in span\{\mathbf{e}_1\}$, kus $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Olgu $Q_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $(i = 1\colon r)$ Householderi maatriksid. Vaatleme nende maatriksite korrutist

$$Q = Q_1 \cdots Q_r\,,$$

kusjuures

$$Q_j = I - \beta_j \mathbf{v}^{(j)}\mathbf{v}^{(j)T}$$

ja iga $\mathbf{v}^{(j)}$ on kujul

$$\mathbf{v}^{(j)} = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{j-1\,\text{nulli}} & 1 & \nu_{j+1}^{(j)} & \cdots & \nu_n^{(j)} \end{bmatrix}^T.$$

Maatriksit Q võib esitada kujul

$$Q = I + W\,Y^T, \tag{2}$$

kus W ja Y on $n \times r-$maatriksid. Vastuse küsimusele, kuidas leida esitust (2), annab järgmine lause.

Lause 2.1.3. Olgu maatriks $Q = I + W\,Y^T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ortogonaalne, kusjuures $W, Y \in \mathbf{R}^{n\times j}$. Kui $H = I - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, kus $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{z} = -\beta Q\mathbf{v}$, siis

$$Q_+ = QH = I + W_+ {Y_+}^T,$$

kus $W_+ = [W \quad z]$ ja $Y_+ = [Y \quad \mathbf{v}]$ ning seega, $W_+\,,\ Y_+ \ \in \mathbf{R}^{n\times(j+1)}$.

Tõestus. Kuna

$$QH = (I + WY^T)(I - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = I + WY^T - \beta(I + WY^T)\mathbf{v}\mathbf{v}^T =$$
$$= I + WY^T - \beta Q\mathbf{v}\mathbf{v}^T = I + WY^T + \mathbf{z}\mathbf{v}^T$$

ja

$$I + [W \quad z]\begin{bmatrix} Y^T \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} = I + \ \left[WY^T + \mathbf{z}\mathbf{v}^T\right] = I + WY^T + \mathbf{z}\mathbf{v}^T\,,$$

siis $QH = I + W_+{Y_+}^T$ ja lause väide on tõene. $\square$

2.2.2. Givensi pöörete meetod

Householderi meetodi rakendamine on efektiivne vektori koordinaatide nullistamisel, kui neid koordinaate on "palju." Ühe, vahel ka paari, elemendi nullistamiseks kasutatakse tavaliselt *Givensi meetodit. Givensi pööre* sooritatakse $n \times n-$ maatriksi

$$G(i,k,\theta) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\quad i & \qquad\quad k & \qquad\qquad\qquad \end{matrix} & \end{array} ,$$

kus $c = \cos\theta$ ja $s = \sin\theta$, abil. Maatriks $G(i,k,\theta)$ on ortogonaalmaatriks. Kui $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{y} = G(i,k,\theta)^T \mathbf{x}$, siis

$$\eta_j = \begin{cases} c\xi_i - s\xi_k, & j = i\ , \\ s\xi_i + c\xi_k, & j = k\,, \\ \xi_j, & j \neq i,k\,. \end{cases}$$

Kui valida

$$c = \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_k^2}} \ \wedge\ s = \frac{-\xi_k}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_k^2}}\ ,$$

siis saame, et $\eta_k = 0$.

Näide 2.2.1. Vaatleme näites 2.1.1 esitatud vektori $\mathbf{x} = [2\ 6\ -3]^T$ viimase koordinaadi nullistamist Givensi pöörde abil. Leiame suuruste c ja s väärtused:

$$c = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,,$$

$$s = \frac{-\xi_3}{\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

Kontrollime,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{15\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.3. Householderi $\boldsymbol{QR}$-lahutus

Kasutame Householderi teisendust maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ korral $QR-$lahutuse saamiseks.

Näide 2.3.1. Olgu $A \in \mathbf{R}^{5\times 4}$ ning olgu Householderi maatriksid H_1 ja H_2 juba leitud nii, et

$$H_2H_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \boxtimes & \times \\ 0 & 0 & \boxtimes & \times \\ 0 & 0 & \boxtimes & \times \end{bmatrix}.$$

Vaatleme märgitud vektorit $\begin{bmatrix} \boxtimes \\ \boxtimes \\ \boxtimes \end{bmatrix}$ ja koostame sellise Householderi maatriksi $\widetilde{H}_3$, et

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \boxtimes \\ \boxtimes \\ \boxtimes \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ning valides $H_3 = diag(I_2, \widetilde{H}_3)$,

$$H_3H_2H_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes \end{bmatrix}.$$

Järgmisena vaatleme märgitud vektorit $\begin{bmatrix} \boxtimes \\ \boxtimes \end{bmatrix}$ ja koostame sellise $\widetilde{H}_4$, et

$$\widetilde{H}_4 \begin{bmatrix} \boxtimes \\ \boxtimes \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \end{bmatrix}$$

ning valides $H_4 = diag(I_3, \widetilde{H}_4)$, saame

$$H_4H_3H_2H_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

Kui valida $Q = H_1H_2H_3H_4$, siis $QR = H_1H_2H_3H_4H_4H_3H_2H_1A = A$.

Lause 2.3.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$, siis leiduvad sellised Householderi maatriksid H_i, et

$$Q = \begin{cases} H_1 \cdots H_n\,, & \text{kui } m > n\,, \\ H_1 \cdots H_{n-1}\,, & \text{kui } m = n \end{cases}$$

ja

$$R = \begin{cases} H_n \cdots H_1A\,, & \text{kui } m > n\,, \\ H_{n-1} \cdots H_1A\,, & \text{kui } m = n \end{cases}$$

ning

$$A = QR,$$

kusjuures $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ on ortogonaalmaatriks ja $R \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks.

Näide 2.3.2. Leida maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Householderi $QR-$lahutus. Näites 2.1.1 on leitud maatriksi A esimese veeruvektori $[2\ 6\ -3]^T$ teisendamiseks sobiv Householderi maatriks

$$H_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Leiame

$$H_1A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -49 & -15 & -5 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi $\widetilde{H}_2$ leidmiseks leiame vastava Householderi vektori

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \sqrt{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{5} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$\widetilde{H}_2 = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} = \cdots = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ja

$$H_2 = diag(I_1, \widetilde{H}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

ning

$$R = H_2 H_1 A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49 & -15 & -5 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{7} & -\frac{13\sqrt{5}}{35} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Leiame samuti ortogonaalmaatriksi

$$Q = H_1 H_2 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{35} \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} & -15 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 4 & -7 \\ 3\sqrt{5} & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

ning teostame kontrolli

$$QR = \frac{\sqrt{5}}{35} \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} & -15 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 4 & -7 \\ 3\sqrt{5} & -2 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{7} & -\frac{13\sqrt{5}}{35} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = A.$$

Näide 2.3.3*. Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Householderi $QR-$lahutuse.
Teisendatav vektor on $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$, kusjuures $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.
Moodustame vektori

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \pm 3\mathbf{e}_1.$$

Valime vektori $\mathbf{e}_1$ miinuskordse ning arvestame, et maatriks H sõltub vaid vektori $\mathbf{v}$ sihist:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Leiame Householderi maatriksi

$$H_1 = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = I - \frac{2}{(-1)(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= I - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veendume, et maatriks H_1 nullistab maatriksi A esimese veeru elemendid alates teisest reast. Tõesti,

$$H_1 A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Edasi teisendame vektorit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, kusjuures $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2}$. Leiame sellele vektorile $\mathbf{x}$ vastava Householderi vektori

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \pm \sqrt{2}\mathbf{e}_1.$$

Valime vektori $\mathbf{e}_1$ miinuskordse:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Saame sellele vektorile vastava Householderi maatriksi

$$\widetilde{H}_2 = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = I - \frac{2}{(1-\sqrt{2})^2+1}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= I - \frac{2}{2(2-\sqrt{2})}\begin{bmatrix} 3-2\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & -\sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ja leiame

$$H_2 = diag(I_1, \widetilde{H}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$R = H_2H_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$Q = H_1H_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Teostame kontrolli:

$$QR = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Ülesanne 2.3.1.* Leidke maatriksi A Householderi QR-lahutus, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}; \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.4. Givensi $\boldsymbol{QR}$-lahutus

Vaatleme järgnevas Givensi pöörete kasutamist maatriksi $QR-$lahutuse saamiseks.

Näide 2.4.1. Vaatleme $A \in \mathbf{R}^{4\times 3}$ korral *Givensi* $QR-$*lahutuse* skeemi:

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_1^T(3,4)} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_2^T(2,3)} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_3^T(1,2)}$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_4^T(3,4)} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_5^T(2,3)} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_6^T(3,4)}$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Ortogonaalmaatriks avaldub kujul:

$$Q = G_1(3,4)G_2(2,3)G_3(1,2)G_4(3,4)G_5(2,3)G_6(3,4).$$

Näide 2.4.2.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Givensi QR-lahutuse.
Muudame nulliks maatriksi A elemendi $A(3,1)$. Selleks moodustame Givensi maatriksi $G_1(2,3)$. Leiame suuruste c ja s väärtused:

$$c = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$s = \frac{3}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Seega saame, et

$$G_1(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

ja

$$A^{(1)} = G_1^T(2,3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3\sqrt{5} & \frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Muutmaks nulliks maatriksi $A^{(1)}$ elementi $A^{(1)}(2,1)$, moodustame Givensi maatriksi $G_2(1,2)$. Leiame suuruste c ja s väärtused:

$$c = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (3\sqrt{5})^2}} = \frac{2}{7},\ s = \frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{2^2 + (3\sqrt{5})^2}} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

Seega

$$G_2(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{3}{7}\sqrt{5} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^{(2)} = G_2^T(1,2)A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ -\frac{3}{7}\sqrt{5} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3\sqrt{5} & \frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{6}{35}\sqrt{5} & -\frac{13}{35}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Muutmaks nulliks maatriksi $A^{(2)}$ elementi $A^{(2)}(3,2)$, moodustame Givensi maatriksi $G_3(2,3)$. Leiame suuruste c ja s väärtused:

$$c = \frac{\frac{6}{35}\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{35}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{\frac{6}{35}\sqrt{5}}{\frac{2}{7}\sqrt{41}} = \frac{3}{205}\sqrt{205}$$

ja

$$s = \frac{-\frac{4}{5}\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{35}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2}} = -\frac{14}{205}\sqrt{205}.$$

Seega

$$G_3(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{205}\sqrt{205} & -\frac{14}{205}\sqrt{205} \\ 0 & \frac{14}{205}\sqrt{205} & \frac{3}{205}\sqrt{205} \end{bmatrix}$$

ja

$$R = G_3^T(2,3)A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{205}\sqrt{205} & \frac{14}{205}\sqrt{205} \\ 0 & -\frac{14}{205}\sqrt{205} & \frac{3}{205}\sqrt{205} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{6}{35}\sqrt{5} & -\frac{13}{35}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{41} & -\frac{47}{287}\sqrt{41} \\ 0 & 0 & \frac{4}{41}\sqrt{41} \end{bmatrix}$$

ning

$$Q = G_1(2,3)G_2(1,2)G_3(2,3) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3\sqrt{5}}{7} & 0 \\ \frac{3\sqrt{5}}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{205}\sqrt{205} & -\frac{14}{205}\sqrt{205} \\ 0 & \frac{14}{205}\sqrt{205} & \frac{3}{205}\sqrt{205} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{9}{287}\sqrt{41} & \frac{6}{41}\sqrt{41} \\ \frac{6}{7} & \frac{22}{287}\sqrt{41} & -\frac{1}{41}\sqrt{41} \\ -\frac{3}{7} & \frac{38}{287}\sqrt{41} & \frac{2}{41}\sqrt{41} \end{bmatrix}.$$

Kontrollime:

$$QR = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{9}{287}\sqrt{41} & \frac{6}{41}\sqrt{41} \\ \frac{6}{7} & \frac{22}{287}\sqrt{41} & -\frac{1}{41}\sqrt{41} \\ -\frac{3}{7} & \frac{38}{287}\sqrt{41} & \frac{2}{41}\sqrt{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{41} & -\frac{47}{287}\sqrt{41} \\ 0 & 0 & \frac{4}{41}\sqrt{41} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Ülesanne 2.4.1. Leidke näites 2.3.2 antud maatriksi A Givensi $QR-$lahutus.

Ülesanne 2.4.2.* Leidke maatriksi A Givensi QR-lahutus, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},\ b)\ A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},\ c)\ A = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.5. *QR*-lahutuse põhiteoreem

Lause 2.5.1. Kui maatriksi $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ veeruvektorid $\mathbf{a}_i$ $(i = 1{:}\, n)$ on lineaarselt sõltumatud, $A = QR$, kusjuures $Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_m] \in \mathbf{R}^{m\times m}$ ja $R \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis

$$span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\} = span\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}\ (k = 1{:}\, n)\,. \tag{3}$$

Kui tähistada

$$Q_1 = Q(1:m, 1:n),\ Q_2 = Q(1:m, n+1:m),\ R_1 = R(1:n, 1:n),$$

siis

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q_1) \tag{4}$$

ja

$$\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(Q_2) \tag{5}$$

ning

$$A = Q_1 R_1\,. \tag{6}$$

Tõestus. Kui $A = QR$, siis

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{m} q_{ij} r_{jk} \underset{j>k}{\overset{r_{jk}=0}{=}} \sum_{j=1}^{k} q_{ij} r_{jk}\ \ (i\ = 1:\ m,\ \ k\ = 1:n)$$

ehk

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^{k} r_{jk} \mathbf{q}_j\ \ (k\ = 1:n).$$

Seega $\mathbf{a}_k \in span\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ ja $span\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k\} \subset span\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$. Kuna $rank(A) = n$, siis $rank(span\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_k\}) = k$ ja seos (3) kehtib. Seosest (3) järeldub $k = n$ korral seos (4) ja sellest omakorda seos (5). Seosest

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{m} q_{ij} r_{jk} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} r_{jk}$$

järeldub väide (6). $\square$

2.3. Singulaarlahutus

2.3.1. Singulaarlahutuse olemasolu

Lause 3.1.1. Kui maatriksil $V_1 \in \mathbf{R}^{n\times r}$ $(r < n)$ on ortonormeeritud veerud, siis leidub selline $V_2 \in \mathbf{R}^{n\times(n-r)}$, et $V = [V_1\ V_2]$ on ortogonaalmaatriks, kusjuures maatriksi V_1 veeruvektorite lineaarse katte $\mathcal{R}(V_1)$ ortogonaalne täiend $\mathcal{R}(V_1)^\perp$ võrdub maatriksi V_2 veeruvektorite lineaarse kattega $\mathcal{R}(V_2)$, st $\mathcal{R}(V_1)^\perp = \mathcal{R}(V_2)$.

Tõestus põhineb Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessil. $\square$

Lause 3.1.2. Kui $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ja $Q \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on ortonormeeritud veergudega maatriks, siis $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$.

Tõestus. Ortonormeeritud veergudega maatriksi $Q \in \mathbf{R}^{m\times n}$ korral $Q^TQ = I_n$ ja

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad \square$$

Lause 3.1.3. Olgu $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Kui $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ ja $Z \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ortogonaalmaatriksid, siis

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F$$

ja

$$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2\,. \tag{1}$$

Tõestame seose (1):

$$\|QAZ\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|QAZ\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|QA(Z\mathbf{x})\|_2 =$$

$$= \max_{\|\mathbf{z}\|_2=1} \|QA\mathbf{z}\|_2 = \max_{\|\mathbf{z}\|_2=1} \|Q(A\mathbf{z})\|_2 = \max_{\|\mathbf{z}\|_2=1} \|A\mathbf{z}\|_2 = \|A\|_2\,. \quad \square$$

Lause 3.1.4 *(teoreem singulaarlahutuse olemasolust).* Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis leiduvad sellised ortogonaalsed maatriksid

$$U = [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_m] \in \mathbf{R}^{m\times m}$$

ja

$$V = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \mathbf{v}_n] \in \mathbf{R}^{n\times n},$$

et

$$U^T AV = \Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbf{R}^{m\times n} \ \ (p = \min\{m, n\}), \tag{2}$$

kusjuures

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0.$$

Tõestus. Maatriksi 2-normi definitsiooni põhjal leiduvad sellised vektorid $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, et $A\mathbf{x} = \sigma\mathbf{y}$ ja $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$ ning $\sigma = \|A\|_2$. Lause 3.1.1 põhjal leiduvad sellised maatriksid $V_2 \in \mathbf{R}^{n\times(n-1)}$ ja $U_2 \in \mathbf{R}^{m\times(m-1)}$, et $V = [\mathbf{x} \ V_2]$ ja $U = [\mathbf{y} \ U_2]$ on ortogonaalmaatriksid. Sellise tähistuse korral saame

$$U^T AV = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ U_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{x} & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\mathbf{x} & AV_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{y} & AV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{y}^T\mathbf{y} & \mathbf{y}^T AV_2 \\ \sigma U_2^T\mathbf{y} & U_2^T AV_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} = A_1,$$

kus $\mathbf{w} = V_2^T A^T \mathbf{y}$ ja $B = U_2^T AV_2$. Et

$$A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \mathbf{w}^T\mathbf{w} \\ B\mathbf{w} \end{bmatrix},$$

siis

$$\left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \geq (\sigma^2 + \mathbf{w}^T\mathbf{w})^2.$$

Teisalt,

$$\left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \leq \|A_1\|_2^2 \left\| \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|A_1\|_2^2 (\sigma^2 + \mathbf{w}^T\mathbf{w})$$

ja seega

$$\|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + \mathbf{w}^T\mathbf{w} = \|A\|_2^2 + \mathbf{w}^T\mathbf{w}.$$

Lause 3.1.3 põhjal leiame, et $\|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2$. Järelikult, $\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 0$ ja $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Saame, et

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$$

ehk

$$A = U \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} V^T$$

ja

$$A^T A = V \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B^T \end{bmatrix} U^T U \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} V^T = V \begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^T B \end{bmatrix} V^T.$$

Seega maatriksid $A^T A$ ja $\begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B^T B \end{bmatrix}$ on sarnased ja neil on samad omaväärtused. Järelikult,

$$\lambda(A^T A) = \{\sigma^2\} \cup \lambda(B^T B),$$

kusjuures σ^2 kui $\|A\|_2^2$ on maatriksi $A^T A$ suurim omaväärtus. Nendime, et tänu maatriksi $A^T A$ sümmeetrilisusele on kõik maatriksi $A^T A$ omaväärtused mittenegatiivsed. Arutelu, mida kasutasime maatriksi A korral, kasutame järgneval etapil maatriksi B korral, jne. Seega piki maatriksi Σ peadiagonaali paigutuvad ruutjuured maatriksi $A^T A$ omaväärtustest, täpsemalt esimesed $p = \min\{m, n\}$ kahanevas järjestuses. $\square$

Definitsioon 3.1.1. Seost kujul (2) nimetatakse maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ *singulaarlahutuseks.* Seoses (2) esineva maatriksi Σ peadiagonaali elemente σ_i $(i = 1 : \min\{m, n\})$ nimetatakse maatriksi A *singulaarväärtusteks.*

2.3.2. Singulaarlahutuse omadused

Seosest (2) järelduvad seosed

$$AV = U\Sigma \tag{3}$$

ja

$$A^T U = V\Sigma^T. \tag{4}$$

Lause 3.2.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $A = U\Sigma V^T$, $U = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m] \in \mathbf{R}^{m\times m}$ ja $V = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \in \mathbf{R}^{n\times n}$, siis iga $i = 1 : \min\{m, n\}$ korral kehtivad seosed

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i\,, \tag{5}$$

$$A^T\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i\,, \tag{6}$$

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_p^2 \quad (p = \min\{m, n\})$$

ja

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

ning

$$\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sigma_n \ \ (m \geq n).$$

Tõestus. Olgu $n > m$. Vaatleme seost (3), mis on esitatav kujul

$$A[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 \end{bmatrix}$$

ehk

$$[A\mathbf{v}_1 \cdots A\mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_m\mathbf{u}_m & 0 \end{bmatrix},$$

mis maatriksi esimeses m veerus paiknevate elementide jaoks ongi seos (5). Vaatleme seost (4), mis on esitatav kujul

$$A^T[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m] = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ehk

$$[A^T\mathbf{u}_1 \cdots A^T\mathbf{u}_m] = \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \sigma_m\mathbf{v}_m \end{bmatrix},$$

mis elemenditi kujutab seost (6). Rõhutame, et lause tõestuses on sümboliga ”0” tähistatud ka teatud nullidest koosnevad blokid. $\square$

Lause 3.2.2. Kui maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ singulaarlahutuses (2) esinevad singulaarväärtused rahuldavad võrratusi

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0,$$

siis

1.
   - $span\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} = \mathcal{R}(A)$;
   - $span\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} = \mathcal{R}(A^T)$;
   - $span\{\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\} = \mathcal{N}(A^T)$;
   - $span\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathcal{N}(A)$;
   - $rank(A) = r$;
   - maatriksi A singulaarväärtused on võrdsed hüperellipsoidi $E = \{A\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| = 1\}$ pooltelgede pikkustega;
   - $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$.

