HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

$$F(x,y,y')=0 \;\Leftrightarrow\; y'=f(x,y) \;\Rightarrow\; y=\varphi(x,C) \;\bigvee\; \Phi(x,y,C)=0.$$

Eralduvate muutujatega võrrand:

$$y'=f(x)=f(x)g(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

Homogeenne võrrand: $\qquad y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \;\Rightarrow\; \frac{y}{x}=u \;\bigwedge\; y'=u+xu'.$

Homogeenseks taanduv: $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1+c_1}{a_2x+b_2+c_2}\right) \quad\bigwedge\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=k \quad\bigwedge$

$$k\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=X+\alpha & a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ y=Y+\beta & a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{cases} \;\bigvee\; k=0 \;\Rightarrow a_1x+b_1=z.$$

Lineaarne võrrand:

$$y'+P(x)y=Q(x)\Rightarrow y=uv=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$$

Bernoulli võrrand: $y'+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\in\mathbf{Z}\bigwedge n\neq 1)\Rightarrow y^{1-n}=z.$

Eksaktne võrrand:

$$X\,(x,y)\,dx+Y\,(x,y)\,dy=0 \;\bigwedge\; Y_x=X_y \;\Rightarrow\; dF(x,y)=0\Rightarrow\; F(x,y)=C.$$

Clairaut' vĩrand: $y=y'x+\psi(y') \;\Rightarrow\; y=Cx+\psi(C).$

Lagrange'i võrrand:

$$y=\varphi(y')x+\psi(y') \;\Rightarrow\; y'=p \;\Rightarrow\; x=x(p,C) \;\bigwedge\; y=x(p,C)\varphi(p)+\psi(p).$$

- -

$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \;\bigvee\; y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \;\Rightarrow\; y=\varphi(x,C_1,...,C_n).$
$y^{(n)}=f(x) \;\Rightarrow\; y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2 \;\Rightarrow\; ...$

$F(x,y',y")=0 \;\Rightarrow\; y'=p(x), \qquad F(y,y'y")=0 \;\Rightarrow\; y'=p(y) \;\bigwedge\; y"=\frac{dp}{dy}p.$

Lineaarne võrrand:

$$y^{(n)}+u_1(x)y^{(n-1)}+...+u_{n-1}(x)y'+u_n(x)y=f(x) \;\Leftrightarrow\; Ly=f(x)$$

$$Ly_i\equiv 0\left(i=\overline{1,m}\right)\Rightarrow L\left(\sum_{i=1}^{m}C_iy_i\right)\equiv 0\bigwedge Ly^*\equiv f(x)\Rightarrow L\left(\sum_{i=1}^{m}C_iy_i+y^*\right)\equiv f(x).$$

$$W(y_1,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} Ly_i\equiv 0 \quad (i=\overline{1,n}\;) \\ W(y_1,...,y_n)\neq 0 \\ Ly^*=f(x) \end{matrix} \quad\Rightarrow$$

$y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i$ on võrrandi $Ly=0$ üldlahend ja $y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i+y^*$ on võrrandi

$Ly = f(x)$ üldlahend.

- -

$u_i(x) \equiv a_i$ =const. $\bigwedge$ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \Leftrightarrow Ly = f(x)$,
$Ly = 0 \bigwedge y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Leftrightarrow$ karakt. võrrand,
$y" + a_1 y' + a_2 y = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{D} \quad \bigwedge \quad D = \frac{1}{4}a_1^2 - a_2 \Rightarrow$
$D > 0 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \bigwedge D = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \bigwedge$
$D < 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha + i\beta \Rightarrow y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.
$y" + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right) \Rightarrow$
$y^* = x^r e^{\alpha x}(R_\nu(x)\cos\beta x + S_\nu \sin\beta x)$, kus $\nu = \max(n, m)$ ja $\alpha + i\beta$ on r korda karakteristliku võrrandi lahendiks. $\nu = \max(n, m)$

Ülesanded on võetud A.Lõhmuse, I.Peterseni, H.Roosi "Kõrgema matemaatika ülesannete kogust".
Harjutustunnis:
1151. Näidake, et funktsioon $y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$ on diferentsiaalvõrrandi $x^2 y' + (1 - 2x)\, y = x^2$ lahend.
1156. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi $xyy' + 1 = x^2 - x$ üldlahend.
1167. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi $y' = e^{x+y}$ erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(0) = 0$.
1172. Leidke homogeense diferentsiaalvõrrandi $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ üldlahend.
1191. Leidke lineaarse diferentsiaalvõrrandi $y' - y\cot x = 2x\sin x$ üldlahend.
1196. Leidke lineaarse diferentsiaalvõrrandi $y' = 2(2x - y)$ erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(0) = -1$.
1231. Leidke joon, mis läbib punkti $(-1; 3)$ ning mille puutuja tõus on kaks korda suurem koordinaatide alguspunktist puutepunkti suunduva lõigu suunanurga tangensist.
1253. Leidke diferentsiaalvõrrandi $yy" + y'^2 = y'$ üldlahend.
1256. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' - 7y' + 12y = 0$ üldlahend.
1270. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' = 8y' - 25y$ üldlahend.
1272. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega homogeense diferentsiaalvõrrandi $3y'' - y' = 0$ erilahend, mis rahuldab algtingimusi $y(3) = 1$ ja $y'(3) = 1/3$.
1280. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' + 4y = 2x + 3$ üldlahend.
1306. Leidke diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\dot{x} = 3x - 2y$$
$$\dot{y} = 2x - y$$

üldlahend.

Kodus:
1152. Näidake, et funktsioon $y = x^3/6 - \sin x + C_1 x + C_2$ on diferentsiaalvõrrandi $y'' = x + \sin x$ lahend.
1161. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi $xy' = y(y-1)$ üldlahend.
1168. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi $y^2 y' + 2x = 1$ erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(2) = -1$.
1173. Leidke homogeense diferentsiaalvõrrandi $xyy' = x^2 + y^2$ üldlahend.
1197. Leidke lineaarse diferentsiaalvõrrandi $y' + x(2y - e^{-x^2}) = 0$ algtingimust $y(0) = 1$ rahuldav erilahend.
1236. Leidke joon, mille puutuja tõus on pöördvõrdeline puutepunkti koordinaatide korrutisega.
1246. Leidke diferentsiaalvõrrandi $x^2 y'' = y'^2$ üldlahend.
1257. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega homogeense diferentsiaalvõrrandi $2y'' + 3y' = 2y$ üldlahend.
1266. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' + 9y = 0$ üldlahend.
1290. Leidke teist järku lineaarse konstantsete kordajatega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' + 9y = \sin 3x$ üldlahend.
1307. Leidke diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= e^t + e^{-t} + x \end{aligned}$$

üldlahend.