Besseli võrratus ja Parsevali võrdus

Lause 1. Kui lõigul $[a, b]$ integreeruva ruuduga funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on ortogonaalsel sel lõigul, siis

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

Tõestus. Skalaarkorrutise omaduste ja liidetavate ortogonaalsuse põhjal saame

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle = \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 . \end{aligned}$$

Seega Lause 1 väide on tõene. □

Järeldus 1. Kui funktsioonid $\varphi_k(x)$ $(k = 1; \ldots ; n)$ on paarikaupa ortogonaalsed lõigul $[a, b]$ ja suurused c_k $(k = 1; \ldots ; n)$ on konstandid, siis

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

Olgu lõigul $[a, b]$ antud integreeruva ruuduga funktsioon $f(x)$ ja integreeruva ruuduga ortonormeeritud funktsioonide süsteem $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N})$. Neil tingimustel saame funktsioonile $f(x)$ seada vastavusse tema Fourier' rea selle süsteemi järgi

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

kus kordajad c_k on leitud valemi

$$c_k = \langle f, \varphi_k\rangle = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

põhjal. Selle Fourier' rea esimese n liikme summa

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

on samuti integreeruva ruuduga funktsioon sellel lõigul (miks?) ja Järelduse 1 põhjal

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 . \tag{2}$$

Näitame, et funktsioonid $f(x)-S_n(x)$ ja $S_n(x)$ on ortogonaalsed lõigul $[a,b]$. Selleks piisab (miks?) näidata, et $f(x)-S_n(x)$ on ortogonaalne iga funktsiooniga $\varphi_m(x)$ $(m=1;\ldots;n)$. Näitame:

$$\begin{aligned}\langle f-S_n,\varphi_m\rangle &= \langle f,\varphi_m\rangle-\langle S_n,\varphi_m\rangle = c_m-\left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k,\varphi_m\right\rangle = \\ &= c_m-\sum_{k=1}^{n} c_k\langle\varphi_k,\varphi_m\rangle = c_m-\sum_{k=1}^{n} c_k\delta_{k,m} = \\ &= c_m-c_m=0 \quad (m=0;\ldots;n-1)\,.\end{aligned}$$

Seega Lause 1 ja ahela (2) abil saame

$$\|f\|^2=\|f-S_n\|^2+\|S_n\|^2=\|f-S_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\,.$$

Seega

$$\|f\|^2=\|f-S_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\,, \tag{3}$$

millest iga $n\in\mathbf{N}$ korral

$$\|f\|^2\geq\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\,. \tag{4}$$

Kuna võrratus (4) kehtib iga $n\in\mathbf{N}$ korral, siis ka

$$\|f\|^2\geq\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\,. \tag{5}$$

Võrratus (5) kannab **Besseli võrratuse** nime. Seos (3) annab võimaluse otsustada, millisel tingimusel funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida koondub keskmiselt funktsiooniks endaks. Nimelt

$$\|f-S_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\,.$$

Sõnastame saadud tulemuse.

Lause 2. Lõigul $[a, b]$ integreeruva ruuduga funktsiooni $f(x)$ Fourier' rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

ortonormeeritud integreeruva ruuduga funktsioonide süsteemi $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N})$ järgi koondub sel lõigul normi järgi, funktsiooniks endaks parajasti siis, kui funktsiooni $f(x)$ korral leiab aset Parsevali võrdus

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 . \tag{6}$$

Märkus 1. Nendime, et

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \not\Rightarrow \quad S_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x).$$

Miks?

Märkus 2. Seos (6) võimaldab leida teatud arvridade summasid. Kuidas?

Definitsioon 1. Lõigul $[a, b]$ ortonormeeritud süsteemi $\{\varphi_k(x)\}$ $(k \in \mathbf{N})$, mille korral Parsevali võrdus (6) kehtib iga sel lõigul integreeruva ruuduga funktsiooni korral, nimetatakse **täielikuks süsteemiks** sel lõigul.

Näide 1. Funktsioonide süsteem

$$\left\{1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots\right\}$$

on täielik igal lõigul, mille pikkus on $2l$.

Näide 2. Funktsioonide süsteem

$$\left\{\exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)\right\} \ (n \in \mathbf{Z})$$

on täielik igal lõigul, mille pikkus on $2l$.