Tõestame esimese neist omadustest. Vaatleme seost $A = U\Sigma V^T$. Et

$$[\Sigma V^T]_{jk} = \sum_{s=1}^{n} \sigma_{js} v_{sk}^T = \begin{cases} \sigma_j v_{kj}, \text{ kui } j = 1 : r, \\ 0, \text{ kui } j = r+1 : m, \end{cases}$$

siis

$$a_{ik} = [U\Sigma V^T]_{ik} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} [\Sigma V^T]_{jk} = \sum_{j=1}^{r} u_{ij} \sigma_j v_{kj}$$

ehk

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j v_{kj} \mathbf{u}_j.$$

Seega

$$\mathbf{a}_k \in span\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \ (k = 1 : n) \Rightarrow span\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} = \mathcal{R}(A). \quad \square$$

Lause 3.2.3. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $A = U\Sigma V^T$ on maatriksi A singulaarlahutus, siis $U \in \mathbf{R}^{m\times m}$ veeruvektorid on AA^T normeeritud omavektorid ja $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ veeruvektorid on A^TA normeeritud omavektorid. Maatriksi A singulaarväärtused avalduvad ruutjuurtena nii A^TA kui ka AA^T omaväärtustest.

Tõestus. Lähtudes maatriksi A singulaarlahutusest leiame maatriksite AA^T ja A^TA esitused:

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T \tag{7}$$

ja

$$A^TA = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T. \tag{8}$$

Et maatriksid $\Sigma\Sigma^T$ ja $\Sigma^T\Sigma$ on diagonaalmaatriksid, siis ortogonaalmaatriksid U ja V peavad esitustes (7) ja (8) koosnema vastavalt maatriksi AA^T ja A^TA omavektoreist. $\square$

2.3.3. Singulaarlahutuse algoritm

Algoritm 3.3.1. Maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ singulaarlahutuse (2) leidmiseks tuleb:
I Leida maatriksi A^TA omaväärtused ja paigutada need kahanemise järjekorras.
II Leida maatriksi A^TA nullist erinevate omaväärtuste arv r.
III Leida saadud omaväärtustele vastavad maatriksi A^TA ortonormeeritud omavektorid ja paigutada need samas järjekorras maatriksi $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ veeruvektoreiks.
IV Moodustada diagonaalmaatriks $\Sigma \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mille peadiagonaalile paigutada ruutjuured $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ punktis I saadud maatriksi A^TA $p = \min\{m, n\}$ esimesest omaväärtusest kahanevas järjestuses.
V Leida maatriksi $U \in \mathbf{R}^{m\times m}$ esimesed veeruvektorid:

$$\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} A\mathbf{v}_i \quad (i = 1 : r). \tag{9}$$

VI Lisada maatriksisse U ülejäänud $m - r$ veeruvektorit Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi abil.

Näide 3.3.1. Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times 2}$$

singulaarlahutuse.
I Leiame $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ omaväärtused: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1.$

II Leiame maatriksi A^TA nullist erinevate omaväärtuste arvu: $r = 2$.
III Leiame maatriksi A^TA omaväärtustele λ_1 ja λ_2 vastavad ortonormeeritud omavektorid $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ ning moodustame maatriksi

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}.$$

IV Leiame singulaarmaatriksi $\Sigma \in R^{3\times 2}$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mille peadiagonaalil on ruutjuured maatriksi A^TA omaväärtustest (kahanevas järjestuses) ja ülejäänud maatriksi Σ elemendid on nullid.
V Leiame valemite (9) abil maatriksi $U \in R^{3\times 3}$ kaks esimest veeruvektorit,

$$\mathbf{u}_1 = \sigma_1^{-1} A\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{u}_2 = \sigma_2^{-1} A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

VI Vektori $\mathbf{u}_3$ arvutamiseks leiame Gram-Schmitd'i protsessiga algul vektori $\grave{\mathbf{u}}_3$, mis on risti vektoritega $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$:

$$\grave{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{u}_1^T\mathbf{e}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2^T\mathbf{e}_2)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}^T.$$

Normeerides vektori $\grave{\mathbf{u}}_3$, saame

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}.$$

Seega,

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

ja maatriksi A singulaarlahutuseks on:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Näide 3.3.2. Leiame maatriksi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ singulaarlahutuse.
I Leiame maatriksi A^TA omaväärtused:

$$\det(A^TA - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 9, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

II Leiame maatriksi A^TA nullist erinevate omaväärtuste arvu: $r = 1$.
III Leiame maatriksi A^TA omavektorid:

$$\lambda_1 = 9 \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_{2,3} = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5}/15 & 2\sqrt{5}/15 & 5\sqrt{5}/15 \end{bmatrix}^T. \end{cases}$$

Kuna omaväärtus 0 on kordne, siis vektori $\mathbf{v}_3$ leidmiseks on kasutatud Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi. "Kleebime" kokku ortogonaalmaatriksi V :

$$V = \begin{bmatrix} -2/3 & -\sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & 5\sqrt{5}/15 \end{bmatrix}.$$

IV Koostame singulaarmaatriksi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V Arvutame valemite (9) abil maatriksi U ainsa veeruvektori:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}.$$

Seega on maatriksi A singulaarlahutus

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 & 0 \\ 4\sqrt{5}/15 & 2\sqrt{5}/15 & 5\sqrt{5}/15 \end{bmatrix}.$$

Näide 3.3.3.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

singulaarlahutuse.

Antud 3×4-maatriksil A on ülimalt kolm nullist erinevat singulaarväärtust. Järelikult on otstarbekas leida maatriksi A nullist erinevad singulaarväärtused 3×3-maatriksi AA^T abil (mitte 4×4-maatriksi A^TA abil). Et

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{17}{10} & \frac{3}{5} \\ 2 & \frac{1}{10} & \frac{9}{5} \\ 2 & -\frac{17}{10} & -\frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{1}{10} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5} \end{bmatrix},$$

siis maatriksi AA^T karakteristlik võrrand on

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5}-\lambda & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{36}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ehk

$$(16-\lambda)\left(36 - 13\lambda + \lambda^2\right) = 0$$

ja selle võrrandi lahendeiks on $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 9$ ning $\lambda_3 = 4$. Et $\lambda_i = \sigma_i^2$ ja maatriks Σ on 3×4-maatriks, siis maatriksi Σ peadiagonaalil on maatriksi A singulaarväärtused kahanevas järjekorras ning ülejäänud maatriksi Σ elemendid on nullid:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi U veeruvektoreiks on maatriksi AA^T ortonormeeritud omavektorid:

$$\lambda_1 = 16 \ \Rightarrow \ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$\lambda_2 = 9 \ \Rightarrow \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}^T;$$

$$\lambda_3 = 4 \ \Rightarrow \ \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T.$$

Vektorite $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ja $\mathbf{u}_3$ "kleepimisel" saame maatriksi

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Vastavalt seosele (6) leiame maatriksi V kolm esimest veeruvektorit (maatriksi Σ peadiagonaalil on kolm nullist erinevat elementi) valemi

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} A^T \mathbf{u}_i$$

abil. Seega

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vektori $\mathbf{v}_4$ arvutamiseks leiame Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessiga algul vektori $\widehat{\mathbf{v}}_4$, mis on risti vektoritega $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ja $\mathbf{v}_3$:

$$\widehat{\mathbf{v}}_4 = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_1^T \mathbf{e}_1)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2^T \mathbf{e}_1)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_3^T \mathbf{e}_1)\mathbf{v}_3 =$$

$$= \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}^T.$$

Et $\|\widehat{\mathbf{v}}_4\|_2 = \frac{1}{2}$, siis

$$\mathbf{v}_4 = 2\widehat{\mathbf{v}}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

ja

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Teostame kontrolli

$$U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} = A$$

ja

$$U^T AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma.$$

Ülesanne 3.3.1.* Kasutades näites 3.3.3 saadud maatriksi A singulaarlahutust leida maatriksi A veeruvektorite alamruumi $\mathcal{R}(A)$, parempoolse nullruumi $\mathcal{N}(A)$, reavektorite alamruumi $\mathcal{R}(A^T)$ ja vasakpoolse nullruumi $\mathcal{N}(A^T)$ baasid.

Ülesanne 3.3.2.* Leida maatriksi $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ singulaarlahutus ja QR-lahutus.

Ülesanne 3.3.3.* Leida maatriksi $A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} + 3\sqrt{3} & \frac{5}{2}\sqrt{3} + 3 \end{bmatrix}$ singulaarlahutus.

2.4. Pseudopöördmaatriks

2.4.1. Vähimruutude meetod

Vaatleme lineaarse võrrandisüsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

lahendamist *vähimruutude meetodil,* juhul, kui ei ole täidetud Kronecker-Capelli teoreemi tingimus, st süsteem ei ole lahenduv tavalises mõttes. Vähimruutude meetod on rakendatav ka juhul, kui on täidetud Kronecker-Capelli teoreemi tingimus, kuid võrrandisüsteem omab lõpmata palju lahendeid.

Näide 4.1.1. Olgu süsteemiks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

kus $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T \notin \mathcal{R}(A)$ ja $rank(A) = 2$. Olgu $\mathbf{p}$ vektori $\mathbf{b}$ ristprojektsioon ruumile $\mathcal{R}(A)$. Kuna $rank(A) = 2$, siis süsteem $A\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ on üheselt lahenduv. Arvestades, et $\mathbf{R}^3 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$, saame, et $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in \mathcal{N}(A^T) \Leftrightarrow A^T(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ ja $A^T(\mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ehk

$$A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}. \tag{2}$$

Süsteemi (2) maatriks $A^T A$ on regulaarne, sest $rank(A) = 2$. Järelikult on süsteem (2) esitatud tingimustel üheselt lahenduv ja

$$\overline{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}. \tag{3}$$

Hälbe $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ normi ruudu

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = (\mathbf{x}^T A^T - \mathbf{b}^T)^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

minimiseerimisel ($grad\, \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = 0$) jõuame sama süsteemini (2) ja järelikult ka valemiga (3) määratava lahendini $\overline{\mathbf{x}}$, võrrandi (1) *lahendini vähimruutude mõttes.*

Näites 4.1.1 esitatud mõttekäik on realiseeritav ka üldisemal juhul.

Definitsioon 4.1.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis süsteemi (2) nimetatakse süsteemi (1) *normaalvõrrandite süsteemiks.*

Lause 4.1.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(A)$ ja $rank(A) = n$, siis süsteemi (1) normaalvõrrandite süsteem (2) on üheselt lahenduv ja süsteemi (1) lahend vähimruutude mõttes $\overline{\mathbf{x}}$ avaldub kujul (3).

Näide 4.1.2.* Lahendame vähimruutude mõttes võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Moodustame normaalvõrrandite süsteemi $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$\begin{cases} 9\bar{\xi}_1 + 9\bar{\xi}_2 &= 5 \\ 9\bar{\xi}_1 + 11\bar{\xi}_2 &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\xi}_1 = \frac{5}{9} \\ \bar{\xi}_2 = 0 \end{cases} .$$

Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(A)$ ja $rank(A) < n$, siis normaalvõrrandite süsteemil (2) on lõpmata palju lahendeid, mis kõik avalduvad kujul

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_r + \overline{\mathbf{x}}_n,$$

kusjuures $\overline{\mathbf{x}}_r \in \mathcal{R}(A^T)$ ja $\overline{\mathbf{x}}_n \in \mathcal{N}(A)$. Nende lahendite $\overline{\mathbf{x}}$ hulgast otsime vähima normiga, nn optimaalset lahendit $\mathbf{x}^+$. Vektorite $\overline{\mathbf{x}}_r$ ja $\overline{\mathbf{x}}_n$ ortogonaalsusest järeldub, et

$$\|\overline{\mathbf{x}}\|_2^2 = \|\overline{\mathbf{x}}_r\|_2^2 + \|\overline{\mathbf{x}}_n\|_2^2 .$$

Kuna tingimusest $\overline{\mathbf{x}}_n \in \mathcal{N}(A)$ järeldub, et $A\overline{\mathbf{x}}_n = 0$, siis

$$A\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{p} \;\Leftrightarrow\; A(\overline{\mathbf{x}}_r + \overline{\mathbf{x}}_n) = \mathbf{p} \;\Leftrightarrow\; A\overline{\mathbf{x}}_r + A\overline{\mathbf{x}}_n = \mathbf{p} \;\Rightarrow\; A\overline{\mathbf{x}}_r = \mathbf{p}$$

ja $\overline{\mathbf{x}}_r \in \mathcal{R}(A^T)$ on võrrandi $A\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ optimaalseks lahendiks $\mathbf{x}^+$. Seega, $\mathbf{x}^+ = \overline{\mathbf{x}}$.

2.4.2. Pseudopöördmaatriks ja optimaalne lahend

Uurime järgnevalt süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ optimaalse lahendi leidmise algoritmi.

Näide 4.2.1. Olgu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T$ ja

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kus $\sigma_1 \neq 0$ ja $\sigma_2 \neq 0$. Leiame süsteemi

$$\Sigma\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

optimaalse lahendi. Vektori $\mathbf{b}$ ristprojektsioon ruumile $\mathcal{R}(\Sigma)$ on $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}^T$. Lahendi $\overline{\mathbf{x}}$ saamiseks tuleb lahendada süsteem

$$\Sigma\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{p},$$

st

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\xi}_1 \\ \overline{\xi}_2 \\ \overline{\xi}_3 \\ \overline{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ehk

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1\overline{\xi}_1 + 0\overline{\xi}_2 + 0\overline{\xi}_3 + 0\overline{\xi}_4 = \beta_1 \\ 0\overline{\xi}_1 + \sigma_2\overline{\xi}_2 + 0\overline{\xi}_3 + 0\overline{\xi}_4 = \beta_1 \\ 0\overline{\xi}_1 + 0\overline{\xi}_2 + 0\overline{\xi}_3 + 0\overline{\xi}_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{\xi}_1 = \beta_1/\sigma_1 \\ \overline{\xi}_2 = \beta_2/\sigma_2 \\ \overline{\xi}_3 = \gamma \\ \overline{\xi}_4 = \delta \end{array} \right. ,$$

kus $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ on suvalised. Valides $\gamma = \delta = 0$, saame minimaalse 2-normiga lahendi

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} \beta_1/\sigma_1 & \beta_2/\sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

Nendime, et saadud $\mathbf{x}^+$ avaldub ka kujul

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} \beta_1/\sigma_1 \\ \beta_2/\sigma_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} .$$

Antud näiteülesande optimaalne lahend $\mathbf{x}^+$ on saadav vabaliikmete vektorist $\mathbf{b}$, selle korrutamisel vasakult maatriksiga

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Maatriks Σ^+ on saadav maatriksist Σ selle transponeerimisel ja seejärel nullist erinevate elementide asendamisel nende pöördelementidega. Seega, $\mathbf{x}^+ = \Sigma^+\mathbf{b}$.

Üldistame näites 4.2.1 saadud tulemuse

Lause 4.2.1. Kui

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbf{R}^{m \times n} \quad (p = \min\{m, n\}) \tag{1}$$

ja

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0, \tag{2}$$

siis võrrandisüsteemi

$$\Sigma \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

optimaalne lahend $\mathbf{x}^+$ avaldub kujul

$$\mathbf{x}^+ = \Sigma^+ \mathbf{b},$$

kus

$$\Sigma^+ = diag(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n\times m}. \tag{3}$$

Definitsioon 4.2.1. Olgu

$$A = U\Sigma V^T$$

maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ singulaarlahutus. Maatriksi A *pseudopöördmaatriksiks* nimetatakse maatriksit

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

kus Σ ja Σ^+ on määratud seostega (1-3).

Ülesanne 4.2.1. Olgu $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $\det(A) \neq 0$. Näidake, et $A^+ = A^{-1}$.

Näide 4.2.2. Leiame näites 3.3.2 esitatud maatriksi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ pseudopöördmaatriksi. Selles näites leidsime maatriksi A singulaarlahutuse

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 & 0 \\ 4\sqrt{5}/15 & 2\sqrt{5}/15 & 5\sqrt{5}/15 \end{bmatrix}.$$

Definitsiooni 4.2.1 põhjal

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

s.o

$$A^+ = \begin{bmatrix} -2/3 & \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 \\ -1/3 & 2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & 5\sqrt{5}/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ -1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix}.$$

Lause 4.2.2. Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ optimaalne lahend (vähimruutude mõttes) $\mathbf{x}^+$ on leitav valemiga

$$\mathbf{x}^+ = A^+ \mathbf{b}.$$

Tõestus. Vektori korrutamisel ortogonaalmaatriksiga U^T säilib vektori 2-norm. Järelikult,

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \left\|U\Sigma V^T \mathbf{x} - \mathbf{b}\right\|_2 = \left\|\Sigma V^T \mathbf{x} - U^T \mathbf{b}\right\|_2.$$

Teostame asenduse, $\mathbf{y} = V^T\mathbf{x}$. Seega

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} \|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n} \left\|\Sigma\mathbf{y} - U^T\mathbf{b}\right\|_2 .$$

Lause 4.2.1 põhjal on avaldist $\left\|\Sigma\mathbf{y} - U^T\mathbf{b}\right\|_2$ minimiseerivaks vektoriks

$$\mathbf{y}^+ = \Sigma^+ U^T\mathbf{b}$$

ja vektor

$$\mathbf{x}^+ = V\mathbf{y}^+ = V\Sigma^+U^T\mathbf{b} = A^+\mathbf{b}$$

minimiseerib avaldise $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2$. $\square$

Näide 4.2.3. Leiame süsteemi

$$2\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 = 9$$

optimaalse lahendi. Näites 4.2.2 leidsime süsteemimaatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

pseudopöördmaatriksi

$$A^+ = \begin{bmatrix} 2/9 \\ -1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix}.$$

Lause 4.2.2 põhjal saame optimaalse lahendi

$$\mathbf{x}^+ = A^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ -1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Näide 4.2.4. Leiame süsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

optimaalse lahendi. Näites 3.3.1 leidsime süsteemimaatriksi A singulaarlahutuse

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Kasutades definitsiooni 4.2.1, leiame pseudopöördmaatriksi

$$A^+ = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Süsteemi optimaalne lahend avaldub kujul

$$\mathbf{x}^+ = A^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 4.2.2.* Leidke maatriksi $A = [0]$ pseudopöördmaatriks ja selgitage saadud tulemust. *Vastus:* $A^+ = [0]$.

Ülesanne 4.2.3.* Leidke maatriksi A pseudopöördmaatriks, kui

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ \ b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 4.2.4.* Milline on ortonormeeritud veergudega maatriksi A pseudopöördmaatriks? *Vastus:* $A^+ = A^T$.

Ülesanne 4.2.5.* Leidke süsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

optimaalne lahend.

Lause 4.2.3 (*Moore-Penrose'i tingimused*)**.** Kui $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis tingimusi

$$AXA = A,\ \ XAX = X,\ \ (AX)^T = AX,\ \ (XA)^T = XA$$

rahuldab vaid üks maatriks $X \in \mathbf{R}^{n\times m}$ ja selleks on A^+.

Ülesanne 4.2.6.* Maatriksit A nimetatakse *projektsioonimaatriksiks,* kui

$$A^2 = A \ \wedge\ A^T = A.$$

Kontrollige projektsioonimaatriksi A korral Moore-Penrose'i tingimuste täidetust. Kas $A^+ = A$?

2.5. Maatriksi Jordani kuju

2.5.1. Maatriksi diagonalisatsioon

Lauses 1.2.6.8 Jordani lahutusest väidetakse, et kui $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, siis leidub selline regulaarne $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$, et

$$X^{-1}AX = J = diag(J_1\,,\,\ldots\,,\,J_t), \tag{1}$$

kusjuures $m_1 + \ldots + m_t = n$ ja

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m_i\times m_i}$$

on *Jordani blokk* ehk *Jordani kast* ning maatriks J kannab maatriksi A *Jordani kanoonilise kuju* ehk Jordani normaalkuju nime. Jordani blokkide arv lahutuses (1) võrdub maatriksi A lineaarselt sõltumatute omavektorite arvuga. Nimelt igale lineaarselt sõltumatule omavektorile vastab üks blokk. Seega, kui maatriksil A on omavektoreist koosnev baas, siis kõik Jordani blokid on $1 \times 1-$ blokid ja Jordani normaalkuju langeb kokku lauses 1.2.5.8 esitatud maatriksi diagonaalkujuga $S^{-1}AS = \Lambda$, kus $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ja maatriksi S veergudeks on neile omaväärtustele vastavad maatriksi A lineaarselt sõltumatud omavektorid.

Näide 5.1.1.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordani kuju.
Leiame maatriksi A omaväärtused:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 2. \end{array} \right.$$

Leiame neile omaväärtustele vastavad omavektorid:

$$\lambda_1 = 1 \ \rightarrow \ \left[\begin{array}{ccc|c} 3-1 & -1 & 2 & \vdots\ 0 \\ 1 & -1-1 & 1 & \vdots\ 0 \\ -1 & 1 & 0-1 & \vdots\ 0 \end{array}\right] \overset{I \leftrightarrow II}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 1 & \vdots\ 0 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots\ 0 \\ -1 & 1 & -1 & \vdots\ 0 \end{array}\right] \underset{III+I}{\overset{II-2\cdot I}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 1 & \vdots\ 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots\ 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots\ 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1 \ \rightarrow \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3 = 2 \ \rightarrow \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koostame maatriksi A omavektoreist maatriksi

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ja leiame selle pöördmaatriksi

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Tulemuseks saame

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Lause 5.1.1. Iga Hermite'i (sümmeetrilist) maatriksit $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ($A \in \mathbf{R}^{n\times n}$) saab viia diagonaalkujule unitaarmaatriksiga $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ (ortogonaalmaatriksiga $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$), st leidub selline $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ($Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$), et

$$U^H AU = \Lambda \quad (Q^T AQ = \Lambda). \tag{2}$$

Tõestus. Schuri lahutuse (lause 1.2.6.5) põhjal on Hermite'i maatriks $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ esitatav kujul

$$U^H A U = T, \tag{3}$$

kus $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$ on unitaarmaatriks ja $T \in \mathbf{C}^{n \times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks. Leides seose (3) mõlemast poolest transponeeritud kaasmaatriksi, saame

$$U^H A^H U = T^H.$$

Arvestades Hermite'i maatriksi definitsiooni $A^H = A$, leiame, et

$$U^H A U = T^H. \tag{4}$$

Seostest (3) ja (4) järeldub, et $T = D$. Maatriksiga A sarnase diagonaalmaatriksi D diagonaali elementideks on maatriksi A omaväärtused. Väide sümmeetrilise maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ korral on erijuht esitatud komplekssest versioonist. $\square$

Ülesanne 5.1.1.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leidke selline ortogonaalmaatriks $Q \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$, et $Q^T A Q = \Lambda$, kus Λ on diagonaalmaatriks.

Ülesanne 5.1.2.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -1 & 1 \\ 1-i & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leidke selline unitaarmaatriks $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$, et $U^H A U = \Lambda$, kus Λ on diagonaalmaatriks.

Mitte iga ruutmaatriks ei ole viidav kujule (2). Lause 1.2.6.6 põhjal on vaid normaalmaatriks A ($A^H A = A A^H$) viidav kujule (2). Üldjuhul tuleb maatriksi diagonaliseerimisel piirduda Jordani normaalkujuga (1).

2.5.2. Maatriksi Jordani kuju analüüs

Maatriksi Jordani maatriksi saamisel ei piisa maatriksi omaväärtuste leidmisest.

Näide 5.2.1. Leiame maatriksite

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordani maatriksid J.

On lihtne veenduda, et maatriksite T, A, B ja I spektrid on võrdsed, $\lambda(T) = \lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(I) = \{1; 1\}$. Leiame neile vastavad omavektorid omaväärtuse $\lambda = 1$ korral:

$$T \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$A \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$I \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Näeme, et maatriksitel T, A ja B on vaid üks sõltumatu omavektor ja ainult üks omaväärtusele $\lambda = 1$ vastav Jordani kast ning maatriksitele T, A ja B vastab ühine Jordani maatriks

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maatriksil I on kaks lineaarselt sõltumatut omavektorit ja, järelikult, kaks Jordani kasti ja talle vastav Jordani maatriks ühtib maatriksiga I.

Ülesanne 5.2.1. Veenduge, et maatriksile

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

vastab üheblokiline Jordani maatriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Näide 5.2.2. Uurime Jordani maatriksit

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Leiame omaväärtusele $\lambda = 3$, mille kordsus on 2, vastavad omavektorid:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Järelikult vastab omaväärtusele $\lambda = 3$ üks lineaarselt sõltumatu omavektor $\mathbf{e}_1$ ja üks Jordani kast

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Leiame omaväärtusele $\lambda = 0$, mille kordsus on 3, vastavad omavektorid:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \\ r \end{bmatrix}.$$

Seega omaväärtusele $\lambda = 0$ vastab kaks lineaarselt sõltumatut omavektorit $\mathbf{e}_3$ ja $\mathbf{e}_5$ ja kaks Jordani kasti,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$[0] .$$

Kerkib küsimus, milliseid tingimusi peab suvaline 5×5 maatriks A rahuldama, et talle vastav Jordani maatriks oleks seosega (5) antud maatriks J? Kuidas leida sellist regulaarmaatriksit X, et

$$X^{-1}AX = J? \tag{6}$$

Esimeseks nõudeks on tingimus $\lambda(A) = \lambda(J)$, kuid sellest ei piisa. Vaja on uurida ka maatriksi A omavektoreid. Esitame seose (6) kujul $AX = XJ$ ehk

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} .$$

Korrutades maatriksid, saame valemid

$$A\mathbf{x}_1 = 3\mathbf{x}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = 3\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 \tag{7}$$

ja

$$A\mathbf{x}_3 = 0\mathbf{x}_3, \quad A\mathbf{x}_4 = 0\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_3, \; A\mathbf{x}_5 = 0\mathbf{x}_5. \tag{8}$$

Valemitest (7) ja (8) järeldub, et sarnaselt maatriksiga J peab maatriksil A olema kolm omavektorit, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$ ja $\mathbf{x}_5$. Lisaks peab maatriksil A olema kaks *üldistatud omavektorit* ehk kaks I *järku lipuvektorit* $\mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_4$. Öeldakse, et vektor $\mathbf{x}_2$ kuulub ahelasse, mis algab vektoriga $\mathbf{x}_1$ ja on määratud valemitega (7). See ahel määrab Jordani kasti J_1. Valemitest (8) kaks esimest määravad vektoritest $\mathbf{x}_3$ ja $\mathbf{x}_4$ koosneva teise ahela ning see ahel omakorda Jordani kasti J_2. Viimane valemitest (8) määrab vektorist $\mathbf{x}_5$ koosneva kolmanda ahela ning see ahel omakorda Jordani kasti J_3.

Lause 5.2.1. Maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ Jordani kuju J määramine taandub ahelate otsimisele. Iga ahel algab maatriksi A omavektoriga ning igal indeksi $i = 1 : n$ väärtusel

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \; \vee \; A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}. \tag{9}$$

Vektorid $\mathbf{x}_i$ on maatriksi X veeruvektorid ja iga ahel määrab ühe Jordani kasti.

2.5.3. Filipovi algoritm

Kui $n = 1$, siis Jordani kast langeb ühte antud maatriksiga ja valem (9) on tõene. Oletame, et maatriksi A Jordani kasti konstruktsioon on valemite (9) abil leitud, kui maatriksi A järk on väiksem kui n. Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit.

I samm. Kui eeldada, et A on singulaarne, siis $\dim \mathcal{R}(A) = r < n$. Vaadeldes vastavat $r \times r$ maatriksit, on selle korral konstruktsioon valemite (9) abil teostatav. Nimelt, ruumis $\mathcal{R}(A)$ leidub r sõltumatut vektorit $\mathbf{w}_i$, mille korral peavad paika seosed

$$A\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \ \vee \ A\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}. \tag{10}$$

II samm. Oletame, et $\dim \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = p$. Iga nullruumi $\mathcal{N}(A)$ vektor on maatriksi A omavektor, mis vastab maatriksi A omaväärtusele $\lambda = 0$. Seepärast peab sammul I olema p ahelat, mis algavad omaväärtusele 0 vastava omavektoriga. Meid huvitab iga sellise ahela viimane vektor. Et need alamruumi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$ kuuluvad vektorid $\mathbf{w}_i$ peavad kuuluma ka ruumi $\mathcal{R}(A)$, siis peavad nad olema maatriksi A veeruvektorite lineaarkombinatsioonid

$$\mathbf{w}_i = A\mathbf{y}_i$$

mingi $\mathbf{y}_i$ korral. Järelikult järgneb vektor $\mathbf{y}_i$ vektorile $\mathbf{w}_i$ omaväärtusele $\lambda = 0$ vastavas ahelas.

III samm. Kuna $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$, siis peab leiduma veel $n - r - p$ lineaarselt sõltumatut ruumi $\mathcal{N}(A)$ vektorit $\mathbf{z}_i$ alamruumi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$ ortogonaalses täiendis.

Lause 5.3.1. Filipovi algoritm määrab r vektorit $\mathbf{w}_i$, p vektorit $\mathbf{y}_i$ ja $n-r-p$ vektorit $\mathbf{z}_i$, mis määravad Jordani ahelad. Need vektorid on lineaarselt sõltumatud ja sobivad maatriksi X veeruvektoreiks ning $J = X^{-1}AX$.

Tõestus. Vaadake Strang (1988, lk 457). □

Näide 5.3.1. Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordani normaalkuju, kasutades Filipovi algoritmi.

I samm. Maatriksi kujust on näha, et $\lambda(A) = \{0;0;0\}$ ja $\mathcal{R}(A) = span\{\mathbf{e}_1\}$. Seega $r = 1$ ja leidub tingimust (10) rahuldav vektor $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1$ sellest alamruumist $\mathcal{R}(A)$.

II samm. Leiame maatriksi A nullruumi $\mathcal{N}(A)$ baasi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{n}_1$ kuulub alamruumi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A)$ ja $p = \dim \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = 1$. Lahendame süsteemi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

III samm. Valime vektoriks $\mathbf{z}_1$ vektori $\mathbf{n}_2$.
"Kleebime" kokku maatriksi X :

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Leiame pöördmaatriksi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ja Jordani maatriksi

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pakett "Maple" pakub Jordani lahutuseks:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et maatriksi A Jordani lahutuses esinev maatriks X pole üheselt määratud, siis paljude ülesannete korral pakub huvi valida maatriks X nii, et konditsiooniarv $k(X)$ oleks minimaalne. Selline probleem tekkis ka näite 1.2.9.4 lahendamisel.

Ülesanne 5.3.1. Leidke maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordani lahutus.

Ülesanne 5.3.2.* Leidke maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jordani lahutus.

Ülesanne 5.3.3.* Leidke maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jordani lahutus.

Ülesanne 5.3.4. Olgu maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ Jordani lahutus kujul $A = MJM^{-1}$. Näidake, et $A^2 = A \Rightarrow J^2 = J$.

2.6. Lineaarsete algebraliste võrrandisüsteemide lahendamise otsesed meetodid

2.6.1. Maatriksi $\boldsymbol{LDM^T}$-lahutus ja $\boldsymbol{LDL^T}$-lahutus

Vaatleme järgnevalt ruutmaatriksi $LU-$lahutuse erijuhte.

Lause 6.1.1. Kui maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ kõik peamiinorid on nullist erinevad, siis eksisteerivad sellised ühikpeadiagonaaliga alumised kolmnurkmaatriksid L ja M ning diagonaalmaatriks $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, et

$$A = LDM^T, \tag{1}$$

kusjuures lahutus (1) on ühene.

Tõestus. Et maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ kõik peamiinorid on nullist erinevad, siis lause 1.2.2 põhjal leidub maatriksil A ühene LU-lahutus

$$A = LU. \tag{2}$$

Olgu $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, kus $d_i = u_{ii}$ (i =1: n). Maatriksi A regulaarsusest järeldub, et maatriks D on regulaarne. Seega, $\exists\ D^{-1}$ ja $M^T = D^{-1}U$ on ülemine ühikdiagonaaliga kolmnurkmaatriks. Järelikult,

$$A = LU = LD(D^{-1}U) = LDM^T.$$

Lahutuse (1) ühesus järeldub lahutuse (2) ühesusest. $\square$

Definitsioon 6.1.1. Lahutust (1) nimetatakse regulaarse maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *LDM^T-lahutuseks.*

Näide 6.1.1.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LDM^T-lahutuse.

Nendime, et kui maatriksi A peamiinorid on nullist erinevad, siis maatriksi A

viimisel Gaussi teisenduse abil kolmnurkkujule, leiame samaaegselt nii maatriksi L kui ka maatriksi U. Nimelt, alumise kolmnurkmaatriksi L element l_{ij} $(i > j)$ võrdub teguriga, millega tuleb $j-$ndat rida korrutada mahalahutamisel $i-$ndast reast $i-$ndas reas oleva elemendi nullistamisel. Leiame, et

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_{21}=-1 \\ l_{31}=-1 \\ l_{41}=2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_{32}=-1 \\ l_{42}=0}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_{43}=0} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U,$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DM^T$$

ja

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teostame kontrolli:

$$LDM^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Lause 6.1.2. Kui regulaarne maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on sümmeetriline ja selle maatriksi LDM^T-lahutus on kujul (1), siis $L = M$, st

$$A = LDL^T. \tag{3}$$

Tõestus. Lahutusest (1) järeldub, et

$$AM^{-T} = LD.$$

Korrutades viimase seose mõlemat poolt vasakult maatriksiga M^{-1}, saame seose

$$M^{-1}AM^{-T} = M^{-1}LD. \tag{4}$$

Maatriks $M^{-1}AM^{-T}$ on sümmeetriline, sest

$$(M^{-1}AM^{-T})^T = M^{-1}A^TM^{-T} = M^{-1}AM^{-T}.$$

Maatriks $M^{-1}AM^{-T}$ on alumine kolmnurkmaatriks, sest nii M^{-1} kui ka $AM^{-T} = LD$ on alumised kolmnurkmaatriksid. Seose (4) põhjal on sümmeetriline ja alumine ka kolmnurkmaatriks $M^{-1}LD$. Seega on maatriks $M^{-1}LD$ diagonaalne. Kuna maatriks D on regulaarne, siis on diagonaalne ka maatriks $M^{-1}L$. Lisaks on maatriks $M^{-1}L$ ühikdiagonaaliga alumine kolmnurkmaatriks. Järelikult, $M^{-1}L = I$ ehk $L = M$. $\square$

Ülesanne 6.1.1.* Leidke maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LU-lahutus, LDM^T-lahutus ja LDL^T-lahutus.

2.6.2. Positiivselt määratud süsteemid

Definitsioon 6.2.1. Maatriksit $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ nimetatakse *positiivselt määratuks,* kui

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$$

iga nullist erineva vektori $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ korral.

Näide 6.2.1. Maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on positiivselt määratud, sest $\forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^2$ korral, kus $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 = \xi_1^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2 > 0.$$

Ülesanne 6.2.1.* Näidake, et maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on positiivselt määratud.

Lause 6.2.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ on positiivselt määratud maatriks ja maatriksi $X \in \mathbf{R}^{n \times k}$ veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis maatriks

$$B = X^T A X \in \mathbf{R}^{k \times k}$$

on samuti positiivselt määratud.

Tõestus. Kui vektori $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k$ korral kehtib seos

$$0 \geq \mathbf{z}^T B \mathbf{z},$$

siis

$$0 \geq \mathbf{z}^T B \mathbf{z} = \mathbf{z}^T X^T A X \mathbf{z} = (X\mathbf{z})^T A (X\mathbf{z})$$

ja maatriksi A positiivsest määratusest järeldub, et $X\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Et maatriksi X veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis tingimusest $X\mathbf{z} = \mathbf{0}$ järeldub, et $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Seega, tingimustest $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k$ ja $\mathbf{z} \neq 0$ järeldub $\mathbf{z}^T B \mathbf{z} > 0$, st maatriks B on positiivselt määratud. $\square$

Järeldus 6.2.1. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ on positiivselt määratud, siis kõik maatriksi A alammaatriksid, mis on saadud maatriksi A samanumbriliste ridade ja veergude kustutamisel, on positiivselt määratud ja kõik maatriksi A peadiagonaali elemendid on positiivsed.

Tõestus. Kui $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^k$ $(k \leq n)$ on selliste naturaalarvuliste koordinaatidega $\nu_1, \ldots, \nu_k$ vektor, et

$$1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_k \leq n,$$

siis

$$X = I_n(:, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^{n\times k}$$

on maatriks, mis on saadud ühikmaatriksi I_n veergudest, indeksitega $\nu_1, \dots, \nu_k$. Seega on maatriksi X veeruvektorid lineaarselt sõltumatud ja lause 6.2.1 põhjal on maatriks X^TAX positiivselt määratud. Maatriks X^TAX on maatriksi A alammaatriks, mis on saadud maatriksi A ridadest ja veergudest numbritega $\nu_1, \dots, \nu_k$. Seega, kõik maatriksi A alammaatriksid, mis on saadud maatriksi A samanumbriliste ridade ja veergude kustutamisel, on positiivselt määratud. Valides $k = 1$, saame järelduse väite teise poole. □

Järeldus 6.2.2. Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on positiivselt määratud, siis maatriksil A leidub lahutus $A = LDM^T$ ja diagonaalmaatriksi D peadiagonaali kõik elemendid on positiivsed.

Tõestus. Järelduse 6.2.1 põhjal on kõik maatriksi A alammaatriksid

$$A(1 : k, 1 : k) \quad (k = 1 : n)$$

positiivselt määratud ja seega regulaarsed maatriksid ning lause 6.1.1 põhjal eksisteerib LDM^T−lahutus. Võttes lauses 6.2.1 $X = L^{-T}$, leiame, et maatriks

$$B = DM^TL^{-T} = L^{-1}AL^{-T}$$

on positiivselt määratud. Kuna maatriks M^TL^{-T} on ülemine ühikdiagonaaliga kolmnurkmaatriks, siis maatriksitel B ja D on sama peadiagonaal ja seal peavad maatriksi B positiivse määratuse tõttu olema positiivsed elemendid. □

Lause 6.2.2 (*Cholesky lahutus*). Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on sümmeetriline ja positiivselt määratud, siis leidub täpselt üks alumine positiivse peadiagonaaliga kolmnurkmaatriks G, et

$$A = GG^T. \tag{5}$$

Tõestus. Lause 6.1.2 põhjal leiduvad ja on üheselt määratud ühikdigonaaliga alumine kolmnurkmaatriks L ja diagonaalmaatriks $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, nii, et kehtib lahutus (3), s.o $A = LDL^T$. Järelduse 6.2.2 kohaselt on maatriksi D elemendid d_k positiivsed. Seetõttu maatriks

$$G = L\sqrt{D} = L \cdot diag\,(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

on positiivse peadiagonaaliga alumine kolmnurkmaatriks ja kehtib seos (5). Lahutuse (5) ühesus järeldub lahutuse (3) ühesusest. □

Lahutus (5) on tuntud *Cholesky lahutuse* nime all. Maatriksit G nimetatakse maatriksi A *Cholesky kolmnurkmaatriksiks.* Sümmeetrilise ja positiivselt määratud maatriksiga A võrrandisüsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lahendamiseks tuleb, esiteks, leida maatriksi A Cholesky kolmnurkmaatriksiks G. Teiseks, tuleb lahendada kolmnurkmaatriksiga süsteem

$$G\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Kolmandaks, tuleb lahendada süsteem

$$G^T\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Cholesky lahutust on võimalik leida samm-sammult.

Lause 6.2.3. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on sümmeetriline ja positiivselt määratud, siis tähistuse

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & B \end{bmatrix}$$

korral on maatriks A esitatav kujul

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\beta & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{v}^T/\beta \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

kusjuures $\beta = \sqrt{\alpha}$. Maatriks $B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha$ on positiivselt määratud. Kui

$$B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha = G_1G_1^T,$$

siis $A = GG^T$, kusjuures

$$G = \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\beta & G_1 \end{bmatrix}.$$

Tõestus. Kontrollime lahutuse (6) õigsust:

$$\begin{bmatrix} \beta & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\beta & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{v}^T/\beta \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\beta & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \mathbf{v}^T/\beta \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\beta^2 + B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & B \end{bmatrix} = A.$$

Kui

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{v}^T/\alpha \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

siis

$$X^TAX = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{v}/\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{v}^T/\alpha \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{v}^T/\alpha \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix}.$$

Et maatriks A on positiivselt määratud ja maatriksi X veeruvektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu, siis lause 6.2.1 põhjal on positiivselt määratud ka maatriks

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha \end{bmatrix}$$

ja järelduse 6.2.1 väitel on maatriks $B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha$ samuti positiivselt määratud ning võime analoogiliselt maatriksi A lahutusega blokkideks jaotada ka maatriksi $B - \mathbf{v}\mathbf{v}^T/\alpha$ jne. $\square$

Näide 6.2.2. Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$LU-$lahutuse, LDM^T-lahutuse, LDL^T-lahutuse ja Cholesky lahutuse.

Maatriksi A peamiinorid on nullist erinevad. Leiame, et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} \underset{l_{31}=0}{\overset{l_{21}=2}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} \overset{l_{32}=1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = U$$

ja

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ning

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Teades maatriksi A jaoks $LU-$lahutust, leiame maatriksi A jaoks LDM^T-lahutuse, LDL^T-lahutuse ja Cholesky lahutuse:

$$A = LDM^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

ja

$$A = GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Leiame maatriksi A Cholesky lahutuse ka samm-sammult, kasutades lauses 6.2.3 esitatud algoritmi. Kuna esimesel sammul

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = \sqrt{\alpha_1} = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix},$$

siis

$$B_1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T/\alpha_1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} /1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Järgneval sammul

$$\alpha_2 = 4,\ \beta_2 = \sqrt{4} = 2,\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

ja

$$B_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T/\alpha_2 = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}^T /4 = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}^T.$$

Seega

$$G_2 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

ja

$$G_1 = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \\ \mathbf{v}_2/\beta_2 & G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ning

$$G = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ \mathbf{v}_1/\beta_1 & G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 6.2.2.* Leidke positiivselt määratud maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & 21 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 25 \end{bmatrix}$$

Cholesky lahutus.

Ülesanne 6.2.3.* Lahendage võrrandisüsteem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 10 & -10 \\ 1 & -10 & 14 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ja on teada maatriksi A Cholesky lahutus

$$A = GG^T \quad \wedge \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.6.3. Positiivselt poolmääratud maatriksid

Definitsioon 6.3.1. Maatriksit $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ nimetatakse *positiivselt poolmääratud maatriksiks*, kui

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0.$$

Näide 6.3.1. Maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on positiivselt poolmääratud, sest $\forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^2$ korral

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix} = (\xi_1 + \xi_2)^2 \geq 0$$

ja juhul $\xi_1 = -\xi_2 \wedge \xi_1 \neq 0$ näeme, et $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, kusjuures $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, st maatriks A on positiivselt poolmääratud maatriks, kuid ei ole positiivselt määratud maatriks.

Ülesanne 6.3.1.* Näidake, et maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

on positiivselt poolmääratud.

Lause 6.3.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on sümmeetriline positiivselt poolmääratud maatriks, siis

$$|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}, \tag{7}$$

$$a_{ii} = 0 \Rightarrow A(i,:) = A(:,i) = 0, \tag{8}$$

$$|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2 \tag{9}$$

ja

$$\max_{i,j}|a_{ij}| = \max_i a_{ii}. \tag{10}$$

Tõestus. Olgu $\alpha \in \mathbf{R}$ ja $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i + \alpha\mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n$. Et maatriks A on positiivselt poolmääratud ja sümmeetriline, siis

$$0 \leq \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T & \alpha & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ \alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T & \alpha & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} + \alpha a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni} + \alpha a_{nj} \end{bmatrix} = a_{ii} + \alpha a_{ij} + \alpha a_{ji} + \alpha^2 a_{jj},$$

ja

$$a_{ii} + 2\alpha a_{ij} + \alpha^2 a_{jj} \geq 0. \tag{11}$$

Tingimus (11) on rahuldatud parajasti siis, kui

$$a_{ij}^2 - a_{ii}a_{jj} \leq 0,$$

millest omakorda järeldub väide (7) ja sellest väide (8). Fikseerides võrratuses (11) suuruse $\alpha = \pm 1$ ja arvestades maatriksi A sümmeetrilisust, saame

$$a_{ii} + a_{jj} \geq -2a_{ij},$$

$$a_{ii} + a_{jj} \geq 2a_{ij}$$

ja väited (9) ning (10). $\square$

Ülesanne 6.3.2. Näidake, et Cholesky lahutuse $A = GG^T$ algoritm on rakendatav (väikese muudatusega) ka sümmeetrilise positiivselt poolmääratud maatriksi A korral.

2.6.4. Maatriksi polaarlahutus ja ruutjuurte meetod

Lause 6.4.1 (*maatriksi kompaktsest singulaarlahutusest***).** Kui maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ singulaarlahutuseks on $A = U\Sigma V^T$, kus $U \in \mathbf{R}^{m\times m}$ ja $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ortogonaalmaatriksid ning $\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^{m\times n}$, siis selle maatriksi A *kompaktseks singulaarlahutuseks* on

$$A = U_1\Sigma_1V^T,$$

kus $U_1 = U(:, 1:n)$ ja $\Sigma_1 = \Sigma(1:n, :)$.

Tõestus. Kui kasutada maatriksite U ja V esitust veeruvektorite abil

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$$

ja

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

siis

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \sigma_n\mathbf{v}_n^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \ldots + \sigma_1\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T + 0$$

ning

$$A = U_1\Sigma_1V^T = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right] =$$

$$= \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \ldots + \sigma_1\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T.$$

Näide 6.4.1. Leida maatriksi

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \in R^{3\times 2}$$

kompaktne singulaarlahutus.

Maatriksi A singulaarlahutus $A = U\Sigma V^T$ on leitud näites 3.3.1. Selleks on

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{array}\right].$$

Lause 6.4.1 põhjal on maatriksi A kompaktne singulaarlahutus kujul

$$A = U_1\Sigma_1V^T,$$

kus $U_1 = U(:, 1:n)$ ja $\Sigma_1 = \Sigma(1:n, :)$, st

$$A = \left[\begin{array}{cc} \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{array}\right].$$

Lause 6.4.2. Kui maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ kompaktseks singulaarlahutuseks on

$$A = U_1\Sigma_1V^T,$$

siis maatriks A on esitatav kujul

$$A = ZP, \tag{12}$$

kus $Z = U_1V^T \in \mathbf{R}^{m\times n}$ on ortonormeeritud veergudega maatriks ja $P = V\Sigma_1V^T$ on positiivselt poolmääratud maatriks.

Tõestus. Kuna $A = U_1\Sigma_1 V^T$, siis

$$A = U_1(V^TV)\Sigma_1 V^T = (U_1V^T)(V\Sigma_1 V^T) = ZP.$$

Kontrollime lause väidete õigsust. Esiteks, Z on ortonormeeritud veergudega maatriks, sest

$$Z^TZ = (U_1V^T)^T(U_1V^T) = V(U_1^TU_1)V^T = VV^T = I.$$

Teiseks, $P = V\Sigma_1 V^T$ on positiivselt poolmääratud maatriks, sest

$$\mathbf{x}^T P\mathbf{x} = \mathbf{x}^T V\Sigma_1 V^T\mathbf{x} = (V^T\mathbf{x})^T\Sigma_1(V^T\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i\eta_i^2 \geq 0\ (\forall \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n),$$

kus $\eta_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ki}\xi_k$. $\square$

Definitsioon 6.4.1. Maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ lahutust kujul (12) nimetatakse *polaarlahutuseks.*

Näide 6.4.2. Leida maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times 2}$$

polaarlahutus.

Näites 6.4.1 on leitud maatriksi A kompaktne singulaarlahutus $A = U_1\Sigma_1V^T$. Leiame maatriksi A polaarlahutuses (12) esinevad tegurid Z ja P:

$$Z = U_1V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$P = V\Sigma_1V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Järelikult, maatriksi A polaarlahutuseks on

$$A = ZP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 6.4.1.* Leidke maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

polaarlahutus.

Definitsioon 6.4.2. Olgu $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Kui maatriks $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ rahuldab võrrandit $X^2 = A$, siis maatriksit X nimetatakse *ruutjuureks maatriksist* A.

Lause 6.4.3. Kui

$$A = GG^T$$

on sümmeetrilise positiivselt poolmääratud maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ Cholesky lahutus ja

$$G = U\Sigma V^T$$

on maatriksi G singulaarlahutus ning

$$X = U\Sigma U^T,$$

siis

$$X^2 = A,$$

st maatriks X on ruutjuur maatriksist A, kusjuures X on sümmeetriline positiivselt poolmääratud maatriks. Leidub ainult üks X.

Tõestus. Leiame, et

$$A = GG^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T =$$

$$= U\Sigma(U^T U)\Sigma U^T = (U\Sigma U^T)(U\Sigma U^T) = X^2.$$

Näidake, et maatriks X on üheselt määratud sümmeetriline positiivselt poolmääratud maatriks! $\square$

Näide 6.4.3. Leiame ruutjuure maatriksist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maatriks A on sümmeetriline ja positiivselt poolmääratud (vaadake näidet 6.3.1) ning

$$A = GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kuna

$$G = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

siis

$$X = U\Sigma U^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 6.4.2.* Leidke ruutjuur maatriksist

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.6.5. Lintmaatriksitega süsteemid

Paljudes rakendustes on võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maatriks A lintmaatriks, s.o tundmatu ξ_i esineb nullist erineva kordajaga vaid i-ndas võrrandis ja mõnes i-nda võrrandi "naabervõrrandis."

Lause 6.5.1. Olgu $A = LU$ lintmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ $LU-$lahutus. Kui maatriksil A on ülemine ribalaius q ja alumine ribalaius p, siis maatriksil U on ülemine ribalaius q ja maatriksil L alumine ribalaius p.

Tõestame induktsioonimeetodil. Juhul $n = 1$ väide kehtib. Näitame induktsioonisammu lubatavust. Kehtigu väide $(n-1) \times (n-1)$-maatriksi A korral. Olgu maatriks A esitatud kujul

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{v} & B \end{bmatrix}.$$

Siis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B - \mathbf{v}\mathbf{w}^T/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Et vektoritel $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ on nullist erinevad vaid ülimalt p ja q esimest koordinaati, siis maatriks $B - \mathbf{v}\mathbf{w}^T$ on ülemise ribalaiusega p ja alumise ribalaiusega q. Maatriks $B - \mathbf{v}\mathbf{w}^T/\alpha$ on $(n-1) \times (n-1)$- maatriks ja seega, $B - \mathbf{v}\mathbf{w}^T/\alpha = L_1 U_1$, kus U_1 on ülemise ribalaiusega q ja L_1 alumise ribalaiusega p. Maatriksid

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v}/\alpha & L_1 \end{bmatrix}$$

ja

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & U_1 \end{bmatrix}$$

on vastavalt ribalaiustega p ja q ning $A = LU$. $\square$

Ülesanne 6.5.1. Leidke näites 6.2.2 esitatud maatriksi $LU-$lahutuse korral maatriksite A, L ja U alumised ja ülemised ribalaiused.

2.6.6. Blokk-süsteemid

Vaatleme süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kujul

$$\begin{bmatrix} D_1 & F_1 & & \cdots & 0 \\ E_1 & D_2 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & D_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & \cdots & & E_{n-1} & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \tag{13}$$

kus $D_i,\ E_i,\ F_i \in \mathbf{R}^{q\times q}$ ja $\mathbf{x}_i,\ \mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^q$. Kui esitame maatriksi A kujul

$$A = \begin{bmatrix} I & & & \cdots & 0 \\ L_1 & I & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & I & \\ 0 & \cdots & & L_{n-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & F_1 & & \cdots & 0 \\ & U_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & U_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & U_n \end{bmatrix},$$

siis

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & F_1 & & & \cdots & & 0 \\ L_1U_1 & L_1F_1+U_2 & F_2 & & & & \vdots \\ & L_2U_2 & L_2F_2+U_3 & F_3 & & & \\ & & L_3U_3 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & F_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & & L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}F_{n-1}+U_n \end{bmatrix}.$$

Leiame samm-sammult blokid L_i ja U_i :

$$U_1 = D_1 \to \text{ lahendada } L_1U_1 = E_1 \to$$

$$\to U_2 = D_2 - L_1F_1 \to \text{lahendada } L_2U_2 = E_2 \to \cdots \to$$
$$\to U_{n-1} = D_{n-1} - L_{n-2}F_{n-2} \to \text{lahendada } L_{n-1}U_{n-1} = E_{n-1} \to$$
$$\to U_n = D_n - L_{n-1}F_{n-1}.$$

Süsteemi (13) lahendamiseks tuleb kõigepealt lahendada süsteem

$$\begin{bmatrix} I & & & \cdots & 0 \\ L_1 & I & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & I & \\ 0 & \cdots & & L_{n-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

Leiame, et

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1 \to L_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{b}_2 \to \mathbf{y}_2 = \mathbf{b}_2 - L_1\mathbf{y}_1 \to \cdots \to$$

$$\to L_{i-1}\mathbf{y}_{i-1} + \mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i \to \mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i - L_{i-1}\mathbf{y}_{i-1} \to \cdots \to$$
$$\to L_{n-1}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{y}_n = \mathbf{b}_n \to \mathbf{y}_n = \mathbf{b}_n - L_{n-1}\mathbf{y}_{n-1}.$$

Teiseks, tuleb lahendada süsteem

$$\begin{bmatrix} U_1 & F_1 & & \cdots & 0 \\ & U_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & U_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}.$$

Näide 6.6.1.* Lahendame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \ \wedge \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

See on seosega (13) esitatud tüüpi blokk-süsteem, sest

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_1 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_2 & D_3 \end{bmatrix},$$

kus $D_i,\ E_i,\ F_i \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ja

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \wedge \ F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \wedge \ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ \wedge \ D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\wedge \ F_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ \wedge \ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ \wedge \ D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esitame maatriksi A kujul

$$A = LU = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ L_1 & I_2 & 0 \\ 0 & L_2 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ L_1U_1 & L_1F_1 + U_2 & F_2 \\ & L_2U_2 & L_2F_2 + U_3 \end{bmatrix}.$$

Leiame

$$U_1 = D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1U_1 = E_1 \;\Rightarrow\; L_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1F_1 + U_2 = D_2 \;\Rightarrow\; U_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_2U_2 = E_2 \;\Rightarrow\; L_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/3 & 7/9 \end{bmatrix},$$

$$L_2F_2 + U_3 = D_3 \;\Rightarrow\; U_3 = \begin{bmatrix} 10/9 & 5/9 \\ 7/9 & -19/9 \end{bmatrix}$$

ja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 7/9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7/9 & -19/9 \end{bmatrix}.$$

Süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi leidmiseks lahendame kaks süsteemi $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Süsteem $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ on esitatav kujul

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ L_1 & I_2 & 0 \\ 0 & L_2 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix},$$

kus

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\wedge\; \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \;\wedge$$

$$\wedge\; \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ja

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\wedge\; \mathbf{y}_2 = \mathbf{b}_2 - L_1\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \;\wedge$$

$$\wedge\ \mathbf{y}_3 = \mathbf{b}_3 - L_2\mathbf{y}_2.$$

Süsteemi $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, mis on esitatav kujul

$$\begin{bmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix},$$

lahendamisel saame

$$\mathbf{x}_3 = U_3^{-1}\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \wedge\ \mathbf{x}_2 = U_2^{-1}(\mathbf{y}_2 - F_2\mathbf{x}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ \wedge$$

$$\wedge\ \mathbf{x}_1 = U_1^{-1}(\mathbf{y}_1 - F_1\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2.6.7. Võrrandisüsteemide lahendamine QR−meetodil

Vaatleme süsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{14}$$

kus $A = QR$ on regulaarmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ QR-lahutus, kusjuures $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ortogonaalmaatriks ja $R \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks. Asendades seoses (14) maatriksi A tema QR-lahutusega, saame

$$QR\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{15}$$

Korrutades seose (15) mõlemaid pooli vasakult maatriksiga Q^T, leiame, et

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}. \tag{16}$$

Süsteem (16) on ülemise kolmnurkmaatriksiga R. Maatriksi A regulaarsusest järeldub maatriksi R regulaarsus. Seega on süsteem (16) üheselt lahenduv. Selleks kasutatakse lauses 1.1.2 esitatud asendust tagasisuunas.

Näide 6.7.1. Lahendame QR-meetodil süsteemi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Näites 2.3.2 on leitud süsteemimaatriksi QR-lahutus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{35} \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} & -15 & 0 \\ -6\sqrt{5} & 4 & -7 \\ 3\sqrt{5} & -2 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{7} & -\frac{13\sqrt{5}}{35} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Esitame süsteemi (17) kujul (16),

$$\begin{bmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{5} & -\frac{13}{35}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \frac{\sqrt{5}}{35} \begin{bmatrix} -2\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ -15 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

s.o

$$\begin{bmatrix} -7 & -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{2}{7}\sqrt{5} & -\frac{13}{35}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{17}{35}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Saadud ülemise kolmnurkmaatriksiga süsteemi lahendame asendusega tagasisuunas. Tulemuseks saame, et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Vaatleme süsteemi (14), kus $A = QR$ on regulaarmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ QR-lahutus, kusjuures $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ on ortogonaalmaatriks ja $R \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on ülemine kolmnurkmaatriks, lahendamist vähimruutude meetodil. Olgu

$$Q^T A = R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$Q^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix},$$

kus $R_1 \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ning $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^{m-n}$. Leiame

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = \left\|Q^T A\mathbf{x} - Q^T\mathbf{b}\right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} R_1\mathbf{x} - \mathbf{c} \\ \mathbf{0} - \mathbf{d} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|R_1\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2^2 + \|\mathbf{d}\|_2^2 .$$

Kuna suurus $\|\mathbf{d}\|_2^2$ on konstantne, siis minimiseerida saame vaid suurust

$$\|R_1\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2^2$$

ja selle minimaalseks väärtuseks on 0. Tõesti, tingimusest $\dim \mathcal{R}(A) = n$ järeldub, et maatriks R_1 on regulaarne. Seega, süsteem

$$R_1\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{c},$$

kus sümboliga $\mathbf{x}_{LS}$ on tähistatud süsteemi (14) lahendit vähimruutude mõttes, on üheselt lahenduv.

Näide 6.7.2. Leiame süsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lahendi vähimruutude mõttes QR-meetodil. Kasutades paketti "Maple", saame süsteemimaatriksi QR-lahutuse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sellest lahutusest selgub, et

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori $\mathbf{c}$ saamiseks leiame

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Seega,

$$\mathbf{c} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \end{array}\right]^T.$$

Süsteemi $R_1\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{c}$ konkreetseks kujuks saame

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{LS} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

millest järeldub, et

$$\mathbf{x}_{LS} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right]^T.$$

Näide 6.7.3.* Leiame võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lahendi vähimruutude mõttes.
Näites 2.3.3 on leitud süsteemimaatriksi QR-lahutus

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = QR.$$

Jättes ära maatriksi R viimase nullidest koosneva rea, saame

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Leiame

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Võttes saadud vektori kaks esimest komponenti (maatriksi R_1 ridade arv on 2), saame

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lähtesüsteemi lahendi vähimruutude mõttes $\mathbf{x}_{LS}$ leiame süsteemist $R_1\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{c}$, st

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{LS} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_{LS} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 6.7.1.* Lahendage võrrandisüsteem

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

teades süsteemimaatriksi QR-lahutust:

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & 0 \\ -\frac{3}{13} & -\frac{36}{65} & -\frac{52}{65} \\ \frac{4}{13} & \frac{48}{65} & -\frac{39}{65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -\frac{133}{39} & \frac{2}{13} \\ 0 & -\frac{5}{13} & -\frac{29}{13} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ülesanne 6.7.2.* Leidke süsteemi

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lahend vähimruutude mõttes.

2.7. Võrrandisüsteemide lahendamine iteratsioonimeetodil

2.7.1. Maatriksi astmed ja pöördmaatriks

Lause 7.1.1. Kui $F \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $\|F\|_p < 1$, siis $I - F$ on regulaarmaatriks ja

$$(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k,$$

kusjuures

$$\left\|(I - F)^{-1}\right\|_p \le \frac{1}{1 - \|F\|_p}.$$

Tõestus. Kui eeldame väitevastaselt, et maatriks $I - F$ on singulaarne, siis leidub selline nullist erinev vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, et $(I-F)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, st $\mathbf{x} = F\mathbf{x}$ ja $\|\mathbf{x}\|_p = \|F\mathbf{x}\|_p$ ning $\|F\|_p \ge 1$. Järelikult, maatriks $I-F$ on regulaarmaatriks. Maatriksi $(I-F)^{-1}$ leidmiseks vaatleme samasust

$$\left(\sum_{k=0}^{n} F^k\right)(I - F) = I - F^{n+1}.$$

Kuna

$$\left\|F^k\right\|_p \le \|F\|_p^k \;\wedge\; \|F\|_p < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} F^k = 0,$$

siis

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} F^k\right)(I - F) = I,$$

millest järeldub, et

$$(I - F)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} F^k = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$$

ja

$$\left\|(I - F)^{-1}\right\|_p \le \sum_{k=0}^{n} \|F\|_p^k \le \frac{1}{1 - \|F\|_p},$$

mida oligi vaja tõestada. $\square$

Lause 7.1.2. Olgu $Q^H AQ = T = D + N$ maatriksi $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ Schuri lahutus, kusjuures D on diagonaalmaatriks ja N on rangelt ülemine kolmnurkmaatriks (peadiagonaalil nullid). Olgu λ ja μ maatriksi A mooduli poolest vastavalt suurim ja vähim omaväärtus. Kui arv $\theta \geq 0$, siis iga $k \geq 0$ korral

$$\left\|A^k\right\|_2 \leq (1+\theta)^{n-1}\left(|\lambda| + \frac{\|N\|_F}{1+\theta}\right)^k .$$

Kui A on regulaarmaatriks ja arv θ on selline, et

$$(1+\theta)|\mu| > \|N\|_F ,$$

siis iga $k \geq 0$ korral

$$\left\|A^{-k}\right\|_2 \leq (1+\theta)^{n-1}\left(\frac{1}{|\mu| - \|N\|_F/(1+\theta)}\right)^k .$$

Tõestus. Vaadake Golub, Loan (1996, lk 336-337). □

Lihtsalt kontrollitav valem

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B-A)A^{-1}$$

näitab, kuidas muutub pöördmaatriks, kui asendada maatriks A maatriksiga B. Selle valemi modifikatsiooniks on järgmise lausega esitatav *Sherman-Morrison-Woodbury valem.*

Lause 7.1.3. Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $U, V \in \mathbf{R}^{n\times k}$, kusjuures maatriksid A ja $I + V^T A^{-1}U$ on regulaarsed, siis

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1}.$$

Tõestus. Vaadake Golub, Loan (1996, lk 50). □

2.7.2. Jacobi meetod ja Gauss-Seideli meetod

Olgu $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ja $a_{ii} \neq 0$ (i = 1: n). Vaatleme võrrandisüsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

lahendamist iteratsioonimeetodil.

Definitsioon 7.2.1. Süsteemi (1) lahendi $\mathbf{x}$ *lähendiks* ehk *lähisväärtuseks* nimetatakse vektorit, mis teatavas mõttes erineb vähe vektorist $\mathbf{x}$. Esitame süsteemi (1) kujul

$$\xi_i = (\beta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\xi_j)/a_{ii} \ \ (i \ = \ 1 \ : \ n).$$

Jacobi iteratsiooniprotsess on defineeritud algoritmi

$$\xi_i^{(k+1)} = (\beta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\xi_j^{(k)})/a_{ii} \ \ (i \ = \ 1 \ : \ n) \tag{2}$$

abil. Gauss-Seideli iteratsiooniprotsess on defineeritud algoritmi

$$\xi_i^{(k+1)} = (\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\xi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(k)})/a_{ii} \ \ (i \ = \ 1 \ : \ n) \tag{3}$$

abil. Nii Jacobi kui ka Gauss-Seideli iteratsiooniprotsessi korral saab üleminekut süsteemi (1) lahendi $\mathbf{x}$ lähendilt $\mathbf{x}^{(k)} = \{\xi_i^{(k)}\}$ järgmisele lähendile $\mathbf{x}^{(k+1)} = \{\xi_i^{(k+1)}\}$ kirjeldada, kasutades maatrikseid

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ja $D = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, kusjuures $A = L + D + U$. Näiteks, Jacobi algoritm (2) on esitatav kujul

$$M_J\mathbf{x}^{(k+1)} = N_J\mathbf{x}^{(k)} + b, \tag{4}$$

kus $M_J = D$ ja $N_J = -(L+U)$. Gauss-Seideli algoritm (3) on esitatav kujul

$$M_G \mathbf{x}^{(k+1)} = N_G \mathbf{x}^{(k)} + b, \tag{5}$$

kus $M_G = D + L$ ja $N_G = -U$.

Näide 7.2.1.* Lahendame süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \wedge \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jacobi meetodil.
Esitame maatriksi A kujul

$$A = L + D + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Moodustame maatriksid M_j ja N_j :

$$M_j = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ N_j = -(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi iteratsiooniprotsessi algoritm on esitatav kujul

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = M_j^{-1} N_j \mathbf{x}^{(k)} + M_j^{-1}\mathbf{b}.$$

Et

$$M_j^{-1} N_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$M_j^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

siis

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Kui valida alglähendiks $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, siis saame

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ .66667 \\ 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ .66667 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .83333 \\ .66667 \\ 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .83333 \\ .66667 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .83333 \\ .94444 \\ 1.9167 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .83333 \\ .94444 \\ 1.9167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .97226 \\ .94444 \\ 1.9167 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .97226 \\ .94444 \\ 1.9167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .97226 \\ .99075 \\ 1.9861 \end{bmatrix}$$

ja nii edasi (selle võrrandi täpne lahend on $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$).

Ülesanne 7.2.1.* Lahendage näites 7.2.1 esitatud süsteem Gauss-Seideli meetodiga.

2.7.3. Süsteemimaatriksi lagu ja iteratsiooniprotsessi koonduvus

Nii Jacobi kui ka Gauss-Seideli algoritmid on järgmist tüüpi

$$M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + b, \tag{6}$$

kus $A = M - N$. Siinjuures räägitakse, et on antud *maatriksi A lagu.* Iteratsioonialgoritmi rakendamisel on oluline, et lineaarset süsteemi (6) süsteemimaatriksiga M oleks lihtne lahendada. Jacobi meetodi korral on M diagonaalmaatriks ja Gauss-Seideli meetodi korral alumine kolmnurkmaatriks. Osutub, et seosega (6) määratud iteratsiooniprotsessi koonduvus sõltub sellest, milline on maatriksi $M^{-1}N$ spektraalraadius.

Definitsioon 7.3.1. Suurust

$$\rho(G) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(G)\}$$

nimetatakse *maatriksi* $G \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *spektraalraadiuseks.*

Lause 7.3.1. Olgu $A = M - N$ regulaarmaatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ lagu ja $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Kui maatriks M on regulaarne ja

$$\rho(M^{-1}N) < 1, \tag{7}$$

siis algoritmiga (6) määratud lähendite jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ koondub süsteemi (1) lahendiks $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ suvalise alglähendi $\mathbf{x}^{(0)}$ korral.

Tõestus. Tähistame,

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}. \tag{8}$$

Et süsteemi täpne lahend rahuldab seost

$$M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{9}$$

siis seostest (6) ja (9) saame

$$M(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}) = N(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}).$$

Arvestades tähistust (8), leiame suvalise mittenegatiivse täisarvu k korral seose

$$M\mathbf{e}^{(k+1)} = N\mathbf{e}^{(k)}$$

ehk

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = M^{-1}N\mathbf{e}^{(k)} = (M^{-1}N)^{k+1}\mathbf{e}^{(0)}.$$

Lause 7.1.2 põhjal järeldub hinnangust (7), et

$$\lim_{k\to\infty} (M^{-1}N)^k = 0.$$

Seega,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}. \;\square$$

Näide 7.3.1.* Olgu süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tõestame, et Jacobi algoritmiga määratud lähendite jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ koondub selle süsteemi lahendiks suvalise alglähendi $\mathbf{x}^{(0)}$ korral. Et

$$A = L + D + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_j = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N_j = -(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$M_j^{-1}N_j = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

siis

$$\lambda(M_j^{-1}N_j) = \left\{0, \frac{1}{2}i\sqrt{2}, -\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$$

ning

$$\rho(M_j^{-1}N_j) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(M_j^{-1}N_j)\} = \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1.$$

Nendime, et maatriks A on regulaarne. Järelikult lause 7.3.1 põhjal Jacobi algoritmiga määratud lähendite jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ koondub süsteemi lahendiks $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ suvalise alglähendi $\mathbf{x}^{(0)}$ korral.

Ülesanne 7.3.1.* Lahendage süsteem

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

nii Jacobi kui ka Gauss-Seideli meetodil. Tõestage, et nende algoritmidega määratud lähendite jadad koonduvad selle süsteemi lahendiks suvalise alglähendi $\mathbf{x}^{(0)}$ korral.

Ülesanne 7.3.2.* Lahendada süsteem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nii Jacobi kui ka Gauss-Seideli meetodil. Tõestage, et nende algoritmidega määratud lähendite jadad koonduvad selle süsteemi lahendiks suvalise alglähendi $\mathbf{x}^{(0)}$ korral.

Definitsioon 7.3.2. Maatriksit $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nimetatakse *rangelt domineeriva diagonaaliga maatriksiks*, kui

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \ \ (i \ = 1 \ : \ n).$$

Märkus 7.3.1. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on rangelt domineeriva diagonaaliga, siis maatriksi $M_J^{-1}N_J$ spektraalraadius $\rho(M_J^{-1}N_J)$ rahuldab tingimust

$$\rho(M_J^{-1}N_J) < 1,$$

st valemiga (4) määratud iteratsioon koondub.

Tõestus. Vaadake Golub, Loan (1996, lk 120, 512). $\square$

Lause 7.3.2. Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on sümmeetriline positiivselt määratud maatriks, siis Gauss-Seideli iteratsiooniprotsess koondub suvalise $\mathbf{x}^{(0)}$ korral.

Tõestus. Tähistame $A = L + D + L^T$, kus L on rangelt alumine kolmnurkne maatriks (peadiagonaalil nullid) ja D on diagonaalmaatriks. Kuna maatriks A on positiivselt määratud, siis järelduse 6.2.1 põhjal on positiivselt määratud ka maatriks D. Järelikult, eksisteerib $\sqrt{D}$. Maatriksid A ja $L + D$ on regulaarsed. Seega, lause 7.3.1 põhjal piisab Gauss-Seideli iteratsiooniprotsessi koonduvuse tõestamiseks näidata, et maatriksi $G = -(L+D)^{-1}U$ spektraalraadius $\rho(G)$ rahuldab tingimust $\rho(G) < 1$. Olgu $G_1 = D^{1/2}GD^{-1/2}$. Et sarnastel maatriksitel G ja G_1 on sama spekter, siis piisab kontrollida tingimuse $\rho(G_1) < 1$ täidetust. Olgu $L_1 = D^{-1/2}LD^{-1/2}$. Leiame

$$G_1 = D^{1/2}GD^{-1/2} = -D^{1/2}(L+D)^{-1}L^TD^{-1/2} =$$
$$= -D^{1/2}(D^{1/2}L_1D^{1/2} + D^{1/2}ID^{1/2})^{-1}D^{1/2}L_1^TD^{1/2}D^{-1/2} =$$
$$= -D^{1/2}[D^{1/2}(L_1+I)D^{1/2}]^{-1}D^{1/2}L_1^TD^{1/2}D^{-1/2} =$$

$$= -D^{1/2}D^{-1/2}(L_1+I)^{-1}D^{-1/2}D^{1/2}L_1^TD^{1/2}D^{-1/2} = -(L_1+I)^{-1}L_1^T.$$

Seega piisab tõestada, et $\rho(G_1) < 1$. Kui $G_1\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, kusjuures $\mathbf{x}^H\mathbf{x} = 1$, siis

$$-(I+L_1)^{-1}L_1^T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

$$-L_1^T\mathbf{x} = \lambda(I+L_1)\mathbf{x}$$

ja

$$-\mathbf{x}^HL_1^T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^H\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^HL_1\mathbf{x}$$

ning

$$-\mathbf{x}^HL_1^T\mathbf{x} = \lambda + \lambda\mathbf{x}^HL_1\mathbf{x}$$

Kui tähistada $\mathbf{x}^HL_1\mathbf{x} = \alpha + i\beta$, siis $\mathbf{x}^HL_1^T\mathbf{x} = \alpha - i\beta$ ja

$$-\alpha + i\beta = \lambda(1+\alpha+i\beta)$$

ning

$$\lambda = \frac{-\alpha+i\beta}{1+\alpha+i\beta}$$

Seega,

$$|\lambda|^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+2\alpha+1+\beta^2}. \qquad (10)$$

Kuna maatriks A on positiivselt määratud, siis lause 6.2.1 põhjal on positiivselt määratud ka maatriks $D^{-1/2}AD^{-1/2}$ ja

$$D^{-1/2}AD^{-1/2} = D^{-1/2}(D+L+L^T)D^{-1/2} =$$

$$= D^{-1/2}(D^{1/2}ID^{1/2} + D^{1/2}L_1D^{1/2} + D^{1/2}L_1^TD^{1/2})D^{-1/2} =$$

$$= I + L_1 + L_1^T.$$

Järelikult,

$$0 < \mathbf{x}^H(I+L_1+L_1^T)\mathbf{x} = 1 + \mathbf{x}^HL_1\mathbf{x} + \mathbf{x}^HL_1^T\mathbf{x} = 1+2\alpha$$

$$= 1+\alpha+i\beta+\alpha-i\beta = 2\alpha+1$$

ja tingimuse (10) põhjal $|\lambda| < 1$, st $\rho(G_1) < 1$. $\square$

2.7.4. Iteratsiooniprotsessi koonduvuse kiirendamine

Kui suurus $\rho(M_G^{-1}N_G)$ on ühest väiksem, kuid ühele lähedane suurus, siis Gauss-Seideli meetod koondub, kuid väga aeglaselt. Tekib probleem, kuidas lähendite jada $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ koonduvust kiirendada? Üheks koonduvuse kiirendamise võtteks on nn *relaksatsioonimeetod.* Relaksatsioonimeetodi aluseks on algoritm

$$\xi_i^{(k+1)} = \omega(\beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\xi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(k)})/a_{ii} + (1-\omega)\xi_i^{(k)} \ (i = 1 : n),$$

mille maatrikskujuks on

$$M_\omega \mathbf{x}^{(k+1)} = N_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \omega \mathbf{b},$$

kus $M_\omega = D + \omega L$ ja $N\omega = (1-\omega)D - \omega U$. Probleemiks on määrata relaksatsiooniparameeter ω nii, et $\rho(M_\omega^{-1}N_\omega)$ oleks vähim. Teatud lisatingimustel on see probleem lahendatud.

Teiseks koonduvuse kiirendamise võtteks on nn *koonduvuse kiirendamise Chebyshevi võte.* Oletame, et oleme leidnud algoritmi (6) abil süsteemi (1) lahendi $\mathbf{x}$ lähendid $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$. Olgu

$$\mathbf{y}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k)\mathbf{x}^{(j)}. \tag{11}$$

Probleemiks on määrata valemis (11) kordajad $\nu_j(k)$ selliselt, et lähendi $\mathbf{y}^{(k)}$ veavektor $\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}$ oleks väiksem kui veavektor $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$. Juhul

$$\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x} \quad (j = 1 : k)$$

on loomulik nõuda, et $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}$. See on parajasti siis nii, kui

$$\sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) = 1. \tag{12}$$

Kuidas valida kordajad $\nu_j(k)$ nii, et need rahuldaks seost (12) ja veavektor oleks lühima pikkusega? Et

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = (M^{-1}N)^k \mathbf{e}^{(0)},$$

siis

$$\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k)(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k)(M^{-1}N)^j \mathbf{e}^{(0)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) G^j \mathbf{e}^{(0)} = p_k(G)\mathbf{e}^{(0)},$$

kus $G = M^{-1}N$ ja

$$p_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) z^j.$$

Tingimusest (12) järeldub, et $p_k(1) = 1$. Lisaks,

$$\left\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\right\|_2 \leq \|p_k(G)\|_2 \left\|\mathbf{e}^{(0)}\right\|_2. \tag{13}$$

Piirdume järgnevas vaid sümmeetrilise maatriksi G juhuga. Rahuldagu sümmeetrilise maatriksi G omaväärtused λ_i võrratuste ahelat

$$-1 < \alpha \leq \lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1 \leq \beta < 1.$$

Kui λ on maatriksi G omaväärtus, mis vastab omavektorile $\mathbf{x}$, siis

$$p_k(G)\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) G^j \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) \lambda^j \mathbf{x},$$

st vektor $\mathbf{x}$ on ka maatriksi $p_k(G)$ omavektor, mis vastab omaväärtusele

$$\sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) \lambda^j = p_k(\lambda).$$

Sümmeetrilise maatriksi G korral on sümmeetriline ka maatriks $p_k(G)$. Järelikult,

$$\|p_k(G)\|_2 = \max_{\lambda_i \in \lambda(G)} \Big| \sum_{j=0}^{k} \nu_j(k) \lambda_i^j \Big| \leq \max_{\lambda \in [\alpha,\beta]} |p_k(\lambda)|.$$

Selleks, et vähendada suurust $\|p_k(G)\|_2$, on vaja leida selline polünoom $p_k(z)$, mille väärtused lõigul $[\alpha, \beta]$ on väikesed ja mis rahuldab tingimust $p_k(1) = 1$. Sellise omadusega on *Chebyshevi* polünoomid. Chebyshevi polünoomid lõigul $[-1;1]$ defineeritakse rekurrentse seosega

$$c_j(z) = 2zc_{j-1}(z) - c_{j-2}(z) \quad (\mathrm{j}=2: \ ),$$

kusjuures $c_0(z) = 1$ ja $c_1(z) = z$. Need polünoomid rahuldavad võrratust

$$|c_j(z)| \leq 1 \quad z \in [-1;1]$$

ja $c_j(1) = 1$ ning suurused $|c_j(z)|$ kasvavad kiiresti väljaspool lõiku $[-1;1]$. Polünoom

$$p_k(z) = \frac{c_k(-1 + 2(z-\alpha)/(\beta-\alpha))}{c_k(\mu)}, \tag{14}$$

kus

$$\mu = -1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} = 1 + 2\frac{1-\beta}{\beta-\alpha} > 1,$$

rahuldab tingimusi $p_k(1) = 1$ ja

$$|p_k(z)| \leq 1 \quad z \in [\alpha;\beta].$$

Arvestades seoseid (13) ja(14), leiame, et

$$\left\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\right\|_2 \leq \frac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\right\|_2}{|c_k(\mu)|}.$$

Järelikult, mida suurem on μ, seda suurem on $|c_k(\mu)|$ ja seda suurem on *Chebyshevi kiirendus.*

2.8. Numbriline stabiilsus

Järgnevas vaatleme, kuidas regulaarse maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja vektori $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ elementide hälbed põhjustavad lineaarse süsteemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

lahendi $\mathbf{x}$ hälbeid.

2.8.1. Singulaarlahutus ja numbriline stabiilsus

Definitsioon 8.1.1. Maatriksi A $\varepsilon-astak$ defineeritakse valemiga

$$rank(A,\varepsilon) = \min_{\|A-B\|\le\varepsilon} rank(B).$$

Näide 8.1.1.* Leiame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

ε-astaku, kui $\varepsilon = 0.14$.
Ilmselt

$$0 \le rank(A,\varepsilon) \le 2.$$

Kui kehtiks seos

$$rank(A,\varepsilon) = 0,$$

siis

$$\exists\, B:\ rank(B) = 0\ \wedge\ \|A-B\|_2 \le \varepsilon.$$

Kuna

$$rank(B) = 0\ \Leftrightarrow\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

siis

$$\|A-B\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} \right\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\right\},$$

kus λ_1 ja λ_2 on maatriksi

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

omaväärtused. Järelikult $\lambda_1 = 0.02$ ja $\lambda_2 = 0.0002$ ning

$$\|A-B\|_2 = \sqrt{0.02} \approx 0.14142 > 0.14 = \varepsilon$$

See on vastuolu ja see tähendab, et $rank(A,\varepsilon) > 0$. Näitame, et $rank(A,\varepsilon) = 1$. Tõepoolest, maatriksi

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

korral $rank(B) = 1$ ja

$$\|A - B\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} \right\|_2 = \max\left\{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2} \right\},$$

kus λ_1 ja λ_2 on maatriksi

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .01 & -.001 \\ -.001 & .0001 \end{bmatrix}$$

omaväärtused. Seega $\lambda_1 = 0.01$ ja $\lambda_2 = 0.0001$ ning

$$\|A - B\|_2 = \sqrt{0.01} \approx 0.1 < 0.14 = \varepsilon.$$

See aga tähendab, et $rank(A,\varepsilon) = 1$.

Lause 8.1.1. Olgu $A = U\Sigma V^T$ maatriksi $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ singulaarlahutus. Kui $k < r = rank(A)$ ja

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

siis

$$\min_{rank(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Tõestus. Et

$$U^T A_k V = U^T \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T V =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T & \cdots & \mathbf{u}_m^T \end{bmatrix}^T \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T & \cdots & \mathbf{u}_m^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_1 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_k\mathbf{u}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_k\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1\mathbf{u}_m^T\mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_1\mathbf{u}_m^T\mathbf{u}_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{m\times n}$$

ja

$$U^T(A - A_k)V = diag(0, \ldots, 0, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_p),$$

kusjuures $p = \min\{m, n\}$. Kuna maatriksi $A - A_k$ eukleidiline norm võrdub maatriksi $U^T(A - A_k)V$ suurima elemendiga, siis

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Olgu $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ maatriks, mille korral $rank(B) = k$. Võime leida sellised ortonormaalsed vektorid $\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_{n-k}$, et maatriksi B nullruum on vektorite $\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_{n-k}$ lineaarne kate, s.o

$$\mathcal{N}(B) = span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-k}\}.$$

Et ruumis $\mathbf{R}^n$ on $n+1$ vektorit lineaarselt sõltuvad, siis

$$span\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-k}\} \cap span\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Kui $\mathbf{z}$ on ühikvektor (eukleidilise normi järgi) sellest ühisosast, siis $B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ja

$$A\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{v}_i^T\mathbf{z})\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathbf{u}_j \sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{v}_i^T\mathbf{z})(\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathbf{u}_j \sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{v}_i^T\mathbf{z})\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(\mathbf{v}_i^T\mathbf{z})\mathbf{u}_i.$$

Järelikult,

$$\|A - B\|_2^2 \geq \|(A - B)\mathbf{z}\|_2^2 = \|A\mathbf{z}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2(\mathbf{v}_i^T\mathbf{z})^2 \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_{k+1}^2 (\mathbf{v}_i^T \mathbf{z})^2 = \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{v}_i^T \mathbf{z})^2 = \sigma_{k+1}^2. \ \square$$

Järeldus 8.1.1. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on regulaarne, siis maatriksi A vähim singulaararv σ_n näitab maatriksi A kaugust lähimast singulaarmaatriksist.

Järeldus 8.1.2. Kui $r_\varepsilon = rank(A, \varepsilon)$, siis

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon+1} \geq \ldots \geq \sigma_p \quad (\, p = \min\{m, n\}).$$

Ülesanne 8.1.1.* Kasutage näites 8.1.1 esitatud ülesande lahendamiseks järeldust 8.1.2.

Lause 8.1.2. Kui

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = U \Sigma V^T$$

on regulaarse maatriksi $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ singulaarlahutus, siis süsteemi (1) lahend $\mathbf{x}$ avaldub kujul

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = (U\Sigma V^T)^{-1}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i. \tag{2}$$

Tõestus. Kontrollime lause väite õigsust:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = (U\Sigma V^T)^{-1}\mathbf{b} = V\Sigma^+ U^T \mathbf{b} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b}/\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i (\mathbf{u}_i^T \mathbf{b})/\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i.$$

Järeldus 8.1.3. Lahendi esitusest kujul (2) selgub, et maatriksi A elementide väikesed hälbed võivad põhjustada lahendi $\mathbf{x}$ suuri hälbeid, kui σ_n on väike.

Näide 8.1.1.* Kumba süsteemi, kas

$$\begin{bmatrix} 54/125 & -169/250 \\ 53/125 & -54/125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

või

$$\begin{bmatrix} 41/16250 & -99/13000 \\ 46/15101 & -17/3250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

süsteemimaatriksi elementide väikesed hälbed võivad põhjustada lahendi $\mathbf{x}$ suuremaid hälbeid?
Leiame paketi "Maple" abil mõlema süsteemimaatriksi singulaarlahutuse:

$$\begin{bmatrix} 54/125 & -169/250 \\ 53/125 & -54/125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.8 & -.6 \\ -.6 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.6 & .8 \\ .8 & .6 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 41/16250 & -99/13000 \\ 46/15101 & -17/3250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.8 & -.6 \\ -.6 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .01 & 0 \\ 0 & .001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.38462 & .92308 \\ .92308 & .38462 \end{bmatrix}.$$

Näeme, et esimese süsteemi süsteemimaatriksi vähim singulaarväärtus σ_2 on sada korda suurem kui teise süsteemi süsteemimaatriksi vähim singulaarväärtus. Seega võime järelduse 8.1.3 põhjal väita, et esimene süsteem on stabiilsem kui teine, s.o teise süsteemi süsteemimaatriksi elementide väikesed hälbed võivad põhjustada lahendi $\mathbf{x}$ suuremaid hälbeid kui esimese süsteemi süsteemimaatriksi elementide sama järku hälbed.

Ülesanne 8.1.2.* Kumb süsteemidest, kas

$$\begin{bmatrix} 5400/169 & -3940/169 \\ 14650/169 & -5400/169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

või

$$\begin{bmatrix} 141/845 & -841/850 \\ 291/676 & -141/845 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

on stabiilsem?

2.8.2. Taylori arendus

Täpse hinnangu lineaarse süsteemi (1) tundlikkusele saame, kasutades parameetrist sõltuvat süsteemi

$$(A + \delta F)\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{f}, \tag{3}$$

kus $F \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n$ ning $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$. Kui A on regulaarmaatriks, siis $\mathbf{x}(\delta)$ on diferentseeruv parameetri δ funktsioon mingis arvu 0 ümbruses. Diferentseerides seose (3) mõlemaid pooli parameetri δ järgi, saame

$$F\mathbf{x}(\delta) + (A + \delta F)\frac{d\mathbf{x}}{d\delta}(\delta) = \mathbf{f}$$

ja

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\delta}(\delta) = (A + \delta F)^{-1}(\mathbf{f} - F\mathbf{x}(\delta)) \tag{4}$$

Seosest (4) järeldub, et

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\delta}(0) = A^{-1}(\mathbf{f} - F\mathbf{x}).$$

Kirjutame funktsiooni $\mathbf{x}(\delta)$ jaoks esimest järku Taylori valemi

$$\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{x} + \delta\frac{d\mathbf{x}}{d\delta}(0) + O(\delta^2) = \mathbf{x} + \delta A^{-1}(\mathbf{f} - F\mathbf{x}) + O(\delta^2).$$

Tulemuseks saame suvalise vektori normi ja sellele vastava maatriksi normi korral, et

$$\frac{\|\mathbf{x}(\delta) - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\left\|\delta\frac{d\mathbf{x}}{d\delta}(0) + O(\delta^2)\right\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\delta A^{-1}(\mathbf{f} - F\mathbf{x}) + O(\delta^2)\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq$$

$$\leq |\delta|\frac{\|A^{-1}\|\,(\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{F}\|\cdot\|\mathbf{x}\|\,)}{\|\mathbf{x}\|} + O(\delta^2) \leq |\delta|\,\left\|A^{-1}\right\|(\frac{\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \|F\|) + O(\delta^2).$$

Arvestades, et seosest (1) järeldub, et $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$, saame hinnangu

$$\frac{\|\mathbf{x}(\delta) - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq |\delta|\,\left\|A^{-1}\right\|\,\|A\|\,(\frac{\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|F\|}{\|A\|}) + O(\delta^2)$$

ehk

$$\frac{\|\mathbf{x}(\delta) - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq k(A)(\varepsilon_{rel}(A) + \varepsilon_{rel}(\mathbf{b})) + O(\delta^2),$$

kus $\varepsilon_{rel}(A) = |\delta|\frac{\|F\|}{\|A\|}$ ja $\varepsilon_{rel}(\mathbf{b}) = |\delta|\frac{\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ on vastavalt maatriksi A ja vektori $\mathbf{b}$ relatiivsed vead.

Lause 8.2.1. Kui $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on regulaarmaatriks, siis lineaarse süsteemi (1) lahendi $\mathbf{x}$ relatiivne viga $\varepsilon_{rel}(\mathbf{x})$, mis vastab maatriksi A relatiivsele veale $\varepsilon_{rel}(A)$ ja vektori $\mathbf{b}$ relatiivsele veale $\varepsilon_{rel}(\mathbf{b})$, avaldub kujul

$$\varepsilon_{rel}(\mathbf{x}) \approx k(A)(\varepsilon_{rel}(A) + \varepsilon_{rel}(\mathbf{b})).$$

Järeldus 8.2.1. Eukleidilise normi korral kehtib hinnang

$$\varepsilon_{rel}(\mathbf{x}) \approx \frac{\sigma_1}{\sigma_n}(\varepsilon_{rel}(A) + \varepsilon_{rel}(\mathbf{b})).$$

Tõestus. Kehtib seos $\|A\|_2 = \sigma_1$. Regulaarse maatriksi A korral järeldub maatriksi A singulaarlahutusest $A = U\Sigma V^T$, et $A^{-1} = V\Sigma^+ U^T$, kus
$\Sigma^+ = diag(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_n)$. Kuna $\max\limits_{1\le i\le n} 1/\sigma_i = 1/\sigma_n$, siis $\|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n$ ja
$k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1/\sigma_n$. $\square$

Näide 8.2.1.* Hindame eukleidilise normi korral süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi $\mathbf{x}$ relatiivset viga $\varepsilon_{rel}(\mathbf{x})$, kui

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 18 & 24 \\ 60 & -24 & -32 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

ja $\varepsilon_{rel}(A) = 0.09$ ning $\varepsilon_{rel}(\mathbf{b}) = 0.01$.
Leiame maatriksi A singulaarlahutuse

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 18 & 24 \\ 60 & -24 & -32 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -.8 & .6 & 0 \\ -.6 & -.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.0 & 0 & 0 \\ 0 & 50.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & .6 & .8 \\ 0 & .8 & -.6 \end{bmatrix}.$$

Järelduse 8.2.1 põhjal võime väita, et

$$\varepsilon_{rel}(\mathbf{x}) \approx \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(\varepsilon_{rel}(A) + \varepsilon_{rel}(\mathbf{b})) = \frac{100}{1}(0.09 + 0.01) = 10.$$

Ülesanne 8.2.1.* Hinnake eukleidilise normi korral süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi $\mathbf{x}$ relatiivset viga $\varepsilon_{rel}(\mathbf{x})$, kui

$$A = \begin{bmatrix} 65 & -144/13 & 60/13 \\ 156 & 60/13 & -25/13 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \end{bmatrix}$$

ja $\varepsilon_{rel}(A) = 0.008$ ning $\varepsilon_{rel}(\mathbf{b}) = 0.002$.

Märkus 8.2.1. Kahan (1966) tõestas, et

$$\frac{1}{k_p(A)} = \min_{A+\Delta A \,\text{singulaarne}} \frac{\|\Delta A\|_p}{\|A\|_p}$$

ja Rice (1966) tõestas, et

$$k(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\Delta A\|\le\varepsilon\|A\|} \frac{\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

2.8.3. Ranged hinnangud

Lause 8.2.1 väide on lokaalset laadi. Nimelt, see väide on tõestatud suhteliselt väikeste hälvete korral. Järgnevalt esitame lahendi hälbe hinnangu üldjuhul. Esiteks, tõestame ühe vajaliku abitulemuse.

Lause 8.3.1. Kui maatriks $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ on regulaarmaatriks ja

$$r \equiv \left\|A^{-1}E\right\|_p < 1,$$

siis $A + E$ on regulaarne ja

$$\left\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\right\|_p \le \frac{\|E\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p^2}{1-r}.$$

Tõestus. Regulaarne maatriks A on esitatav kujul

$$A + E = A(I - F),$$

kus $F = -A^{-1}E$. Kuna $\|F\|_p = r < 1$, siis lause 7.1.1 põhjal on maatriks $I - F$ regulaarne ja

$$\left\|(I-F)^{-1}\right\|_p < \frac{1}{1-r}.$$

Seega,

$$(A+E)^{-1} = (I-F)^{-1}A^{-1}$$

ja

$$\left\|(A+E)^{-1}\right\|_p \le \frac{||A^{-1}||_p}{1-r}.$$

Seosest

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B - A)A^{-1}$$

järeldub, et

$$(A+E)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}E(A+E)^{-1}$$

ja

$$\left\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\right\|_p \leq \left\|A^{-1}\right\|_p \|E\|_p \left\|(A+E)^{-1}\right\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1-r}. \ \square$$

Lause 8.3.2. Olgu

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, & A &\in \mathbf{R}^{n\times n},\ \mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \\ (A+\Delta A)\mathbf{y} &= \mathbf{b}{+}\Delta\mathbf{b}, & \Delta A &\in \mathbf{R}^{n\times n},\ \Delta\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

kusjuures $\|\Delta A\| \leq \delta \|A\|$ ja $\|\Delta \mathbf{b}\| \leq \delta \|\mathbf{b}\|$. Kui $\delta \cdot k(A) = r < 1$, siis $A + \Delta A$ on regulaarmaatriks ja

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1+r}{1-r}$$

ning

$$\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{2\delta}{1-r} k(A).$$

Tõestus. Et $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \delta \|A^{-1}\| \|A\| = r < 1$, siis lause 8.3.1 põhjal on $A{+}\Delta A$ regulaarmaatriks. Kasutades lauset 7.1.1 ja seost

$$(I + A^{-1}\Delta A)\mathbf{y} = \mathbf{x} + A^{-1}\Delta\mathbf{b},$$

leiame, et

$$\|\mathbf{y}\| \leq \left\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\right\| \left(\|\mathbf{x}\| + \delta \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-r}\left(\|\mathbf{x}\| + \delta \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\|\right) = \frac{1}{1-r}\left(\|\mathbf{x}\| + r\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|}\right).$$

Lisaks, leiame, et $\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$. Järelikult,

$$\|\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{1-r}(\|\mathbf{x}\| + r\|\mathbf{x}\|),$$

st lause väite esimene pool on tõene. Et kehtib seos

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b} - A^{-1}\Delta\mathbf{y},$$

siis

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \le \delta \left\|A^{-1}\right\| \|\mathbf{b}\| + \delta \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \|\mathbf{y}\|$$

ja seega

$$\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \delta\, k(A) \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|\,\|\mathbf{x}\|} + \delta\, k(A) \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le$$
$$\le \delta\, k(A) \left(1 + \frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{2\delta}{1-r} k(A). \quad \square$$

Näide 8.3.1.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 52.8 & 60.4 \\ 29.6 & 52.8 \end{bmatrix} \ \wedge\ \|\Delta A\|_2 \le 8 \ \wedge\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix} \ \wedge\ \|\Delta \mathbf{b}\|_2 \le 4.$$

Hindame süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi relatiivset viga. Kasutame eukleidilist normi. Et

$$A^T A = \begin{bmatrix} 52.8 & 29.6 \\ 60.4 & 52.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 52.8 & 60.4 \\ 29.6 & 52.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3664 & 4752 \\ 4752 & 6436 \end{bmatrix}$$

ja maatriksi $A^T A$ omaväärtused on $\lambda_1 = 10000$ ja $\lambda_2 = 100$, siis

$$\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}\right\} = 100.$$

Leiame vektori $\mathbf{b}$ eukleidilise normi

$$\|\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50.$$

Kui valida $\delta = 0.08$, siis on rahuldatud tingimused $\|\Delta A\| \le \delta \|A\|$ ja $\|\Delta \mathbf{b}\| \le \delta \|\mathbf{b}\|$. Maatriksi A singulaarlahutusest

$$\begin{bmatrix} 52.8 & 60.4 \\ 29.6 & 52.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.8 & -.6 \\ -.6 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.0 & 0 \\ 0 & 10.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.6 & -.8 \\ -.8 & .6 \end{bmatrix}$$

leiame, et

$$k_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{100}{10} = 10.$$

Seega

$$r = \delta \cdot k_2(A) = 0.08 \cdot 10 = 0.8 < 1$$

ja lause 8.3.2 põhjal saame

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \le \frac{2\delta}{1-r} k_2(A) = \frac{2 \cdot 0.8}{1 - 0.8} \cdot 10 = 8.$$

Ülesanne 8.3.1.* Olgu

$$A = \begin{bmatrix} 65 & -12 \\ -156 & -5 \end{bmatrix} \ \wedge \ \|\Delta A\|_2 \leq 169/15 \ \wedge \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \end{bmatrix} \ \wedge \ \|\Delta \mathbf{b}\|_2 \leq 13/15.$$

Leidke süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi relatiivne viga. Kasutage eukleidilist normi.

2.9. Diferentsvõrrandite ja diferentsiaalvõrrandisüsteemide lahendamine

Vaatleme järgnevalt, kuidas rakendada maatriksi omaväärtusprobleemi uurimisel esimese peatüki alajaotuses 1.2.5 saadud tulemusi lineaarsete diferentsvõrrandite ja diferentsiaalvõrrandite lahendamisel.

2.9.1. Lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsvõrrandid

Uurime *diferentsvõrrandi*

$$F_{k+n} = \gamma_1 F_{k+n-1} + \gamma_2 F_{k+n-2} + \cdots + \gamma_{n-1} F_{k+1} + \gamma_n F_k \tag{1}$$

lahendamist.

Defintsioon 9.1.1. Võrrandit kujul (1), kus naturaalarv n ja konstantsed kordajad γ_ν $(\nu = 1 : n)$ on antud ning jada $\{F_k\}$ üldelement F_k on otsitav, nimetatakse *lineaarseks konstantsete kordajatega n-järku diferentsvõrrandiks.*

Näide 9.1.1. Ants paigutas 1000 EEK panka kaheks aastaks. Kui suur on summa tema pangaarvel kahe aasta pärast, kui panga liitintressimäär on: 1) 30% aastas (st aasta möödumisel lisatatakse summale 30% summa suurusest); 2) 2,5% kuus; 3) 30/365 % päevas.

Esimesel juhul on oluline summa suurus kolmel hetkel: esiteks, panka paneku hetkel, tähistame summat sümboliga F_0; teiseks, ühe aasta möödumisel, olgu siis summaks F_1; kolmandaks, kahe aasta möödumisel ja olgu see summa siis F_2. Need summad alluvad seaduspärasusele:

$$F_{k+1} = (1 + 0,3)F_k \quad (k = 0; 1).$$

Selle seaduspärasuse kirjeldamisel on kasutatud esimest järku diferentsvõrrandit $F_{k+1} = 1,3F_k$. Ilmselt, $F_2 = 1,3^2 F_0 = 1690$.

Teisel juhul on olulised 25 summat: $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_{24}$. Nende kirjeldamiseks võtame kasutusele diferentsvõrrandi $F_{k+1} = 1,025F_k$. Kahe aasta möödudes on Antsul pangas $F_{24} = 1,025^{24} F_0 \approx 1809,7$ EEK.

Kolmandal juhul tuleb vaadelda 731 summat: $F_0, F_1, \cdots, F_{730}$. Sel juhul suurused F_k rahuldavad diferentsvõrrandit $F_{k+1} = (1 + 0,3/365)F_k$ ja kahe aasta möödudes on Antsul pangas $F_{730} = (1 + 0,3/365)^{730}F_0 \approx 1821,7$ EEK.

Huvi pakub veel piirjuht, kui liitintressimäär on $30/N\%$ ajaintervalli $1/N$ aastat kohta ja $N \to \infty$. Selleks leiame piirväärtuse:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{0,3}{N}\right)^{2N}F_0 = \lim_{N\to\infty}\left(\left(1+\frac{0,3}{N}\right)^{\frac{N}{0,3}}\right)^{0,6}F_0 = F_0 e^{0,6} \approx 1822,1.$$

Kui

$$\mathbf{u}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_{k+n-1} & F_{k+n-2} & \cdots & F_k \end{pmatrix}^T \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \ , \tag{2}$$

siis seos (1) on kirja pandav kujul

$$\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k, \tag{3}$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Olgu $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ maatriksi A omaväärtused ja $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ neile vastavad omavektorid. Eeldame täiendavalt, et vektorid $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ moodustavad baasi ruumis $\mathbf{R}^n$. Moodustame maatriksi S, mille veeruvektoriteks on need omavektorid:

$$S = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n) \,. \tag{5}$$

Seose (3) korduval rakendamisel leiame, et

$$\mathbf{u}_k = A\mathbf{u}_{k-1} = A^2\mathbf{u}_{k-2} = \cdots = A^k\mathbf{u}_0. \tag{6}$$

Omavektoreist koosneva baasi korral on maatriks A esitatav kujul

$$A = S\Lambda S^{-1}, \tag{7}$$

kus $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Seostest (6) ja (7) järeldub, et

$$\mathbf{u}_k = \left(S\Lambda S^{-1}\right)^k \mathbf{u}_0 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}\cdots S\Lambda S^{-1}\mathbf{u}_0 = S\Lambda^k S^{-1}\mathbf{u}_0, \tag{8}$$

kus $\Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$. Teisalt, vektor $\mathbf{u}_0$ ruumi $\mathbf{R}^n$ vektorina on üheselt avalduv baasivektorite $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ lineaarkombinatsioonina:

$$\mathbf{u}_0 = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n. \tag{9}$$

Tähistuse $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ korral on seos (9) kirja pandav ka kujul

$$\mathbf{u}_0 = S\mathbf{c}, \tag{10}$$

millest saame vektori $\mathbf{u}_0$ koordinaatide veeru eelnevalt valitud omavektorite baasil:

$$\mathbf{c} = S^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{11}$$

Korrutades seose (9) mõlemat poolt vasakult maatriksiga A^k, saame:

$$\mathbf{u}_k = c_1A^k\mathbf{x}_1 + c_2A^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_nA^k\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n. \tag{12}$$

Et kehtib seos (11), siis seos (8) kujutab endast esituse (12) kompaktset kuju.

Lause 9.1.1. Kui maatriksi A omavektorid $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ moodustavad baasi ruumis $\mathbf{R}^n$ ja maatriksi S veeruvektoriteks on need omavektorid, siis diferentsvõrrandi (3) algtingimust $\mathbf{u}_0$ rahuldav erilahend on esitatav kujul

$$\mathbf{u}_k = S\Lambda^kS^{-1}\mathbf{u}_0 \tag{13}$$

või

$$\mathbf{u}_k = c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n, \tag{14}$$

kus kordajad c_i $(i = 1 : n)$ on määratud seosega (10) või seosega (11).

Näide 9.1.2. Leiame diferentsvõrrandi

$$F_{k+3} = 2F_{k+2} + F_{k+1} - 2F_k$$

erilahendi F_k, mis rahuldab algtingimusi $F_0 = 1,\ F_1 = 2,\ F_2 = 3$.

Tegemist on kolmandat järku diferentsvõrrandiga. Kui tähistada

$$\mathbf{u}_k = (F_{k+2} \quad F_{k+1} \quad F_k)^T,$$

siis

$$\mathbf{u}_0 = (3\ 2\ 1)^T \ \wedge\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koostame karakteristliku võrrandi ja leiame omaväärtused:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\lambda^2 - 2 + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 2 \wedge \lambda_3 = -1 \ .$$

Leiame omaväärtusele $\lambda_1 = 1$ vastava omavektori

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja omaväärtusele $\lambda_2 = 2$ vastava omavektori

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ning omaväärtusele $\lambda_3 = -1$ vastava omavektori

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et maatriksi erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud, siis vektorid $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_3$ moodustavad baasi ruumis $\mathbf{R}^3$. Paigutame need vektorid maatriksi S veeruvektoreiks:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järgmise sammuna tuleb leida S^{-1} . Osutub, et

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Maatriks Λ^k omab kuju

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Lauses 9.1.1 esitatud algoritmi (13) põhjal leiame, et

$$\mathbf{u}_k = S\Lambda S^{-1}\mathbf{u}_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+2} & (-1)^k \\ 1 & 2^{k+1} & (-1)^{k+1} \\ 1 & 2^k & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 2^{k+3}/3 + (-1)^{k+1}/6 \\ 1/2 + 2^{k+2}/3 + (-1)^k/6 \\ 1/2 + 2^{k+1}/3 + (-1)^{k+1}/6 \end{pmatrix}.$$

Arvestades vektori $\mathbf{u}_k$ esitust (2), saame vastuse

$$F_k = 1/2 + 2^{k+1}/3 + (-1)^{k+1}/6.$$

Vaatleme põgusalt algoritmi (13) abil leitud vektori $\mathbf{u}_k$ leidmist ka lauses 9.1.1 esitatud algoritmi (14) abil. Selleks tuleb, esiteks, leida kordajad c_i seose (11) abil

$$\mathbf{c} = S^{-1}\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

ja siis rakendada algoritmi (13):

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{2}1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}2^k \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 2^{k+3}/3 + (-1)^{k+1}/6 \\ 1/2 + 2^{k+2}/3 + (-1)^k/6 \\ 1/2 + 2^{k+1}/3 + (-1)^{k+1}/6 \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 9.1.2. Diferentsvõrrandit $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$ nimetatakse *diskreetset Markovi protsessi* kirjeldavaks, kui

$$a_{ij} \geq 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Näide 9.1.3. Vaatleme pulma kirjeldavat diskreetset Markovi protsessi. Eeldame, et kõik 100 pulmalist istuvad algul laua ääres ja uuritava protsessi käigus pulmamajast ei lahku. Pulmalisel on kolm võimalikku tegevust: pidutseda laua ääres, tantsida või puhata. Eeldame, et üleminekud ühelt tegevuselt teisele toimuvad teatud diskreetsetel ajahetkedel $t_0, t_1, t_2, \cdots$ teatud skeemi alusel: lauasistujaist 2/5 jääb laua äärde, 2/5 läheb tantsule ja 1/5 otsustab puhata; tantsijaist 2/5 naaseb laua juurde, 1/5 jätkab tantsu ja 2/5 otsustab puhata; puhkajaist 1/5 naaseb laua juurde, 2/5 läheb tantsule ja 2/5 jätkab puhkust. Uurida situatsiooni pulmamajas vahetult enne ajahetke t_k saabumist ja situatsiooni piirprotsessis $k \to \infty$.

Olgu vahetult enne ajahetke t_k saabumist lauas ρ_k, tantsul σ_k ja puhkamas τ_k inimest. Võime välja kirjutada seosed:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_{k+1} = 2/5\rho_k + 2/5\sigma_k + 1/5\tau_k \\ \sigma_{k+1} = 2/5\rho_k + 1/5\sigma_k + 2/5\tau_k \\ \tau_{k+1} = 1/5\rho_k + 2/5\sigma_k + 2/5\tau_k \end{array}\right. . \tag{15}$$

Tähistades $\mathbf{u}_k = (\rho_k\ \sigma_k\ \tau_k)^T$ ja

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{array}\right),$$

saame süsteemi (15) esitada kujul

$$\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k.$$

Meid huvitab selle diferentsvõrrandi erilahend $\mathbf{u}_k$, mis rahuldab algtingimust $\mathbf{u}_0 = \left(\begin{array}{ccc} 100 & 0 & 0 \end{array}\right)^T$. Lauses 9.1.1 esitatud algoritmi (14) rakendamiseks tuleb, esiteks, leida maatriksi A omaväärtused

$$\left|\begin{array}{ccc} 2/5-\lambda & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5-\lambda & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5-\lambda \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 1/5 \wedge \lambda_3 = -1/5,$$

teiseks, maatriksi A omavektorid

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & -4/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & -3/5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_2 = 1/5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 1/5 & \vdots & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/5 & \vdots & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\lambda_3 = -1/5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 1/5 & \vdots & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 2/5 & \vdots & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Omavektorid $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_3$ moodustavad ruumi $\mathbf{R}^3$ baasi. Paigutame need vektorid maatriksi S veeruvektoreiks:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järgmisena lahendame süsteemi (10):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 100 \\ 1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 100 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 100 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 100/3; \\ c_2 = 50; \\ c_3 = 50/3. \end{cases}$$

Leiame seose (14) põhjal diferentsvõrrandi algtingimusele $\mathbf{u}_0$ vastava lahendi

$$\mathbf{u}_k = \frac{100}{3} 1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 50\left(\frac{1}{5}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{50}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja piirile minnes $\mathbf{u}_\infty = \begin{pmatrix} 100/3 & 100/3 & 100/3 \end{pmatrix}^T$.

2.9.2. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Vaatleme *Cauchy ülesannet*: leida maatrikskujul

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} \tag{1}$$

antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi algtingimust

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \tag{2}$$

rahuldav erilahend, kusjuures A on antud konstantsete elementidega $n \times n$-maatriks, $\mathbf{u}_0$ on antud $n \times 1$-maatriks ja $\mathbf{u}$ on otsitav $n \times 1$-maatriks, mille elementideks on muutuja t funktsioonid. Tegemist on konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandite süsteemi erilahendi leidmisega. Elemenditi on ülesanne (1) $\wedge$ (2) esitatav kujul: leida diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} u_1' & = & a_{11}u_1 + & a_{12}u_2 + & \ldots & +a_{1n}u_n \\ u_2' & = & a_{21}u_1 + & a_{22}u_2 + & \ldots & +a_{2n}u_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n' & = & a_{n1}u_1 + & a_{n2}u_2 + & \ldots & +a_{nn}u_n \end{cases}$$

algtingimusi $u_1\,|_{t=0} = u_{10},\ u_2\,|_{t=0} = u_{20},\ \ldots,\ u_n\,|_{t=0} = u_{n0}$, kus

$$\mathbf{u}_0 = (u_{10}\ u_{20}\ \ldots\ u_{n0})^T,$$

rahuldav erilahend. Näitame, et seostega (1) ja (2) määratud Cauchy ülesande lahend on esitatav kujul

$$\mathbf{u} = e^{At}\mathbf{u}_0. \tag{3}$$

Et

$$e^{At}\mathbf{u}_0 = (I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots + \frac{(At)^k}{k!} + \ldots)\mathbf{u}_0 \tag{4}$$

ja

$$\frac{d}{dt}(At)^k = kA(At)^{k-1},$$

siis

$$\frac{d}{dt}(e^{At}\mathbf{u}_0) = (O + \frac{1A(At)^0}{1!} + \frac{2A(At)^1}{2!} + \ldots + \frac{kA(At)^{k-1}}{k!} + \ldots)\mathbf{u}_0 =$$
$$= A(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots + \frac{(At)^k}{k!} + \ldots)\mathbf{u}_0 = Ae^{At}\mathbf{u}_0,$$

kus O on $n \times n$-maatriks, mille kõik elemendid on nullid. Leiame lisaks, et

$$(e^{At}\mathbf{u}_0)\mid_{t=0}= (I + \frac{A0}{1!} + \frac{(A0)^2}{2!} + \frac{(A0)^3}{3!} + \ldots + \frac{(A0)^k}{k!} + \ldots)\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0.$$

Järelikult, seosega (3) määratud vektor $\mathbf{u}$ rahuldab nii maatriksvõrrandit (1) kui ka algtingimust (2), st on vaadeldava Cauchy ülesande lahendiks. Pakume Cauchy ülesande lahendi kujule (3) modifikatsioone veel juhul, kui ruumis R^n leidub maatriksi A omavektoreist koosnev baas. Olgu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ maatriksi A omaväärtused ja $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ neile vastavad omavektorid, mis moodustavad baasi ruumis R^n. Moodustame kaks $n \times n$-maatriksit: $S = (\ \mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n)$ (veeruvektoreiks on omavektorid $\mathbf{x}_i$) ja diagonaalmaatriksi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Antud tingimustel kehtib seos $A = S\Lambda S^{-1}$, millest järeldub, et $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$. Valemist

$$e^{\Lambda t} = I + \frac{(\Lambda t)}{1!} + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \ldots + \frac{(\Lambda t)^k}{k!} + \ldots\ . \tag{6}$$

ja seostest (3) ning (4) saame

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (SIS^{-1} + \frac{S\Lambda S^{-1}t}{1!} + \frac{(S\Lambda S^{-1}t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(S\Lambda S^{-1}t)^k}{k!} + \ldots)\mathbf{u}_0 = \\ &= S(I + \frac{(\Lambda t)}{1!} + \frac{(\Lambda t)^2}{2!} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \ldots + \frac{(\Lambda t)^k}{k!} + \ldots)S^{-1}\mathbf{u}_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{u}_0.\end{aligned}$$

Seega on ülesande (1) $\wedge$ (2) lahend pandav kirja ka kujul

$$\mathbf{u} = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{7}$$

Kui tähistada

$$S^{-1}\mathbf{u}_0 = \mathbf{c}, \tag{8}$$

st vektor $\mathbf{c}$ on regulaarse maatriksiga S võrrandisüsteemi

$$S\mathbf{c} = \mathbf{u}_0 \tag{9}$$

lahend, siis seostest (8) ja (9) leiame, et

$$\mathbf{u} = Se^{\Lambda t}\mathbf{c}. \tag{10}$$

Et valemiga (5) määratud maatriks Λ on diagonaalmaatriks, siis ka maatriks Λ^k on diagonaalmaatriks, mille peadiagonaali elementideks on λ_i^k ja seosest (6) saame, et

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

ning seose (10) põhjal

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \tag{11}$$

$$= (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n\ .$$

Näide 9.2.1. Leiame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

algtingimust $u\,|_{t=0} = (1\ \ 0\ \ 0)^T$ rahuldava erilahendi.

Koostame karakteristliku võrrandi:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ (2-\lambda)^3 - 4(2-\lambda) = 0.$$

Selle lahendamisel saame maatriksi omaväärtusteks $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ ja $\lambda_3 = 0$. Leiame kõigepealt omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omavektori:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analoogiliselt leiame omaväärtustele $\lambda_2 = 4$ ja $\lambda_3 = 0$ vastavad omavektorid:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Koostame maatriksi

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ja kasutades süsteemi (9), leiame vektori $\mathbf{c}$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Kasutame valemit (11) erilahendi väljakirjutamiseks:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 9.2.1. Süsteemi (1) lahendit nimetatakse *stabiilseks*, kui $\mathcal{R}\lambda_i < 0 \quad (i = 1 : n)$. Süsteemi (1) lahendit nimetatakse *neutraalselt stabiilseks,* kui $\mathcal{R}\,\lambda_i \leq 0 \quad (i = 1 : n)$. Süsteemi (1) lahendit nimetatakse *mittestabiilseks,* kui $\exists\, i : \mathcal{R}e\,\lambda_i > 0$.

Näites 10.1 antud süsteemi lahend on mittestabiilne, sest nii $\mathcal{R}e\,\lambda_1 = 2 > 0$ kui ka $\mathcal{R}e\,\lambda_2 = 4 > 0$.

Vaatleme Cauchy ülesannet: leida maatrikskujul

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = A\mathbf{u} \tag{12}$$

(lühidalt, $\mathbf{u}^{''} = A\mathbf{u}$) antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi algtingimusi

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \mathbf{u}_0\ ,\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}\,|_{t=0} = \mathbf{u}_0^{'} \tag{13}$$

rahuldav erilahend, kusjuures $n \times n$-maatriks A ja $n \times 1$-maatriksid $\mathbf{u}_0$ ja $\mathbf{u}_0^{'}$ on antud konstantsete elementidega maatriksid ning $\mathbf{u}$ on otsitav $n \times 1$-maatriks, mille elementideks on muutuja t funktsioonid.

Võrrandi (13) lahendeid hakkame otsima kujul

$$\mathbf{u} = e^{\mu t}\mathbf{x},$$

kus $\mathbf{x}$ on konstantne vektor ($n \times 1$-maatriks). Sel korral $\mathbf{u}' = \mu e^{\mu t}\mathbf{x}$ ja $\mathbf{u}'' = \mu^2 e^{\mu t}\mathbf{x}$. Seosest (12) saame, et

$$\mu^2 e^{\mu t}\mathbf{x} = A e^{\mu t}\mathbf{x}$$

ehk

$$e^{\mu t}(A - \mu^2 I)\mathbf{x} = 0$$

ja

$$(A - \mu^2 I)\mathbf{x} = 0$$

ehk

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0, \tag{14}$$

kus $\lambda = \mu^2$. Seost (14) võime käsitleda kui maatriksi A omaväärtusülesannet. Olgu maatriksi A omaväärtusteks λ_i $(i = 1 : n)$ ja neile vastavaiks omavektoreiks $\mathbf{x}_i$. Uurime järgnevas kaht juhtu 1^0 ja 2^0.

1^0. Eeldame, et
1) maatriksi A kõik omaväärtused on positiivsed, s.o $\lambda_i > 0$ $(i = 1 : n)$;
2) maatriks $S = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n)$ on regulaarne.
Moodustame vektori

$$\mathbf{u} = (c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t})\mathbf{x}_1 + \ldots + (c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t})\mathbf{x}_n, \tag{15}$$

mis on esitatav kujul

$$\mathbf{u} = S(e^{Mt}\mathbf{c} + e^{-Mt}\mathbf{d}), \tag{16}$$

kus

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}^T$$

ja

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \mu_n \end{pmatrix}, \quad e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

Tõesti,

$$S(e^{Mt}\mathbf{c} + e^{-Mt}\mathbf{d}) =$$

$$= (\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) \left[\begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & e^{\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-\mu_1 t} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & e^{\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \right] =$$

$$= (\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) \left[\begin{pmatrix} c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \right] =$$

$$= (c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t})\mathbf{x}_1 + \ldots + (c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t})\mathbf{x}_n.$$

Näitame, et sobivalt valitud vektorite **c** ja **d** korral on seosega (15) määratud vektor **u** ülesande (12) $\wedge$ (13) lahend. Vektor **u** rahuldab võrrandit (12), sest

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = (c_1 \mu_1^2 e^{\mu_1 t} + d_1 (-\mu_1)^2 e^{-\mu_1 t})\mathbf{x}_1 + \ldots + (c_n \mu_n^2 e^{\mu_n t} + d_n (-\mu_n)^2 e^{-\mu_n t})\mathbf{x}_n =$$

$$= \mu_1^2 (c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t})\mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_n^2 (c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t})\mathbf{x}_n$$

ja

$$A\mathbf{u} = (c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t})A\mathbf{x}_1 + \ldots + (c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t})A\mathbf{x}_n =$$
$$= \mu_1^2 (c_1 e^{\mu_1 t} + d_1 e^{-\mu_1 t})\mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_n^2 (c_n e^{\mu_n t} + d_n e^{-\mu_n t})\mathbf{x}_n.$$

Valime vektorid **c** ja **d** selliselt, et seosega (16), s.o ka seosega (15), määratud vektor **u** rahuldab tingimusi (13). Seosest (16) järeldub, et

$$\mathbf{u}' = SM(e^{Mt}\mathbf{c} - e^{-Mt}\mathbf{d}).$$

Seega on algtingimused (13) rahuldatud, kui

$$\left\{ \begin{array}{c} S(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}_0, \\ SM(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{u}_0' \end{array} \right. . \tag{17}$$

Punktis 1^0 toodud eeldustel on maatriksid S ja M regulaarsed, st eksisteerivad pöördmaatriksid S^{-1} ja M^{-1}. Süsteemist (17) järeldub, et

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = S^{-1}\mathbf{u}_0, \\ (\mathbf{c} - \mathbf{d}) = M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0' \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c} = \frac{1}{2}(S^{-1}\mathbf{u}_0 + M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0'), \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2}(S^{-1}\mathbf{u}_0 - M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0'). \end{array} \right.$$

Seega punktis 1^0 esitatud eeldustel avaldub süsteemi (12) $\wedge$ (13) lahend kujul

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} S \left[e^{Mt} \left(S^{-1}\mathbf{u}_0 + M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0' \right) + e^{-Mt} \left(S^{-1}\mathbf{u}_0 - M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0' \right) \right] = \tag{18}$$

$$= S \cosh(Mt)\, S^{-1}\mathbf{u}_0 + S \sinh(Mt)\, M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0',$$

kus $\cosh(Mt) = \left(e^{Mt} + e^{-Mt}\right)/2$ ja $\sinh(Mt) = \left(e^{Mt} - e^{-Mt}\right)/2$.

Näide 9.2.2. Leida süsteemi

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

algtingimusi

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}\,|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rahuldav erilahend.

Leiame maatriksi omaväärtused:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)^3 - 3(3-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 5.$$

Nendime, et $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Leiame neile omaväärtustele vastavad omavektorid:

$$\lambda_{1,2} = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-2 & 0 \end{array} \right) \underset{III-I}{\overset{II-I}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -p - q \\ \xi_2 = p \\ \xi_3 = q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q \\ 0 \\ q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 5 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3-5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3-5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3-5 & 0 \end{array}\right) \underset{III+I/2}{\overset{II+I/2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \end{array}\right) \overset{III+II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{II:(-3/2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{I-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\xi_1 + 2\xi_3 = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = p \\ \xi_2 = p \\ \xi_3 = p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et

$$\det(S) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

siis ka teine punktis 1^0 esitatud eeldus on rahuldatud. Et

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ja

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

siis leiame valemi (18) abil soovitud erilahendi. Leiame, et

$$S^{-1}\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\cosh(Mt) = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{2}t & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\sqrt{5}t \end{pmatrix}$$

ja

$$\sinh(Mt) = \begin{pmatrix} \sinh\sqrt{2}t & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \sinh\sqrt{5}t \end{pmatrix},$$

siis

$$\mathbf{u} = S\cosh(Mt)\,S^{-1}\mathbf{u}_0 + S\sinh(Mt)\,M^{-1}S^{-1}\mathbf{u}_0' =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{2}t & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\sqrt{5}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh\sqrt{2}t & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & \sinh\sqrt{5}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cosh t\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cosh t\sqrt{5} - \frac{1}{3}\left(\sinh t\sqrt{2}\right)\sqrt{2} + \frac{2}{15}\left(\sinh t\sqrt{5}\right)\sqrt{5} \\ \frac{1}{3}\cosh t\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cosh t\sqrt{5} + \frac{1}{6}\left(\sinh t\sqrt{2}\right)\sqrt{2} + \frac{2}{15}\left(\sinh t\sqrt{5}\right)\sqrt{5} \\ -\frac{2}{3}\cosh t\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cosh t\sqrt{5} + \frac{1}{6}\left(\sinh t\sqrt{2}\right)\sqrt{2} + \frac{2}{15}\left(\sinh t\sqrt{5}\right)\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

2^0 Kui λ^2 jaoks saadud väärtused on kõik negatiivsed ja erinevad, siis $\lambda^2 = -\omega^2$ ja λ väärtusteks saame $\pm i\omega_i$ $(i = 1 : n)$, kusjuures nii väärtusele $+\omega_i$ kui ka $-\omega_i$ vastab sama omavektor $\mathbf{x}_i$ ja

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (c_1 e^{i\omega_1 t} + d_1 e^{-i\omega_1 t})x_1 + \ldots + (c_n e^{i\omega_n t} + d_n e^{-i\omega_n t})\mathbf{x}_n = \\ &= (a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t)\mathbf{x}_1 + \ldots + (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t)\mathbf{x}_n.\end{aligned} \tag{19}$$

Et esitatud eeldustel on vektorid x_i lineaarselt sõltumatud, siis $S = (\ \mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots\ \mathbf{x}_n)$ ja

$$\mathbf{u} = S(\cos\Omega t\,\mathbf{a} + \sin\Omega t\,\mathbf{b}) \tag{20}$$

ning algtingimuste (14) põhjal saame vektorid $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ määrata, lahendades süsteemid

$$S\mathbf{a} = \mathbf{u}_0 \tag{21}$$

ja

$$S\Omega\mathbf{b} = \mathbf{u}_0', \tag{22}$$

kusjuures

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

ning

$$\cos\Omega t = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos\omega_2 t & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\omega_n t \end{pmatrix}$$

ja

$$\sin\Omega t = \begin{pmatrix} \sin\omega_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin\omega_2 t & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin\omega_n t \end{pmatrix}.$$

Näide 9.2.3. Leiame süsteemi

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{u}$$

algtingimusi

$$\mathbf{u}\ |_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}\ |_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rahuldava erilahendi.

Koostame karakteristliku võrrandi (16)

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda^2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

ja lahendades, saame $\lambda_1^2 = -1$ ja $\lambda_2^2 = -3$. Seega

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ning

$$\cos\Omega t = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}, \quad \sin\Omega t = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin\sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

Leiame omavektorid:

$$\lambda_1^2 = -1 \quad \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\lambda_2^2 = -3 \quad \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Seega,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lahendame süsteemi (21)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

ja süsteemi (22) koostamiseks leiame kõigepealt

$$S\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ning siis

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \vdots & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & \vdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/(2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Süsteemi erilahendi saame avaldada valemi (19) abil

$$\mathbf{u} = (\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t \\ \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

Sama vastuseni jõuame ka kasutades kompaktset eeskirja (20) erilahendi leidmiseks. Et

$$\cos\Omega t = \cos\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \sqrt{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos\left(\sqrt{3}t\right) \end{pmatrix}$$

ja

$$\sin\Omega t = \sin\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \sqrt{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin\left(\sqrt{3}t\right) \end{pmatrix},$$

siis

$$\mathbf{u} = S(\cos\Omega t\,\mathbf{a} + \sin\Omega t\,\mathbf{b}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos\left(\sqrt{3}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin\left(\sqrt{3}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/(2\sqrt{3}) \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{6}\left(\sin(\sqrt{3}t)\right)\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}\left(\sin(\sqrt{3}t)\right)\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Refereeritud kirjandus

G.H. Golub and C.F. Van Loan (1996). Matrix Computations, John Hopkins University Press, London.

G. Kangro (1962). Kõrgem algebra, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn.

P. Lankaster (1982). Theory of Matrices, Nauka, Moscow (in Russian).

E. Oja, P. Oja (1991). Funktsionaalanalüüs, Tartu Ülikooli trükikoda, Tartu.

G. Strang (1988). Linear Algebra and its Applications, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, Florida.

E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht (1986). Arvutusmeetodid I, Valgus, Tallinn.

Indeks